

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

на правах рукописи



Хоанг Ван Нгуен

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
СЕТЕПОДОБНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Провоторов Вячеслав Васильевич

Воронеж – 2023

Оглавление

Введение	6
Глава 1 Математическое описание и математические модели сетеподобных процессов и явлений	12
1.1 Математические модели волновых сетеподобных процессов	12
1.1.1 Мачтовая система с одним опорным узлом	12
1.1.2 Мачтовая система с двумя опорными узлами.....	15
1.1.3 Мачтовая система с несколькими опорными узлами.....	17
1.2 Моделирование гидродинамических процессов в сетевых и сетеподобных носителях	19
1.2.1 Ламинарные сетевые гидродинамические процессы	19
1.2.2 Динамика несжимаемой вязкой жидкости в сетеподобных носителях.....	20
1.3 Математические модели гемодинамических процессов в сердечно-сосудистой системе живых организмов	22
1.3.1 Математическое описание гемодинамических процессов	22
1.3.2 Диффузионные процессы гемодинамики.....	22
1.3.3 Математическая модель процесса переноса веществ по сердечно-сосудистой системе при наличии диффузии	25
1.3.4 Волновые процессы в сосудах сердечно-сосудистой системы	26
1.3.5 Другие задачи естествознания на сетях.....	27
1.3.6 Оптимизация сетеподобных процессов.....	28
Выводы	28
Глава 2 Вычислительные методы применительно к моделям сетеподобных процессов и явлений. Дифференциально-разностные схемы	29
2.1 Основные обозначения и понятия	29
2.2 Дифференциально-разностные двухслойные и трехслойные схемы	33
2.2.1 Разностная аппроксимация дифференциальных выражений	33
2.2.2 Дифференциально-разностные двухслойная схема с весом для параболического уравнения.....	35
2.2.3 Дифференциально-разностная трехслойная симметричная схема с весом для параболического уравнения.....	37
2.2.4 Дифференциально-разностные трехслойные несимметричные схемы с весами для параболического уравнения.....	37
2.2.5 Дифференциально-разностные трехслойные схемы с весами для гиперболического уравнения.....	38

2.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем	40
2.3.1 Слабая разрешимость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом для параболического уравнения	40
2.3.2 Слабая разрешимость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом для параболического уравнения	42
2.3.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностных трехслойных несимметричных схем с весами для параболического уравнения	43
2.3.4 Слабая разрешимость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами для гиперболического уравнения	44
2.4 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом для параболического уравнения	46
2.4.1 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы (частный случай)	46
2.4.2 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом	49
2.5 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом для параболического уравнения	51
2.5.1 Корректность дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом	51
2.5.2 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом	52
2.5.3 Слабая разрешимость дифференциальных систем без весов	55
2.6 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных несимметричных схем с весами для параболического уравнения	57
2.6.1 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных несимметричных схем с весами	58
2.6.2 Слабая разрешимость дифференциальной системы без весов	70
2.7 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами для гиперболического уравнения	72
2.7.1 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной схемы (частный случай)	72
2.7.2 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами	75
Выводы	82

Глава 3 Методы оптимизации сетеподобных процессов и явлений	84
3.1 Слабая разрешимость дифференциально-разностной системы для параболического уравнения на графе.....	84
3.1.1 Разложение по собственным функциям эллиптического оператора с пространственной переменной на графе и сетеподобной области	84
3.1.2 Слабая разрешимость параболической системы	84
3.1.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностной системы для параболического уравнения.....	87
3.1.4 Счетная устойчивость дифференциально-разностной двухслойной системы	91
3.2 Оптимизация дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе	92
3.2.1 Дискретная оптимизация дифференциально-разностной системы	92
3.2.2 Условия существования оптимальных управляющих воздействий	96
3.2.3 Оптимизация по стартовым условиям дифференциально-разностной системы.....	98
3.2.4 Оптимизационная задача по распределенным внешним воздействиям дифференциально-разностной системы	101
3.3 Оптимизационная задача для дифференциально-разностной системы с носителями в сетеподобной области	104
3.3.1 Дифференциально-разностная система параболического типа	104
3.3.2 Оптимизационная задача для дифференциально-разностной системы	107
3.3.3 Условия существования оптимальных внешних воздействий на дифференциально-разностную систему	108
3.4 Алгоритм отыскания решения оптимизационных задач.....	111
Выводы.....	111
Глава 4 Анализ задач прикладного характера.....	113
4.1 Алгоритмы построения приближений решений дифференциально-разностных схем.....	113
4.1.1 Алгоритм построения приближений решения дифференциально-разностной двухслойной схемы для параболического уравнения.....	113
4.1.2 Алгоритм построения приближений решения дифференциально-разностной трехслойной схемы для гиперболического уравнения	115
4.2 Структура программного комплекса.....	117
4.3 Численный анализ математических моделей сетеподобных процессов переноса сплошных сред.....	119
4.3.1 Задача переноса по двухсекционной сети.....	119

4.3.2	Задача переноса по звездоподобной трехсекционной сети	122
4.3.3	Задача переноса на двумерной сети с двумя примыкающими секциями	125
4.3.4	Задача переноса на двумерной сети с тремя примыкающими секциями.....	128
4.3.5	Задача переноса на трехмерной сети с двумя примыкающими секциями.....	132
4.3.6	Задача переноса на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями	136
4.4	Численный анализ математических моделей сетеподобных волновых процессов сплошных сред.....	141
4.4.1	Колебания двухсекционной сети	141
4.4.2	Колебания звездоподобной трехсекционной сети.....	143
4.4.3	Колебания двумерной сети с двумя примыкающими секциями.....	145
4.4.4	Колебания двумерной сети с тремя примыкающими секциями	148
4.4.5	Колебания трехмерной сети с двумя примыкающими секциями	151
4.4.6	Колебания трехмерной сети с тремя примыкающими секциями	154
	Выводы.....	157
	Заключение.....	159
	Список литературы	160
	Приложение 1 Численные расчеты прикладных задач.....	169
	Приложение 2 Листинги программ для решения прикладных задач	203
	Приложение 3 Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.....	248

Введение

Актуальность темы. В настоящее время имеется немало теоретических исследований в направлении анализа эволюционных дифференциальных систем (и математических моделей, использующих такие системы), пространственная переменная которых изменяется в сетеподобных одномерных и многомерных областях (работы А. С. Волковой, Ю. А. Гнилицкой, М. Г. Завгороднего, О. А. Махиновой, О. М. Пенкина, С. Л. Подвального, В. В. Провоторова, М. А. Artemov, E. S. Baranovskii, V. A. Yurko [6-12, 21-23, 26, 41-45, 47, 48, 50, 55-59, 62-65, 87, 88, 93, 99]). В указанных работах основные результаты теоретического характера достаточно глубоко освещены, естественным образом возникшие при анализе сложности, связанные с неклассической структурой сетеподобных областей, преодолены. Исследования в направлении численного анализа дифференциальных систем эволюционного типа и математических моделей с их использованием, несмотря на полученную обширную теоретическую базу, имеют немало своих особенностей (и специфику технологического плана, выраженную в составлении конструктивных алгоритмов, комплексов проблемно-ориентированных программ) и пока не приобрели характера систематического изучения (например, работы А. В. Боровских, В. В. Провоторова, С. М. Сергеева, L. N. Borisoglebskaya, V. I. Ryazhskikh, S. L. Podvalny, A. P. Zhabko [2, 52, 54, 61, 69, 89, 90, 95, 98, 100, 101, 103, 106]). Отсюда со всею очевидностью следует: история развития численных методов анализа математических моделей сетеподобных процессов находится в начальной стадии формирования. В настоящей диссертационной работе рассматривается актуальная проблема численного анализа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов. Для математического описания носителей таких процессов используются геометрические графы (одномерные сети) и сетеподобные области (многомерные сети), в приложениях это гидро- и газонефтепроводы, волноводы, а также трубопроводные сети для переноса иных сплошных сред. Для математического описания собственно процессов применяются формализмы начально-краевых задач, построенные на основе использования классических эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными, а также их частичной дискретизации (полудискретизации по временной переменной). Последнее осуществляет переход от дифференциальных к соответствующим дифференциально-разностным системам. Такой переход (редукция) открывает пути численного анализа изучаемых процессов (работы А. С. Волковой, О. А. Махиновой, В. В. Провоторова [6, 42, 44, 45, 58]). Результаты исследования позволяют более глубоко понимать и прогнозировать эволюцию процессов в сетеподобных носителях, что имеет большое практическое значение в различных областях промышленности и экономики.

Актуальность выбранной тематики исследования продиктована необходимостью развития

средств математического описания сетеподобных эволюционных процессов формализмами численных методов анализа (корректная аппроксимация дифференциальных систем дифференциально-разностными, устойчивость дифференциально-разностных схем), разработка и обоснование алгоритмов (сходимость, счетная устойчивость, адаптация к изучаемому типу процессов), формирование программного комплекса проблемно-ориентированных программ с достаточно простым интерфейсом.

Цель работы и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка, обоснование численных средств для анализа моделей эволюционных сетеподобных процессов различного типа, формирование и обоснование алгоритмов для использования в прикладных задачах, где присутствует характерная структурная специфика сложносочлененных сетеподобных объектов, разработка проблемно-ориентированного программного комплекса, адаптированного к решению прикладных задач. Для реализации указанной цели сформулированы следующие **задачи**:

- разработка нового подхода анализа математических моделей эволюционных сетеподобных процессов, основанного на редукции дифференциальной системы к дифференциально-разностной;
- формализация достаточных условий устойчивости дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров;
- формализация достаточных условий непрерывности по исходным данным дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров, корректность дифференциально-разностных схем;
- формализация достаточных условий устойчивости многообразия дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем с весами;
- формализация достаточных условий сходимости многообразия дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем с весами, корректность дифференциально-разностных схем;
- разработка средств оптимизации применительно к дифференциально-разностным системам с пространственным переменным на сетях и сетеподобных областях;
- разработка и обоснование алгоритмов отыскания приближенных решений многомерных задач переноса сплошных сред и задач колебаний упругих континуумов;
- разработка проблемно-ориентированного программного комплекса, адаптированного к решению прикладных задач, с исчерпывающими пояснениями и рекомендациями, сертификация программной продукции для ЭВМ в установленном порядке Российской Федерации.

Объект исследования: математические модели сетеподобных эволюционных процессов и явлений, носители которых по своей структуре аналогичны структуре геометрического графа

(одномерные сети) или структуре сетеподобной области (многомерные сети).

Предмет исследования: численные методы анализа различного типа математических моделей сетеподобных эволюционных процессов и явлений, включающий в себя получение условий устойчивости, непрерывности по исходным данным дифференциальных систем и им соответствующих дифференциально-разностных схем указанных моделей, а также формирование условий существования и единственности решения различного типа оптимизационных задач сетеподобных эволюционных процессов и явлений.

Научная новизна диссертационной работы содержится в следующих результатах:

– разработан новый подход анализа математических моделей различного типа эволюционных сетеподобных процессов, отличительная особенность которого состоит в возможности описания как динамики и неклассических свойств перемещения многофазных сред в сложноструктурированных носителях, так и описании динамики волновых явлений, возникающих в сложноструктурированных носителях;

– разработан новый метод численного анализа дифференциальной системы, отличительной особенностью которого является используемая редукция этой системы к дифференциально-разностной системе;

– сформулированы достаточные условия, гарантирующие разрешимость дифференциальной системы в слабой постановке, отличительной особенностью которых является сохранение свойств определенности исходных дифференциальных операторов при редукции к дифференциально-разностным для широкого класса пространств допустимых решений;

– получены достаточные условия устойчивости дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых и с весовыми параметрами, отличительная особенность которых состоит в общих принципах анализа, которые могут быть распространены на другие случаи;

– указаны достаточные условия однозначной разрешимости различного типа оптимизационных задач для дифференциально-разностных и дифференциальных систем, отличительная особенность которых состоит в решении вопроса оптимальной организации алгоритма получения решения с заданной точностью;

– разработана серия алгоритмов отыскания приближенных решений n -мерных задач переноса сплошных сред и задач колебаний упругих континуумов, проведена серия вычислительных экспериментов, отличительной особенностью которых является максимальная адаптация к задачам прикладного характера;

– разработаны проблемно-ориентированные программные комплексы для анализа и решения прикладных задач.

Практическая значимость. Разработаны новые методы численного анализа

математических моделей сетеподобных эволюционных процессов, учитывающие особенности как носителей сетеподобных процессов, так и сложной реологии переносимых сред. Предложенные методы в достаточной степени адекватности соответствуют изучаемым свойствам реальных процессов и имеют перспективы для широкого использования в различных прикладных направлениях, где наличествуют свойства сетевого характера. Результаты используются в качестве базовой информации для специальных курсов теории оптимизации сетевых гидродинамических процессов, читаемых магистрам математического факультета Воронежского государственного университета, Института математики, механики и информатики Тамбовского государственного университета и слушателям ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж). Результаты могут быть использованы в организациях, практическая деятельность которых ориентирована на решение задач, соответствующих тематике диссертационной работы.

Теоретическая значимость. Результаты исследования являются важным вкладом в развитие теории математического моделирования эволюционных сетеподобных процессов. Разработанный программный комплекс может быть использован на предварительном этапе теоретических исследований для выявления особенностей математического описания различного типа явлений в узловых местах сетевых носителей процессов переноса веществ в сетеподобных системах. Данный комплекс может также использоваться для тестирования моделей переноса крови по кровеносной системе живого организма, что позволяет ускорить теоретические исследования медицинского характера.

Методология и методы исследования. Используются современные разработки вычислительных методов исследования математических моделей, метод полудискретизации по временной переменной, методы теории устойчивости и оптимизации, теории графов, спектральная теория операторов, позволяющие выполнить расчеты и визуализацию полученных результатов в среде PascalABC.NET.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математические методы моделирования сетеподобных эволюционных процессов.
2. Развитие метода полудискретизации начально-краевых задач – метод численного анализа дифференциальной системы, базирующийся на редукции этой системы к более простой для анализа дифференциально-разностной системе и обеспечивающий построение приближений решений исходной системы с любой, наперед заданной точностью.
3. Новые подходы построения устойчивых дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем без весовых параметров и с весовыми параметрами, основанные на изучении свойств спектральных характеристик эллиптических операторов дифференциально-разностных систем в пространствах с энергетической нормой; конструктивные алгоритмы, позволяющие

численно находить приближения состояний для эволюционных дифференциальных систем..

4. Методы оптимизации: выбор множества допустимых внешних воздействий на модель изучаемого процесса, формирование множеств состояний и наблюдений оптимизационной задачи, построение минимизируемого функционала; получение условий однозначной разрешимости, устойчивости по исходным данным различного типа оптимизационных задач, описываемых формализмами дифференциально-разностных систем; конструктивные алгоритмы, позволяющие численно находить приближения оптимальных внешних воздействий и состояний для эволюционных дифференциальных систем.

5. Серия алгоритмов отыскания приближенных решений многомерных задач переноса сплошных сред по сетеподобным носителям и задач колебаний сложноструктурируемых упругих конструкций. Программный комплекс, позволяющий проводить детальный анализ сетеподобных процессов с учетом структурных особенностей носителей процесса.

Достоверность научных положений, результатов и выводов диссертационного исследования обеспечивается публикациями в рецензируемых научных изданиях, (в т. ч. изданиях, рекомендуемых ВАК РФ); сопоставлением полученных результатов с данными ведущих отечественных и зарубежных ученых по научной тематике, родственной тематике диссертационной работы; сравнительным анализом теоретических результатов с результатами вычислительных экспериментов; обсуждениями полученных соискателем результатов на научных конференциях и семинарах; наличием 4 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования представлялись на научных конференциях и семинарах: Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2020, 2021, 2022, 2023 гг.), Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (Воронеж, 2021 г.), Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 2022 г.), семинар профессора А. П. Жабко (Санкт-Петербургский университет, 2021 г.), семинар профессора А. В. Глушко и В. В. Провоторова (Воронежский государственный университет, 2021, 2022 гг.).

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий, 4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Личный вклад. В публикациях, где соискатель является соавтором, лично соискателю принадлежат следующие результаты: [50] – доказательство разрешимости оптимизационной задачи точечного воздействия на течение вязкой жидкости, [75] – доказательство разрешимости дифференциально-разностной системы, [76] – алгоритм построения решения оптимизационной задачи, анализ результатов на примере, [77] – получение условий положительности и симметричности конечномерного аналога дифференциального оператора, [97] – формулировка и анализ примера счетной устойчивости дифференциально-разностной системы с переменной, изменяющейся на графе-звезде, [101] – формулировка и анализ слабого решения параболической системы, определенной на сетеподобной области, [95] – доказательство единственности решения оптимизационной задачи для дифференциально-разностной системы, [100] – постановка оптимизационной задачи, алгоритм определения решения, [71-73] – разработан алгоритм и программа решения тестовых задач.

Публикации. Научные результаты диссертационного исследования опубликованы в 18 рецензируемых научных изданиях: 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [50, 75-77], 4 статьи в изданиях входящих в базу цитирования Scopus [97, 101, 95, 100], 6 статей в материалах трудов научных конференций [78-83], получено 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [70-73].

Структура и объем диссертационной работы. Текст диссертационного исследования включает в себя введение, четыре главы, заключение, список цитируемых источников и три приложения. Текст исследования занимает 251 страниц, содержащих 33 рисунков и 78 таблиц. Список цитируемых источников состоит из 106 работ.

Глава 1 Математическое описание и математические модели сетеподобных процессов и явлений

Данная глава посвящена представлению подходов, ориентированных на использование классических математических формализмов при описании процессов и явлений в сетевых носителях. Центральной идеей, определяющей все представляемые подходы, состоит в замене классических постановок краевых и начально-краевых, с достаточной степенью адекватности учитывающих особенности и свойства непрерывных решений таких задач для описания «спокойных» физических явлений с «простой» внутренней структурой, на обобщенные постановки указанных задач, когда физические процессы предопределяли природные особенности, аналогичные, например, эффектам разрывов на фронте движения плоских и сферических волн (волновые уравнения), а также ударным явлениям в гидродинамике [25, 27, 30, 33, 34, 36, 38, 94]. Ниже приводятся примеры математических моделей в несколько упрощенной постановке.

1.1 Математические модели волновых сетеподобных процессов

Рассмотрим антенные объекты, конструктивная структура которых представляют собой совокупность упругих фрагментов, сочлененных попарно между собой местами, являющимися частью границ фрагментов. Если эти фрагменты одномерные или их линейные размеры много превосходят размеры поперечных сечений (в этом случае размеры поперечных сечений не влияют на качественную картину волновых явлений в этом объекте), тогда математическое описание такой конструкции удобно осуществлять формализмами геометрического графа. Волновые же процессы естественно описывать с помощью начально-краевых или краевых задач [11, 14, 16], пространственная переменная которых изменяется на графе [1, 51, 52, 65, 102]. Если же размеры поперечных сечений приносят достаточно существенное влияние на волновой процесс, тогда упомянутые начально-краевые или краевые задачи надлежит рассматривать на сетеподобных областях, иными словами пространственная переменная 1) является многомерной (в приложениях – трехмерной), и 2) фрагменты таких областей являются подобластями, область является связной, места попарного примыкания подобластей являются поверхностями и частями своих границ [60, 98, 101, 106] (см. также [74-76, 82]).

Представление таких моделей начнем на примерах мачтовых антенных конструкциях.

1.1.1 Мачтовая система с одним опорным узлом

Упругая антенная конструкция состоит из собственно антенны (тело мачты) и поддерживающих ее совокупности растяжек. Считая, что тело мачты имеет линейные размеры,

много превышающие размеры площади своего поперечного сечения, а растяжки, очевидно, также характеризуются сходным свойством, математическая модель формируется с использованием топологии геометрического графа-звезды с одним узлом – местом сочленения ребер графа (см. рис. 1.1).

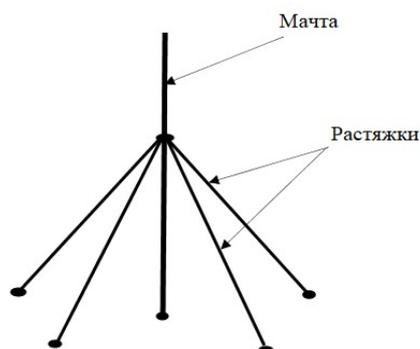


Рис. 1.1. Мачтовая система с одним опорным узлом

При математическом описании волновых процессов и явлений в этом объекте мы придерживаемся следующих условий:

- все линейные фрагменты объекта (линейные фрагменты мачты и растяжки) будут обозначаться символом γ (при необходимости эти фрагменты нумеруются),
- место крепления растяжек к телу мачты обозначается символом ξ ,
- мачтовый фрагмент, находящийся выше месторасположения места ξ , отсутствует, ему ставится в соответствие массовая нагрузка M , приложенная к месту ξ ,
- колебательные процессы во всех растяжках являются малыми поперечными колебаниями.
- колебательные процессы во всех мачтовых фрагментах осуществляются только вдоль осевых линий фрагментов.

Естественность последнего условия подтверждается как имитационными экспериментами, так и традиционными расчетами при проектировании антенных объектов такого типа. Везде далее символами γ и ξ будут обозначаться ребра и узлы графа Γ , соответственно.

Формируя математическое описание колебательного процесса представленного объекта, естественным образом используется классические уравнения колебаний сплошной среды, дополненные математическим описанием волновых явлений в месте крепления растяжек к телу мачты ξ – условиями взаимодействия тела мачты и растяжек между собой.

Как сказано выше, математической интерпретацией антенной конструкции мачтового типа является геометрический граф-звезда [56, 93], обозначаемый через Γ , имеющему m ребер

$\gamma_k (k = \overline{1, m-1})$, ориентация и параметризация каждого ребра $\gamma_k (k = \overline{1, m-1})$ осуществляется отрезком $[0, \pi/2]$, а ребра γ_m – отрезком $[\pi/2, \pi]$; узел ξ (место крепления растяжек к телу мачты) параметризовано числом $\pi/2$. Используемая параметризация ребер преследует только цель упрощения математических выкладок и не доставляет ограничений для анализа. Если, к примеру, все растяжки имеют длину ℓ , а тело мачты длину L , тогда замена $x = \frac{\pi}{2\ell} \tilde{x}$, $y = \frac{\pi}{2L} (\tilde{y} + L)$, где $\tilde{x} \in [0, \ell]$, $\tilde{y} \in [0, L]$, приводит к $x \in [0, \pi/2]$, $y \in [\pi/2, \pi]$.

Начально-краевая задача для функции $\Theta(x, t)$, $x, t \in \Gamma \times [0, T]$, задается уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k} - q(x)_{\gamma_k} \Theta(x, t)_{\gamma_k}, \quad (1.1)$$

во внутренних точках ребер $\gamma_k (k = \overline{1, m})$ и соотношениями в месте сочленения ребер, т. е. узле ξ [52, 54]):

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad (k = \overline{1, m-1}), \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

при условии отсутствия влияния на волновой процесс массовой нагрузки M фрагмента мачты, расположенного выше места ξ . Соотношения (1.2) изменятся на

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= -F(t), \end{aligned}$$

если массу M следует учитывать; $F(t)$ – сосредоточенная в ξ сила. Например, если $F(t)$ сила

инерции $F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}$, тогда

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В последующих рассуждениях масса M учитывается.

Вводя начальные условия

$$\Theta(x, 0) = \tilde{\tau}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta(x, 0) = \hat{\tau}(x), \quad (1.4)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Theta(0, t)_{\gamma_k} - h \Theta(0, t)_{\gamma_k} &= \mu_k(t) \quad (k = \overline{1, m-1}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \Theta(\pi, t)_{\gamma_m} + H \Theta(\pi, t)_{\gamma_m} &= \nu(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

получим начально-краевую задачу (1.1), (1.3) – (1.5) (или (1.1), (1.2), (1.4), (1.5)) с заданными функциями $\tilde{r}(x)$, $\hat{r}(x)$, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ и фиксированными постоянными h , H . Таким образом, начально-краевая задача (1.1), (1.3) – (1.5) (или (1.1), (1.2), (1.4), (1.5)), $x, t \in \Gamma \times (0, T)$ является математической моделью волнового процесса в конструкции одноуровневой антенной системы «мачта – растяжки».

В каноническом виде (1.1), (1.3) (или (1.1), (1.2)) можно представить и уравнения вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial}{\partial x} (a(x) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t)_{\gamma_k}) - b(x)_{\gamma_k} \Phi(x, t)_{\gamma_k}, \quad (1.6)$$

вместе с соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ a(x)_{\gamma_m} \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} a(x)_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} - \\ - Mb\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m} &= M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

в ξ , где $a(x) > 0$, $b(x) > 0$, $x \in \Gamma$, если $a(x) \in C^1[\Gamma]$, $b(x) \in C[\Gamma]$ подстановкой вида

$$z(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} d\zeta, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}} d\zeta, \quad \Theta(z, t) = \sqrt[4]{a(x)} \Phi(x, t).$$

Соотношения (1.6), (1.7) редуцируются к виду (1.1), (1.3), при этом $\Phi(x, t)$ заменяется на $\Theta(z, t)$, x заменяется переменной z , а $q(z)$ представляется в виде соотношения

$$q(z) = \frac{d^2}{dz^2} (\sqrt[4]{a(x)}) - c^2 b(x),$$

для $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta(z, t)_{\gamma_k}$ в уравнении (1.6) появится коэффициент c , соотношения (1.4), (1.5) не изменятся.

1.1.2. Мачтовая система с двумя опорными узлами

Для такой антенной конструкции предполагается наличие двух мест креплений растяжек к телу мачты, которые обозначим через ξ_1 и ξ_2 (рис. 1.2). Все обозначения и понятия, принятые в пункте 1.1.1 сохраняются, исключая только тип геометрического графа, который будет

представлять собой граф-цепочку Γ , состоящей из двух звезд Γ_1, Γ_2 и им соответствующим узлам ξ_1, ξ_2 и ребрам γ_k^ℓ ($k = \overline{1, m_\ell}$, $\ell = 1, 2$). Параметризация и ориентация на звездах Γ_1, Γ_2 аналогична введенной в пункте 1.1.1. А именно, ребра γ_k^ℓ ($k = \overline{1, m_\ell - 1}$, $\ell = 1, 2$) параметризованы отрезками $[(\ell - 1)\pi/2, \ell\pi/2]$ ($\ell = 1, 2$), а ребра $\gamma_{m_\ell}^\ell$ ($\ell = 1, 2$) – параметризованы отрезками $[\ell\pi/2, (\ell + 1)\pi/2]$ ($\ell = 1, 2$).

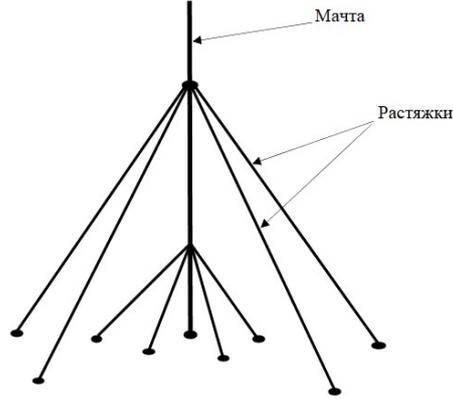


Рис.1.2. Мачтовая система с двумя опорными узлами

Как сказано в пункте 1.1.1, представленная параметризация для двухуровневой антенной конструкции не является единственной, возможны иные варианты, удобные для приложений.

Сформулируем начально-краевую задачу по аналогии с задачей (1.1), (1.3) – (1.5) (или (1.1), (1.2), (1.4), (1.5)), которая задается при $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell} - q(x)_{\gamma_k^\ell} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell}, \quad \forall \gamma_k^\ell \quad (k = \overline{1, m_\ell}, \ell = 1, 2), \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^2} &= \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_2}^2}, \quad k = \overline{1, m_2 - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Theta(\pi, t)_{\gamma_{m_1}^1} + \sum_{k=1}^{m_2-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta(\pi, t)_{\gamma_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \Theta(\pi, t)_{\gamma_{m_2}^2}, \end{aligned} \quad \text{в } \xi_1, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} &= \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - q\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} &= -F(t), \end{aligned} \quad \text{в } \xi_2,$$

или, учитывая представление $F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}$ сосредоточенной силы,

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}. \quad \text{в } \xi_2, \quad (1.10)$$

Как и в предыдущем случае начальные ($x \in \Gamma$, $t = 0$, см. (1.4))

$$\Theta(x, 0) = \tilde{\tau}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta(x, 0) = \hat{\tau}(x), \quad (1.11)$$

и граничные ($x \in \partial\Gamma$, $t \in [0, T]$, см. (1.5))

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta((\ell-1)\pi/2, t)_{\gamma_k^\ell} - h_\ell \Theta((\ell-1)\pi/2, t)_{\gamma_k^\ell} = \mu_k^\ell(t),$$

($k = \overline{1, m_\ell - 1}, \ell = 1, 2$)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(3\pi/2, t)_{\gamma_{m_2}^2} + H \Theta(3\pi/2, t)_{\gamma_{m_2}^2} = \nu(t); \quad (1.12)$$

условия остаются неизменными; функции $\tilde{\tau}(x)$, $\hat{\tau}(x)$, $\mu_k^\ell(t)$, $\nu(t)$ и постоянные h_ℓ , H заданы.

Сформирована математическая модель волнового процесса в конструкции двухуровневой антенной системы «мачта – растяжки», описанная полученными соотношениями (1.8) – (1.12).

1.1.3. Мачтовая система с несколькими опорными узлами

Математическое описание такой механической конструкции аналогично представленным выше, поэтому приведем здесь только основные фрагменты рассуждений.

Считаем, что конструкция имеет L опорных узлов (рис. 1.3) и мачтовый фрагмент над опорным узлом ξ_L имеет массу M . Для описания используется граф Γ , представляющий собой

цепочку из L графов-звезд Γ_ℓ ($\ell = \overline{1, L}$): $\Gamma = \bigcup_{\ell=1}^L \Gamma_\ell$.

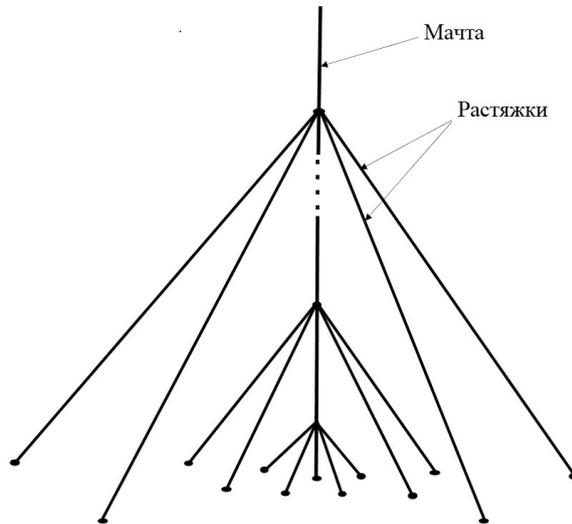


Рис. 1.3. Мачтовая система с несколькими опорными узлами

Введем следующие обозначения: каждая ℓ -я ($\ell = \overline{1, L}$) звезда Γ_ℓ имеет узел ξ_ℓ и ребра γ_k^ℓ ($k = \overline{1, m_\ell}$), при этом $\gamma_{m_\ell}^\ell$ ($\ell = \overline{1, L-1}$) являются ребрами двух соседних узлов ξ_ℓ и $\xi_{\ell+1}$ для Γ_ℓ и $\Gamma_{\ell+1}$, соответственно. Параметризация и ориентация ребер аналогична указанным в предыдущих пунктах: для γ_k^ℓ ($k = \overline{1, m_\ell - 1}$) определен отрезок $[(\ell-1)\pi/2, \ell\pi/2]$, для $\gamma_{m_\ell}^\ell$ определен отрезок $[\ell\pi/2, (\ell+1)\pi/2]$ ($\ell = \overline{1, L}$), для ξ_ℓ определено число $\ell\pi/2$ ($\ell = \overline{1, L}$).

Изменение амплитуд $\Theta(x, t)$ колебательного процесса описывается для $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ уравнениями По аналогии с предыдущим для функции $\Theta(x, t)$, $x, t \in \Gamma \times [0, T]$ ставится начально-краевая задача

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell} - q(x)_{\gamma_k^\ell} \Theta(x, t)_{\gamma_k^\ell}, \quad \forall \gamma_k^\ell (k = \overline{1, m_\ell}, \ell = \overline{1, L}), \quad (1.13)$$

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^\ell} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_\ell}^\ell}, \quad k = \overline{1, m_\ell - 1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\ell \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_\ell-1}^\ell} + \sum_{k=1}^{m_\ell-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\ell \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^\ell} = \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\ell \frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_\ell}^\ell}. \quad \text{для } \xi_\ell, \ell = \overline{1, L-1}, \quad (1.14)$$

и

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - q\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} = -F(t), \quad \text{для } \xi_\ell, \ell = L,$$

или, учитывая $F(t) = -M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_L}^1}$,

$$\Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad k = \overline{1, m_1 - 1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} - \sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k^1} - Mq\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_{m_1}^1} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1} = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Theta\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_{m_1}^1}, \quad (1.15)$$

$$\Theta(x, 0) = \tilde{\tau}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta(x, 0) = \hat{\tau}(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left((\ell-1)\pi/2, t\right)_{\gamma_k^\ell} - h_\ell \Theta\left((\ell-1)\pi/2, t\right)_{\gamma_k^\ell} = \mu_k^\ell(t),$$

$$(k = \overline{1, m_\ell - 1}, \ell = \overline{1, L}), \quad (t \in [0, T]), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta\left((L+1)\pi/2, t\right)_{\gamma_{m_L}^L} + H \Theta\left((L+1)\pi/2, t\right)_{\gamma_{m_L}^L} = \nu(t),$$

функции $\tilde{\tau}(x)$, $\hat{\tau}(x)$, $\mu_k^\ell(t)$, $\nu(t)$ и постоянные h_ℓ , H заданы. Сформирована математической модель волнового процесса в конструкции L уровневой антенной системы «мачта – растяжки», описанная полученными соотношениями (1.13) – (1.17).

1.2. Моделирование гидродинамических процессов в сетевых и сетеподобных носителях

В настоящем разделе представлены математические модели ламинарных и турбулентных гидродинамических процессов, имеющих место в сетевых или сетеподобных носителях (в том числе магистральных трубопроводах) [50, 98, 101]. Дифференциальные операторы, используемые в описании математической модели, определяются в пространствах функций, суммируемых на сетеподобном носителе.

1.2.1. Ламинарные сетевые гидродинамические процессы

В качестве математической модели носителя гидродинамического процесса используется геометрический граф, обладающий свойствами связности, ограниченности (рис. 1.4). Обозначения полностью соответствуют используемым в пунктах раздела 1.1, добавляются лишь некоторые: через γ_0 с добавленным нулевым индексом будем обозначать ребра, у которых отсутствуют концевые точки, тогда Γ_0 есть объединение всех таких ребер: $\Gamma_0 = \bigcup \gamma_0$, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ [50, 100].

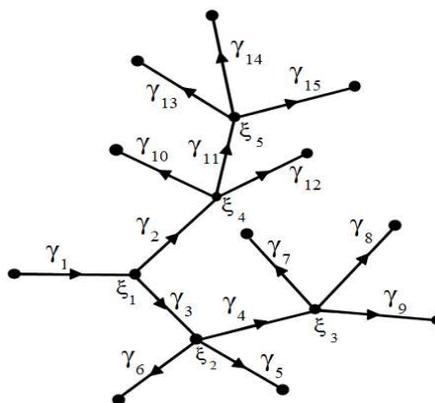


Рис. 1.4. Носитель ламинарного процесса

Для математического описания нам потребуются пространства соолевского типа:

$L_p(\Gamma)$ ($p = 1, 2$) – пространство, элементами которого являются измеримые на множестве Γ_0 действительные функции $u(x)$, интегрируемые по Лебегу: $\int_{\Gamma_0} u(x) dx < \infty$, $\int_{\Gamma_0} u^2(x) dx < \infty$;

$L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство, элементами которого являются $u(x, t) \in L_1(\Gamma_T)$, при этом

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt .$$

Подобно тому, как это сделано в п. 1.2.1, для уравнения

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \quad x,t \in \Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T), \quad (1.18)$$

сформулируем начально-краевую задачу относительно функции $y(x,t)$ (в дальнейшем – состояние системы, описываемой эволюционным уравнением (1.18) с пространственной переменной, изменяющейся на графе), для которой определены начальные

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.19)$$

и краевые

$$y|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.20)$$

условия, а также внешние воздействия $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$. Фиксированные коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ – элементы пространства $L_2(\Gamma)$, причем

$$a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0,$$

($a_* = \text{const} > 0$, $a^* = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$ заданы).

Начально-краевая задача (1.18) – (1.20) рассматривается в специальном пространстве $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$, элементы которого включают в себя информацию о закономерностях протекания вязкой жидкости в местах ветвления гидроносителя (т. е. в узлах ξ), полное описание пространства $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ представлено в разделе 2.1 главы 2. Задача (1.18) – (1.20) формирует математическую модель ламинарного процесса течения вязкой жидкости в сетевом гидроносителе.

1.2.2. Динамика несжимаемой вязкой жидкости в сетеподобных носителях

Под сетеподобным носителем потока вязкой жидкости нами понимается область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ (\mathbb{R}^3 – трехмерное евклидово пространство), внутренняя структура которой определена по принципу структуре связного геометрического графа (п. 1.3.1) и \mathfrak{S} включает в себя подобласти \mathfrak{S}_k , которые попарно примыкают друг к другу определенными частями своих границ $\partial\mathfrak{S}_k$. Эти части границ являются поверхностями примыкания и обозначены S_l , таким образом $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k \bigcup_l S_l$. Отметим, что места примыкания подобластей являются трехмерными аналогами узлов графа (рис. 1.5) и для них остаются обозначения ξ , термин «узел» заменяется на «узловое место».

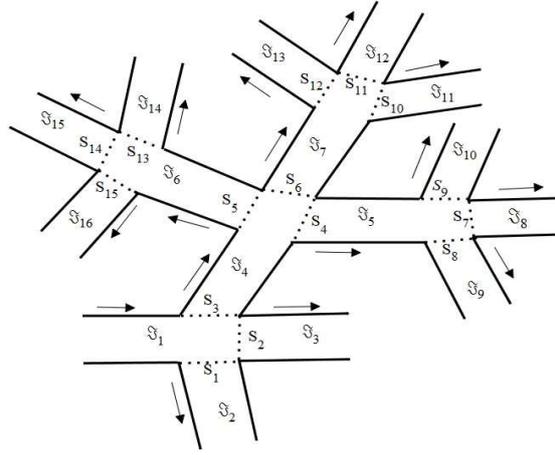


Рис. 1.5. Сетеподобный гидроноситель

Для удобства представления теоретических исследований будем рассматривать произвольный n -мерный случай (см. раздел 2.1 главы 2). Введем n -мерную векторную функцию $Y(x, t) = \{y_1(x, t), y_2(x, t), \dots, y_n(x, t)\}$, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathfrak{T}_T = \mathfrak{T} \times (0, T)$ (в случае $n=3$ $Y(x, t)$ описывает количественные характеристики скоростей жидкости) и следующие обозначения:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial t} \right\},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right\}, \quad \Delta Y = \{\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n\},$$

Δ – оператор Лапласа.

В области $\bigcup_k \mathfrak{T}_k \times (0, T)$ рассмотрим эволюционную систему уравнений Навье-Стокса для пары $Y(x, t)$, $p(x, t)$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f - \text{grad } p, \quad (1.21)$$

$$\text{div} Y = 0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (1.22)$$

совместно с соотношениями в узловых местах

$$Y|_{S_l^-} = Y|_{S_l^+}, \quad (1.23)$$

$$\sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-} |_{S_l^-} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+} |_{S_l^+} = 0, \quad (1.24)$$

в работах [106] (см. также [75, 76]) такие соотношения называются условиями примыкания, а S_l^- , S_l^+ означают односторонние поверхности, относящиеся к поверхности S_l , через n_l^- , n_l^+ обозначены внешние нормали для S_l^- , S_l^+ (для трехмерного случая система Навье-Стокса (1.21),

(1.22) описывает переток несжимаемой жидкости с вязкостью $\nu > 0$ [36, 38] по сетеподобному носителю [98]). Для соотношений (1.21) – (1.24) определим также следующие условия:

$$Y(x, 0) = Y_0(x), \quad x \in \mathfrak{S}, \quad (1.25)$$

$$Y|_{\partial\mathfrak{S}} = 0. \quad (1.26)$$

Начально-краевая задача (1.21) – (1.26) рассматривается в специальном пространстве $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, элементы которого включают в себя информацию о закономерностях протекания вязкой жидкости в местах ветвления гидроносителя (т. е. соотношения (1.23), (1.24) в узловых местах ξ), полное описание пространства $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, представлено в разделе 2.1 главы 2. Задача (1.21) – (1.26) формирует математическую модель турбулентного процесса течения вязкой жидкости в сетевом гидроносителе.

1.3. Математические модели гемодинамических процессов в сердечно-сосудистой системе живых организмов

1.3.1. Математическое описание гемодинамических процессов

Носителем гемодинамических процессов человека является совокупность кровеносных сосудов – сердечно-сосудистая система (ССС). Схематически ее можно представить как разветвленный связный граф-дерево (граф-дерево не имеет циклов или петель). В настоящее время существует достаточно обширная литература, посвященная моделированию всевозможных процессов проходящих в ССС или ее фрагментах [3, 32, 66]. Остановимся на некоторых из них, допускающих формальное описание в терминах математических выражениях, прежде всего, дифференциальных уравнений. При этом мы используем формализмы эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными, а именно уравнения диффузии.

1.3.2. Диффузионные процессы гемодинамики

На рис. 1.6 представлен фрагмент ССС, т. е. геометрический граф, на котором для упрощения технических выкладок, не учитывая эффекты эластичности стенок сосудов и физические различия их толщин, в одномерной аппроксимации рассматриваются так называемые гемодинамические соотношения [3, 13]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_{mp} + F_e, \quad (1.28)$$

$$S = S(p), \quad (1.29)$$

где использованы следующие обозначения: S – сосудистая площадь сечения, ортогонального направлению потока, $u(x,t)$ – скорость кровотока, $p(x,t)$ – внутреннее давление в ССС, $\rho = const$ – усредненная плотность кровотока.

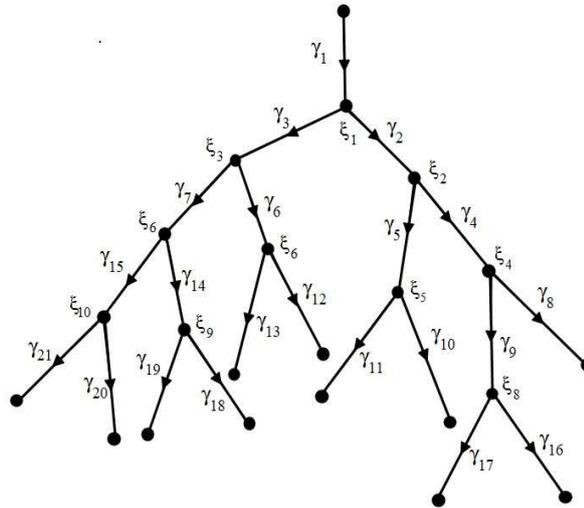


Рис. 1.6. Схема графа ССС

Эмпирическая формула, устанавливающая реологию и изменение силы трения F_{mp} потока вблизи со стенкой сосуда определяется соотношением $F_{mp} = -8\pi\nu u / S$, ν – коэффициент вязкости крови, F_e – равнодействующая внешних воздействий на поток.

Соотношение (1.29) $S = S(p)$ определяется как уравнение состояния ССС и устанавливает в силу соотношений (1.27), (1.28) связь сечения $S(x,t)$ и давления $p(x,t)$, причем выполняется условие $\frac{dS(p)}{dp} \geq 0$, а также $S(p) \rightarrow S_{max}$, если $p \rightarrow +\infty$ и $S(p) \rightarrow S_{min}$, если $p \rightarrow -\infty$, через S_{min} обозначено минимальное сечение сосуда, через S_{max} обозначено максимальное сечение фрагмента сосуда. Учитывая сказанное, приходим к следующим соотношениям:

$$S(p) = S_{max} \text{ при } p > p_{max},$$

$$S(p) = S_{min} + \frac{S_{max} - S_{min}}{p_{max} - p_{min}} (p - p_{min}) \text{ при } p_{min} \leq p \leq p_{max},$$

$$S(p) = S_{min} \text{ при } p < p_{min}.$$

Следует отметить при этом, что постоянные S_{min} , S_{max} , p_{min} , p_{max} изменяются и принимают различные числовые значения в зависимости от состояния фрагментов сосуда.

Одна из актуальных задач гемодинамики состоит в прогнозировании транспортировки определенных веществ (медицинских препаратов, солей и пр.) по ССС. При этом важно понимать и количественно оценивать влияние химических соединений (т. е. лекарственных препаратов) на эластический характер сосудов.

Рассмотрим математическую модель кровотока, учитывая свойство эластичности сосудов ССС. Введем следующие обозначения: через $u_k = u_k(x, t)$ обозначим скорость кровотока в k -м сосуде ССС, сечение k -го сосуда обозначим через $S_k = S_k(x, t)$, величины $u_k = u_k(x, t)$, $S_k = S_k(x, t)$ считаем априори известными, система (1.27) – (1.29) характеризует количественные изменения показателей кровотока.

Далее концентрацию фиксированного l -го вещества определим соотношением $C_l = \frac{m_l}{m}$ ($l = \overline{1, l_C}$), m_l , m – массы l -го вещества и крови, соответственно. Тогда $C_l \equiv C_l(x, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} + u \frac{\partial C_l}{\partial x} = 0.$$

Соотношение $W_D = -D \frac{\partial C}{\partial x}$, D – коэффициент диффузии, определяет плотность вещества в крови при условии наличия диффузионного эффекта. Приходим к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(SCu - SD \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0.$$

Учитывая соотношение (1.27) и считая $D = const$, полученное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{D}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0.$$

Проведем следующее преобразование:

$$\frac{D}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial C}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Учитывая соотношение $\left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) = \frac{1}{c^2}$ (c – скорость влияния возмущений на процесс) и априорное предположение квазистационарности кровотока, получим из соотношения (1.28) достаточно точное равенство

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -8\pi\nu \frac{u}{S}.$$

Используя полученное равенство в соотношении (1.30), приходим приближенному равенству

$$D \left(\frac{\rho}{S} \frac{\partial S}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \approx -8\pi\nu D \frac{1}{c^2} \frac{u}{S} \frac{\partial C}{\partial x} = -8\pi\nu D \frac{1}{Sc} M \frac{\partial C}{\partial x},$$

$M \ll 1$ – число Маха, S – ограничена снизу. Отсюда следует, что для получения количественных характеристик диффузионных свойств гемодинамического потока имеет место уравнение относительно функции $C(x, t)$, описывающую концентрацию вещества в крови:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0.$$

1.3.3. Математическая модель процесса переноса веществ по сердечно-сосудистой системе при наличии диффузии

В этом пункте рассматривается фрагмент графа ССС (рис. 1.7) для формирования применительно к нему математической модели актуальной задачи переноса лекарственного препарата из места введения в определенный сосуд ССС до объекта медицинского воздействия. Используется приведенное выше математическое описание графа ССС.

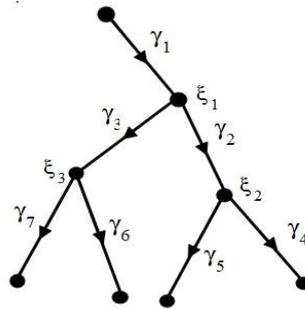


Рис. 1.7. Фрагмент графа ССС

Закономерности диффузионного процесса при осуществлении переноса лекарственного препарата веществ моделируются эволюционным уравнением переноса

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(SCu - SD \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0, \quad x, t \in \Gamma \setminus (\partial\Gamma \cup J(\Gamma)) \times (0, T),$$

относительно функции $C(x, t)$, описывающей уровень концентрации препарата в кровотоке (п. 1.3.2). Соотношения

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} S_{\gamma_j} \left((C(1, t)u(1, t))_{\gamma_j} - D \frac{\partial C(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \right) = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} S_{\gamma_j} \left((C(0, t)u(0, t))_{\gamma_j} - D \frac{\partial C(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} \right),$$

в узлах $\xi \in J(\Gamma)$ фиксируют свойство сохранения равенства потоков в местах ветвления сосудов ССС, а соотношения:

$$C(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$C(x, t)|_{x \in \Gamma} = \phi(x), \quad t \geq 0,$$

указывают на характер и структуру начальных и краевых условий, соответственно; функции $\varphi(x)$, $\phi(x)$ фиксированы.

Система (1.21) – (1.26) формирует математическую модель переноса лекарственных препаратов в ССС, при этом функция $C(x, t)$ скалярная, если препарат одного типа и векторная, если препаратов несколько и они разнотипны.

1.3.4. Волновые процессы в сосудах сердечно-сосудистой системы

Движение кровотока по кровеносной системе живого организма осуществляется посредством наличия внутреннего давления в системе, которое формируется непрерывно работающей мышцей сердца. Динамические и кинематические особенности сердечной мышцы таковы, что формирование внутреннего давления имеет пульсовый характер и, как следствие, генерируются волновые эффекты в кровотоках. Форма и интенсивность волновых явлений в сердечно-сосудистой системе – один из основных показателей ее работоспособности. Анализ математических моделей, обеспечивающих адекватное описание динамики кровотоков, позволяет обнаруживать отклонения от норм работоспособности сердечной мышцы.

Математическое описание перемещаемого потока крови в системе ССС использует формализмы эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными, где функции $p(x, t)$ и $M(x, t)$ (здесь x – пространственная переменная, t – временная переменная) устанавливают количественные характеристики внутреннего давления и массового расхода в системе ССС. Ниже представлено математическое описание волнового процесса ССС без учета реакции эластичных стенок сосудов [3]:

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial M}{\partial t} + GM + F, \\ -\alpha \frac{\partial p}{\partial t} &= v^2 \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

где через $\alpha \equiv \alpha(x, t)$ обозначена площадь поперечного сечения произвольного сосуда, функции $G \equiv G(x, t)$, $F \equiv F(x, t)$, $v \equiv v(x, t)$ характеризуют количественные показатели гидравлического сопротивления кровотока, скорости и амплитуд пульсовых волн; функции $p \equiv p(x, t)$, $M \equiv M(x, t)$ характеризуют количественные показатели давления и массового расхода крови в кровотоке при произвольных значениях x, t .

Соотношения (1.31) можно преобразовать так, чтобы получить классическое эволюционное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\alpha}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(GM)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \quad (1.32)$$

(при достаточно частом встречающемся случае $\alpha(x,t) = \alpha$, $v(x,t) = v$, $\alpha, v - const$), которое удобно своими возможностями применения к нему методов анализа уравнений с параметрами, распределенными на пространственных сетях, если $p(x,t)$ и $M(x,t)$ обладают необходимыми производными [3]. Если же рассмотреть случай, когда $M(x,t)$ известна, например, существуют данные статистики, тогда соотношение (1.32) представляет собой дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной функции $p(x,t)$, определение которой не представляет труда. Так как это уравнение 2-го порядка, то искомая функция $p(x,t)$ наливает волновой характер в качестве основного свойства.

1.3.5. Другие задачи естествознания на сетях

Многие биологические процессы характерны своей отличительной особенностью – они развиваются в сетеподобных биологических носителях. К таковым относятся метаболические процессы клеточного уровня развития, прежде всего, всевозможные типы химических реакций, в рамках которых осуществляется обмен питательными элементами между клетками организма, а также вывод продуктов жизнедеятельности – так называемый клеточный метаболизм, осуществляемый на разветвленной сети метаболического процесса [46, 66]. Построение математических моделей такого процесса определяет одну из важных компонент исследовательской деятельности, направленной на изучение биологических свойств живого организма, используя при этом основы теории дифференциальных уравнений на сетях в биофизике и биоинформатике [66]. Очевидной является проблема построения математического аналога структуры организации сети метаболизма, получение закономерностей организации этой сети, разработка регуляторных инвариантов, которые на достаточно высоком уровне адекватности обеспечивают описание гомеостаза в данных сетеподобных метаболических процессах. Математической базой для описания этого являются эволюционные уравнения диффузии.

Следует отметить, что в экономической сфере, а именно, при глубоком анализе процессов, происходящих в ритейлеровских сетях регионов, имеющих характер единой маркетинговой подчиненности, также наличествуют диффузионные явления [101]. Последнее дает возможность указать пути моделирования и последующего анализа упомянутых процессов. Происходят и в региональных ритейлеровских сетях, подчиненных единой маркетинговой и дистрибьюторской политике [89, 91].

1.3.6. Оптимизация сетеподобных процессов

Исследования в области оптимизации сетеподобных процессов необходимо используют результаты анализа математических моделей этих процессов, тесно связанных с получением условий разрешимости краевых или начально-краевых задач, лежащих в основе представления моделей этих процессов [4, 5, 28, 29]. Именно поэтому изучению данного вопроса (поиску условий разрешимости указанных выше задач) уделяется первостепенное внимание. В главах 2 и 3, 4 представлены достаточно развитые методы и подходы к постановке и решению граничных задач, характерных для математического описания сетеподобных физических, биологических, и экономических систем. Приведенные примеры главы 4 иллюстрируют возможности этих методов.

Постановка и решение оптимизационных задач представлены достаточно развитыми методами и подходами разделов 3.2 и 3.3 главы 3, ориентированными на оптимизационные задачи, характерные для сетеподобных физических, биологических, и экономических систем. Рассмотрены оптимизационные задачи, для которых используются формализмы графа и сетеподобных областей в зависимости от типа и вида прикладных задач.

Выводы

1. Представлены математические модели системы «мачта – растяжки» (одно-, двух-, многоуровневая система).
2. Представлены подходы и методы моделирования сетеподобных физических процессов, иллюстрированные конкретными примерами, ориентированными на практическое использование.
3. Представлена технология математического описания с помощью формализмов уравнений переноса сплошных сред и уравнений колебаний различного типа сетеподобных физических явлений и процессов. При этом отмечена отличительная особенность решения краевых и начально-краевых задач для таких уравнений – отсутствие у этих решений гладкости (т. е. существования классической производной) и для некоторых случаев непрерывности по пространственной переменной.
4. Описаны иные задачи естествознания на сетях и подходы для анализа оптимизационных задач.

**ГЛАВА 2 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МОДЕЛЯМ СЕТЕПОДОБНЫХ ПРОЦЕССОВ
И ЯВЛЕНИЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ**

Результаты данной главы являются обоснованием численных методов анализа математических моделей эволюционных сетеподобных процессов. Для получения этих результатов вводятся математические формализмы в виде функциональных пространств с необходимыми свойствами, индуцированными закономерностями указанных процессов. Основываясь на классических подходах теории численного анализа, предлагается развитие последних, используя главную особенность сетеподобной области изменения пространственной переменной – сетевая структура такой области обуславливает замену на поверхностях примыкания классических уравнений изучаемого процесса определенными соотношениями (балансными соотношениями), вытекающими из сути закономерностей развития явлений на этих поверхностях. Обоснование таковых балансных соотношений, вычислительные методы, их учитывающие, все это формирует задачи, которые рассматриваются в рамках данной главы.

2.1 Основные обозначения и понятия

Пусть область $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ($\partial\mathfrak{Z}$ – граница \mathfrak{Z}) имеет в своей структуре подобласти \mathfrak{Z}_l ($\partial\mathfrak{Z}_l$ – граница \mathfrak{Z}_l), $l = \overline{1, N}$. В дальнейшем используются классические пространства Лебега и Соболева. Пусть $L_2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) – классическое пространство Лебега и для $u(x) \in L_2(\Omega)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, используются следующие стандартные обозначения: $(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx$, через $W_2^1(\Omega)$ обозначим гильбертово пространство: для $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ имеем $u(x) \in L_2(\Omega)$, $u_{x_\kappa}(x) \in L_2(\Omega)$, $\kappa = \overline{1, n}$, соотношениями

$$(u, v)_\Omega^{(1)} = \int_\Omega (uv + \sum_{\kappa=1}^n u_{x_\kappa} v_{x_\kappa}) dx = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \quad (2.1)$$

$$\|u\|_\Omega^{(1)} = \sqrt{(u, u)_\Omega^{(1)}}, \quad (2.2)$$

вводятся скалярное произведение и норма.

Применительно к сетеподобной области \mathfrak{Z} имеем интеграл Лебега $\int_{\mathfrak{Z}} u(x)dx = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x)dx$ на области \mathfrak{Z} , соотношения (2.1), (2.2) принимают вид

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \left(\sum_{l=1}^N (u, u)_{\mathfrak{Z}_l} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^{(1)} = \sum_{l=1}^N (u, v)_{\mathfrak{Z}_l}^{(1)} = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\kappa}} \right) dx, \quad (2.4)$$

$$\|u\|_{\mathfrak{Z}}^{(1)} = \left(\sum_{l=1}^N (u, u)_{\mathfrak{Z}_l}^{(1)} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

В дальнейшем символ \mathfrak{Z} в $(u, v)_{\mathfrak{Z}}$, $\|u\|_{\mathfrak{Z}}$, $(u, v)_{\mathfrak{Z}}^{(1)}$, $\|u\|_{\mathfrak{Z}}^{(1)}$ опускается.

Введем другие пространства функций на сетеподобной области $\mathfrak{Z} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l : C(\overline{\mathfrak{Z}})$ – множество функций $u(x)$, которые непрерывны в любой точке $\overline{\mathfrak{Z}}$, $C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ ($l = \overline{1, N}$) – множества функций $u(x) \in C(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых $u_x(x) \in C(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ ($l = \overline{1, N}$) для которых скалярное произведение и норма определены формулами (2.3), (2.4), (2.5).

Далее, пусть $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ – совокупность функций $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых справедливы соотношения вида

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial n_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{\partial u(x)_{S_{ji}}}{\partial n_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, \quad i = \overline{1, m_j}, \quad (2.6)$$

в узловых местах ω_j , $j = \overline{1, M}$, на S_j , S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$). Соотношения (2.6) означают условия примыкания подобластей \mathfrak{Z}_l друг к другу, при этом $a(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ и $a(x)_{S_j}$, $u(x)_{S_j}$, $a(x)_{S_{ji}}$, $u(x)_{S_{ji}}$ являются сужениями для $a(x)$, $u(x)$ на S_j и S_{ji} , векторы n_j и n_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji} , $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, M}$. Для упрощения обозначений и преобразований формул эти индексы не будут использоваться.

Для удобства дальнейшего изложения вводятся необходимые пространства, в котрых рассматриваются изучаемые математические модели.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ является замыкание $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ в норме (2.5), считаем, что $\|\cdot\|_{\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})} = \|\cdot\|_{W_2^1(\mathfrak{Z})} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Z}}^{(1)}$.

Следует отметить, что из $\mathfrak{Z}_l \subset \mathfrak{Z}$ ($l = \overline{1, N}$) и существования $u_x(x) \in \tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ следует существование $u_x(x) \in \tilde{W}^1(\mathfrak{Z}_l)$, верно и обратное [67, с. 38].

Если в описании совокупности $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ к условиям $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ и (2.6) добавить условие $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$, получим совокупность элементов $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ является замыкание $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$ в норме (2.5).

Замечание 2.1. Для элементов $u(x)$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ можно ввести другое скалярное произведение

$$[v]_{\mathfrak{Z}}^{(1)} = \sum_{l=1}^N [u, v]_{\mathfrak{Z}_l}^{(1)} = \sum_{l=1}^N \int \sum_{\mathfrak{Z}_l, \kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\kappa}} dx,$$

порождающее норму

$$\|u\|_{\square}^{(1)} = \sqrt{[u, u]_{\mathfrak{Z}}^{(1)}}.$$

Эквивалентность норм $\|u\|^{(1)}$ и $\|u\|_{\square}^{(1)}$ устанавливается с помощью аналога на \mathfrak{Z} неравенства Пуанкаре-Фридриха

$$\int_{\mathfrak{Z}_l} u^2(x) dx \leq C \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x)_x^2 dx,$$

(C – постоянная, зависящая только от области \mathfrak{Z} , доказательство которого аналогично представленному в [34, с. 62]).

Введенные пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ являются базовыми при изучении краевых задач прикладного характера: пространство $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, где используются краевые условия $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$, пространство $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ – при использовании общих краевых условий.

Пространство функций $v(x, t) \in L_1(\mathfrak{Z}_T)$ с нормой

$$\|v\|_{L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)} = \|v\|_{2,1,\mathfrak{Z}_T} = \int_0^T \left(\int_{\mathfrak{Z}} v^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt,$$

обозначим через $L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$. В задачах прикладного характера таковые используются при математическом описании внешних воздействий на изучаемый физический процесс.

Пусть $\mathfrak{M}(\mathfrak{Z}_T)$ – совокупность функций $u(x, t)$, для которых существуют следы $u(x, t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, определенные на сечениях \mathfrak{Z}_T плоскостями $t = t_0$, $t_0 \in (0, T)$, причем $u(x, t)$ сильно непрерывны по переменной t , $t \in [0, T]$ ($\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|^{(1)} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ равномерно на $[0, T]$).

Определение 3. Пространство $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ является замыкание $\mathfrak{M}(\mathfrak{Z}_T)$ в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{Z}_T}^{1,0} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k \times (0, T)} (u^2 + \sum_{\kappa=1}^n u_{x_{\kappa}}^2) dx dt \right)^{1/2}.$$

Определение 4. Пространство $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T)$ является замыкание $\mathfrak{M}(\mathfrak{Z}_T)$ в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{Z}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k \times (0, T)} (u^2 + u_t^2 + \sum_{\kappa=1}^n u_{x_\kappa}^2) dx dt \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим *частный случай* сетеподобной области \mathfrak{Z} , принадлежащей одномерному евклидову пространству \mathbb{R}^1 : $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$. Таковой областью является связный геометрический граф Γ . Введем обозначения [15, 17-20, 96] (см. также [78-81]): γ – ребра графа (отрезки $[0, 1]$), Γ_0 – совокупность ребер без своих концевых точек (т. е. интервалов $(0, 1)$, $\bar{\Gamma}_0 = \Gamma$); $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$, $\gamma_t = \gamma_0 \times (0, t)$, $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$, $t \in (0, T]$, $T < \infty$. Везде ниже используются совокупности граничных и $J(\Gamma)$ внутренних узлов графа и интеграл Лебега на Γ или Γ_t : $\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{\gamma} \int_{\gamma} f(x)_{\gamma} dx$ или $\int_{\Gamma_t} f(x, t) dx dt = \sum_{\gamma_t} \int_{\gamma_t} f(x, t)_{\gamma} dx dt$, $f(\cdot)_{\gamma}$ – сужение функции $f(\cdot)$ на ребро γ .

Далее обозначено:

$C^1[\Gamma]$ – пространство непрерывных и дифференцируемых на Γ функций (производная в концевых точках ребер понимается как односторонняя),

$L_p(\Gamma)$ (аналогично для $L_2(\Gamma_0)$) и $L_p(\Gamma_T)$ ($p = 1, 2$) – гильбертовы пространства функций, суммируемых с p -й степенью,

$L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $u(x, t) \in L_1(\Gamma_T)$, $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt$

$W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, для которых $u_x(x) \in L_2(\Gamma)$,

$W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ (или $W_2^1(\Gamma_T)$) – пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, для которых $u_x(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$ (или для которых $u_x(x, t), u_t(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$).

Введем дифференциальную форму

$$\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x) \mu(x) \nu(x) \right) dx,$$

у которой $a(x), b(x) \in L_2(\Gamma)$, причем

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.7)$$

В работе [63, с. 92] рассмотрено и обосновано следующее утверждение.

Пусть $f(x) \in L_2(\Gamma)$, $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ и

$$\ell(u, \nu) - \int_{\Gamma} f(x) \eta(x) dx = 0, \quad \forall \eta(x) \in W_2^1(\Gamma).$$

Тогда любого $\gamma \subset \Gamma$ выражение $a(x)_{\gamma} \frac{du(x)_{\gamma}}{dx}$ непрерывно во всех узлах графа Γ .

Введем совокупность $\Omega_a(\Gamma)$ элементов $u(x) \in C^1[\Gamma]$, для которых выполнены указанные условия утверждения вместе с ее утверждением, причем

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx},$$

во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ , соответственно ориентированных к ξ и от ξ). Осуществим процесс замыкания $\Omega_a(\Gamma)$ по норме $\|u\|^{(1)}$ (аналогична соотношению (2.5)), получим пространство $W^1(a, \Gamma)$. Если же для функций $u(x) \in \Omega_a(\Gamma)$ имеет место $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, приходим к пространству $W_0^1(a, \Gamma)$.

Аналогичную процедуру применим к совокупности $\Omega(\Gamma_T)$, состоящей из элементов $u(x, t) \in C^{1,0}[\Gamma_T]$, где $C^{1,0}[\Gamma_T]$ – совокупность элементов $u(x, t) \in C(\Gamma_T)$ таких, что $u(x, t_0) \in C^1[\Gamma]$ для произвольного $t_0 \in [0, T]$, последнее означает выполнение соотношения

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0, t)_\gamma}{\partial x},$$

при любом фиксированном $t = t_0 \in [0, T]$. Как и выше вводится пространство $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ замыканием $\Omega(\Gamma_T)$ в норме $\|u\|_{\Gamma_T}^{1,0}$ (аналогична норме в определении 2.3). Добавление к свойствам $u(x, t) \in \Omega(\Gamma_T)$ условия $u(x, t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0$ и замыкания полученной совокупности в норме $\|u\|_{\Gamma_T}^{1,0}$ приводит к пространству $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$. Таким же образом вводится пространство $W_0^1(a, \Gamma_T)$. Дальнейшее рассмотрение проводится для дифференциально-разностных схем с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области \mathfrak{Z} . Аналогичные рассуждения имеют место для сети (графа) Γ .

2.2 Дифференциально-разностные двухслойные и трехслойные схемы

2.2.1 Разностная аппроксимация дифференциальных выражений

Разобьем отрезок $[0, T]$, $0 < T < \infty$, на K одинаковых отрезков с шагом $\tau = t_k - t_{k-1} = T/K$, где $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, K$, точки деления, $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, K\}$ – равномерная сетка (рис. 2.1).

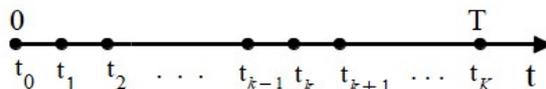


Рис. 2.1. Равномерная сетка

Пусть функция $v = v(x, t)$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathfrak{S}$. Сначала мы рассмотрим аппроксимацию частной производной первого порядка $v'_t = \frac{\partial v}{\partial t}$. Фиксируем некоторую точку $t = t_k \in \omega_\tau$ и возьмем точки $(k-1)\tau$ и $(k+1)\tau$, где $\tau > 0$. В дальнейшем индекс τ будем опускать и писать $v(k) = v(x; k) = v_\tau(x; k\tau)$. Чтобы аппроксимировать частную производную v'_t , мы используем классические разностные отношения:

– правое разностное выражение

$$v_t = \frac{v(k+1) - v(k)}{\tau}, \quad (2.8)$$

– левое разностное выражение

$$v_{\bar{t}} = \frac{v(k) - v(k-1)}{\tau}. \quad (2.9)$$

Разностные выражения v_t и $v_{\bar{t}}$ определены в двух точках $(k\tau, k\tau + \tau)$, $(k\tau - \tau, k\tau)$ соответственно. Если взять линейную комбинацию (2.8) и (2.9), получим

$$v_{t^\circ} = \frac{1}{2}(v_t + v_{\bar{t}}) = \frac{v(k+1) - v(k-1)}{2\tau}, \quad (2.10)$$

формула (2.10) есть центральное разностное выражение.

Пусть v_d – разностное выражение v'_t , введем разность $\psi(k) = \psi(x; t_k) = v_d - v'_t$ в точке $t = t_k$ при $\tau \rightarrow 0$. Величина $\psi(k)$ называется погрешностью разностной аппроксимации производной v'_t в точке t_k . Разложим $v(x, t)$ по формуле Тейлора в точке $t = t_k$

$$v(k \pm 1) = v(k) \pm \tau v'_t(k) + \frac{\tau^2}{2} v''_t(k) + O(\tau^3),$$

(функция $v(x, t)$ – достаточно гладкая в некоторой окрестности $t_k - \tau_0, t_k + \tau_0$ точки t_k и $\tau < \tau_0, \tau_0$

– фиксированное число). Подставляя это разложение в (2.8), (2.9) и (2.10), получим

$$v_t = \frac{v(k+1) - v(k)}{\tau} = v'_t(k) + \frac{\tau}{2} v''_t(k) + O(\tau^2),$$

$$v_{\bar{t}} = \frac{v(k) - v(k-1)}{\tau} = v'_t(k) - \frac{\tau}{2} v''_t(k) + O(\tau^2),$$

$$v_{t^\circ} = \frac{v(k+1) - v(k-1)}{2\tau} = v'_t(k) + O(\tau^2).$$

Отсюда вытекает

$$\psi = v_t - v'_t(k) = O(\tau),$$

$$\psi = v_{\bar{t}} - v'_t(k) = O(\tau),$$

$$\psi = v_{t^\circ} - v'_t(k) = O(\tau^2).$$

Будем говорить, что v_i аппроксимирует производную v'_i с порядком $m > 0$ в точке t_k , если

$$\psi(k) = v_i - v'_i(k) = O(\tau^m).$$

Таким образом, левое и правое разностные выражения аппроксимируют v'_i с первым порядком приближения, а центральное разностное выражение – со вторым.

Рассмотрим частную производную второго порядка $v''_i = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}$. Чтобы написать разностную аппроксимацию этой частной производной, нужно использовать три точки $((k-1)\tau, k\tau, (k+1)\tau)$. В этом случае

$$v''_i \approx v''_{\bar{i}} = \frac{v(k+1) - 2v(k) + v(k-1)}{\tau^2}. \quad (2.11)$$

Замечая, что правое разностное выражение в точке t_k совпадает с левым разностным выражением в точке $t_k + \tau$, то есть $v_i = v_{\bar{i}}$, перепишем (2.11) в виде

$$\frac{v_i - v_{\bar{i}}}{\tau} = v''_{\bar{i}}.$$

Разложим функцию $v(x, t)$ по формуле Тейлора, ясно, что

$$\psi = v_{\bar{i}} - v''_i = O(\tau^2),$$

это означает, что разностное выражение (2.11) аппроксимирует v''_i со вторым порядком приближения.

2.2.2 Дифференциально-разностная двухслойная схема с весом для параболического уравнения

В пространстве $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$, $\mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$, \mathfrak{Z} принадлежит n -мерному евклидову пространству, рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ly = f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathfrak{Z}, \quad (2.12)$$

$$y(x, 0) = \varphi(x),$$

$$y(x, t)|_{x \in \partial \mathfrak{Z}} = 0, \quad (2.13)$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$, $\varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$; оператор $L: \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}) \rightarrow L_2(\mathfrak{Z})$ – линейный положительный

оператор, определяемый соотношением $Lu = -\sum_{\kappa, l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + b(x)u$, где $a(x) = a_{\kappa l}(x)$

(см. соотношение (2.6)). При этом выполнены условия (2.7) и условия

$$a_{\kappa l}(x) = a_{\kappa k}(x), \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \mathfrak{D},$$

$$a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l \leq a^* \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (2.14)$$

с фиксированными положительными постоянными a_* , a^* , β и произвольными параметрами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Пусть равномерная сетка ω_τ с шагом $\tau = T/K$ (см. п. 2.2.1). В дальнейшем индекс τ будем опускать и писать $y(k) := y(x; k) = y_\tau(x; k\tau)$, $f(k) := f(x; k) = f_\tau(x; k\tau)$ ($k = 0, 1, \dots, K$). Используя следующие обозначения

$$y = y(k), \quad \check{y} = y(k-1), \quad y_{\bar{\tau}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}),$$

и полагая приближенно (см. п. 2.1)

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau}[y(k) - y(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Дифференциальную систему (2.12), (2.13) аппроксимирует дифференциально-разностная двухслойная схема (2.15), (2.16) (частный случай)

$$y_{\bar{\tau}} + Ly = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.15)$$

$$y(0) = \varphi(x),$$

$$y(k)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.16)$$

где

$$f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt,$$

предполагается, что выполнены условия

$$\varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{D}), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.17)$$

далее исследуются дифференциально-разностные двухслойные схемы с весовым параметром σ для параболического уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ly^{(\sigma)} = f(x, t).$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ рассмотрим дифференциально-разностную двухслойную схему с весом σ (σ – вещественные числа):

$$y_{\bar{\tau}} + Ly^{(\sigma)} = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.18)$$

$$y(0) = \varphi(x),$$

где $y^{(\sigma)} = \sigma y + (1 - \sigma)\check{y}$. При фиксированных k ($k = 1, 2, \dots, K$) функция $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ определена как решение (2.18) с краевым условием

$$y(k)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.19)$$

предполагаются выполненными условия

$$\varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{D}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.20)$$

2.2.3 Дифференциально-разностная трехслойная симметричная схема с весом для параболического уравнения

Пусть равномерная сетка ω_τ с шагом $\tau = T / K$ (см. п. 2.2.1). В дальнейшем используются обозначения из пункта 2.2.2 : $y(k)$, $f(k)$, $k = 0, 1, \dots, K$, а также обозначения и понятия, принятые в [67, с. 351].

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную симметричную схему с весом σ [74]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} [y(k+1) - y(k-1)] &= Ay^{(\sigma)} + f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $y^{(\sigma)} = \sigma y(k+1) + (1-2\sigma)y(k) + \sigma y(k-1)$, $\sigma \in (0, 1)$, оператор $A: \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D}) \rightarrow L_2(\mathfrak{D})$ –

линейный оператор определен соотношением $Au = \sum_{\kappa, l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right)$ (частный случай

оператора L). Схема (2.21) рассматривается на слоях t_{k+1} , t_k , t_{k-1} ; $y_0(x)$, $y_1(x)$, $f(k)$ ($k = \overline{1, K}$)

исходные данные. Таким образом, если k и σ фиксированы, функция $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ – решение уравнения (2.21) с краевым условием

$$y(k+1)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \quad (2.22)$$

Как и выше в (2.14), считаем выполненными условия

$$a_{\kappa l}(x) = a_{l\kappa}(x), \quad a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l \leq a^* \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (2.23)$$

с фиксированными положительными a_* , a^* и произвольными $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, а также

$$y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{D}), \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \quad (2.24)$$

2.2.4 Дифференциально-разностные трехслойные несимметричные схемы с весами для параболического уравнения

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ рассматривается множество трехслойных дифференциально-разностных схем с весовыми параметрами σ , σ_1 и σ_2 (σ , σ_1 , σ_2 – действительные числа).

Пусть равномерная сетка ω_τ с шагом $\tau = T/K$ (см. п. 2.2.1). Исходя из простоты представления результатов для функций $y(k) := y(x;k)$, $k = 0, 1, \dots, K$, введем следующие обозначения, учитывая границы изменения индекса k :

$$\begin{aligned} y &= y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1), \\ y_t &= \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_{t^*} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \quad y_{\bar{t}^*} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}), \\ y_t^{(\sigma)} &= \sigma y_t + (1 - \sigma)y_{\bar{t}}, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t^*} + \frac{\tau}{2} y_{\bar{t}^*}, \quad y_{\bar{t}} = y_{t^*} - \frac{\tau}{2} y_{\bar{t}^*}, \\ y &= \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{t}^*}, \\ \hat{y} &= y + \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y + \tau y_{t^*} + \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{t}^*}, \\ \check{y} &= y - \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y - \tau y_{t^*} + \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{t}^*}, \\ y_t^{(\sigma)} &= y_{t^*} + \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\tau y_{\bar{t}^*}, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_{t^*} + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{\bar{t}^*}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную схему с весами σ , σ_1 и σ_2 :

$$\begin{aligned} y_t^{(\sigma)} + Ly^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где оператор L определяется в пункте 2.2.2, $f(k) := f(x;k)$, $k = \overline{1, K-1}$. Если k фиксировано ($k = \overline{1, K-1}$), то $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ – решение (2.27), удовлетворяющее условию

$$y(k+1)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad (2.28)$$

кроме того (см. (2.24)),

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{D}), \quad k = \overline{1, K-1}. \quad (2.29)$$

2.2.5 Дифференциально-разностные трехслойные схемы с весами для гиперболического уравнения

В пространстве $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{D}_T)$ рассмотрим гиперболическую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + Ly(x,t) &= f(x,t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathfrak{S}, \\ y(x,0) &= \varphi_0(x), \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$y(x,t) \Big|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (2.31)$$

где оператор L определяется в пункте 2.2.2, $f(x,t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$; $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Как и выше равномерная сетка ω_τ имеет шаг $\tau = T/K$ (см. п. 2.2.1). Исходя из простоты представления результатов, для функций $y(k) := y(x;k)$, $k = 0, 1, \dots, K$, примем следующие обозначения, учитывая границы изменения индекса k :

$$\begin{aligned} y &= y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1), \\ y_t(0) &= \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0)), \quad y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_{t^\circ} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \\ y_{\bar{\bar{t}}} &= \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}), \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t^\circ} + \frac{\tau}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \quad y_{\bar{t}} = y_{t^\circ} - \frac{\tau}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \\ y &= \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \\ \hat{y} &= y + \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y + \tau y_{t^\circ} + \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \\ \check{y} &= y - \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y - \tau y_{t^\circ} + \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \\ y^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_{t^\circ} + (\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\tau^2}{2} y_{\bar{\bar{t}}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

полагая приближенно (см. пункт 2.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &\approx \frac{1}{\tau^2}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)] = y_{\bar{\bar{t}}}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_1(x) \approx \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0)) = y_t(0). \end{aligned}$$

Дифференциальную систему (2.30), (2.31) аппроксимирует дифференциально-разностная трехслойная схема (2.34), (2.35)

$$\begin{aligned} y_{\bar{\bar{t}}} + L\hat{y} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$f(k) := f(x;k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x,t) dt,$$

при k фиксированном ($k = \overline{1, K-1}$) $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ – решение (2.34), удовлетворяющее условию

$$y(k+1)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad (2.35)$$

здесь $y(1) = y(0) + \tau y_t(0) = \varphi_0(x) + \tau \varphi_1(x)$, кроме того (см. (2.24) и (2.29)),

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{S}), \quad k = \overline{1, K-1}. \quad (2.36)$$

Далее исследуются дифференциально-разностные трехслойные схемы с весовыми параметрами σ_1, σ_2 для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ly^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f(x, t).$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную схему с весами σ_1, σ_2 (σ_1, σ_2 – вещественные числа):

$$\begin{aligned} y_{\bar{n}} + Ly^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где оператор L определяется в пункте 2.2.2, $f(k) := f(x; k)$, $k = \overline{1, K-1}$. При k фиксированном ($k = \overline{1, K-1}$) $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ – решение (2.37), удовлетворяющее условию

$$y(k+1)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (2.38)$$

при этом $y(1) = y(0) + \tau y_t(0) = \varphi_0(x) + \tau \varphi_1(x)$, кроме того (см. (2.24), (2.29) и (2.36)),

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{S}), \quad k = \overline{1, K-1}. \quad (2.39)$$

2.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем

2.3.1 Слабая разрешимость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом для параболического уравнения

Сначала изучаем слабую разрешимость дифференциально-разностной двухслойной схемы (2.15) для параболического уравнения (частный случай) в пункте 2.2.2.

Определение 2.5. Совокупность $\{y(1), y(2), \dots, y(K)\}$, $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ($k = \overline{1, K}$) называется *слабым решением* для (2.15), (2.16), если $y(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_{\mathfrak{S}} y_{\bar{\tau}} \eta(x) dx + \ell(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = \overline{1, K}, \quad y(0) = \varphi(x), \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S});$$

$$\text{здесь } \ell(y, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) y \eta(x) \right) dx.$$

Замечание 2.2. Как следует из определения 2.5, соотношения (2.15), (2.16) определяют краевую задачу в слабой постановке для $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Естественным является рассмотрение следующего утверждения.

При достаточно малых τ и при выполнении условий (2.14), (2.17) система (2.15), (2.16) однозначно слабо разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Обоснование данного утверждения следующее. Система обобщенных собственных функций оператора L является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$ [14, 56]. Из условий (2.14) вытекает, что собственные значения имеют конечную кратность, вещественные и отрицательные: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$), им соответствующие функции действительные и образуют последовательность $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$, уравнение $L\phi = \lambda\phi + g$ при $g \in L_2(\mathfrak{Z})$ фредгольмово разрешимо в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Прделаем следующие действия:

пусть $k = 1$, тогда краевая задача относительно $y(1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$Ly(1) = -\frac{1}{\tau} y(1) + \frac{1}{\tau} \varphi(x) + f(1),$$

для $\tau < \tau_0$ при малых $\tau_0 > 0$ однозначно разрешима; к такому же заключению приходим и для $y(2), y(3), \dots, y(K)$ в силу

$$Ly(k) = -\frac{1}{\tau} y(k) + \frac{1}{\tau} y(k-1) + f(k),$$

при $k = 2, 3, \dots, K$.

Далее изучается слабая разрешимость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом для параболического уравнения в пункте 2.2.2

Введем следующее понятие слабого решения.

Определение 2.6. Совокупность $\{y(1), y(2), \dots, y(K)\}$, $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ ($k = \overline{1, K}$) назовем слабым решением для (2.18), (2.19), если функции $y(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_{\mathfrak{Z}} y_{\bar{\tau}} \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = \overline{1, K}, \quad y(0) = \varphi(x), \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

$$\text{где } \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) y^{(\sigma)} \eta(x) \right) dx.$$

Приведем достаточные условия на исходные данные для разрешимости системы (2.18), (2.19).

Если выполнены соотношения (2.14), (2.20), тогда система (2.18) при достаточно малых τ однозначно слабо разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Действительно, как и при представленных выше рассуждениях, система обобщенных собственных функций оператора L является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$. Из условий (2.14) вытекает, что собственные значения имеют конечную кратность, вещественные и отрицательные: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$), им соответствующие функции действительные и образуют последовательность $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$, уравнение $L\phi = \lambda\phi + g$ при $g \in L_2(\mathfrak{Z})$ фредгольмово разрешимо в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Если $k = 1$, тогда краевая задача относительно $y(1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$\sigma Ly(1) = -\frac{1}{\tau} y(1) + \frac{1}{\tau} \phi(x) + (1 - \sigma)L\phi(x) + f(1),$$

для $\tau < \tau_0$ при малых $\tau_0 > 0$ однозначно разрешима. К такому же заключению приходим для $y(2), y(3), \dots, y(K)$ в силу

$$\sigma Ly(k) = -\frac{1}{\tau} y(k) + \frac{1}{\tau} y(k-1) + (1 - \sigma)Ly(k-1) + f(k),$$

при $k = 2, 3, \dots, K$.

2.3.2 Слабая разрешимость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом для параболического уравнения

Исследуется слабая разрешимость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом в пункте 2.2.3. Понятие слабого решения вводится аналогично представленному выше.

Определение 2.7 Совокупность $\{y(2), y(3), \dots, y(K)\}$, $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ ($k = \overline{2, K}$) назовем слабым решением для (2.21), (2.22), если функции $y(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_{\mathfrak{Z}} y_{i^c} \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

$$y(0) = y_0(x), \quad y(1) = y_1(x),$$

Где $y_{i^c} = \frac{1}{2\tau} [y(k+1) - y(k-1)]$, $\ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{k,i=1}^n a_{ki}(x) \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_k} + b(x) y^{(\sigma)} \eta(x) \right) dx$.

Замечание 2.3. Как следует из определения 2.7, соотношения (2.21), (2.22) определяют краевую задачу в слабой постановке для $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Достаточные условия на исходные данные для разрешимости системы (2.21), (2.22) также аналогичны условиям для системы (2.18), (2.19).

При выполнении условий (2.23), (2.24) система (2.21), (2.22) при достаточно малых τ и $\sigma > 0$ однозначно слабо разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Снова, как и в представленных выше рассуждениях, система обобщенных собственных функций оператора $Ay = \sum_{\kappa, i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)$ (см. п. 2.2.3) является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$. Из условий (2.23) вытекает, что собственные значения имеют конечную кратность, вещественные и отрицательные: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$), им соответствующие функции действительные и образуют последовательность $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$, уравнение $A\phi = \lambda\phi + g$ при $g \in L_2(\mathfrak{Z})$ фредгольмово разрешимо в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Если $k = 1$, тогда краевая задача относительно $y(1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$\sigma Ay(2) = \frac{1}{2\tau} y(2) - (1 - 2\sigma)Ay_1(x) - \sigma Ay_0(x) - \frac{1}{2\tau} y_0(x) - f(1),$$

для $\tau < \tau_0$ при малых $\tau_0 > 0$ однозначно разрешима. К такому же заключению приходим для $y(2), y(3), \dots, y(K)$, в силу

$$\sigma Ay(k+1) = \frac{1}{2\tau} y(k+1) + (2\sigma - 1)Ay(k) - \sigma Ay(k-1) - \frac{1}{2\tau} y(k-1) - f(k),$$

при $k = 2, 3, \dots, K$.

2.3.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностных

трехслойных несимметричных схем с весами для параболического уравнения

Исследуется слабая разрешимость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ в пункте 2.2.4. Понятие слабого решения вводится аналогично представленному выше.

Определение 2.8. Совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $k = 2, \dots, K$, называется слабым решением системы (2.27), (2.28) если для $y(k)$ удовлетворяются соотношения

$$\int_{\mathfrak{Z}} y_i^{(\sigma)} \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x),$$

при произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$;

$$\ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} \eta(x) \right) dx.$$

Замечание 2.4. Если k фиксировано, тогда (2.27) – краевая задача в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ для $y(k+1) = \hat{y}$.

Как и выше устанавливаются достаточные условия разрешимости системы (2.18), (2.19).

Если имеют место соотношения (2.14), (2.29), тогда система (2.27) однозначно слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ при малых τ .

Аналогично рассуждениям, приведенным в работе [14, 56], устанавливается свойство полноты и базисности системы обобщенных собственных функций оператора $Ly = -\sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial y}{\partial x_\iota} \right) + b(x)y$ в пространствах $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$. Оператор L имеет вещественные собственные значения конечной кратности с предельной на $+\infty$. Сказанное означает, что для краевой задачи $L\phi = \lambda\phi + g$ (λ – постоянная, $g \in L_2(\mathfrak{S})$) в слабой постановке справедливы утверждения альтернативы Фредгольма в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Положив в (2.27) $k = 1$, получаем в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ относительно $y(2) := y(x; 2)$ краевую задачу

$$\sigma_1 Ly(2) + \frac{1}{\tau} \sigma y(2) = F(\varphi_0(x), \varphi_1(x)),$$

$$F(\varphi_0(x), \varphi_1(x)) = L((\sigma_1 + \sigma_2 - 1)\varphi_1(x) - \sigma_2\varphi_0(x)) + \\ + \frac{1}{\tau}(2\sigma - 1)\varphi_1(x) - \frac{1}{\tau}(\sigma - 1)\varphi_0(x) + f(1),$$

в слабой постановке, которая при $\sigma\sigma_1 > 0$ и достаточно малом τ (т. е. при достаточно большом K) однозначно слабо разрешима. Это же утверждение остается справедливым, если в соотношении (2.27) положить $k = 2, 3, \dots, K - 1$.

2.3.4 Слабая разрешимость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами для гиперболического уравнения

Алгоритм анализа разрешимости данных схем аналогичен рассуждениям пункта 2.3.3.

Сначала изучаем слабую разрешимость дифференциально-разностной трехслойной схемы для гиперболического уравнения (частный случай) в пункте 2.2.5.

Определение 2.9. Совокупность $\{y(2), y(3), \dots, y(K)\}$, $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ($k = \overline{2, K}$) назовем слабым решением системы (2.34), (2.35), если $y(k)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_{\mathfrak{S}} y_{\bar{n}} \eta(x) dx + \ell(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, K - 1, \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \\ y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x),$$

$$\text{где } \ell(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa, \iota=1}^n \left(a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial y}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x)y\eta(x) \right) dx.$$

Замечание 2.5. Если k фиксировано, тогда (2.34), (2.35) – краевая задача в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ для уравнения (2.34).

Условия разрешимости представлены ниже.

Если для $a_{\kappa l}(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(k)$ имеют место (2.14), (2.36), тогда система (2.34), (2.35) однозначно слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ для малых τ .

Действительно, так как система обобщенных собственных функций оператора L является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$. Из условий (2.14) вытекает, что собственные значения имеют конечную кратность, вещественные и отрицательные: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$), им соответствующие функции действительные и образуют последовательность $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$, задача $L\phi = \lambda\phi + g$ при $g \in L_2(\mathfrak{Z})$ фредгольмово разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Если $k = 1$, тогда краевая задача относительно $y(2) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$Ly(2) = -\frac{1}{\tau^2} y(2) + \frac{2}{\tau} \varphi_1(x) + \frac{1}{\tau^2} \varphi_0(x) + f(1),$$

для $\tau < \tau_0$ при малых $\tau_0 > 0$ однозначно разрешима. К такому же заключению приходим для $y(2), y(3), \dots, y(K)$ в силу

$$Ly(k+1) = -\frac{1}{\tau^2} y(k+1) + \frac{2}{\tau^2} y(k) - \frac{1}{\tau^2} y(k-1) + f(k),$$

при $k = 2, 3, \dots, K$.

Далее изучаем слабую разрешимость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами для гиперболического уравнения пункта 2.2.5.

Определение 2.10. Совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $k = 2, \dots, K$, назовем слабым решением системы (2.37), (2.38), если для $y(k)$ удовлетворяются соотношения

$$\int_{\mathfrak{Z}} y_{\bar{n}} \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}), \quad (2.40)$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x),$$

здесь $\ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_l} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_{\kappa}} + b(x) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} \eta(x) \right) dx$.

Замечание 2.6. Если k фиксировано, тогда (2.37) – краевая задача в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ для уравнения (2.34) относительно $y(k+1)$ ($y(k+1) = \hat{y}$).

Условия разрешимости. Если имеют место соотношения (2.14), (2.39), тогда система (2.37), (2.38) однозначно слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ при малых τ и для $\sigma_1 > 0$.

Как и выше, устанавливается свойство полноты и базисности системы обобщенных собственных функций оператора L в пространствах $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$. При этом собственные значения оператора L вещественные, конечной кратности и имеют предельную точку на $+\infty$. Сказанное означает, что для краевой задачи $Ly = \lambda y + g$ (λ – постоянная, $g \in L_2(\mathfrak{Z})$) в слабой постановке справедливы утверждения альтернативы Фредгольма в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Положив в (2.37) $k = 1$, получаем в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ относительно $y(2) := y(x; 2)$ краевую задачу

$$\sigma_1 Ly(2) + \frac{1}{\tau^2} y(2) = F(\varphi_0(x), \varphi_1(x)),$$

$$F(\varphi_0(x), \varphi_1(x)) = (\sigma_1 - 1)L\varphi_0(x) - (\sigma_1 + \sigma_2 - 1)\tau L\varphi_1(x) + f(1),$$

в слабой постановке, которая при $\sigma_1 > 0$ и достаточно малом τ однозначно слабо разрешима. Это же утверждение остается справедливым, если в соотношении (2.37) положить $k = 2, 3, \dots, K - 1$.

2.4 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом для параболического уравнения

2.4.1 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы (частный случай)

Исследуется устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы для параболического уравнения в пункте 2.2.2:

$$\begin{aligned} y_{\bar{\tau}} + Ly &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ y(0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Так как система (2.15) линейная, то ее решение можно представить в виде суммы $y(k) = y_o(k) + y_f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$), $y_o(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение задачи

$$y_{\bar{\tau}} + Ly = 0, \quad y(0) = \varphi(x), \tag{2.41}$$

$y_f(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение задачи

$$y_{\bar{\tau}} + Ly = f(k), \quad y(0) = 0. \tag{2.42}$$

Определение 2.11. Дифференциально-разностная схема (2.15) называется устойчивой:

1) по начальным данным $\varphi(x)$, если для (2.41) имеет место оценка

$$\|y(k)\|_{(1)} \leq C_1 \|\varphi\|_{(1)}, \quad k = \overline{1, K}, \quad \forall \varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z});$$

2) по правой части $f(k)$, если для (2.42) имеет место оценка

$$\|y(k)\|_{(1)} \leq C_2 \|f(k)\|_{(2)}, \quad k = \overline{1, K}, \quad \forall f(k) \in L_2(\mathfrak{Z}).$$

Здесь $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от τ , $\varphi(x)$ и $f(k) := f(x; k)$ ($k = \overline{1, K}$);
через $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ обозначены нормы в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$, соответственно.

Умножив (2.15) скалярно на $2\tau y_{\bar{t}} = 2(y - \tilde{y})$, получим

$$2\tau(y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + 2\tau(Ly, y_{\bar{t}}) = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}), \quad (2.43)$$

используя формулу

$$y = \frac{y + \tilde{y}}{2} + \frac{y - \tilde{y}}{2} = \frac{1}{2}(y + \tilde{y}) + \frac{\tau}{2}y_{\bar{t}},$$

тогда формула (2.43) может предстать в виде

$$2\tau\left(\left(I + \frac{\tau}{2}L\right)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}\right) + (L(y + \tilde{y}), (y - \tilde{y})) = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}), \quad (2.44)$$

где I – единичный оператор.

Для самосопряженного оператора L имеет место равенство

$$(L(y + \tilde{y}), (y - \tilde{y})) = (Ly, y) - (L\tilde{y}, \tilde{y}). \quad (2.45)$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} (L(y + \tilde{y}), (y - \tilde{y})) &= (Ly, y) - (Ly, \tilde{y}) + (L\tilde{y}, y) - (L\tilde{y}, \tilde{y}) = \\ &= (Ly, y) - (L\tilde{y}, \tilde{y}), \end{aligned}$$

так как $(Ly, \tilde{y}) = (y, L\tilde{y}) = (L\tilde{y}, y)$ в силу самосопряженности оператора L .

Подставляя (2.45) в (2.44), получим энергетическое тождество для схемы (2.15):

$$2\tau\left(\left(I + \frac{\tau}{2}L\right)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}\right) + (Ly, y) = (L\tilde{y}, \tilde{y}) + 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}). \quad (2.46)$$

Исследование устойчивости (2.15) по начальным данным использует оценку норм решения задачи (2.41). Из (2.46) для (2.41) получим

$$2\tau\left(\left(I + \frac{\tau}{2}L\right)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}\right) + (Ly, y) = (L\tilde{y}, \tilde{y}), \quad (2.47)$$

пусть $I + \frac{\tau}{2}L > 0$, тогда из (2.47) следует неравенство

$$(Ly, y) < (L\tilde{y}, \tilde{y})$$

или

$$\|y(k)\|_L^2 < \|y(k-1)\|_L^2, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

из последнего неравенства получаем $\|y(k)\|_L < \|y(k-1)\|_L < \dots < \|y(0)\| = \|\varphi(x)\|$, откуда следует по определению 2.11 схема (2.15) устойчива по начальным данным.

Введем операторное обозначение: $Bu = (I + \frac{\tau}{2}L)u$. Тогда из энергетического тождества

(2.46) получим

$$2\tau(By_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + (Ly, y) = (L\bar{y}, \bar{y}) + 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}), \quad (2.48)$$

имеет очевидное неравенство

$$2\tau(f(k), y_{\bar{t}}) \leq \tau c_0 \|y_{\bar{t}}\|_B^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f(k)\|_B^2,$$

тогда из (2.48) приходим к неравенству

$$2\tau \|y_{\bar{t}}\|_B^2 + \|y(k)\|_L^2 \leq \|y(k-1)\|_L^2 + \tau c_0 \|y_{\bar{t}}\|_B^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f(k)\|_B^2,$$

выбирая $c_0 = 2$

$$\|y(k)\|_L^2 \leq \|y(k-1)\|_L^2 + \frac{\tau}{2} \|f(k)\|_B^2, \quad (2.49)$$

Суммируя (2.49) по $k' = 1, 2, \dots, k$ ($k \leq K$), приходим к неравенству:

$$\|y(k)\|_L \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_B^2 \right)^{1/2},$$

положим

$$\left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_B^2 \right)^{1/2} = \|f(k)\|_{(2)},$$

получим

$$\|y(k)\|_L \leq C_2 \|f(k)\|_{(2)}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Из второй части определения 2.11 следует, что по правой части (2.15) является устойчивой.

Из сказанного вытекает априорная оценка для нормы решения. Пусть

$$B \geq \varepsilon I, \quad (2.50)$$

число $\varepsilon > 0$ положительное, тогда для схемы (2.15) справедливо неравенство

$$\|y(k)\|_L^2 \leq \|\varphi\|_L^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2. \quad (2.51)$$

Действительно, используя тождество (2.46) и неравенство Коши – Буняковского, а также неравенство Коши с ε , получим

$$2\tau(f(k), y_{\bar{t}}) \leq 2\tau \|f(k)\| \|y_{\bar{t}}\| \leq 2\tau\varepsilon \|y_{\bar{t}}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f(k)\|^2,$$

подставим эту оценку в (2.48) и используем условие (2.50):

$$\|y\|_L^2 \leq \|\bar{y}\|_L^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f(k)\|^2 \quad \text{или} \quad \|y(k)\|_L^2 \leq \|y(k-1)\|_L^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f(k)\|^2,$$

суммируя последнее неравенство по $k' = 1, \dots, k$, получаем (2.51).

Полученные результаты лежат в основе анализа устойчивости различного типа дифференциально-разностных схем.

2.4.2 Устойчивость дифференциально-разностной двухслойной схемы с весом

Рассмотрим дифференциально-разностную двухслойную схему с весом (2.18) для параболического уравнения в пункте 2.2.2:

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}} + Ly^{(\sigma)} &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ y(0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Ясно, что $\sigma y + (1 - \sigma)\tilde{y} = \tilde{y} + \tau\sigma y_{\bar{t}}$. Вводя операторное обозначение $Du = (I + \sigma\tau L)u$ приведем схему (2.18) к виду

$$\begin{aligned} Dy_{\bar{t}} + L\tilde{y} &= f(k), \quad k = 1, \dots, K, \\ y(0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Так как система (2.18) линейная, то ее решение $y(k)$ имеет вид $y(k) = y_o(k) + y_f(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, где $y_o(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ – решение задачи

$$Dy_{\bar{t}} + L\tilde{y} = 0, \quad y(0) = \varphi(x), \quad (2.53)$$

$y_f(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ – решение задачи

$$Dy_{\bar{t}} + L\tilde{y} = f(k), \quad y(0) = 0. \quad (2.54)$$

Определение 2.12. Схема (2.18) называется устойчивой

1) по начальным данным $\varphi(x)$, если для (2.53) имеет место оценка

$$\|y(k)\|_{(1)} \leq C_1 \|\varphi\|_{(1)}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall \varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S});$$

2) по правой части $f(k)$, если для (2.54) имеет место оценка

$$\|y(k)\|_{(1)} \leq C_2 \|f(k)\|_{(2)}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall f(k) \in L_2(\mathfrak{S}).$$

Здесь $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от τ , $\varphi(x)$ и $f(k) = f(x; k)$ ($k = \overline{1, K}$); через $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ обозначены нормы в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$, соответственно.

Умножим (2.52) на $2\tau y_{\bar{t}} = 2(y - \tilde{y})$, $y = \frac{1}{2}(y + \tilde{y}) + \frac{\tau}{2} y_{\bar{t}}$ и в силу леммы 2.2 получим энергетическое тождество для схемы (2.18):

$$2\tau \left(\left(D + \frac{\tau}{2} L \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) + (Ly, y) = (L\tilde{y}, \tilde{y}) + 2\tau (f(k), y_{\bar{t}}), \quad (2.55)$$

неравенство (2.55) для задачи (2.53) примет вид

$$2\tau \left(\left(D + \frac{\tau}{2} L \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) + (Ly, y) = (L\bar{y}, \bar{y}). \quad (2.56)$$

Предположим, что

$$D + \frac{\tau}{2} L \geq 0 \text{ или } I + \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) \tau L \geq 0, \quad (2.57)$$

учитывая, что $L \leq \|L\| I$ и $I \geq L / \|L\|$, получаем

$$I + \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) \tau L \geq \left(\frac{1}{\|L\|} + \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) \tau \right) L \geq 0,$$

отсюда следует, что неравенство (2.57) эквивалентно неравенству

$$\sigma \geq \sigma_0, \text{ где } \sigma_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|L\|}. \quad (2.58)$$

Тогда из (2.58) и (2.56) следует

$$(Ly, y) \leq (L\bar{y}, \bar{y}) \text{ или } \|y(k)\|_L^2 \leq \|\varphi(x)\|_L^2,$$

из последнего неравенства, суммируя по $k' = 1, \dots, k$, получим

$$\|y(k)\|_L \leq \|\varphi(x)\|_L.$$

Последнее означает устойчивость по $\varphi(x)$ схемы с весами (2.18), если выполнено условие (2.58) (см. часть 1 определения 2.12).

Неравенство (2.55) для задачи (2.54) имеет вид

$$2\tau (Ry_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + (Ly, y) = (L\bar{y}, \bar{y}) + 2\tau (f(k), y_{\bar{t}}), \quad R = \left(D + \frac{\tau}{2} L \right), \quad (2.59)$$

очевидное неравенство

$$2\tau (f(k), y_{\bar{t}}) \leq 2\tau c_0 \|y_{\bar{t}}\|_R^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f(k)\|_R^2,$$

тогда из (2.59) приходим к неравенству

$$2\tau \|y_{\bar{t}}\|_R^2 + \|y(k)\|_L^2 \leq \|y(k-1)\|_L^2 + 2\tau c_0 \|y_{\bar{t}}\|_R^2 + \frac{\tau}{2c_0} \|f(k)\|_R^2,$$

выбирая $c_0 = 1$, и при условии (2.58) получим

$$\|y(k)\|_L^2 \leq \|y(k-1)\|_L^2 + \frac{\tau}{2} \|f(k)\|_R^2, \quad (2.60)$$

суммируя неравенство (2.60) по $k' = 1, 2, \dots, k$, в силу второй части определения 2.12 схема (2.18) устойчива по правой части.

2.5 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом для параболического уравнения

Рассмотрим трехслойную симметричную схему (2.21) с весом для параболического уравнения из пункта 2.2.3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - y(k-1)] &= Ay^{(\sigma)} + f(k), \quad k=1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned}$$

2.5.1 Корректность дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом

Предварительно исследуем дифференциально-разностную схему (2.21) на корректность [74], в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ будем пользоваться нормой

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2, \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y_1 + y_0\|_{(1)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(2)}^2, \end{aligned} \tag{2.61}$$

которую в литературе называют составной нормой [67], $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ – другие нормы в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2.13. *Схема (2.21) корректна, если для малых $\tau \leq \tau_0$*

1) *при любых $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k=1, 2, \dots, K$) решение (2.21), (2.22) существует и единственно,*

2) *существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , не зависящие от τ и от выбора $y_0(x), y_1(x), f(k)$, что при любых $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k=1, 2, \dots, K$) имеет место оценка*

$$\|Y(k+1)\| \leq C_1 \|Y(1)\|_{(1^0)} + C_2 \|f(k)\|_{(1^1)}, \tag{2.62}$$

где $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от τ и любых $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k=1, 2, \dots, K$); $\|Y(1)\|_{(1^0)}$, $\|f(k)\|_{(1^1)}$ – нормы $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $L_2(\mathfrak{Z})$, соответственно.

Отметим, что оценка (2.62) и соотношение (2.61) означают равномерную непрерывность по переменной τ решения задачи (2.21), (2.22) от $y_0(x), y_1(x), f(k)$ ($k=1, 2, \dots, K$). Рассуждения следующего пункта показывают корректность трехслойной симметричной схемы с весами для параболического уравнения, а также ее устойчивость [74].

2.5.2 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной симметричной схемы с весом

Далее используются общепринятые обозначения [67, с. 350]:

$$y = y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1),$$

$$y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_{\tau} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \quad y_{\bar{\tau}} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}),$$

тогда соотношение (2.21) примет вид

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}) = Ay^{(\sigma)} + f(k), \quad y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}, \quad (2.63)$$

при этом для y , \hat{y} и \check{y} справедливы соотношения

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[\frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) + (\sigma - \frac{1}{2})(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[\frac{1}{2}(y^2 + \check{y}^2) + (\sigma - \frac{1}{2})(y - \check{y})^2 \right],$$

$$\frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) = \frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + \frac{1}{4}(\hat{y} - y)^2,$$

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[\frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + (\sigma - \frac{1}{4})(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[\frac{1}{4}(y + \check{y})^2 + (\sigma - \frac{1}{4})(y - \check{y})^2 \right].$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ введем составную норму:

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2 + (\sigma - \frac{1}{4})\|y(k+1) - y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}}^2 + (\sigma - \frac{1}{4})\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

считая $\sigma > \frac{1}{4}$, и получим представление

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \|Y(k+1)\|^2 - \|Y(k)\|^2, \quad (2.64)$$

очевидно неравенство

$$\|Y(k+1)\|^2 \geq \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Соотношение (2.63) умножим на выражение $2\tau y^{(\sigma)}$, приходим к равенству

$$\|Y(k+1)\|^2 + 2\tau \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left(\frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y^{(\sigma)}) \quad (2.65)$$

(здесь учитывается (2.64)). Таким образом, получим энергетическое тождество для трехслойной схемы (2.21), аналог классического энергетического тождества [67].

Учитывая неравенства (2.23), получим неравенство

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left(\frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx \geq 4c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ (см. неравенство Пуанкаре-Фридрихса в [34, с. 62]), где $c_0 = \text{const} > 0$, $c_1 = \text{const} > 0$ зависят только от $\text{meas } \mathfrak{S}$ и a_* , а также неравенство

$$2\tau(f(k), y^{(\sigma)}) \leq \tau c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

и из соотношения (2.65) приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\|^2 + 8\tau c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \tau c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Если установить $c_0 = 8c_1$, то получаем оценку

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{8c_1} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2, \quad (2.66)$$

и неравенство

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\| + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2},$$

при осуществлении процесса суммирования по $k' = 1, 2, \dots, k$ ($k \leq K-1$) неравенства (2.66).

Таким образом, схема (2.21) устойчива к малым изменениям $y_0(x)$, $y_1(x)$, $f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$), при выполнении соотношений (2.23), (2.24) и неравенства $\sigma > \frac{1}{4}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\| &\leq \frac{1}{2} \|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}} + \\ &+ \sqrt{\sigma - \frac{1}{4}} \|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}} + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Замечание 2.7. Из неравенства (2.67) следует: скорость сходимости схемы (2.21) равна $O(\tau^2)$ при $\sigma > \frac{1}{4}$.

Замечание 2.8. Сказанное имеет место для случая полунормы $\|Y\|$.

Рассмотрим в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ еще одну симметричную дифференциально-разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} [y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)] &= Ay^{(\sigma)} + f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \quad (2.68)$$

достаточно часто используемую в приложениях.

Подставляя в (2.68) $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{\bar{}}}$ и учитывая равенство $y_{\bar{\bar{}}} = \frac{1}{\tau^2} [y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)]$, получим

$$(I + \sigma\tau^2 A)y_{\bar{u}} + Ay = f(k),$$

и окончательно при $y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \bar{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{u}}$:

$$\mathbf{R}y_{\bar{u}} + \frac{1}{2}A(\hat{y} + \bar{y}) = f(k), \quad \mathbf{R} = I + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2 A. \quad (2.69)$$

Умножим соотношение (2.69) скалярно на $2\tau y_{i^*} = \tau(y_i + y_{\bar{i}}) = \hat{y} - \bar{y}$:

$$(\mathbf{R}(\hat{y} - \bar{y}), \hat{y} + \bar{y}) + \frac{1}{2}(A(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) = 2\tau(f(k), y_{i^*}). \quad (2.70)$$

Нетрудно заметить, что имеют место следующие соотношения:

$$1) \quad (\mathbf{R}(\hat{y} - \bar{y}), \hat{y} + \bar{y}) = (\mathbf{R}\hat{y}, \hat{y}) - (\mathbf{R}\bar{y}, \bar{y}),$$

$$2) \quad (A(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) = \frac{1}{2}[(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2(Ay_i, y_i)] - \\ - \frac{1}{2}[(A(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \tau^2(Ay_{\bar{i}}, y_{\bar{i}})].$$

Действительно, соотношение 1 вытекает из самосопряженности оператора \mathbf{R} , соотношение 2 – из следующих рассуждений.

Имеет место следующее соотношение ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$):

$$(A(v + z), v + z) + (A(v - z), v - z) = [(Av, v) + 2(Av, z) + (Az, z)] + \\ + [(Av, v) - 2(Av, z) + (Az, z)] = 2[(Av, v) + (Az, z)]$$

для любых элементов $v, z \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Отсюда

$$(Av, v) + (Az, z) = \frac{1}{2}(A(v + z), v + z) + \frac{1}{2}(A(v - z), v - z). \quad (2.71)$$

Положив в (2.71) $v = \hat{y}$, $z = y$, получим

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) = \frac{1}{2}[(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ - \frac{1}{2}[(A(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + (A(y - \bar{y}), y - \bar{y})].$$

Подставив в полученное соотношение выражения

$$(A(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(Ay_i, y_i), \quad (A(y - \bar{y}), y - \bar{y}) = \tau^2(Ay_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}),$$

приходим к соотношению 2.

Несложно заметить, что равенство (2.70), учитывая приведенные выше соотношения 1 и 2, принимает вид

$$\frac{1}{4}[(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}A)y_i, y_i)] - \\ - \frac{1}{4}[(A(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}A)y_{\bar{i}}, y_{\bar{i}})] = 2\tau(f(k), y_{i^*})$$

или, учитывая $\mathbf{R} = I + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2 A$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 A)y_t, y_t)] - \\ & - \frac{1}{4}[(A(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \tau^2((I + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 A)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] = 2\tau(f(k), y_{\rho}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Далее используется составная норма

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 = & \frac{1}{4}[(A(y(k+1) + y(k)), y(k+1) + y(k)) + \\ & + \tau^2((I + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 A)y_t, y_t)], \end{aligned}$$

с помощью которой из (2.72) следует соотношение

$$\|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{\rho}),$$

то есть энергетическое тождество для схемы (2.68). Эта схема устойчива при $\sigma > \frac{1}{4}$ и для нее можно получить оценку вида (2.67).

2.5.3 Слабая разрешимость дифференциальных систем без весов

Полученные в пункте 2.5.1 результаты ниже используются при установлении достаточных условий слабой разрешимости начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных уравнений математической физики, которые редуцируются к дифференциально-разностным системам (2.21), (2.68).

Будем использовать пространства $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T)$, $L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$, $L_2(\mathfrak{Z})$ (полное описание этих пространств представлено в разделе 2.1).

Учитывая условия (2.65) и (2.66), рассмотрим в $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + Ly(x,t) = F(x,t), \quad (2.73)$$

$$y|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (2.74)$$

в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T)$ рассмотрим эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + Ly(x,t) = F(x,t), \quad (2.75)$$

$$y|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad (2.76)$$

где $F(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$; $\varphi_0(x) = y_0(x)$, $\varphi_1(x) = y_1(x)$ в силу (2.24) и (2.71); $F(x, t)$ определяется по $f(x; k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) из (2.21) или (2.68) соотношениями $f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} F(x, t) dt \in L_2(\mathfrak{Z})$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Определение 2.14. Функция $y(x, t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$ – слабое решение эволюционной системы (2.73), (2.74), если имеет место соотношение

$$-\int_{\mathfrak{Z}_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \\ = \int_{\mathfrak{Z}} \varphi_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{Z}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt, \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T), \quad \eta(x, T) = 0,$$

$$\text{где } \ell_T(y, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}_T} \left(\sum_{\kappa, t=1}^n a_{\kappa t}(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_\kappa} + b(x) y(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt.$$

Определение 2.15. Функция $y(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T)$ – слабое решение эволюционной системы (2.75), (2.76), если имеет место соотношение

$$-\int_{\mathfrak{Z}_T} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \\ = \int_{\mathfrak{Z}} \varphi_1(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{Z}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T), \quad \eta(x, T) = 0,$$

при этом равенство $y|_{t=0} = \varphi_0(x)$ выполняется почти всюду на \mathfrak{Z} .

Приведем дальнейшие рассуждения для системы (2.73), (2.74), для системы (2.75), (2.76) они аналогичны. Имеет место следующий результат, определяющий основное свойство эволюционной задачи (2.73), (2.74).

С условиями (2.23), (2.24) эволюционная задача (2.73), (2.74) слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$.

В основе обоснования указанного результата лежит представление приближений $y_K(x, t)$ решения $y(x, t)$ системы (2.73), (2.74) решениями дифференциально-разностной системы (2.20), (2.21) при увеличении K . Определим приближения $y_K(x, t)$:

$$y_K(x, t) = y(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Очевидна принадлежность приближений $y_K(x, t)$ пространству $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$, в котором содержатся решения $y(x, t)$ и для $y_K(x, t)$ имеют место соотношения (2.67) а значит,

ограниченность норм $\|y_K\|_{\mathfrak{Z}_T} + \left\| \frac{\partial y_K}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{Z}_T}$, $\left\| \frac{\partial y_K}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{Z}_T}$ в совокупности:

$$\|y_k\|_{\mathfrak{S}_T} + \left\| \frac{\partial y_k}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{S}_T} \leq C^*, \quad \left\| \frac{\partial y_k}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{S}_T} = \left(\int_{\mathfrak{S}_T} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2.77)$$

$C^* = const > 0$ не зависит от τ .

Неравенства (2.77) гарантируют существование подпоследовательности $\{Y_k(x,t)\} \subset \{y_k(x,t)\}$, которая слабо сходится к $y(x,t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$. Остается показать, что $y(x,t)$ удовлетворяет системе (2.73), (2.74) в слабой постановке, иными словами – интегральному соотношению определения 2.14.

Определим функцию $F_k(x,t)$ по аналогии с функцией $y_k(x,t)$ соотношением

$$F_k(x,t) = f(x;k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

В качестве $\eta(x,t)$ в соотношении определения 2.14, возьмем функции из $C^1(\mathfrak{S}_{T+\tau})$, для которых $\eta|_{\partial\Gamma_T} = 0$, $\eta|_{t \in [T, T+\tau]} \equiv 0$ ($C^1(\mathfrak{S}_{T+\tau})$ плотно в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$). По $\eta(x,t)$ построим $\eta(k)$:

$$\eta(k) = \eta(x, k\tau), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

и далее, $\eta_k(x,t)$, как это сделано выше для $y_k(x,t)$ и $F_k(x,t)$:

$$\eta_k(x,t) = \eta(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

очевидно, $\eta_k(x,t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$. Аналогично формируются производные $\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial t}$

функции $\eta_k(x,t)$, которые, как нетрудно убедиться, сходятся вместе с $\eta_k(x,t)$ к $\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}$,

$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}$ и $\eta(x,t)$ равномерно в $\overline{\mathfrak{S}_T}$ при $K \rightarrow \infty$. Дальнейшие рассуждения предваряются

заменой в интегральном соотношении определения 2.14 функций $y(x,t)$, $F(x,t)$, $\eta(x,t)$ на соответствующие функции $y_k(x,t)$, $F_k(x,t)$, $\eta_k(x,t)$. Несложно показать, что в полученном интегральном соотношении возможен переход к пределу по подпоследовательности $\{Y_k(x,t)\}$ (напомним, что $Y_k(x,t)$ слабо сходится к $y(x,t)$ при $K \rightarrow \infty$) что означает получение интегрального соотношения определения 2.14 относительно функции $y(x,t)$.

Эти же рассуждения лежат в основе обоснования следующего результата.

С условиями (2.23), (2.24) эволюционная задача (2.75), (2.76) слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

2.6 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных несимметричных схем с весами для параболического уравнения

Рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную схему (2.27) с весами в пункте 2.2.4

$$y_i^{(\sigma)} + Ly^{(\sigma_1, \sigma_2)} = f(k), \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x).$$

В инженерной практике потоковые явления, возникающие в процессе транспортировки (переноса) сплошной среды и газов по сетевому или магистральному носителям [87], определяются как стабильные с установившимся режимом, не превышающие определенного уровня отклонений от технологических норм, если уровень отклонения количественных характеристик этих явлений от допустимых значений не приводит к заметному изменению установленных технологических норм. Теоретической базой представляемого исследования явилась общая теория устойчивости разностных схем [83] (см. также [24, 84]), прежде всего схем, представляющих практический интерес (см., например [67, с.382]), с той лишь разницей, что дифференциально-разностная система рассматривается в классе слабых решений [88]. Используется трехслойная дифференциально-разностная схема с весовыми параметрами (совокупность дифференциально-разностных схем) и эллиптическим оператором, определенным в соболевском пространстве функций с носителями в ограниченной сетеподобной области n -мерного евклидова пространства. Ставится и решается вопрос отыскания достаточных условий, гарантирующих устойчивость всех схем совокупности и определения множества значений этих параметров.

2.6.1 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных несимметричных схем с весами

Для дифференциально-разностной схемы (2.27) получим условия, гарантирующие свойство устойчивости и формирование оценок для различных норм функций $y(k)$, $k = 0, 1, \dots, K$, пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Предварительно приведем схему (2.27) к каноническому виду. Вводя операторные обозначения в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$By = Iy + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)Ly, \quad Cy = \frac{1}{2}(2\sigma - 1)Iy, \quad Ry = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)Ly$$

(I – единичный оператор) и учитывая соотношения (2.25), (2.26), получим

$$By_i^\circ + \tau Cy_{\bar{i}} + \tau^2 Ry_{\bar{i}} + Ly = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x). \quad (2.78)$$

Замечание 2.9 Введение весов σ , σ_1 , σ_2 в описании схемы (2.27) и далее в (2.78) обусловило зависимость от них операторных коэффициентов B , C , R . Последнее открывает возможность охватить анализом достаточно широкую совокупность несимметричных

трехслойных дифференциально-разностных схем. Заметим также, что при $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ трехслойная дифференциально-разностная схема (2.28) определяется классической симметричной канонической формой (2.78): $B = I$, $C = 0$, $R = L$. Ее анализ аналогичен представленному в монографии [67, с. 351] с той лишь разницей, что все рассмотрения осуществляются для операторов B , C , R в соболевском пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Определение 2.16 Совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $k = 2, \dots, K$, называется слабым решением системы (2.28), (2.78), если для каждого $y(k)$ удовлетворяются тождества

$$\int_{\mathfrak{S}} (By_{i^{\circ}} + Cy_{\bar{i}} + Ry_{\bar{i}})\eta(x)dx + \ell(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k)\eta(x)dx, \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x),$$

при произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Учитывая вытекающее из (2.25) соотношение

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{i}},$$

преобразуем схему (2.78) к виду

$$By_{i^{\circ}} + \tau Cy_{\bar{i}} + \tau^2(R - \frac{1}{2}L)y_{\bar{i}} + \frac{1}{2}L(\hat{y} + \check{y}) = f(k), \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x).$$

Умножим скалярно обе части (2.79) на $2\tau y_{i^{\circ}} = \tau(y_i + y_{\bar{i}}) = \hat{y} - \check{y}$ и, учитывая (см. (2.25))

$\tau y_{\bar{i}} = y_i - y_{\bar{i}}$, получим

$$2\tau(By_{i^{\circ}}, y_{i^{\circ}})_{\mathfrak{S}} + \tau(C(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) +$$

$$+ \tau^2((R - \frac{1}{2}L)(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) + \frac{1}{2}(L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(f(k), y_{i^{\circ}}).$$

Так как L , R и C – самосопряженные по Лагранжу операторы, имеют место соотношения:

$$((R - \frac{1}{2}L)(y_i - y_{\bar{i}}), (y_i + y_{\bar{i}})) = ((R - \frac{1}{2}L)y_i, y_i) - ((R - \frac{1}{2}L)y_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}),$$

$$(C(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) = (Cy_i, y_i) - (Cy_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}),$$

$$(L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = (L\hat{y}, \hat{y}) - (L\check{y}, \check{y}),$$

$$(L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = [L(\hat{y}, \hat{y}) + L(y, y)] - [L(y, y) + L(\check{y}, \check{y})].$$

Кроме того, при любых $w, z \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ в силу доказательства леммы 2.3 следует

$$(Lw, w) + (Lz, z) = \frac{1}{2}(L(w+z), w+z) + \frac{1}{2}(L(w-z), w-z).$$

Полагая в полученном соотношении $w = \hat{y}$, $z = y$, а затем $w = y$, $z = \check{y}$, преобразуем

выражение $(L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y})$, используя последнее соотношение в (2.81):

$$\begin{aligned} (L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) &= \frac{1}{2}[(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (L(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ &\quad - \frac{1}{2}[(L(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + (L(y - \bar{y}), y - \bar{y})]. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение вместе с первыми двумя соотношениями из (2.81) в равенство (2.80), учитывая при этом $(L(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(Ly_i, y_i)$ и $(L(y - \bar{y}), y - \bar{y}) = \tau^2(Ly_{\bar{i}}, y_{\bar{i}})$, приходим к соотношению, которое является энергетическим тождеством для изучаемой трехслойной схемы:

$$\begin{aligned} 2\tau(By_{i^{\circ}}, y_{i^{\circ}}) + \left[\frac{1}{4}(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \left(\tau^2\left(R - \frac{1}{4}L\right) + \tau C\right)y_i, y_i\right] &= \\ = \left[\frac{1}{4}(L(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \left(\tau^2\left(R - \frac{1}{4}L\right) + \tau C\right)y_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}\right] + 2\tau(f(k), y_{i^{\circ}}). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Полученное соотношение является аналогом уравнения энергетического баланса для эволюционной дифференциальной системы в области $\mathfrak{S} \times (0, T)$ изменения переменных x и t , соответствующей системе (2.27), (2.28) [67, с.381].

Все последующие утверждения представлены для схемы (2.78), очевидно, они имеют место и для (2.27). Определим понятие устойчивости трехслойной дифференциально-разностной схемы (2.78), при этом будем использовать специальную норму (составную норму [67, с.383]) вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2 + \|y_i\|_{(3)}^2, \quad (2.83)$$

для элементов $Y(k+1)$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}) \oplus \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, где $y(k+1)$, $y(k)$ являются элементами пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, а $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(3)}$ – некоторые нормы $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$, соответственно.

Определение 2.17 *Схема (2.78) устойчивая, если для нее можно построить норму вида (2.83), а также если при достаточно малом τ_0 и любом $\tau \leq \tau_0$ существуют $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$, которые не зависят от τ , $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(k) := f(x; k)$ ($k = \overline{1, K-1}$) такие, что имеют место соотношения*

$$\|Y(k+1)\| \leq C_1 \|Y(1)\| + C_2 \|f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|\varphi_1 + \varphi_0\|_{(1)}^2 + \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{(2)}^2 + \|\varphi_{\bar{i}}(0)\|_{(3)}^2,$$

$$\text{здесь } \varphi_{\bar{i}}(0) = \frac{1}{\tau}(\varphi_1 - \varphi_0), \quad \|f(k)\|_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2}.$$

Исходя из представления составной нормы (2.83), тождество (2.82) примет вид

$$2\tau(By_{i^{\circ}}, y_{i^{\circ}}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{i^{\circ}}), \quad (2.84)$$

где

$$\begin{aligned}\|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(k+1)+y(k)), y(k+1)+y(k)) + \\ &\quad + (\tau^2(R-\frac{1}{4}L)y_t, y_t) + \tau(Cy_t, y_t), \\ \|Y(k)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(k)+y(k-1)), y(k)+y(k-1)) + \\ &\quad + (\tau^2(R-\frac{1}{4}L)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + \tau(Cy_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}).\end{aligned}$$

В случае $2\sigma - 1 \geq 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 \geq 0$ и $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}B &= I + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)L > 0, \quad C = \frac{1}{2}(2\sigma - 1)I \geq 0, \\ R - \frac{1}{4}L &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})L > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k+1)+y(k)\|_L^2 + \tau^2\|y_t\|_{R-\frac{1}{4}L}^2 + \tau\|y_t\|_C^2, \\ \|Y(k)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k)+y(k-1)\|_L^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}\|_{R-\frac{1}{4}L}^2 + \tau\|y_{\bar{t}}\|_C^2, \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(1)+y(0)\|_L^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}(0)\|_{R-\frac{1}{4}L}^2 + \tau\|y_{\bar{t}}(0)\|_C^2, \\ y_{\bar{t}}(0) &= \frac{1}{\tau}(y(1)-y(0));\end{aligned}\tag{2.85}$$

здесь и везде далее символом $\|\cdot\|_F$ обозначена операторная норма F , для нормы $\|\cdot\|$ пространства $L_2(\mathfrak{Z})$ используется стандартное представление через скалярное произведение (\cdot, \cdot) . Из сказанного вытекает основное свойство схемы (2.78).

Пусть параметры σ и σ_1, σ_2 удовлетворяют условиям $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$.

Тогда дифференциально-разностная схема (2.78) устойчива. Для составных норм $\|Y(k+1)\|$ и $\|Y(1)\|$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|Y(k+1)\| &\leq \|Y(1)\| + \|f(k)\|_{2,1}, \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4}\|\varphi_1 + \varphi_0\|_L^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}(0)\|_{R-\frac{1}{4}L}^2 + \tau\|y_{\bar{t}}(0)\|_C^2.\end{aligned}\tag{2.86}$$

здесь $y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau}(\varphi_1(x) - \varphi_0(x))$, $\|f(k)\|_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k'=1}^k \tau\|f(k')\|^2\right)^{1/2}$.

Действительно, так как $\sigma_1 \geq \sigma_2$, то $I < B$, а значит, $2\tau\|y_{\bar{t}}\|^2 \leq 2\tau(B y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})$. Заметим также, что справедливо соотношение

$$2\tau(f(k), y_i) \leq \alpha\tau \|y_i\|^2 + \frac{\tau}{\alpha} \|f(k)\|^2, \quad (2.87)$$

с произвольной постоянной $\alpha > 0$, не зависящей от τ . Положим в (2.87) $\alpha = 2$, тогда из (2.84) вытекает неравенство

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{2} \|f(k)\|^2.$$

Просуммировав полученное неравенство по k' от 1 до k , получим

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &\leq \|Y(1)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \leq \\ &\leq \left(\|Y(1)\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2} \right)^2, \end{aligned}$$

откуда, учитывая представление $\|Y(1)\|^2$ в (2.85), следует утверждение теоремы.

Составные нормы $\|Y\|$ очень естественны при использовании соотношений, связанных с энергетическим тождеством (2.82). В анализе вопросов управляемости дифференциально-разностными системами типа (2.28), (2.78), а также при анализе прикладных задач (задачи оптимального управления, стабилизации и пр.) особую важность приобретают априорные оценки в энергетической норме $\|\cdot\|_L$, норме пространства состояний $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ системы (2.78), а также в норме пространстве $L_2(\mathfrak{Z})$. Ниже получены такие оценки, исходя из базового тождества (2.84), учитывая при этом (2.85) и условия (2.14).

Исходя из представления нормы $\|Y(k+1)\|^2$ в соотношениях (2.85), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4} (L(y(k+1) + y(k)), y(k+1) + y(k)) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}) L(y(k+1) - y(k)), y(k+1) - y(k) \right) + \frac{1}{2} (2\sigma - 1) \tau (y_i, y_i) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|y(k+1) + y(k)\|_L^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}) \|y(k+1) - y(k)\|_L^2 \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \theta_* \left[\|y(k+1) + y(k)\|_L^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_L^2 \right] = \\ &= \theta_* \left[\|y(k+1)\|_L^2 + \|y(k)\|_L^2 \right] \geq \theta_* \|y(k+1)\|_L^2, \end{aligned}$$

где $\theta_* = \min\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\}$, при этом $\theta_* > 0$. Таким образом приходим к оценке

$$\sqrt{\theta_*} \|y(k+1)\|_L \leq \|Y(k+1)\|. \quad (2.88)$$

Далее, исходя из равенства

$$\begin{aligned} \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(1)+y(0)), y(1)+y(0)) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})L(y(1)-y(0)), y(1)-y(0)\right) + \frac{1}{2}(2\sigma-1)\tau(y_{\bar{r}}(0), y_{\bar{r}}(0)) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \|y(1)+y(0)\|_L^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}) \|y(1)-y(0)\|_L^2 \right] + (2\sigma-1)\tau \|y_{\bar{r}}(0)\|^2, \end{aligned}$$

получаем оценку нормы $\|Y(1)\|$:

$$\begin{aligned} \|Y(1)\| &\leq \frac{1}{2} \|y(1)+y(0)\|_L + \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}} \|y(1)-y(0)\|_L + \\ &+ \sqrt{(2\sigma-1)\tau} \|y_{\bar{r}}(0)\|. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Подставляя в (2.86) оценки (2.88) и (2.89) (при $y(0) = \varphi_0(x)$, $y(1) = \varphi_1(x)$), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|_L &\leq \frac{1}{2\sqrt{\theta_*}} \|\varphi_1 + \varphi_0\|_L + \sqrt{\frac{1}{2\theta_*} (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_L + \\ &+ \sqrt{\frac{2\sigma-1}{\theta_*}} \tau \|y_{\bar{r}}(0)\| + \frac{1}{\sqrt{2\theta_*}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.90)$$

где $y_{\bar{r}}(0) = \frac{1}{\tau}(\varphi_1(x) - \varphi_0(x))$. Таким образом, получаем следующее свойство дифференциально-разностной схемы (2.78).

Если выполнены условия основного свойства схемы (2.78), то для решения дифференциально-разностной системы (2.78) справедлива оценка (2.90).

Замечание 2.10 Для удобства использования в анализе задач прикладного характера неравенство (2.90) можно несколько изменить, оценив $\|Y(1)\|^2$ с помощью энергетических норм $\|y(0)\|_L^2$ и $\|y(1)\|_L^2$:

$$\begin{aligned} \|Y(1)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \theta^* \left[\|y(1)+y(0)\|_L^2 + \|y(1)-y(0)\|_L^2 + \tau \|y_{\bar{r}}(0)\|^2 \right] = \\ &= \theta^* \left[\|y(1)\|_L^2 + \|y(0)\|_L^2 + \frac{1}{2} \tau \|y_{\bar{r}}(0)\|^2 \right], \end{aligned}$$

где $\theta^* = \max\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}, 2\sigma - 1\}$. Тогда в силу полученного неравенства (2.89) принимает вид

$$\|Y(1)\| \leq \sqrt{\theta^*} \left[\|y(1)\|_L + \|y(0)\|_L + \frac{1}{2} \tau \|y_{\bar{r}}(0)\| \right], \quad (2.91)$$

а оценка (2.90) представляется в виде

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|_L &\leq \sqrt{\frac{\theta^*}{\theta_*}} \left[\|y(1)\|_L + \|y(0)\|_L + \frac{1}{2} \tau \|y_{\bar{r}}(0)\| \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\theta_*}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Далее установим для слабого решения дифференциально-разностной системы (2.78) оценки в нормах $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^{(1)}$ пространств $L_2(\mathfrak{S})$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, соответственно.

Пусть выполнены условия $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$. Тогда для решения дифференциально-разностной схемы (2.78) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\| &\leq C_1 \|\varphi_1 + \varphi_0\|^{(1)} + C_2 \|\varphi_1 - \varphi_0\|^{(1)} + C_3 \sqrt{T} \|y_{\bar{r}}(0)\| + \\ &+ 4 \sqrt{\frac{T}{\alpha^*(2-\alpha^*)}} \|f(k)\|_{2,1}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

здесь $y_{\bar{r}}(0) = \frac{1}{\tau}(\varphi_1(x) - \varphi_0(x))$, $\|f(k)\|_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2}$, постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят

от τ и определены соотношениями: $C_1^2 = \max\{2T\alpha^*, 2T\beta + 1\}$,

$$C_2^2 = \max\{4T(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\alpha^*, 4T(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\beta + 1\}, \quad C_3^2 = 4T^2(2\sigma - 1).$$

Обоснование неравенства (2.93) основано на аналогичных действиях, приведенных в пункте 2.4.2 раздела 2.4.. Обратимся к тождеству (2.84), используя неравенство (2.87) при $\alpha = \alpha^*$, $0 < \alpha^* < 2$. В результате, учитывая первое неравенство в соотношениях (2.85), приводящее к $L > I$ при $2\sigma - 1 > 0$, получим

$$(2 - \alpha^*)\tau \|y_{\bar{r}'}(k)\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*} \|f(k)\|^2.$$

Суммируя полученное неравенство по k' от 1 до k , приходим к неравенству

$$(2 - \alpha^*) \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{\bar{r}'}(k')\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(1)\|^2 + \frac{1}{\alpha^*} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2$$

или

$$\sum_{k'=1}^k \tau \|y_{\bar{r}'}(k')\|^2 \leq \|Y(1)\|^2 + \frac{1}{\alpha^*(2-\alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2, \quad (2.94)$$

здесь $y_{\bar{r}'}(k') = \frac{1}{\tau}(y(k'+1) - y(k'-1))$.

Оценим снизу сумму, стоящую в левой части (2.94).

Заметим, что

$$y(k+1) + y(k) = 2\tau \sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k') + \tilde{y}, \quad \tilde{y} = y(1) + y(0),$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \|y(k+1) + y(k)\|^2 &= \left(2\tau \sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k') + \tilde{y} \right)^2 \leq \\ &\leq 2 \left(4\tau^2 \left(\sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k') \right)^2 + \tilde{y}^2 \right) \leq 8\tau^2 k \sum_{k'=1}^k \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2 + 2\|\tilde{y}\|^2, \end{aligned}$$

и тогда получаем

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 \leq 8k\tau \sum_{k'=1}^k \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2 + 2\|\tilde{y}\|^2. \quad (2.95)$$

Далее, для $\mathcal{G}(k'+1) = y(k'+1) - y(k')$, $\mathcal{G}(1) = y(1) - y(0) = \tilde{y}$, имеют место соотношения $\mathcal{G}(k'+1) = 2\tau y_{i^{\circ}}(k') - \mathcal{G}(k')$, $k' = 1, 2, \dots, k$, откуда следуют неравенства

$$\|\mathcal{G}(k'+1)\| \leq 2\tau \|y_{i^{\circ}}(k')\| + \|\mathcal{G}(k')\|, \quad k' = 1, 2, \dots, k.$$

Суммируя последние по k' от 1 до k , приходим к неравенству

$$\|\mathcal{G}(k+1)\| = \|y(k+1) - y(k)\| \leq 2 \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\| + \|\tilde{y}\|,$$

последующему неравенству

$$\begin{aligned} \|y(k+1) - y(k)\|^2 &\leq \left(2 \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\| + \|\tilde{y}\| \right)^2 \leq \\ &\leq 8\tau^2 \left(\sum_{k'=1}^k \|y_{i^{\circ}}(k')\| \right)^2 + 2\|\tilde{y}\|^2 \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\|y(k+1) - y(k)\|^2 \leq 8k\tau \sum_{k'=1}^k \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2 + 2\|\tilde{y}\|^2. \quad (2.96)$$

Складывая неравенства (2.95) и (2.96), учитывая при этом очевидное тождество

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 + \|y(k+1) - y(k)\|^2 = 2(\|y(k+1)\|^2 + \|y(k)\|^2), \quad (2.97)$$

и соотношение (2.94), приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|^2 &\leq \|y(k+1)\|^2 + \|y(k)\|^2 \leq \|\tilde{y}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2 + 8k\tau \sum_{k'=1}^k \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2 \leq \\ &\leq \|\tilde{y}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2 + 8k\tau \left(\|Y(1)\|^2 + \frac{1}{\alpha^* (2 - \alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right) \end{aligned}$$

откуда следует неравенство ($k\tau \leq T$)

$$\|y(k+1)\|^2 \leq \|\tilde{y}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2 + 8T \|Y(1)\|^2 + \frac{16T}{\alpha^* (2 - \alpha^*)} \|f(k)\|_{2,1}^2, \quad (2.98)$$

так как $\|f(k)\|_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 \right)^{1/2}$.

Оценим $\|Y(1)\|^2$, исходя из представления (2.86) и учитывая условия (2.14):

$$\begin{aligned} \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|\varphi_1 + \varphi_0\|_L^2 + \tau^2 \|y_{\bar{\tau}}(0)\|_{R-\frac{1}{4}L}^2 + \tau \|y_{\bar{\tau}}(0)\|_C^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(a^* \|(\varphi_1 + \varphi_0)_x\|^2 + \beta \|\varphi_1 + \varphi_0\|^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \left(a^* \|(\varphi_1 - \varphi_0)_x\|^2 + \beta \|\varphi_1 - \varphi_0\|^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (2\sigma - 1) \tau \|y_{\bar{\tau}}(0)\|^2, \quad y_{\bar{\tau}}(0) = \frac{1}{\tau} (\varphi_1 - \varphi_0). \end{aligned}$$

Полученная оценка приводит к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1 + \varphi_0\|^2 + \|\varphi_1 - \varphi_0\|^2 + 8T \|Y(1)\|^2 \leq \\ &\leq \|\varphi_1 + \varphi_0\|^2 + \|\varphi_1 - \varphi_0\|^2 + 2T \left(a^* \|(\varphi_1 + \varphi_0)_x\|^2 + \beta \|\varphi_1 + \varphi_0\|^2 \right) + \\ &+ 4T \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \left(a^* \|(\varphi_1 - \varphi_0)_x\|^2 + \beta \|\varphi_1 - \varphi_0\|^2 \right) + 4T^2 (2\sigma - 1) \|y_{\bar{\tau}}(0)\|^2, \end{aligned}$$

которое при

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \max\{2Ta^*, 2T\beta + 1\}, \\ C_2^2 &= \max\{4T(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})a^*, 4T(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\beta + 1\}, \\ C_3^2 &= 4T^2(2\sigma - 1) \end{aligned}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1 + \varphi_0\|^2 + \|\varphi_1 - \varphi_0\|^2 + 8T \|Y(1)\|^2 \leq \\ &\leq C_1^2 \|\varphi_1 + \varphi_0\|^{(1)^2} + C_2^2 \|\varphi_1 - \varphi_0\|^{(1)^2} + C_3^2 T \|y_{\bar{\tau}}(0)\|^2. \end{aligned}$$

Последнее после подстановки в соотношение (2.98) дает оценку

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|^2 &\leq C_1^2 \|\varphi_1 + \varphi_0\|^{(1)^2} + C_2^2 \|\varphi_1 - \varphi_0\|^{(1)^2} + C_3^2 T \|y_{\bar{\tau}}(0)\|^2 + \\ &+ \frac{16T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} \|f(k)\|_{2,1}^2, \end{aligned}$$

в норме $\|\cdot\|^{(1)}$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, а значит, оценку (2.93). Теорема доказана.

Замечание 2.11 Оценка (2.93) может быть представлена в нормах $\|\varphi_0\|^{(1)}$ и $\|\varphi_1\|^{(1)}$, используя тождество (2.97):

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\| &\leq \widetilde{C}_1 \|\varphi_0\|^{(1)} + \widetilde{C}_2 \|\varphi_1\|^{(1)} + \widetilde{C}_3 \sqrt{T} \|y_{\bar{\tau}}(0)\| + \\ &+ 4 \sqrt{\frac{T}{\alpha^*(2-\alpha^*)}} \|f(k)\|_{2,1}, \end{aligned}$$

Приведенные рассуждения можно несколько упростить, а полученную оценку уточнить, если в силу линейности дифференциально-разностной системы (2.78) слабое решение ее представить в виде $y(k) = y_o(k) + y_f(k)$, $k = 2, 3, \dots, K$, где $y_o(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение однородной задачи

$$By_{\bar{t}} + \tau Cy_{\bar{n}} + \tau^2 Ry_{\bar{n}} = 0, \quad y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \quad (2.99)$$

а $y_f(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение неоднородной задачи

$$By_{\bar{t}} + \tau Cy_{\bar{n}} + \tau^2 Ry_{\bar{n}} + Ly = f(k), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (2.100)$$

при рассмотрении уравнений (2.99) и (2.100) для каждого фиксированного k ($k = 1, 2, \dots, K-1$).

Далее для схемы (2.78) введем понятие устойчивости по начальным данным, каковыми являются $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и правой части, т. е. по $f(k)$ ($k = \overline{1, K-1}$).

Определение 2.18 Схема (2.78) устойчивая

1) по $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, если для (2.99) справедливо соотношение

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C_1 \|\varphi_1\|^{(1)} + C_2 \|\varphi_0\|^{(1)} + C_3 \|y_{\bar{t}}(0)\|, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall \varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

2) по $f(k)$ ($k = \overline{1, K-1}$), если для (2.100) справедливо соотношение

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C_4 \|f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall f(k) (k = \overline{1, K-1}) \in L_2(\mathfrak{Z}),$$

$C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$, $C_3 = \text{const} > 0$, $C_4 = \text{const} > 0$ не зависят от τ .

Нетрудно показать выполнение основного свойства схемы (2.80).

Пусть выполнены условия $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$. Тогда дифференциально-разностная схема (2.80) является устойчивой в смысле определения 2.18.

Это следует из выполнения условий $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$, а также из соотношения (2.84) совместно с неравенством (2.87).

Устойчивость по начальным данным. Условия $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$ гарантируют устойчивость дифференциально-разностной схемы (2.99) и выполнение оценки

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\|, \quad (2.101)$$

вытекающей из соотношения (2.86) при $f(k) = 0$.

Используем оценки (2.88), (2.91) ($f(k) = 0$) и нормы $\|Y(k+1)\|$ совместно с $\|Y(1)\|$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\theta_*} \|y(k+1)\|_L &\leq \|Y(k+1)\|, \\ \|Y(1)\| &\leq \sqrt{\theta^*} \left[\|y(1)\|_L + \|y(0)\|_L + \frac{T}{2} \|y_{\bar{t}}(0)\| \right]. \end{aligned}$$

Тогда оценка (2.101) представляется в виде

$$\|y(k+1)\|_L \leq \sqrt{\frac{\theta^*}{\theta_*}} \left[\|y(1)\|_L + \|y(0)\|_L + \frac{T}{2} \|y_{\bar{r}}(0)\| \right], \quad k = \overline{1, K-1},$$

что и доказывает устойчивость схемы (2.99) по начальным данным; постоянные θ_* и θ^* определены соотношениями $\theta_* = \min\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\}$, $\theta^* = \max\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}, 2\sigma - 1\}$.

Полученную априорную оценку можно описать в терминах нормы $\|\cdot\|^{(1)}$ и эквивалентной ей нормы $\|\cdot\|_{\square}^{(1)}$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ (см. замечание 2.10), используя неравенства

$$a_* \|y(k+1)\|_{\square}^{(1)^2} = a_* \left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq \|y(k+1)\|_L^2$$

и

$$\begin{aligned} \|y(1)\|_L^2 + \|y(0)\|_L^2 + \frac{T}{2} \|y_{\bar{r}}(0)\|^2 &= \|\varphi_1\|_L^2 + \|\varphi_0\|_L^2 + \frac{T^2}{4} \|y_{\bar{r}}(0)\|^2 \leq \\ &\leq a^* \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right\|^2 + \beta \|\varphi_1\|^2 + a^* \left\| \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\|^2 + \beta \|\varphi_0\|^2 + \frac{T^2}{4} \|y_{\bar{r}}(0)\|^2 \leq \\ &\leq \mathcal{G}^2 \left(\|\varphi_1\|^{(1)^2} + \|\varphi_0\|^{(1)^2} \right) + \frac{T^2}{4} \|y_{\bar{r}}(0)\|^2, \end{aligned}$$

где $\mathcal{G}^2 = \max\{a^*, \beta\}$. Таким образом приходим к оценке

$$\|\cdot\|^{(1)} \leq C_1 \left(\|\varphi_1\|^{(1)} + \|\varphi_0\|^{(1)} \right) + C_2 \|y_{\bar{r}}(0)\|,$$

с положительными постоянными C_1, C_2 , зависящими только от a^*, β, \mathcal{G} и T .

Устойчивость по правой части. Обратимся к анализу задачи (2.100) и проведем аналогичные рассуждения, учитывая при этом $y(0) = y(1) = 0$, а значит $Y(1) = 0$.

Исходя из тождества (2.84), используя неравенство (2.87) при $\alpha = \alpha^*$, $0 < \alpha^* < 2$, и учитывая первое неравенство (2.85), получим

$$(2 - \alpha^*) \tau \|y_{r^c}\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leq \frac{\tau}{\alpha^*} \|f(k)\|^2.$$

После суммирования полученного неравенства по k' от 1 до k , получаем

$$(2 - \alpha^*) \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{r^c}(k')\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^*} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2$$

и

$$\sum_{k'=1}^k \tau \|y_{r^c}(k')\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^* (2 - \alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2, \quad (2.102)$$

здесь $y_{i^{\circ}}(k') = \frac{1}{\tau}(y(k'+1) - y(k'-1))$.

Оценим снизу сумму, стоящую в левой части (2.102). Заметим, что

$y(k+1) + y(k) = 2\tau \sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k')$, откуда следует

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 = \left(2\tau \sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k')\right)^2 \leq 4\tau^2 \left(\sum_{k'=1}^k y_{i^{\circ}}(k')\right)^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2,$$

а значит,

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2. \quad (2.103)$$

Для $\zeta(k'+1) = y(k'+1) - y(k')$, $\zeta(1) = y(1) - y(0) = 0$, справедливы соотношения $\zeta(k'+1) = 2\tau y_{i^{\circ}}(k') - \zeta(k')$, $k' = 1, 2, \dots, k$, и неравенства

$$\|\zeta(k'+1)\| \leq 2\tau \|y_{i^{\circ}}(k')\| + \|\zeta(k')\|, \quad k' = 1, 2, \dots, k.$$

Суммируя последнее по индексу $k' = 1, 2, \dots, k$, приходим к соотношению

$$\|\zeta(k+1)\| = \|y(k+1) - y(k)\| \leq 2 \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|,$$

или

$$\|y(k+1) - y(k)\|^2 \leq 4 \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|\right)^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2,$$

окончательно получаем

$$\|y(k+1) - y(k)\|^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2. \quad (2.104)$$

Складывая неравенства (2.103) и (2.104), учитывая при этом очевидное тождество

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 + \|y(k+1) - y(k)\|^2 = 2(\|y(k+1)\|^2 + \|y(k)\|^2),$$

и соотношение (2.102), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} 2\|y(k+1)\|^2 &\leq 2(\|y(k+1)\|^2 + \|y(k)\|^2) \leq \\ &\leq 8k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_{i^{\circ}}(k')\|^2 \leq \frac{8k\tau}{\alpha^*(2-\alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2, \\ \|y(k+1)\|^2 &\leq 4 \frac{T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 = 4 \frac{T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} \|f(k)\|_{2,1}^2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Если в тождестве (2.84) использовать соотношение (2.87) при $\alpha = 2$, то приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*} \|f(k)\|^2,$$

после суммирования которого по k' от 1 до k , получаем

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 = \frac{1}{2} \|f(k)\|_{2,1}^2. \quad (2.106)$$

Из (2.88) следует неравенство

$$\theta_*^2 \left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq \theta_* \|y(k+1)\|_L^2 \leq \|Y(k+1)\|^2,$$

подставляя которое в (2.106), приходим к неравенству

$$\left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{2\theta_*^2} \|f(k)\|_{2,1}^2. \quad (2.107)$$

Сумма соотношений (2.105) и (2.107)

$$\begin{aligned} & \|y(k+1)\|^2 + \left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 = \\ & = \|y(k+1)\|^{(1)^2} \leq \left(\frac{4T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} + \frac{1}{2\theta_*^2} \right) \|f(k)\|_{2,1}^2, \quad k = \overline{1, K-1}, \end{aligned}$$

дает оценку $y(k+1)$ в норме $\|\cdot\|^{(1)}$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$:

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C \|f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

с положительной постоянной C , зависящей только от α^* и θ_* .

2.6.2 Слабая разрешимость дифференциальной системы без весов

Как и в пункте 2.6.1 полученные результаты используются для получения условий слабой разрешимости исходной начально-краевой задачи, соответствующей системе (2.27), (2.28). Будем использовать пространства $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$, $L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$, $L_2(\mathfrak{Z})$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}_T)$ (полное описание этих пространств представлены в разделе 2.1).

В пространстве $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$, учитывая условия (2.14) и (2.29), будем искать решение $u(x,t)$ дифференциальной системы

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + Ly(x,t) = F(x,t), \quad (2.108)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$y|_{x \in \partial \mathfrak{Z}_T} = 0, \quad (2.109)$$

где $F(x,t) \in L_{2,1}(\mathfrak{Z}_T)$; функции $f(x;k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) из (2.27) и $F(x,t)$ связаны равенствами

$$f(x;k) := f_\tau(x;k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} F(x,t) dt \in L_2(\mathfrak{Z}), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Определение 2.19 Функция $y(x,t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ – слабое решение (2.108), (2.109), если имеет место соотношение

$$-\int_{\mathfrak{S}_T} y(x,t) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} \varphi(x) \eta(x,0) dx + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x,t) \eta(x,t) dx dt,$$

$$\forall \eta(x,t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T), \quad \eta(x,T) = 0,$$

здесь $\ell_T(y, \eta) = \int_{\mathfrak{S}_T} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x) y(x,t) \eta(x,t) \right) dx dt$.

Используя решение дифференциально-разностной системы (2.27), (2.28), введем функцию $y_K(x,t) : y_K(x,t) = y(k)$, $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$, $k=1,2,\dots,K$. Очевидно, $y_K(x,t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, $y_K(x,t)$ удовлетворяет неравенствам (2.14), (2.29) и справедливо неравенство

$$\|y_K\|_{\mathfrak{S}_T} + \left\| \frac{\partial y_K}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{S}_T} \leq C^*,$$

$C^* = const > 0$ не зависит от τ . Функция $F_K(x,t)$ имеет аналогичное представление: $F_K(x,t) = f(x;k)$, $t \in ((k-1)\tau, k\tau]$, $k=1,2,\dots,K$. Устремим K к бесконечности, значит, $\tau \rightarrow 0$.

Тогда, учитывая (2.107), из последовательности $\{y_K(x,t)\}$ выделим подпоследовательность $\{Y_K(x,t)\}$, которая будет сходиться к $y(x,t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$. Покажем, что $y(x,t)$ является слабым решением дифференциальной системы (2.108), (2.109). Для этого установим, что $y(x,t)$ удовлетворяет тождеству определения 2.19 для любой $\eta(x,t) \in C^1(\mathfrak{S}_{T+\tau})$, которая удовлетворяет условиям примыкания (2.6) при любых $t \in (0,T)$ (см. выше определение пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ и для которой $\eta|_{\partial \Gamma_T} = 0$, $\eta|_{t \in [T, T+\tau]} = 0$. Функции $\eta(k)$ определяются по $\eta(x,t)$ с помощью

равенств $\eta(k) = \eta(x, k\tau)$, $k=1,2,\dots,K$, при этом $\eta(k)_r = \frac{1}{\tau} [\eta(k+1) - \eta(k)]$ (разностные

отношения $\eta(k)_r$, $\eta(k)_l = \frac{1}{\tau} [\eta(k) - \eta(k-1)]$ являются правой и левой аппроксимациями $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ в

$t = k\tau$, соответственно). Как и для $y(k)$, по функциям $\eta(k)$ формируются кусочно-непрерывные

по временной переменной t функции $\eta_k(x,t)$, $\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial t}$. Заметим, что $\eta_k(x,t)$,

$\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta_k(x,t)}{\partial t}$ равномерно сходятся на $\bar{\Gamma}_T$ к $\eta(x,t)$, $\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}$ при $K \rightarrow \infty$,

соответственно; $\eta_k(x,t) = 0$, $t \in [T, T+\tau]$. Подставляя функции $y_K(x,t)$, $F_K(x,t)$, $\eta_k(x,t)$ в

тождество определения 2.19 вместо $y(x,t)$, $F(x,t)$, $\eta(x,t)$ и переходя к пределу по подпоследовательности $\{Y_K(x,t)\}$, получим: $y(x,t)$ удовлетворяет тождеству определения 2.19

для любой $\eta(x, t) \in C^1(\mathfrak{Z}_{T+\tau})$. Таким образом приходим к важному свойству, устанавливающему связь между дифференциально-разностной системой и дифференциальной системой.

Пусть выполнены условия (2.14), (2.29), тогда система (2.108), (2.109) слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{Z}_T)$.

2.7 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами для гиперболического уравнения

2.7.1 Устойчивость дифференциально-разностной трехслойной схемы (частный случай)

Рассмотрим устойчивость дифференциально-разностных трехслойную схему (2.34) для гиперболического уравнения в пункте 2.2.5:

$$\begin{aligned} y_{\bar{n}} + L\hat{y} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_1(0) = \varphi_1(x). \end{aligned}$$

В силу линейности дифференциально-разностной системы (2.34) слабое решение ее представить в виде $y(k) = y_o(k) + y_f(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, где $y_o(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение однородной задачи

$$y_{\bar{n}} + L\hat{y} = 0, \quad y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \quad (2.110)$$

а $y_f(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ – решение неоднородной задачи

$$y_{\bar{n}} + L\hat{y} = f(k), \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (2.111)$$

Для изучения устойчивости дифференциально-разностной схемы (2.34) в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ будем использовать составную норму вида

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2, \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y(1) + y(0)\|_{(1)}^2 + \|y(1) - y(0)\|_{(2)}^2, \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ – нормы $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2.20. Схема (2.34) называется устойчивой

1) по $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, если для (2.110)

$$\|Y(k+1)\|_{(1)} \leq C_1 \|Y(1)\|_{(2)}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

2) по $f(k)$ ($k = \overline{1, K-1}$), если для (2.111)

$$\|Y(k+1)\|_{(1)} \leq C_2 \|f(k)\|_{(3)}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

здесь $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(3)}$ – некоторые нормы в пространствах $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$ соответственно, $C_1 = \text{const} > 0$, $C_2 = \text{const} > 0$ не зависят от τ , $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(k) = f(x; k)$, $k = \overline{1, K-1}$.

Предварительно приведем схему (2.34) к каноническому виду. Вводя операторное обозначение в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$

$$Bu = \tau Lu,$$

и учитывая соотношение

$$\hat{y} = \frac{1}{2}(\hat{y} + \bar{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - \bar{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \bar{y}) + \tau y_{i^*},$$

Тогда из (2.34) получим

$$\begin{aligned} By_{i^*} + Iy_{\bar{i}} + \frac{1}{2}L(\hat{y} + \bar{y}) &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.112)$$

где I – единичный оператор.

Умножим скалярно (2.112) на $2\tau y_{i^*} = \tau(y_i + y_{\bar{i}}) = (\hat{y} - \bar{y})$, получим

$$2\tau(By_{i^*}, y_{i^*}) + (I(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) + \frac{1}{2}(L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) = 2\tau(f(k), y_{i^*}), \quad (2.113)$$

в силу леммы 2.2 имеем

$$(I(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) = (y_i, y_i) - (y_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}), \quad (2.114)$$

$$\frac{1}{2}(L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) = \frac{1}{2}(L\hat{y}, \hat{y}) - \frac{1}{2}(L\bar{y}, \bar{y}),$$

$$\frac{1}{2}(L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) = \frac{1}{2}[(L\hat{y}, \hat{y}) + (Ly, y)] - \frac{1}{2}[(Ly, y) + (L\bar{y}, \bar{y})]. \quad (2.115)$$

Считаем, что оператор L самосопряженный. Из доказательства леммы 2.3 вытекает

$$(Lv, v) + (Lz, z) = \frac{1}{2}(L(v+z), v+z) + \frac{1}{2}(L(v-z), v-z). \quad (2.116)$$

Полагая в (2.116) $v = \hat{y}$, $z = y$, преобразуем (2.115)

$$\begin{aligned} (L(\hat{y} + \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) &= \frac{1}{2}[(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (L(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ &\quad - \frac{1}{2}[(L(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + (L(y - \bar{y}), y - \bar{y})], \end{aligned} \quad (2.117)$$

и подставим (2.117) и (2.114) в (2.113). Так как

$$(L(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(Ly_i, y_i), (L(y - \bar{y}), y - \bar{y}) = \tau^2(Ly_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}),$$

получаем энергетическое тождество для схемы (2.34):

$$\begin{aligned}
& 2\tau(B y_{i^c}, y_{i^c}) + \left[\frac{1}{4}(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \left(\tau^2 \left(I + \frac{1}{4}L \right) y_t, y_t \right) \right] = \\
& = \left[\frac{1}{4}(L(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \left(\tau^2 \left(I + \frac{1}{4}L \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) \right] + 2\tau(f(k), y_{i^c}).
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Рассмотрим задачу (2.110), для нее соотношение (2.118) имеет вид

$$2\tau(B y_{i^c}, y_{i^c}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2, \tag{2.119}$$

где

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \left(\tau^2 \left(I + \frac{1}{4}L \right) y_t, y_t \right), \tag{2.120}$$

$$\|Y(k)\|^2 = \frac{1}{4}(L(y + \bar{y}), y + \bar{y}) + \left(\tau^2 \left(I + \frac{1}{4}L \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right),$$

имеем

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_L^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{I + \frac{1}{4}L}^2.$$

Из (2.120) видно, что $\|Y(k+1)\|^2 > 0$ при любых $y(k) \neq 0$, $y(k+1) \neq 0$, так как L и $I + L/4$ положительны.

Действительно, при $B > 0$ из (2.119) следует

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2, \quad \|Y(k+1)\| \leq \|Y(k)\| \leq \dots \leq \|Y(1)\|.$$

Из этого вытекает, что данная схема устойчива по $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$.

Далее обратимся к рассмотрению задачи (2.111). Тождество (2.118) для (2.111) принимает вид

$$2\tau(B y_{i^c}, y_{i^c}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{i^c}), \tag{2.121}$$

имеет место очевидное неравенство

$$2\tau(f(k), y_{i^c}) \leq \tau \varepsilon_0 \|y_{i^c}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|f(k)\|^2,$$

где $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$ не зависит от τ . Пусть $\varepsilon_0 = 2$, тогда из (2.121) вытекает неравенство

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f(k)\|^2.$$

Суммирование полученных неравенств по $k' = 1, 2, \dots, k$ ($\|Y(1)\| = 0$). Устойчивость по $f(k)$ ($k = \overline{1, K-1}$) установлена, причем имеет место следующий результат.

Пусть L – положительный оператор, тогда для схемы (2.34) верна оценка

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(1)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{B^{-1}}^2.$$

Действительно, имеет место неравенство $2\tau(f(k), y_i) \leq 2\tau \|y_i\|_B \|\varphi\|_{B^{-1}} \leq \tau\varepsilon \|y_i\|_B^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2$,

полагая здесь $\varepsilon = 2$ и подставляя эту оценку в (2.121), получим

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{2} \|f(k)\|_{B^{-1}}^2,$$

откуда суммирование полученных неравенств по $k' = 1, \dots, k$ и следует искомая оценка.

2.7.2 Устойчивость дифференциально-разностных трехслойных схем с весами

Рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную схему с весами (2.37) для гиперболического уравнения в пункте 2.2.5:

$$\begin{aligned} y_{\bar{n}} + Ly^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Для дифференциально-разностной схемы (2.37) и ее слабого решения, определяемого тождеством (2.40), получим достаточные условия устойчивости. Предварительно приведем схему (2.37) к каноническому виду.

Вводя операторные обозначения в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$

$$Bu = (\sigma_1 - \sigma_2)\tau Lu, \quad Du = \left(I + (\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\tau^2}{2}L \right)u$$

(I – единичный оператор) и учитывая соотношения (2.32), (2.33), получим

$$\begin{aligned} By_{\bar{n}} + Dy_{\bar{n}} + Ly &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x). \end{aligned} \tag{2.122}$$

Введение весов σ_1, σ_2 в описании схемы (2.37) и далее (2.122) обусловило зависимость от них операторных коэффициентов B, D . Последнее открывает возможность охватить анализом достаточно широкое семейство дифференциально-разностных трехслойных схем, встречающихся в алгоритмах на практике, причем в общем случае несимметричных.

Определение 2.21 Семейство дифференциально-разностных трехслойных схем (2.122) назовем базовым семейством, если $\sigma_1 - \sigma_2 \geq 0$, таким образом, оператор B неотрицательный.

Везде ниже рассматривается базовое семейство трехслойных дифференциально-разностных схем, все утверждения формулируются для (2.122), очевидно, они остаются справедливыми и для (2.37). Анализ схемы (2.122) (см. ниже доказательство теоремы 2.17) аналогичен представленному в монографии [67, с. 398] с той лишь разницей, что все рассмотрения осуществляются для операторов B, D в соболевском пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Замечание 2.12 При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (т. е. $B = 0$) дифференциально-разностная трехслойная

схема (2.122) определяет классическую симметричную каноническую форму

$$\begin{aligned} Dy_{\bar{n}} + Ly &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y_i(0) = \varphi_1(x). \end{aligned}$$

с весом σ , при этом $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{n}}$, $D = I + \sigma \tau^2 L$. Такая схема принадлежит к более узкому классу, анализ ее является прямым следствием из утверждений приведенной ниже теоремы 2.17.

Определение 2.22 Совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $k = 2, \dots, K$, называется слабым решением системы (2.38), (2.122), если для каждого $y(k)$ удовлетворяются тождества

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{Z}} (By_{i^{\circ}} + Dy_{\bar{n}})\eta(x)dx + \ell(y, \eta) &= \int_{\mathfrak{Z}} f(k)\eta(x)dx, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.123)$$

при произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Учитывая вытекающее из (2.32) соотношение

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{n}},$$

преобразуем схему (2.122) к виду

$$\begin{aligned} By_{\bar{n}} + \left(D - \frac{\tau^2}{2}L \right) y_{\bar{n}} + \frac{1}{2}L(\hat{y} + \check{y}) &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Умножим скалярно обе части (2.124) на $2\tau y_{i^{\circ}} = \tau(y_i + y_{\bar{i}}) = \hat{y} - \check{y}$ и, учитывая (см. (2.32))

$\tau y_{\bar{n}} = y_i - y_{\bar{i}}$, получим

$$\begin{aligned} 2\tau(By_{i^{\circ}}, y_{i^{\circ}}) + \left((D - \frac{\tau^2}{2}L)(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}} \right) + \\ + \frac{1}{2}(L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) &= 2\tau(f(k), y_{i^{\circ}}), \end{aligned} \quad (2.125)$$

Здесь, как и везде выше через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{Z}}$ в пространстве $L_2(\mathfrak{Z})$. Так как L и D – самосопряженные по Лагранжу операторы, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \left((R - \frac{1}{2}L)(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}} \right) &= \left((R - \frac{1}{2}L)y_i, y_i \right) - \left((R - \frac{1}{2}L)y_{\bar{i}}, y_{\bar{i}} \right), \\ (C(y_i - y_{\bar{i}}), y_i + y_{\bar{i}}) &= (Cy_i, y_i) - (Cy_{\bar{i}}, y_{\bar{i}}), \\ (L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) &= (L\hat{y}, \hat{y}) - (L\check{y}, \check{y}), \\ (L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) &= [L\hat{y}, \hat{y}] + [Ly, y] - [Ly, y] + [L\check{y}, \check{y}]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Кроме того, при любых $w, z \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ в силу доказательства леммы 2.3 следует

соотношение

$$(Lw, w) + (Lz, z) = \frac{1}{2}(L(w+z), w+z) + \frac{1}{2}(L(w-z), w-z).$$

Полагая в полученном соотношении $w = \hat{y}$, $z = y$, а затем $w = y$, $z = \check{y}$, преобразуем выражение $(L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y})$, используя последнее соотношение в (2.126):

$$\begin{aligned} (L(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) &= \frac{1}{2}[(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (L(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ &\quad - \frac{1}{2}[(L(y + \check{y}), y + \check{y}) + (L(y - \check{y}), y - \check{y})]. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение вместе с первыми двумя соотношениями из (2.126) в равенство (2.125), учитывая при этом $(L(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(Ly_t, y_t)$ и $(L(y - \check{y}), y - \check{y}) = \tau^2(Ly_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})$, приходим к основному энергетическому тождеству для трехслойной схемы (2.122):

$$\begin{aligned} 2\tau(By_{t^c}, y_{t^c}) + \left[\frac{1}{4}(L(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \left((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_t, y_t\right)\right] = \\ = \left[\frac{1}{4}(L(y + \check{y}), y + \check{y}) + \left((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}\right)\right] + 2\tau(f(k), y_{t^c}), \end{aligned} \quad (2.127)$$

которое является аналогом уравнения энергетического баланса для эволюционной системы с распределенными параметрами в области $\mathfrak{X} \times (0, T)$ изменения переменных x и t [67, с.381] (см. также [34, с.201]).

Все последующие утверждения представлены для схемы (2.122) и ее слабого решения, определяемого тождеством (2.123), очевидно, они имеют место и для (2.37). Определим понятие устойчивости дифференциально-разностной трехслойной схемы (2.122), используя свойство линейности схемы (2.122): L, B, D – линейные операторы. При этом будем использовать специальную норму (в терминологии [67, с.383] – составная норма) вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2 + \|y_t\|_{(3)}^2, \quad (2.128)$$

для элементов $Y(k+1)$ пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X}) \oplus \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X})$, где $y(k+1)$, $y(k)$ являются элементами пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X})$, а $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(3)}$ – некоторые нормы $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X})$ и $L_2(\mathfrak{X})$, соответственно.

В силу линейности дифференциально-разностной системы (2.122) слабое решение ее представляется в виде $y(k) = y_o(k) + y_f(k)$, $k = 2, 3, \dots, K$, где $y_o(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X})$ – решение однородной задачи

$$\begin{aligned} By_{\bar{n}} + Dy_{\bar{n}} + Ly = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) = \varphi_0(x), \quad y_t(0) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (2.129)$$

а $y_f(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{X})$ – решение неоднородной задачи

$$\begin{aligned} By_{\bar{t}} + Dy_{\bar{t}} + Ly = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) = y_t(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.130)$$

при рассмотрении уравнений (2.129) и (2.130) для каждого фиксированного k ($k = 1, 2, \dots, K-1$).

Введем определение устойчивости схемы (2.122) (и схемы (2.37)) по $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $f(k) = f(x; k)$ ($k = 1, 2, \dots, K-1$) [67, с.385].

Определение 2.23 Схема (2.122) устойчивая

1) по $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$, если для (2.129)

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \leq C_1 \|\varphi_0\|_{(2)} + C_2 \|\varphi_1\|_{(3)}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad \forall \varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

2) по $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k = \overline{1, K-1}$), если для (2.130)

$$\|y(k+1)\|_{(1)} \leq C_3 \|f(k)\|_{(4)}, \quad \forall f(k) \in L_2(\mathfrak{Z}), \quad k = \overline{1, K-1},$$

здесь $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$, $\|\cdot\|_{(3)}$ и $\|\cdot\|_{(4)}$ – соответствующие нормы в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$, $C_1 = \text{const} > 0$,

$C_2 = \text{const} > 0$ и $C_3 = \text{const} > 0$ не зависят от τ , $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $f(k) := f(x; k)$, $k = \overline{1, K-1}$.

Исходя из представления составной нормы (2.128) и предположения неотрицательности оператора $D - \frac{\tau^2}{4}L$, тождество (2.127) примет вид

$$2\tau(By_{t^c}, y_{t^c}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{t^c}), \quad (2.131)$$

где

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(k+1) + y(k)), y(k+1) + y(k)) + ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_t, y_t), \\ \|Y(k)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(k) + y(k-1)), y(k) + y(k-1)) + ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}), \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4}(L(y(1) + y(0)), y(1) + y(0)) + \\ &+ ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_{\bar{t}}(0), y_{\bar{t}}(0)), \quad y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0)). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Составные нормы $\|Y\|$, определяемые формулами (2.132), очень естественны при использовании соотношений, связанных с энергетическим тождеством (2.127). В анализе вопросов управляемости дифференциально-разностными системами типа (2.38), (2.122), а также при анализе прикладных задач (задачи оптимального управления, стабилизации и пр.) особую важность приобретают априорные оценки в энергетической норме $\|\cdot\|_A$.

В дальнейшем исследовании к условию $\sigma_1 - \sigma_2 \geq 0$ добавим $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$, дающие операторные соотношения

$$B = \tau(\sigma_1 - \sigma_2)L \geq 0, \quad D = I + (\sigma_1 + \sigma_2)\frac{\tau^2}{2}L > 0, \quad (2.133)$$

при этом упомянутый в замечании 2.6 случай $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ будем рассматривать отдельно. Для $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ получен следующий результат.

Пусть выполнены условия $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma$ ($\sigma > 0$), $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ и пусть

$$D \geq \frac{1+\varrho}{4}\tau^2L, \quad (2.134)$$

где ϱ – произвольное положительное число, не зависящее от τ , тогда схема (2.122) устойчива по $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ и по $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k = \overline{1, K-1}$), для слабого решения (2.122) в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|_L &\leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} \left(\|\varphi_0\|_L + \|\varphi_1\|_D + \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\| \right), \\ \|y(k+1)\|_L + \|y_t\|_D &\leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} \left(2\|\varphi_0\|_L + 2\|\varphi_1\|_D + \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\| \right). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Обоснование результата – прямое следствие из соотношения (2.131) и неравенства (2.133).

Устойчивость по начальным данным. В силу части 1 определения 2.23 ($f(k) = 0$) и условий теоремы из энергетического тождества (2.131) вытекает неравенство

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\|. \quad (2.136)$$

Действительно, при $B > 0$ из (2.131) следует

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2, \quad \|Y(k+1)\| \leq \|Y(k)\| \leq \dots \leq \|Y(1)\|,$$

где $\|Y(k+1)\|$, $k = 1, 2, \dots, K-1$, в силу соотношений (2.132) могут быть представлены в терминах энергетической нормы $\|\cdot\|_L$:

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4} \|y(k+1) + y(k)\|_L^2 + ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_t, y_t), \quad (2.137)$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4} \|y(1) + y(0)\|_L^2 + ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_{\bar{t}}(0), y_{\bar{t}}(0)), \quad (2.138)$$

$$y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0)).$$

Обозначим $Y = \|Y(k+1)\|^2$ и, учитывая соотношения (2.33), преобразуем (2.137) к виду

$$\|Y\| = \frac{1}{4} \|\hat{y} + y\|_L^2 + ((D - \frac{\tau^2}{4}L)y_t, y_t).$$

При этом заметим, что

$$Y = \frac{1}{4} (\|y\|_L^2 + 2(Ly, \hat{y}) + \|\hat{y}\|_L^2) - \frac{1}{4} (\|y\|_L^2 - 2(Ly, \hat{y}) + \|\hat{y}\|_L^2) + (Dy_t, y_t) = (Ly, \hat{y}) + \|y_t\|_D^2.$$

Подставим в полученное соотношение $\hat{y} = y + \tau y_t$, учитывая вытекающее из (2.134)

неравенство $\|y_t\|_L \leq \frac{2}{\tau\sqrt{1+\varrho}} \|y_t\|_D$:

$$Y = (Ly, y) + \tau(Ly, y_t) + \|y_t\|_D^2 \leq \|y\|_L^2 + \frac{2}{\tau\sqrt{1+\varrho}} \|y\|_L \|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2 \leq (\|y\|_L + \|y_t\|_D)^2.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\|Y(k+1)\| \leq \|y(k)\|_L + \|y_t\|_D. \quad (2.139)$$

Далее подставим $y = \hat{y} - \tau y_t$ в соотношение $Y = (Ly, \hat{y}) + \|y_t\|_D^2$, тогда

$$Y = (L\hat{y}, \hat{y}) - \tau(L\hat{y}, y_t) + \|y_t\|_D^2.$$

Используя неравенство $(L\hat{y}, y_t) \leq \|\hat{y}\|_L \|y_t\|_L$, получим

$$\|Y\| = \|\hat{y}\|_L^2 - \|\hat{y}\|_L \|y_t\|_L + \|y_t\|_D^2 \geq \|\hat{y}\|_L^2 - \frac{2}{\sqrt{1+\varrho}} \|\hat{y}\|_L \|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2.$$

Применив неравенство $\frac{2}{\sqrt{1+\varrho}} \|\hat{y}\|_L \|y_t\|_D \leq \mu \|\hat{y}\|_L^2 + \frac{1}{\mu(1+\varrho)} \|y_t\|_D^2$ (здесь $\mu > 0$), приходим к

соотношению

$$\|Y\| \geq (1-\mu) \|\hat{y}\|_L^2 + \left(1 - \frac{1}{\mu(1+\varrho)}\right) \|y_t\|_D^2. \quad (2.140)$$

Положив $\mu = \frac{1}{1+\varrho}$, получим $\|Y\| \geq \frac{\varrho}{1+\varrho} \|\hat{y}\|_L^2$, откуда вытекает оценка

$$\|Y(k+1)\| \geq \sqrt{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \|y(k+1)\|_L. \quad (2.141)$$

Если в неравенстве (2.140) положить число μ так, чтобы $1-\mu = 1 - \frac{1}{\mu(1+\varrho)}$, то есть

$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\varrho}}$, тогда

$$1-\mu = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varrho}} = \frac{\sqrt{1+\varrho}-1}{\sqrt{1+\varrho}} = \frac{\varrho}{\sqrt{1+\varrho}(\sqrt{1+\varrho}+1)} > \frac{\varrho}{2(1+\varrho)}$$

(использовано неравенство $\sqrt{1+\varrho} < 1+\varrho$ при любом $\varrho > 0$). В результате из (2.140) следует неравенство

$$\|Y\| \geq \frac{\varrho}{2(1+\varrho)} (\|\hat{y}\|_L^2 + \|y_t\|_D^2) \geq \frac{\varrho}{4(1+\varrho)} (\|\hat{y}\|_L + \|y_t\|_D)^2,$$

а значит, оценка

$$\|Y(k+1)\| \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varrho}{1+\varrho}} (\|y(k+1)\|_L + \|y_t\|_D). \quad (2.142)$$

Подставляя соотношения (2.138), (2.139), (2.141), (2.142) в неравенство (2.136) получим, учитывая $y_t(0) = \varphi_1(x)$, оценки энергетической нормы слабого решения задачи (2.129)

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|_L &\leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} (\|\varphi_0\|_L + \|\varphi_1\|_D), \\ \|y(k+1)\|_L + \|y_t\|_D &\leq 2\sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} (\|\varphi_0\|_L + \|\varphi_1\|_D), \end{aligned} \quad (2.143)$$

при любых $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ из пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Тем самым доказана устойчивость дифференциально-разностной схемы (2.122) по начальным данным $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$.

Устойчивость по правой части. Обратимся к анализу задачи (2.130) и проведем рассуждения при условиях $y(0) = y_t(0) = 0$.

Следуя [67, с.401], будем искать слабое решение из пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ задачи (2.130) в виде

$$y_k = \sum_{k'=1}^k \tau y_{k,k'}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad y_0 = 0, \quad (2.144)$$

где $y_{k,k'}$, являясь функцией k ($k = 1, 2, \dots, K-1$), при любом фиксированном $k' = 1, 2, \dots, k$ есть слабое решение для

$$By_{\bar{n}} + Dy_{\bar{n}} + Ly = f(k),$$

с условиями

$$\left(\frac{1}{2} \tau B + D \right) \frac{y_{k'+1,k'} - y_{k',k'}}{\tau} = f(k'), \quad y_{k',k'} = 0. \quad (2.145)$$

В силу $B \geq 0$, $D \geq I$ для решения $y(t)_{k',k'} = \frac{y_{k'+1,k'} - y_{k',k'}}{\tau}$ уравнения (2.145) имеет место неравенство $Dy(t)_{k',k'} \leq f(k')$ и справедлива оценка $\|y(t)_{k',k'}\|_D \leq \|f(k')\|$. Учитывая первое неравенство (2.143), получим

$$\|y_{k'+1,k'}\|_L \leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} \|y(t)_{k',k'}\|_D \leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} \|f(k')\|,$$

а значит, из соотношения (2.144) и неравенства треугольника для слабого решения задачи (2.130) получим следующую оценку

$$\|y_{k+1}\|_L \leq \sqrt{\frac{1+\varrho}{\varrho}} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|, \quad (2.146)$$

Суммируя результаты устойчивости схем (2.129) и (2.130) по начальным условиям и

правой части (т. е. соотношения (2.143) и (2.146)), получаем оценки (2.135). Теорема доказана.

Замечание 2.13 *Достаточное условие устойчивости (2.134) удобно интерпретировать в терминах весовых параметров σ_1 и σ_2 : соотношение (2.134) выполняется, если $I \geq \left(\frac{1+\varrho}{4} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) \tau^2 L$, т. е. при $1 \geq \left(\frac{1+\varrho}{4} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) \tau^2 \|L\|$. Последнее устанавливает достаточные условия устойчивости семейства дифференциально-разностных схем:*

$$\sigma_1 - \sigma_2 > 0, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \geq \frac{1+\varrho}{4} - \frac{1}{\tau^2 \|L\|}.$$

Рассмотрим базовое семейство схем (2.122) в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \geq 0$ (см. замечание 2.6).

Условие устойчивости $D \geq \frac{1+\varrho}{4} \tau^2 L$ (см. соотношение (2.134)) выполняется при

$$I \geq \frac{1+\varrho}{4-\sigma} \tau^2 L \text{ или}$$

$$\sigma \geq \frac{1+\varrho}{4} - \frac{1}{\tau^2 \|L\|}. \quad (2.147)$$

Априорные оценки слабого решения остаются аналогичными (2.135). Следует отметить при этом, что в случае явной схемы ($\sigma = 0, B = 0, D = I$ дифференциально-разностная схема (2.122) принимает вид $y_{\bar{n}} + Ly = f(k)$) условие устойчивости схемы определяется, как следует из (2.147), выбором шага τ :

$$\tau \leq \frac{2}{\sqrt{(1+\varrho)\|L\|}}.$$

Выводы

1. Для эволюционных дифференциальных систем n -го порядка $n \geq 2$, определенных в различного типа сетеподобных областях, построены дифференциально-разностные системы, для которых сформированы двух- и трехслойные дифференциально-разностные схемы со свойствами, наследующие свойства эволюционных дифференциальных систем.

2. Найдены достаточные условия, гарантирующие устойчивость по начальным данным полученных двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем.

3. Для эволюционных дифференциальных систем n -го порядка, определенных в различного типа сетеподобных областях, построены семейства дифференциально-разностных систем с весовыми параметрами, для которых сформированы аналогичные семейства двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем со свойствами, наследующими свойства эволюционных дифференциальных систем.

4. Для семейств сформированных двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем с весовыми параметрами получены условия, гарантирующие их устойчивость по начальным данным.

5. Для всех сформированных двух- и трехслойных дифференциально-разностных схем получены априорные оценки норм слабых решений этих схем в необходимых пространствах Лебега и Соболева, используемых для установления слабой разрешимости исходных эволюционных дифференциальных систем n -го порядка, определенных в различного типа сетеподобных областях.

6. Получены достаточные условия для обоснования слабой разрешимости исходных эволюционных дифференциальных систем n -го порядка, определенных в различного типа сетеподобных областях (эти же условия обеспечивают обоснованность подхода дискретизации дифференциальных систем n -го порядка только по временной переменной).

Глава 3 Методы оптимизации сетеподобных процессов и явлений

3.1 Слабая разрешимость дифференциально-разностной двухслойной системы для параболического уравнения на графе

3.1.1 Разложение по собственным функциям эллиптического оператора с пространственной переменной на графе и сетеподобной области

Вопрос разложения произвольной функции по собственным функциям эллиптического оператора, играющего определяющую роль в дифференциальном уравнении переноса и дифференциальном уравнении, описывающем волновые явления, является главным, так как множество собственных функций образует базис в пространствах состояний краевых задач для указанных уравнений. Основополагающие рассуждения на эту тему приведены в работах [12, 53, 56]. При этом все рассуждения разделяются на две части:

1) пространственная переменная определена на сети (графе) Γ (графе-звезде, являющимся основным элементом сети с любой внутренней структурой) и тогда эллиптический оператор рассматривается в пространстве кусочно-гладких функций [53, 56], последнее объясняется тем, что кусочно-гладкая функция принадлежит и пространству соболевского типа, а значит, в случае графа Γ эллиптический оператор рассматривается в пространствах $W_2^1(\Gamma)$, $W^1(a, \Gamma)$, $W_0^1(a, \Gamma)$,

2) пространственная переменная определена на сетеподобной области \mathfrak{Z} и тогда эллиптический оператор рассматривается в пространствах $W^1(\mathfrak{Z})$, $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ [106] (см. также [74-76, 82]).

Следует отметить, что в работах [53, 56] представлены условия, при выполнении которых множество собственных функций эллиптического оператора, формирующая множество обобщённых собственных функций эллиптического оператора, является базисом в пространстве Лебега $L_2(\Gamma)$ и Соболева $W_2^1(\Gamma)$. Таким образом, сказанное является обоснованием использования подхода, представленного данной главой и главой 4.

3.1.2 Слабая разрешимость параболической системы

Рассмотрим разностно-дифференциальный аналог для параболического уравнения

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x, t) = f(x, t), x, t \in \Gamma_T, \quad (3.1)$$

с функциями $a(x)$, $b(x) \in L_2(\Gamma_0)$ (см. раздел 2.1).

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0. \quad (3.2)$$

Для функций $y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ (см. раздел 2.1) рассмотрим уравнение (3.1) с начальными и краевыми условиями

$$y|_{t=0} = \varphi(x) \in L_2(\Gamma), \quad y|_{x \in \partial\Gamma_T} = 0, \quad (3.3)$$

соотношение $y|_{t=0} = \varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ (см. раздел 2.1) в (3.3) имеет место почти всюду.

Замечание 3.1. *Ниже рассматривается система (начально-краевой задача) (3.1), (3.3), более общие краевые условия требуют введения специальных пространств.*

Определение 3.1. *Функция $y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ является слабым решением (3.1), (3.3), если она удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(y, \eta) = \\ & = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt, \quad \forall \eta(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T), \quad \eta(x, T) = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{здесь } \ell_T(y, \eta) = \int_{\Gamma_T} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) y(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt.$$

В дальнейшем потребуется базис $W_0^1(a, \Gamma)$, каковым, как показано в работах [14, 56], можно в $W^1(a, \Gamma)$ рассматривать множество обобщенных собственных функций следующей спектральной задачи:

$$- \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \quad u(x)|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (3.5)$$

А именно, обобщенная собственная функция $u(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ является нетривиальным решением для

$$\ell(u, \eta) = \lambda(u, \eta), \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

при фиксированном параметре λ , (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$, а также в $L_2(\Gamma_T)$.

Ниже приведено основное свойство спектральной задачи.

При выполнении соотношений (3.2) задача (3.5) задает две вещественные последовательности: $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ – собственные числа) и $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ ($u_i(x)$ – обобщенные собственные функции); $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ – базис в $W_0^1(a, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$. при этом можно считать, что $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ ортонормирован в $W_0^1(a, \Gamma)$.

Замечание 3.2. *При $b(x) \geq 0$ во втором неравенстве (3.2) $\lambda_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$.*

Из сказанного следует следующий факт.

Задача (3.1), (3.3) имеет слабое решение в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ для произвольных функций $f(x) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ и при произвольном конечном значении числа T .

Обоснование данного утверждения проводится по классической схеме. Приближения слабого решения (3.1), (3.3) представимы в виде

$$y^N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) u_i(x),$$

$c_i^N(t)$, $t \in [0, T]$ – коэффициенты, являющиеся абсолютно непрерывными функциями. Эти функции определяются как решения следующей системы:

$$\left(\frac{\partial y^N}{\partial t}, u_i \right) + \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{\partial y^N(x, t)}{\partial x} \frac{du_i(x)}{dx} + b(x) y^N(x, t) u_i(x) \right) dx = (f, u_i),$$

$$c_i^N(0) = (\varphi, u_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Можно показать [34, с. 134], что для приближенного решения $y^N(x, t)$ для любого $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\|y^N\|_{2, \Gamma_t} \leq C(t) \left(\|y^N(x, 0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2 \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \right),$$

где функция $C(t)$ ограничена на $t \in [0, T]$ ($C(t) \leq C^* \quad \forall N, \quad 0 < C^* < \infty$) и зависит только от T и a^*, β . Из этого неравенства, учитывая соотношения $c_i^N(0) = (\varphi, u_i) (i = \overline{1, N})$ и в силу

$$\|y^N(x, 0)\|_{L_2(\Gamma)} = \left\| \sum_{i=1}^N (\varphi, u_i) u_i(x) \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |(\varphi, u_i)|} \leq \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)},$$

($\|\cdot\|$ – евклидова норма: $\|\omega\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \omega_i^2}$), следует

$$\|y^N\|_{2, \Gamma_t} \leq C(t) \left(\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} + 2 \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \right), \quad (3.6)$$

а значит, и независящая от N оценка $\|y^N\|_{2, \Gamma} \leq C \quad (C > 0)$. Последнее означает, что $\{y^N\}_{N \geq 1}$

сходящуюся в $W_0^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательность $\{y^{N_k}\}_{k \geq 1}$ некоторой функции, при этом

$\frac{\partial y^{N_k}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}$ в $L_2(\Gamma_T)$. Отсюда непосредственно следует слабая сходимость и $\{y^N\}_{N \geq 1}$ к

$y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и функция $y(x, t)$ – слабое решение (3.1), (3.3). Полученное решение обладает следующим свойством.

Слабое решение задачи (3.1), (3.3) в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ единственно при $0 < T < \infty$.

В силу линейности задачи (3.1), (3.3), как и выше, обоснование проводится стандартным образом: предполагается существование двух различных решений $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ пространства

$W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$. Откуда и из (3.6), следует неравенство $\|y\|_{L_2(\Gamma_T)} \leq 0$ ($y(x, t) = y_1(x, t) - y_2(x, t)$) для любого $T > 0$, а значит, совпадение решений $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ в пространстве $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ (равенство $y_1(x, t) = y_2(x, t)$ понимается в пространстве $L_2(\Gamma)$).

Следствие 3.1. *Решение $y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ системы (3.1), (3.3) непрерывно по $f(x, t)$ и $\varphi(x)$. Последнее вместе с утверждениями теорем 1 и 2 означает корректность задачи (3.1), (3.3) в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ для любого $0 < T < \infty$.*

3.1.3 Слабая разрешимость дифференциально-разностной двухслойной системы для параболического уравнения

Построим сечения Γ_T^k области Γ_T плоскостями $t = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, M$, $\tau = T/K$, тогда уравнение (3.1), рассматриваемое в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$, редуцируется к дифференциально-разностному [97, 101] (см. также [78, 79]) в $W_0^1(a, \Gamma)$ (см. раздел 2.1)

$$\frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.7)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt \in L_2(\Gamma).$$

Требуется определить совокупность функций $y(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$), причем

$$y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.8)$$

Замечание 3.3. *Систему (3.7), (3.8) можно рассматривать как неявную разностную схему по t при полудискретизации уравнения (3.1) (метод Рунге [34, с. 189]) в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$.*

Определение 3.2. *Совокупность $\{y(k) : y(k) \in W_0^1(a, \Gamma) \ (k = 1, 2, \dots, M)\}$, для функций $y(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) которой имеют место соотношения*

$$\int_{\Gamma} y(k)_i \eta(x) dx + \ell(y, \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \quad (3.9)$$

$$y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

называется *слабым решением системы (3.7), (3.8)*; здесь $y(k)_i = \frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1))$, равенство

$$y(0) = \varphi(x) \text{ понимается в } L_2(\Gamma), \quad \ell(y, \eta) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x)y(k)\eta(x) \right) dx.$$

Предварительно установим свойства функций $y(k)$, аналогичных свойствам, приведенным выше для функций $y(x, t)$.

1. Для любых $k_0 \geq 0$ и любых $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ слабое решение $y(k)$ системы (3.7), (3.8)

однозначным образом определено при $k_0 \leq k \leq M$ ($k_0 < M < \infty$).

2. Решение задачи (3.1), (3.3) является пределом функций $y(k)$, получаемых при решении системы (3.7), (3.8).

Обоснованием этих свойств является, как показано в работах [14, 56], существование базиса в $W_0^1(a, \Gamma)$. Из равенств

$$y(k-1)^2 = (y(k) - \tau y(k)_t)^2 = y(k)^2 + \tau^2 y(k)_t^2 - 2\tau y(k)y(k)_t,$$

следует соотношение

$$2\tau y(k)y(k)_t = y(k)^2 + \tau^2 (y(k)_t)^2 - y(k-1)^2. \quad (3.10)$$

Возьмем в соотношении (3.9) $\eta(x) = 2\tau y(k)$ и, учитывая (3.10), а также нижнюю границу a_* для $a(x)$ (см. (3.2)), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y(k)^2 dx - \int_{\Gamma} y(k-1)^2 dx + \tau^2 \int_{\Gamma} (y(k)_t)^2 dx + 2a_* \tau \int_{\Gamma} \left(\frac{dy(k)}{dx} \right)^2 dx \leq \\ \leq -2\tau \int_{\Gamma} b(x)y(k)^2 dx + 2\tau \int_{\Gamma} f(k)y(k) dx, \end{aligned}$$

отсюда (везде ниже через $\|\cdot\|_{2,\Gamma}$ обозначена норма в пространстве $W_2^1(\Gamma)$)

$$\begin{aligned} \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|y(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 + \tau^2 \|y(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_* \tau \left\| \frac{dy(k)}{dx} \right\|^2 \leq \\ \leq -2\tau \int_{\Gamma} b(x)y(k)^2 dx + 2\tau \int_{\Gamma} f(k)y(k) dx \leq \\ \leq 2\beta\tau \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{2,\Gamma} \|y(k)\|_{2,\Gamma}. \end{aligned}$$

В результате при $k = 1, 2, \dots, M$

$$\begin{aligned} \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|y(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 + \tau^2 \|y(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_* \tau \left\| \frac{dy(k)}{dx} \right\|^2 \leq \\ \leq \rho\tau \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{2,\Gamma} \|y(k)\|_{2,\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\rho = 2\beta$. Из последнего неравенства вытекает

$$\|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 - \|y(k-1)\|_{2,\Gamma}^2 \leq \rho\tau \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 + 2\tau \|f(k)\|_{2,\Gamma} \|y(k)\|_{2,\Gamma}. \quad (3.12)$$

1. Пусть $\|y(k)\|_{2,\Gamma} + \|y(k-1)\|_{2,\Gamma} > 0$, тогда, поделив обе части неравенства (3.12) на $\|y(k)\|_{2,\Gamma} + \|y(k-1)\|_{2,\Gamma}$ и учитывая

$$\frac{\|y(k)\|_{2,\Gamma}}{\|y(k)\|_{2,\Gamma} + \|y(k-1)\|_{2,\Gamma}} \leq 1,$$

приходим к оценке

$$\|y(k)\|_{2,\Gamma} \leq \frac{1}{1-\rho\tau} \|y(k-1)\|_{2,\Gamma} + \frac{2\tau}{1-\rho\tau} \|f(k)\|_{2,\Gamma}, \quad (3.13)$$

при $\tau < \frac{1}{2\rho}$.

2. Пусть $\|y(k)\|_{2,\Gamma} + \|y(k-1)\|_{2,\Gamma} = 0$, тогда из соотношения (3.12) следует $0 \leq \rho\tau \|y(k)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \|f(k)\|_{2,\Gamma}$, а значит,

$$\|y(k)\|_{2,\Gamma} \leq \rho\tau \|y(k)\|_{2,\Gamma} - \|y(k-1)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \|f(k)\|_{2,\Gamma},$$

что снова приводит к оценке (3.13).

Учитывая рекуррентность оценки (3.13), получаем

$$\begin{aligned} \|y(k)\|_{2,\Gamma} &\leq \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \|y(0)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \sum_{s=1}^k \frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}} \|f(s)\|_{2,\Gamma} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \left(\|y(0)\|_{2,\Gamma} + 2\tau \sum_{s=1}^k \|f(s)\|_{2,\Gamma} \right) \leq \\ &\leq e^{2\rho T} \left(\|y(0)\|_{2,\Gamma} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Gamma_T} \right), \end{aligned}$$

здесь $\|f(k)\|_{2,1,\Gamma_T} = \tau \sum_{s=1}^k \|f(s)\|_{2,\Gamma}$, последнее неравенство следует из соотношений

$\frac{\rho\tau}{1-\rho\tau} k \leq \frac{\rho T}{1-\rho\tau} \leq 2\rho T$ при $\tau < \frac{1}{2\rho}$ и $\frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \leq e^{2\rho T}$. Таким образом, получена оценка

$$\|y(k)\|_{2,\Gamma} \leq e^{2\rho T} \left(\|y(0)\|_{2,\Gamma} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Gamma} \right). \quad (3.14)$$

Далее, суммируя неравенства (3.11) по k от 1 до $m \leq M$ и используя оценку (3.14), приходим к

$$\begin{aligned} \|y(m)\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{dy(k)}{dx} \right\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|y(k)\|_{2,\Gamma}^2 &\leq \\ &\leq c_1 \left(\|\varphi\|_{2,\Gamma}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\Gamma_T}^2 \right), \quad m = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где c_1 зависит только от a_*, β и T ; $\|f(m)\|_{2,1,\Gamma_T} \leq \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $M \rightarrow \infty$, получаем ограниченную в совокупности последовательность $\{y(m)\} \subset W_0^1(a, \Gamma)$ ($\|y(m)\|_{2,\Gamma} \leq \tilde{c}_1$, $m = 1, 2, \dots$), из которой можно выбрать подпоследовательность $\{y(m_i)\}$, для которой $y(m_i) \rightarrow y(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем справедливость второго утверждения. Используя $y(k)$, построим функции $y_M(x, t)$:

$$y_M(x, t) = y(x, k\tau) \text{ при } t \in ((k-1)\tau, k\tau], k = \overline{1, M}.$$

Ясно, что $y_M(x, t)$ будут элементами пространства $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и для них в силу (3.15) имеет место оценка

$$\|y_M\|_{2, \Gamma_T} + \left\| \frac{\partial y_M}{\partial x} \right\|_{2, \Gamma_T} \leq c_2,$$

постоянная c_2 не зависит от τ . При $M \rightarrow \infty$ получаем ограниченную в совокупности последовательность $\{y_M(x, t)\} \subset W(a, \Gamma_T)$, подпоследовательность $\{\tilde{y}_M(x, t)\}$ которой слабо сходится: $\tilde{y}_M(x, t) \rightarrow y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Функция $y(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.4), а значит, что $y(x, t)$ соответствует определению 3.1. для задачи (3.1), (3.3). Действительно, для этого считаем, что функции $\eta(x, t) \in C^1(\Gamma_{T+\tau})$, $\eta(x, t)|_{\Gamma_T} = 0$ и $\eta(x, T) = 0$. Построим для $\eta(x, t)$ усреднения $\eta(k) = \eta(x; k\tau)$, $k = \overline{1, M}$, интерполяции $\tilde{\eta}(x, t)$ и $\tilde{\eta}(x, t)_t \left(\eta(k)_t = \frac{1}{\tau}(\eta(k+1) - \eta(k)) \right)$, $k = \overline{1, M-1}$.

Нетрудно проверить, что интерполяции $\tilde{\eta}$, $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x}$, $\tilde{\eta}_t$ на Γ_T равномерно сходятся к функциям $\eta(x, t)$, $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}$, соответственно, причем $\tilde{\eta}(x, t) = 0$, $t \in [T, T + \tau]$.

При $\eta(k)_t = \frac{1}{\tau}(\eta(k+1) - \eta(k))$, тогда

$$\tau \sum_{k=1}^M y(k)_t \eta(k) = -\tau \sum_{k=1}^M y(k) \eta(k)_t - y(0) \eta(1). \quad (3.16)$$

Просуммируем тождества (3.9) при $\eta(x) = \tau \eta(k)$ по k от 1 до M и, учитывая (3.16), а также $\eta(M) = \eta(M+1) = 0$, получим

$$\begin{aligned} -\tau \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma} y(k) \eta(k)_t dx - \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(1) dx + \tau \sum_{k=1}^M \ell_T(y(k), \eta(k)) = \\ = \tau \sum_{k=1}^M (f(k), \eta(k)) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_T} y(x, t) \eta(x, t)_t dx dt + \int_0^T \ell_T(u, \eta) dt - \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(1) dx = \\ = \int_{\Gamma_T} f(x, t), \eta(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В соотношении (3.17), переходя к пределу по выбранной выше слабо сходящейся в $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ подпоследовательности $\{\tilde{y}(x, t)\}$ ($y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ – предельная функция), получаем интегральное тождество (3.4), а значит, функция $y(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ удовлетворяет определению 3.1 для задачи (3.1), (3.3) из пространства. В силу единственности решения $y(x, t)$ (теорема 3.1) и оценки (3.17) вся последовательность $\{\tilde{y}(x, t)\}$ слабо сходится к $y(x, t)$. Теорема доказана полностью.

Замечание 3.4. *Первое утверждение теоремы (по сути своей есть метод конечных разностей) дает еще одну возможность (кроме метода Фаздо-Галеркина, представленного утверждением теоремы 3.1 построения приближений к искомому решению), по пути осуществляя (вместе со вторым утверждением теоремы) и доказательство теоремы существования начально-краевой задачи (3.1), (3.3). Используемый подход применим и к отысканию решений других начально-краевых задач. В них к эллиптическим уравнениям (3.7) добавляются условия 2-го или 3-го рода на границе области. Разрешимость таких задач доказывается аналогично рассуждениям для задачи (3.7), (3.8). Наконец, и метод конечных разностей [49], и метод Фаздо-Галеркина открывают пути аппроксимации состояний системы при численной реализации и алгоритмизации поставленных задач.*

3.1.4 Счетная устойчивость дифференциально-разностной двухслойной системы

Мы не стремимся к возможной общности определения понятия счетной устойчивости разностно-дифференциальных уравнений [97](см. также [24, 81]), или систем уравнений (схем), поскольку нас интересуют подходы к анализу качества разностно-дифференциальной системы уравнений (3.7), (3.8), аппроксимирующей начально-краевую задачу (3.1), (3.3).

В предположениях пункта 3.1.2 рассмотрим дифференциально-разностную систему уравнений (3.7), (3.8) в слабой постановке (3.9). Введем в рассмотрение следующие ряды Фурье по системе $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ (пункт 3.1.2):

$$y(k) = \sum_n y^n(k) u_n(x), \quad f(k) = \sum_n f^n(k) u_n(x), \quad \varphi = \sum_n \varphi^n u_n(x), \quad (3.18)$$

где $y^n(k) = (y(k), u_n)$, $f^n(k) = (f(k), u_n)$, $\varphi^n = (\varphi, u_n)$.

Д. Нейманом для разностных схем эволюционных уравнений было введено понятие счетной устойчивости этих схем [92]. Ниже приводится аналог этого понятия, следуя работе [40, с. 44].

Определение 3.3. *Дифференциально-разностная система (3.7), (3.8) называется счетно устойчивой, если для каждого коэффициента $y(k)$ ряда Фурье из (3.18) имеет место неравенство*

$$|y^n(k)| \leq C_{1n} |\varphi^n| + C_{2n} |f^n|,$$

где постоянные C_{1n}, C_{2n} равномерно ограничены при $0 \leq k\tau \leq T$, $|f^n| = \max_{k=1, M} |f^n(k)|$.

Для $\eta(x) = u_n(x), n = 1, 2, \dots$ получим

$$y^n(k) - y^n(k-1) + \tau \lambda_n y^n(k) = \tau f^n(k-1), \quad y^n(0) = \varphi^n, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

здесь $f^n(k-1)$ выбрано в виде $f^n(t_k): f^n(t_k) = (f(x, t_k), u_n(x))$. Последовательное исключение неизвестных $y^n(i), i = 1, 2, \dots, k$ приводит к соотношению

$$y^n(k) = r_n^k \varphi^n + \tau r_n \sum_i r_n^{k-i} f^n(i-1), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где $r_n = (1 + \tau \lambda_n)^{-1}$. Отсюда имеет место оценка

$$\begin{aligned} |y^n(k)| &\leq |r_n|^k |\varphi^n| + \tau |r_n| \left| \sum_i |r_n^{k-i}| |f^n(i-1)| \right| \leq \\ &\leq |r_n|^k |\varphi^n| + \tau |r_n| \frac{1 - |r_n|^k}{1 - |r_n|} |f^n|, \quad |f^n| = \max_{k=1, M} |f^n(k)|, \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Так как $0 < r_n < 1 (n = 1, 2, \dots)$, то $|r_n|^k < 1$ и $\tau |r_n| \frac{1 - |r_n|^k}{1 - |r_n|} < \tau |r_n| \frac{1}{1 - |r_n|} < T + \frac{1}{\lambda_1}$, а значит,

коэффициенты при $|\varphi^n|$ и $|f^n|$ равномерно ограничены при любом значении $\tau > 0$ и не зависят от τ, φ и f . Это означает, что выполнен спектральный критерий счетной устойчивости определения 3.3: разностно-дифференциальная система (3.7), (3.8) является абсолютно счетно устойчивой.

3.2 Оптимизация дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе

3.2.1. Дискретная оптимизация дифференциально-разностной системы

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы [95] (см. также [50, 83, 100])

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (y(k) - y(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x) y(k) &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \\ y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Пусть $\xi_i \in J(\Gamma)$ и $\gamma^{\xi_i} \in R(\xi_i)$ – фиксированные узел и к нему примыкающее ребро ($i \in I$).

Для каждого k ($k = 1, 2, \dots, M$) точечное воздействие $v(k)$ на систему (3.19) формируется набором чисел $v(k)$, где $v(k) = \{v_i(k), i \in I\} \in U$ ($k = 1, 2, \dots, M$), $U \subset \mathbb{R}^J$ – заданное множество,

которое определяется потребностями прикладного характера. Нетрудно видеть, что внешние управляющие воздействия на систему (3.19) определяются во внутренних узлах графа.

Функции $f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) в (3.19) имеют вид ($\delta(x - x^i)$ – функция Дирака)

$$f(k) = \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i) \Big|_{x^i = 1 \in \gamma^{\xi_i}}, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

функции $y(x, k; v(k))$ ($k = 1, 2, \dots, M$) – состояние системы (3.19), которое определяется в силу системы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} [y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) y(k; v(k)) = \\ = \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i) \Big|_{x^i = 1 \in \gamma^{\xi_i}}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$y(0; v(0)) := y(0) = \varphi(x), \quad y(k; v(k)) \Big|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.21)$$

Определение 3.4. Совокупность $\{y(k; v(k)) : y(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma), k = 1, 2, \dots, M\}$

определяет слабое решение (3.20), (3.21), если

$$\int_{\Gamma} y(k; v(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; v(k)), \eta) = \sum_{i \in I} v_i(k) \eta_i, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $\eta_i = \eta(x) \Big|_{x=1 \in \gamma^{\xi_i}}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$, $y(k; v(k))_i = \frac{1}{\tau} (y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1)))$.

Для определенности считаем, что наблюдение за состоянием (3.20), (3.21) ведется на всем графе Γ , минимизируемый функционал $\Psi(v)$ имеет вид

$$\Psi(v) := \Psi(v(1), v(2), \dots, v(M)) = \tau \sum_{k=1}^M \Psi_k(v(k)),$$

$$\Psi_k(v(k)) = \|y(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.22)$$

$w_0(k) := w_0(x; k) \in L_2(\Gamma)$ – заданная функция, положительный оператор $N : U \rightarrow U$ задан:

$$(Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J} \geq \zeta \|v(k)\|_{\mathbb{R}^J}^2, \quad \zeta > 0, \quad \forall v(k) \in U, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.23)$$

где (\cdot, \cdot) и $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^J}$ – скалярные произведения в $L_2(\Gamma)$ и \mathbb{R}^J .

Обозначим через $U_\delta \subset U$ ограниченное множество.

Задача дискретной оптимизации (3.20), (3.21) определяется $\inf_{v \in U_\delta} \Psi(v)$ на множестве U_δ , где

$v = \{v(k), k = 1, 2, \dots, M\}$.

Задача дискретной оптимизации имеет единственное решение $v^* = \{v^*(k), k = 1, 2, \dots, M\} \in U_\partial$, $\Psi(v^*) = \inf_{v \in U_\partial} \Psi(v)$, v^* – оптимальное воздействие для системы (3.20), (3.21).

Свойство единственности базируется на утановленной непрерывности отображения $v \rightarrow y(v)$, определяющего связь совокупности допустимых управлений U и пространства состояний $W_0^1(a, \Gamma)$ дифференциально-разностной системы (3.20), (3.21). Учитывая это, свойство (3.23) и соотношения

$$\begin{aligned} \Psi_k(v(k)) &= \|y(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J} = \\ &= \|y(k; v(k)) - y(0; v(0)) + y(0; v(0)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J} = \\ &= \mathfrak{F}_k(v(k), v(k)) - 2\mathfrak{L}_k(v(k)) + \|y(0; v(0)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_k(v(k), v(k)) &= (y(k; v(k)) - y(0; v(0)), y(k; v(k)) - y(0; v(0))) + (Nv(k), v(k))_{\mathbb{R}^J}, \\ \mathfrak{L}_k(v(k)) &= (w_0(k) - y(0; v(0)), y(k; v(k)) - y(0; v(0))), \end{aligned}$$

получим, что квадратичная форма $\mathfrak{F}_k(v(k), v(k))$ обладает свойством коэрцитивности, а $\mathfrak{L}_k(v(k))$ является линейной формой и тогда

$$\Psi(v) = \mathfrak{F}(v, v) + \mathfrak{L}(v), \quad \mathfrak{F}(v, v) = \tau \sum_{k=1}^M \mathfrak{F}_k(v(k), v(k)), \quad \mathfrak{L}(v) = \tau \sum_{k=1}^M \mathfrak{L}_k(v(k)).$$

Дальнейшее аналогично рассуждениям в работе [37, с. 13].

Замечание 3.5. Свойство единственности решения оптимизационной задачи теряется, если $N = 0$ (см., например, [36, теорема 5.2, с. 47]).

Укажем условия, которые гарантируют существование оптимальных воздействий на систему, а также получим соотношения, определяющие воздействия. В целях уменьшения объема рутинной работы при проведении технических преобразований последующие рассуждения относятся ко всем состояниям $y(k; u(k))$ и всем типам управляющих воздействий $u(k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, при этом $y(k; u(k))$, $y(k; u(k))_i$ и $u(k)$ заменены обозначениями $y(u)$, $y(u)_i$ и u . Покажем справедливость следующего утверждения.

Если $u^* = \{u^*(k), k = 1, 2, \dots, M\} \in U_\partial$ является оптимумом для функционала $\Psi(v)$, то

$$\Psi'(u^*)(v - u^*) \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial \quad (3.24)$$

(здесь $\Psi'(u^*)$ – производная по u^* в смысле Фреше).

Так как u^* – оптимум $\Psi(v)$, то при произвольных $v \in U_\varrho$ и $\theta \in (0,1)$ имеет место $\Psi(u^*) \leq \Psi((1-\theta)u^* + \theta v)$, тогда

$$\frac{1}{\theta} [\Psi((1-\theta)u^* + \theta v) - \Psi(u^*)] = \frac{1}{\theta} [\Psi(u^* + \theta(v-u^*)) - \Psi(u^*)] \geq 0$$

и, устремляя параметр θ к нулю, приходим к (3.24).

Покажем справедливость обратного утверждения. Зададим $u \in U_\varrho$, тогда $\Psi'(u)(v-u) \geq 0$, $\forall v \in U_\varrho$. Из представления $\mathfrak{F}(v, v)$ и $\mathfrak{L}(v)$ для функционала $\Psi(v)$ следует выпуклость функции $v \rightarrow \Psi(v)$ для $v \in U_\varrho$ и тогда

$$\frac{1}{\theta} [\Psi((1-\theta)u + \theta v) - \Psi(u)] = \frac{1}{\theta} [\Psi(u + \theta(v-u)) - \Psi(u)] \leq \Psi(v) - \Psi(u),$$

и, устремляя параметр θ к нулю, приходим к $0 \leq \Psi'(u)(v-u) \leq \Psi(v) - \Psi(u)$ и далее $\Psi(v) \geq \Psi(u)$, $v \in U_\varrho$, последнее означает, что u является оптимумом для $\Psi(v)$.

Справедливо соотношение

$$y'(u)(v-u) = y(v) - y(u) \quad \forall v, u \in U_\varrho.$$

Действительно для управляющих воздействий $u(k), v(k) \in U_\varrho$ ($k = 0, 1, \dots, M$) (см. определение 3.4) справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} [(y(k; v(k)) - y(k; u(k))) - (y(k-1; v(k-1)) - y(k-1; u(k-1)))] \eta(x) dx + \\ & + \ell(y(k; v(k)) - y(k; u(k)), \eta) = \sum_{i \in I} (v_i(k) - u_i(k)) \eta_i \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\eta_i = \eta(x)|_{x=x_i \in \xi_i}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$, и которого вытекают соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} [(y(k; u + \mathcal{G}(v(k) - u(k))) - y(k; u(k)) - (y(k-1; u(k-1)) + \\ & + \mathcal{G}(v(k-1) - u(k-1))) - y(k-1; u(k-1)))] \eta(x) dx + \\ & + \ell(y(u + \mathcal{G}(v(k) - u(k))) - y(k; u(k)), \eta) = \mathcal{G} \sum_{i \in I} (v_i(k) - u_i(k)) \eta_i \quad \forall \mathcal{G} \in (0, 1), \quad \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \end{aligned}$$

где $\eta_i = \eta(x)|_{x=x_i \in \xi_i}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$. Умножение этого соотношения на $1/\mathcal{G}$ и переходя к пределу с $\mathcal{G} \rightarrow 0$, получим соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} [y'(k; u(k))(v(k) - u(k)) - y'(k-1; u(k-1))(v(k-1) - u(k-1))] \eta(x) dx + \\ & + \ell(y'(k; u(k))(v(k) - u(k)), \eta) = \sum_{i \in I} (v_i(k) - u_i(k)) \eta_i \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \end{aligned} \quad (3.26)$$

при $\mathcal{G} \rightarrow 0$ ($\eta_i = \eta(x)|_{x=x_i \in \xi_i}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$). Сравнивая (3.25) и (3.26), получим

$$y'(k; u(k))(v(k) - u(k)) = y(k; v(k)) - y(k; u(k)), \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

то есть приведенное выше соотношение.

3.2.2 Условия существования оптимальных управляющих воздействий

Если $u(k)$ для k ($k = 1, 2, \dots, M$) является оптимальным управляющим воздействием, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Psi'_k(u(k))(v(k) - u(k)) = \\ & = (y(k; u(k)) - w_0(k), y'(u)(v(k) - u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} = \\ & = (y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Учитывая (3.27), получаем

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \geq 0, \quad (3.28)$$

а, учитывая (3.22) для $\Psi(v)$ и (3.23), получаем соотношение

$$\tau \sum_{k=1}^M [(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J}] \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta. \quad (3.29)$$

Полученное соотношение (3.29) совместно с интегральным тождеством определения 3.4, дают условие существования оптимального управляющего воздействия для системы (3.20), (3.21):

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\delta$, $k = 0, 1, \dots, M$, совместно с состоянием $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, M$, определяется из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta) = \sum_{i \in I} u_i(k) \eta_i, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $\eta_i = \eta(x)|_{x=1 \in \gamma^{\xi_i}}$ и $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$,

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta,$$

где $k = 0, 1, \dots, M$.

Установим для (3.20), (3.21) сопряженное состояние в $W_0^1(a, \Gamma)$. понятие сопряженного состояния. Рассмотрим совокупность $\{p(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma), k = 0, 1, \dots, M-1\}$ как слабое решение следующей дифференциально-разностной системы:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau} [p(k+1; v(k+1)) - p(k; v(k))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dp(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) p(k; v(k)) = \\ & = y(k; v(k)) - w_0(k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$p(M; v(M)) = 0, \quad p(k; v(k))|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.31)$$

Справедливо следующее свойство.

Система (3.30), (3.31) имеет слабое решение в $W_0^1(a, \Gamma)$ и при том единственное при малых τ .

Действительно, если в системе (3.30), (3.31) изменить нумерацию по правилу $l = M - k$, $k = M, M - 1, \dots, 1, 0$, тогда, получим систему

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau} [\tilde{p}(l-1; v(l-1)) - \tilde{p}(l; v(l))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{d\tilde{p}(l; v(l))}{dx} \right) + b(x) \tilde{p}(l; v(l)) = \\ & = y(l; v(l)) - w_0(l), \quad l = 1, 2, \dots, M, \\ & \tilde{p}(0; v(0)) = 0, \quad \tilde{p}(l; v(l))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

относительно $\tilde{p}(l; v(l))$ ($l = 1, 2, \dots, M$), на полученную систему распространяются утверждения пункта 3.1.3, что означает справедливость приведенного свойства.

Для дальнейших рассуждений преобразуем соотношения (3.28), проводя следующие действия:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{M-1} [p(k+1; u(k+1)) - p(k; u(k))] [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] = \\ & = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^M \{ [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] - [y(k-1; v(k-1)) - y(k-1; u(k-1))] \} p(k; u(k)). \\ & \sum_{k=0}^{M-1} \ell(p(k; u(k)), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \sum_{k=1}^M \ell(y(k; v(k)) - y(k; u(k)), p(k; u(k))), \end{aligned}$$

В результате получим соотношение, определяемое равенством

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{M-1} (y(k; v(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \\ & = \sum_{k=1}^M \sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) \end{aligned}$$

(использованы соотношения $p_i(k; u(k)) = p(k; u(k))|_{x=x_i \in \xi_i}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$, а также $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(M; u(M)) = 0$). Последнее соотношение трансформируется к виду

$$\sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) = \sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Это дает возможность неравенство (3.28) привести к виду

$$\sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^n} \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\partial, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (3.32)$$

а (3.29) – к виду

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{k=0}^{M-1} \left[\sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \right] \geq 0, \\ & \forall v(k) \in U_\partial, \quad k = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.33)$$

здесь $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(M; u(M)) = 0$. $p(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, M$,

Представленные преобразования неравенств (3.28), (3.29) к виду (3.32), (3.33) дают возможность получить формулировку окончательного результата в уточненном виде в терминах сопряженного состояния $p(k; u(k))$ системы (3.30), (3.31).

Пусть выполнено утверждение теоремы 3.4, оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\partial$, $k = 0, 1, \dots, M$, совместно с состояниями $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, и $p(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, определяются из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta) = \sum_{i \in I} u_i(k) \eta_i \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где $\eta_i = \eta(x)|_{x=1 \in \gamma^{\xi_i}}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$,

$$\int_{\Gamma} p(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(p(k; u(k)), \eta) = \int_{\Gamma} (y(k; u(k)) - w_0(k)) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \\ k = 1, 2, \dots, M,$$

$$\sum_{i \in I} p_i(k; u(k)) (v_i(k) - u_i(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_{\mathbb{R}^J} \geq 0, \quad \forall u(k) \in U_\partial, \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

где $y(0; v(0)) = \varphi(x)$, $p(M; v(M)) = 0$.

3.2.3. Оптимизация по стартовым условиям дифференциально-разностной системы

Постановка оптимизационной задачи

Рассмотрим систему, аналогичную представленным в предыдущих пунктах:

$$\frac{1}{\tau} (y(k) - y(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x) y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \\ y(0) = \varphi(x), \quad y(k)|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.34)$$

Как и выше $U = L_2(\Gamma)$. Пусть управляющее воздействие $v(k) := v(x; k) \in U$ определено соотношениями

$$v(k) = \varphi(x), \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

состояние $y(x, k; v(k))$ ($k = 1, 2, \dots, M$) системы (3.34) – дифференциально-разностной системой уравнений

$$\frac{1}{\tau} [y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) y(k; v(k)) = \\ = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.35)$$

$$y(0; v(0)) = \varphi(x), \quad y(k; v(k))|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.36)$$

Определение 3.5. Совокупность $\{y(k; v(k)) : y(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma), k = 1, 2, \dots, M\}$

определяет слабое решение (3.35), (3.36), если

$$\int_{\Gamma} y(k; v(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; v(k)), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $y(k; v(k))_t = \frac{1}{\tau}(y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1)))$, $k = 1, 2, \dots, M$, $y(0; v(0)) = \varphi(x)$.

Далее считаем, что наблюдение за $y(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ведется при всех $x \in \Gamma$, отображение $v(k) \rightarrow y(k; v(k))$ непрерывно (см. утверждение 2 теоремы 3.3).

Аналогично тому, как указано выше, минимизируемый функционал $\Psi(v)$ имеет вид

$$\Psi(v) := \Psi(v(1), v(2), \dots, v(M)) = \tau \sum_{k=1}^M \Psi_k(v),$$

$$\Psi_k(v(k)) = \|y(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_U, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.37)$$

заданы $w_0(k) \in L_2(\Gamma)$, положительный оператор $N: U \rightarrow U$, для которого

$$(Nv(k), v(k))_U \geq \zeta \|v(k)\|_U^2, \quad \zeta > 0, \quad \forall v(k) \in U, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.38)$$

пространство U внешних управляющих воздействий и ограниченное множество $U_\delta \subset U$ (выпуклое и замкнутое).

Оптимизационная задача по $\varphi(x)$ (стартовая функция) для (3.35), (3.36) состоит в отыскании $\min_{v \in U_\delta} \Psi(v)$. Управляющее воздействие $v^* \in U_\delta$ есть оптимум для (3.35), (3.36), если

$$\min_{v \in U_\delta} \Psi(v) = \Psi(v^*).$$

Оптимизационная задача по $\varphi(x)$ для (3.35), (3.36) имеет единственное решение.

Свойство единственности решения может теряться при $N = 0$ (замечание 3.5).

Как и ранее (леммы 3.2 и 3.3), для функционала $\Psi(v)$ остаются справедливыми следующие утверждения (функции $y(k; u(k))$, $u(k)$ заменены на $y(u)$, u , соответственно).

Если $u^ = \{u^*(k), k = 1, 2, \dots, M\} \in U_\delta$ является оптимумом для функционала $\Psi(v)$, то*

$$\Psi'(u^*)(v - u^*) \geq 0 \quad \forall v \in U_\delta, \quad (3.39)$$

здесь $\Psi'(u^*)$ – производная по u^* в смысле Фреше.

Справедливо соотношение

$$y'(u)(v - u) = y(v) - y(u) \quad \forall v, u \in U_\delta. \quad (3.40)$$

Пояснения для этих утверждений здесь не приводятся – они повторяют рассуждения пункта 3.2.2.

Условия существования оптимальных управляющих воздействий

Пусть $u(k)$ является оптимальным управляющим воздействием. Учитывая соотношения (3.39), (3.40) лемм 3.4 и 3.5, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \Psi'_k(u(k))(v(k) - u(k)) = \\
& = (y(k; u(k)) - w_0(k), y'(u)(v(k) - u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U = \\
& = (y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

и далее неравенство

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0,$$

как следствие (3.41), что приводит, учитывая (3.37) и (3.38), к неравенству

$$\tau \sum_{k=1}^M [(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U] \geq 0,$$

при произвольной функции $v(k)$ из области $\in U_\delta$.

Получено утверждение, аналогичное представленному выше.

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\delta$, $k = 0, 1, \dots, M$, совместно с состоянием $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, M$, определяется из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

где $v(k) \in U_\delta$ – произвольная функция.

Обозначим через $p(k; v(k))$ сопряженное состояние для (3.35), (3.36), которое определено слабым решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\tau} (p(k+1; v(k)) - p(k; v(k))) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dp(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) p(k; v(k)) = \\
& = y(k; v(k)) - w_0(k), \quad k = 0, \dots, M-1,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$p(M; v(M)) = 0, \quad p(k; v(k))|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 0, \dots, M-1. \tag{3.43}$$

Введенная система (3.42), (3.43) обладает следующими свойствами.

Система (3.42), (3.43) имеет слабое решение в $W_0^1(a, \Gamma)$ и при том единственное при малых τ .

Пусть выполнено соотношение (3.38), тогда оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\delta$, $k = \overline{0, M}$, совместно с состояниями $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, и $p(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, определяются из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $k = 1, \dots, M$,

$$\int_{\Gamma} p(k; u(k))_t \eta(x) dx + \ell(p(k; u(k)), \eta) = \int_{\Gamma} (y(k; u(k)) - w_0(k)) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

$$k = 1, 2, \dots, M,$$

$$(p(k; u(k)) + Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_{\partial}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1,$$

где $y(0; v(0)) = \varphi(x)$, $p(M; v(M)) = 0$.

3.2.4. Оптимизационная задача по распределенным внешним воздействиям дифференциально-разностной системы

Постановка оптимизационной задачи

Как и выше $U = L_2(\Gamma)$ и, кроме того, вводится оператор $B: U \rightarrow L_2(\Gamma)$, сохранены обозначения $y(k; v(k)) := y(x, k; v(k))$, $v(k) := v(x, k) \in U$ ($k = 0, 1, \dots, M$). Для $y(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) рассматривается система

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} [y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) y(k; v(k)) = \\ = f(k) + Bv(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.44)$$

совместно с условиями

$$y(0; v(0)) := y(0) = \varphi(x), \quad y(k; v(k))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.45)$$

Определение 3.6. Совокупность $\{y(k; v(k)): y(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma), k = 1, 2, \dots, M\}$

определяет слабое решение (3.44), (3.45), если

$$\int_{\Gamma} y(k; v(k))_t \eta(x) dx + \ell(y(k; v(k)), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx + (Bv(k), \eta)_U \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $y(k; v(k))_t = \frac{1}{\tau} (y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1)))$, $k = 1, 2, \dots, M$, $y(0; v(0)) = \varphi(x)$.

В целях упрощения рассуждений считаем, что наблюдение за функцией $y(k; v(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$ ведется при всех $x \in \Gamma$, отображение $v(k) \rightarrow y(k; v(k))$ непрерывно (см. утверждение 2 теоремы 3.3).

Аналогично тому, как указано выше, минимизируемый функционал $\Psi(v)$ имеет вид

$$\Psi(v) := \Psi(v(1), v(2), \dots, v(M)) = \tau \sum_{k=1}^M \Psi_k(v),$$

$$\Psi_k(v(k)) = \|y(k; v(k)) - w_0(k)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv(k), v(k))_U, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.46)$$

заданы $w_0(k) \in L_2(\Gamma)$, положительный оператор $N: U \rightarrow U$, для которого

$$(Nv(k), v(k))_U \geq \varsigma \|v(k)\|_U^2, \quad \varsigma > 0, \quad \forall v(k) \in U, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

пространство U внешних управляющих воздействий и ограниченное множество $U_\delta \subset U$ (выпуклое и замкнутое).

Оптимизационная задача для системы (3.44) (3.45) состоит в определении $\min_{v \in U_\delta} \Psi(v)$.

Управляющее воздействие $v^* \in U_\delta$ есть оптимум для (3.44) (3.45), если $\min_{v \in U_\delta} \Psi(v) = \Psi(v^*)$.

Оптимизационная задача для (3.44), (3.45) имеет единственное решение.

Свойство единственности решения оптимизационной задачи теряется при $N = 0$ (замечание 3.5).

Как и ранее (леммы 3.2 и 3.3), для функционала $\Psi(v)$ остаются справедливыми следующие утверждения ($y(k; u(k))$, $u(k)$ заменены на $y(u)$, u).

Если $u^* = \{u^*(k), k = 1, 2, \dots, M\} \in U_\delta$ является оптимумом для функционала $\Psi(v)$, то

$$\Psi'(u^*)(v - u^*) \geq 0 \quad \forall v \in U_\delta \quad (3.47)$$

(здесь $\Psi'(u^*)$ – производная по u^* в смысле Фреше).

Справедливо соотношение

$$y'(u)(v - u) = y(v) - y(u) \quad \forall v, u \in U_\delta. \quad (3.48)$$

Обоснование этих утверждений здесь не приводятся – оно повторяют рассуждения приведенные выше.

Условия существования оптимальных внешних воздействий

Пусть $u(k)$ является оптимальным управляющим воздействием. Учитывая соотношения (3.47) и (3.48) лемм 3.6 и 3.7, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Psi'_k(u(k))(v(k) - u(k)) = \\ & = (y(k; u(k)) - w_0(k), y'(u)(v(k) - u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U = \\ & = (y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \end{aligned}$$

и далее неравенство

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \quad (3.49)$$

как следствие (3.46), что приводит, учитывая (3.47) и (3.48), к неравенству

$$\tau \sum_{k=1}^M [(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U] \geq 0 \quad (3.50)$$

при произвольной функции $v(k)$ из области U_δ .

Получено утверждение, аналогичное представленному в предыдущем пункте 3.2.3 для ограниченной области U_δ .

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\partial$, $k = 0, 1, \dots, M$, совместно с состоянием $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, M$, определяется из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k)) \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} (f(k) + Bu(k)) \eta(x) dx, \quad k = 1, \dots, M,$$

где $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$ – произвольная функция,

$$(y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

где $v(k) \in U_\partial$ – произвольная функция.

Обозначим через $p(k; v(k))$ сопряженное состояние для (3.35), (3.36), которое определено слабым решением краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} (p(k+1; v(k)) - p(k; v(k))) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dp(k; v(k))}{dx} \right) + b(x) p(k; v(k)) = \\ = y(k; v(k)) - w_0(k), \quad k = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$p(M; v(M)) = 0, \quad p(k; v(k))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 0, \dots, M-1. \quad (3.52)$$

Если в системе (3.51), (3.52) изменить нумерацию по правилу $l = M - k$, $k = M, M-1, \dots, 1, 0$, как это сделано при доказательстве теоремы 3.6, тогда, получим систему

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} [\tilde{p}(l-1; v(k)) - \tilde{p}(l; v(k))] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{d\tilde{p}(l; v(k))}{dx} \right) + b(x) \tilde{p}(l; v(k)) = \\ = y(l; v(l)) - w_0(l), \quad l = 1, 2, \dots, M, \\ \tilde{p}(0; v(0)) = 0, \quad \tilde{p}(l; v(l))|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

относительно $\tilde{p}(l; v(l))$ ($l = 1, 2, \dots, M$), на полученную систему распространяются утверждения теоремы 3.3, а значит, справедливо следующее свойство системы (3.51), (3.52).

Система (3.51), (3.52) имеет слабое решение в $W_0^1(a, \Gamma)$ и при том единственное при малых τ .

Для дальнейших рассуждений преобразуем соотношения (3.49), проводя следующие действия:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{M-1} [p(k+1; u(k+1)) - p(k; u(k))] [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] = \\ = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^M \{ [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] - [y(k-1; v(k)) - y(k-1; u(k))] \} p(k; u(k)), \\ \sum_{k=0}^{M-1} \ell(p(k; u(k)), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \sum_{k=1}^M \ell(y(k; v(k)) - y(k; u(k)), p(k; u(k))), \end{aligned}$$

получим соотношение, определяемое равенством

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{M-1} (y(k; v(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \\
& = \sum_{k=1}^M (Bv(k) - Bu(k), p(k; u(k))) = \sum_{k=0}^{M-1} (Bv(k) - Bu(k), p(k; u(k))) = \\
& = \sum_{k=0}^{M-1} (B^* p(k; u(k)), v(k) - u(k)),
\end{aligned}$$

здесь B^* – сопряженный оператор к B и используются соотношения $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(M; u(M)) = 0$. Соотношение (3.49) трансформируется к виду

$$(B^* p(k; u(k)), v(k) - u(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (3.53)$$

а (3.50) – к виду

$$\begin{aligned}
& \tau \sum_{k=0}^{M-1} [(B^* p(k; u(k)), v(k) - u(k)) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U] \geq 0, \\
& \forall v(k) \in U_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, M,
\end{aligned} \quad (3.54)$$

здесь $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(M; u(M)) = 0$.

Представленные преобразования неравенств (3.49), (3.50) к виду (3.53), (3.54) дают возможность получить результаты в уточненном виде в терминах сопряженного состояния $p(k; u(k))$ системы для (3.35), (3.36).

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\delta$, $k = \overline{0, M}$, совместно с состояниями $y(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, и $p(k; u(k)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, определяются из соотношений

$$\int_{\Gamma} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx + (Bu, \eta)_U \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

где $k = 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} p(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(p(k; u(k)), \eta) = \int_{\Gamma} (y(k; u(k)) - w_0(k)) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma), \\
& k = 1, 2, \dots, M,
\end{aligned}$$

$$(B^* p(k; u(k)) + Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, M-1,$$

где $y(0; v(0)) = \varphi(x)$, $p(M; v(M)) = 0$.

3.3. Оптимизационная задача для дифференциально-разностной системы с носителями в сетеподобной области

3.3.1. Дифференциально-разностная система параболического типа

Определим дискретную сетку $\{k\tau, k = \overline{1, K}\}$, $\tau = T/K$, $K < \infty$ для отрезка $[0, T]$ и остановимся на анализе системы уравнений

$$\frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1)) - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_i} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.55)$$

$$y(0) = \varphi(x),$$

в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, которую назовем дифференциально-разностной системой. Здесь используются следующие обозначения: $y(k) := y(x; k)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_i} \right) = \sum_{\kappa, i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_i} \right), \quad f(k) := f(x, k), \quad k = \overline{1, K}.$$

Функции $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ ($k = 1, 2, \dots, K$) удовлетворяют условием

$$y(k)|_{x \in \partial \mathfrak{Z}} = 0. \quad (3.56)$$

Как и в пункте 2.2.2, считаются выполненными неравенства

$$a_{\kappa i}(x) = a_{i\kappa}(x), \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \mathfrak{Z},$$

$$a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \xi_\kappa \xi_i \leq a^* \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (3.57)$$

постоянные a_*, a^*, β фиксированы, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, кроме того,

$$\varphi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{Z}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.58)$$

Полное описание \mathbb{R}^n , \mathfrak{Z} , $\partial \mathfrak{Z}$, $L_2(\mathfrak{Z})$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ представлено в разделе 2.1 главы 2.

Определение 3.7. Если совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ ($k = 1, 2, \dots, K$) удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\mathfrak{Z}} y(k)_i \eta(x) dx + \ell(y(k), \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(k) \eta(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$y(0) = \varphi(x),$$

для произвольной функции $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, то эта совокупность называется слабым решением системы (3.55), (3.56) здесь

$$y(k)_i = \frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)], \quad \ell(y(k), \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \left(\sum_{\kappa, i=1}^n a_{\kappa i}(x) \frac{\partial y(k)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x)y(k)\eta(x) \right) dx.$$

Замечание 3.6. Если зафиксировать k ($k = 1, 2, \dots, K$), то (3.55), (3.56) определяют набор краевых задач для эллиптических уравнений.

Следующее утверждение устанавливает условия разрешимости дифференциально-разностной системы (3.55), (3.56)

При достаточно малых τ и при выполнении условий (3.57), (3.58) дифференциально-разностная система (3.55), (3.56) слабо разрешима в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, и решение ее единственно.

Для обоснования утверждения потребуется базис $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, каковым, как показано в работе [14, 56], можно рассматривать множество обобщенных собственных функций следующей спектральной задачи в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$:

$$Lu(x) := -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ki}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \quad u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0. \quad (*)$$

А именно, обобщенная собственная функция $u(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ является нетривиальным решением для задачи

$$\ell(u, \eta) = \lambda(u, \eta) \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

при фиксированном параметре λ , (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\mathfrak{Z})$, а также в $L_2(\mathfrak{Z}_T)$.

Задача (*) задает две вещественные последовательности: $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ – собственные числа) и $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ ($u_i(x)$ – обобщенные собственные функции); $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ – базис в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ и $L_2(\mathfrak{Z})$. при этом можно считать, что $\{u_i(x)\}_{i \geq 1}$ ортонормирован в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$. Ясно, что при $b(x) \geq 0$ во втором неравенстве (3.57) получим неотрицательность всех собственных чисел: $\lambda_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда вытекает, что для $k = 1$ в (3.55) уравнение

$$Ly(1) = -\frac{1}{\tau} y(1) + \frac{1}{\tau} y(0) + f(1),$$

в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ дает единственное слабое решение $y(1)$ при $\tau < \tau_0$ для малом $\tau_0 > 0$. Аналогичное заключение можно сделать и для $y(2), y(3), \dots, y(K)$, учитывая

$$Ly(k) = -\frac{1}{\tau} y(k) + \frac{1}{\tau} y(k-1) + f(k),$$

при $k = 2, \dots, K$.

Далее получим не зависящие от τ оценки в $L_2(\mathfrak{Z})$ норм $\|y(k)\|_{\mathfrak{Z}}$ и $\left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{Z}} = \left(\int_{\mathfrak{Z}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y(x; k)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$, $k = 1, 2, \dots, K$. Обозначим $\|f(k)\|_{2,1,\mathfrak{Z}} = \tau \sum_{s=1}^k \|f(s)\|_{\mathfrak{Z}}$.

Если выполнены условия теоремы 3.16, то при $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$ для функций $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, имеют место следующие оценки норм:

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{Z}} \leq e^{4\beta T} \left(\|\varphi\|_{\mathfrak{Z}} + 2\|f(k)\|_{2,1,\mathfrak{Z}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} & \|y(m)\|_{\mathfrak{S}}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial y(k)}{\partial x} \right\|_{\mathfrak{S}}^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|y(k)_t\|_{\mathfrak{S}}^2 \leq \\ & \leq C \left(\|\varphi\|_{\mathfrak{S}}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\mathfrak{S}}^2 \right), 1 \leq m \leq K, \end{aligned}$$

$C > 0$ зависит только от заданных a_*, β, T .

Обоснование получения этих оценок почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в работе [105] (см. также [75]).

Следующее утверждение является непосредственным следствием из полученных оценок.

Если выполнены условия (3.57), (3.58), то при $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$ слабое решение системы (3.55),

(3.56) непрерывно зависит в нормах пространств $L_2(\mathfrak{S})$ и $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ от исходных данных $\varphi(x), f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$).

3.3.2. Оптимизационная задача для дифференциально-разностной системы

Аналогично сказанному выше $U = L_2(\mathfrak{S})$, введен линейный оператор $B: U \rightarrow L_2(\mathfrak{S})$, сохранены обозначения $y(k; v(k)) := y(x, k; v(k))$, $v(k) := v(x; k) \in U$ ($k = 0, 1, \dots, M$), для $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ($k = 1, 2, \dots, M$) рассматривается система

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} [y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{x_k}(x) \frac{\partial y(k; v(k))}{\partial x_k} \right) + b(x)y(k; v(k)) = \\ & = f(k) + Bv(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$y(0; v(0)) = \varphi(x), \quad y(k; v(k))|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.60)$$

Определение 3.8. Совокупность $\left\{ y(k; v(k)): y(k; v(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), k = 1, 2, \dots, M \right\}$

определяет слабое решение (3.59), (3.60), если

$$\int_{\mathfrak{S}} y(k; v(k))_t \eta(x) dx + \ell(y(k; v(k)), \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx + (Bv(k), \eta)_U \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}),$$

где $y(k; v(k))_t = \frac{1}{\tau} (y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1)))$, $k = 1, 2, \dots, M$, $y(0; v(0)) = \varphi(x)$.

В целях упрощения рассуждений считаем, что наблюдение за функцией $y(k; v(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ведется при всех $x \in \mathfrak{S}$, отображение $v(k) \rightarrow y(k; v(k))$ непрерывно.

Минимизируемый функционал $J(v)$ имеет вид

$$\begin{aligned} J(v) & := J(v(1), v(2), \dots, v(K)) = \tau \sum_{k=1}^K J_k(v(k)), \\ J_k(v(k)) & = \|y(k; v(k)) - z_0(k)\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 + (Nv(k), v(k))_U, \end{aligned} \quad (3.61)$$

заданы $w_0(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$, положительный оператор $N : U \rightarrow U$, для которого

$$(N(v(k), (v(k))_U) \geq \zeta \|v(k)\|_U^2, \quad \zeta > 0, \quad \forall v(k) \in U, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

пространство U внешних управляющих воздействий и ограниченное множество $U_\delta \subset U$ (выпуклое и замкнутое).

Оптимизационная задача для системы (3.59), (3.60) состоит в определении

$$\inf_{v \in U_\delta} J(v), \quad v = \{v(k), \quad k = 1, 2, \dots, K\}.$$

Задача оптимального внешнего воздействия на (3.59), (3.60). имеет единственное решение $v^* \in U_\delta$, т. е. $J(v^*) = \min_{v \in U_\delta} J(v)$; $v^* = \{v^*(k), k = 1, 2, \dots, K\} \in U_\delta$ – оптимум для (3.59), (3.60).

Свойство единственности решения оптимизационной задачи теряется, если $N = 0$ (замечание 3.5).

3.3.3. Условия существования оптимальных внешних воздействий на дифференциально-разностную систему

Остановимся на обсуждении результатов, необходимых в дальнейшем исследовании. Обоснования их не приводятся – они повторяют рассуждения аналогичных результатов, приведенных в пункте 3.3.2.

Если $u^* = \{u^*(k), \quad k = 1, 2, \dots, M\} \in U_\delta$ является оптимумом для функционала $J(v)$, то

$$J'(u^*)(v - u^*) \geq 0 \quad (3.62)$$

($J'(u^*)$ – производная по u^* в смысле Фреше).

Справедливо соотношение

$$y'(u)(v - u) = y(v) - y(u) \quad \forall v, u \in U_\delta. \quad (3.63)$$

Считаем, что совокупность $u(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) является оптимальным управляющим воздействием. Учитывая соотношения (3.62) и (3.63) лемм 3.8 и 3.9, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} J'_k(u(k))(v(k) - u(k)) = \\ & = (y(k; u(k)) - z_0(k), y'(k; u(k))(v(k) - u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U = \\ & = (y(k; u(k)) - z_0(k), (y(k; v(k)) - y(k; u(k)))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \end{aligned}$$

и далее неравенство

$$(y(k; u(k)) - z_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0, \quad (3.64)$$

как следствие (3.61), что приводит, учитывая (3.62) и (3.63), к неравенству

$$\tau \sum_{k=1}^M [(y(k; u(k)) - z_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) + (Nu(k), v(k) - u(k))_U] \geq 0 \quad (3.65)$$

при произвольной функции $v(k)$ из области U_∂ .

Получено утверждение, аналогичное представленному в пункте 3.3.2. для ограниченной области U_∂ .

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\partial$, $k = 0, 1, \dots, M$, совместно с состоянием $y(k; u(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$, $k = 1, 2, \dots, M$, определяется из соотношений

$$\int_{\mathfrak{D}} y(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(y(k; u(k)), \eta(x)) = \int_{\mathfrak{D}} (f(k) + Bu(k)) \eta(x) dx, \quad k = 1, \dots, M,$$

где $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ – произвольная функция,

$$\int_{\mathfrak{D}} (y(k; u(k)) - w_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) dx + (Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0,$$

где $v(k) \in U_\partial$ – произвольная функция.

Как и в пункте 3.2.3, обозначим через $p(k; v(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ сопряженное состояние для (3.59), (3.60), которое определено слабым решением краевой задачи

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} [p(k+1; v(k+1)) - p(k; v(k))] - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial p(k; v(k))}{\partial x_i} \right) + b(x) p(k; v(k)) = \\ = y(k; v(k)) - z_0(k), \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$p(M; v(M)) = 0, \quad p(k; v(k))|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (3.67)$$

Если в системе (3.66), (3.67) изменить нумерацию по правилу $l = M - k$, $k = M, M-1, \dots, 1, 0$, как это сделано при доказательстве теоремы 3.6, тогда получим систему

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} [\tilde{p}(l-1; v(l-1)) - \tilde{p}(l; v(l))] - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x) \frac{\partial \tilde{p}(l; v(l))}{\partial x_i} \right) + b(x) \tilde{p}(l; v(l)) = \\ = y(l; v(l)) - z_0(l), \quad l = 1, 2, \dots, K, \end{aligned}$$

$$\tilde{p}(0; v(0)) = 0, \quad \tilde{p}(l; v(l))|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, K,$$

относительно $\tilde{p}(l; v(l))$ ($l = 1, 2, \dots, M$), тогда получим следующее основное свойство системы (3.66), (3.67)

Система (3.66), (3.67) имеет слабое решение в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ и при том единственное при малых τ .

Для дальнейших рассуждений преобразуем соотношения (3.64), проводя следующие действия:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{K-1} [p(k+1; u(k+1)) - p(k; u(k))] [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] = \\
& = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^K \{ [y(k; v(k)) - y(k; u(k))] - [y(k-1; v(k-1)) - y(k-1; u(k-1))] \} p(k; u(k)), \\
& \sum_{k=0}^{K-1} \ell(p(k; u(k)), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \sum_{k=1}^K \ell(y(k; v(k)) - y(k; u(k)), p(k; u(k))),
\end{aligned}$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{K-1} (y(k; v(k)) - z_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = \\
& = \sum_{k=1}^K (Bv(k) - Bu(k), p(k; u(k))) = \sum_{k=0}^{K-1} (Bv(k) - Bu(k), p(k; u(k))) = \\
& = \sum_{k=0}^{K-1} (B^* p(k; u(k)), v(k) - u(k))_U,
\end{aligned}$$

оператор B^* – сопряженный к B , используются соотношения $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(K; u(K)) = 0$. Приходим к равенству

$$(y(k; v(k)) - z_0(k), y(k; v(k)) - y(k; u(k))) = (B^* p(k; u(k)), v(k) - u(k))_U, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

соотношение (3.64) трансформируется к виду

$$(B^* p(k; u(k)) + Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (3.68)$$

а (3.65) – к виду

$$\tau \sum_{k=0}^K (B^* p(k; u(k)) + Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (3.69)$$

здесь $y(0; v(0)) - y(0; u(0)) = 0$, $p(K; u(K)) = 0$.

Представленные преобразования неравенств (3.64), (3.65) к виду (3.68), (3.69) дают возможность получить формулировку в уточненном виде в терминах сопряженного состояния $p(k; u(k))$, $k = 1, 2, \dots, K$, для системы (3.59), (3.60).

Оптимальное управляющее воздействие $u(k) \in U_\delta$, $k = \overline{0, K}$ совместно с состояниями $y(k; u(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $k = \overline{1, K}$, и $p(k; u(k)) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $k = \overline{1, K}$, определяются из соотношений

$$\int_{\mathfrak{Z}} p(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(p(k; u(k)), \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} (y(k; u(k)) - z_0(k)) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}),$$

где $k = 1, \dots, K$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{Z}} p(k; u(k))_i \eta(x) dx + \ell(p(k; u(k)), \eta) &= \int_{\mathfrak{Z}} (y(k; u(k)) - z_0(k)) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}), \\
&k = 1, 2, \dots, K,
\end{aligned}$$

$$(B^* p(k; u(k)) + Nu(k), v(k) - u(k))_U \geq 0 \quad \forall v(k) \in U_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

где $y(0;v(0)) = \varphi(x)$, $p(K;v(K)) = 0$.

3.4 Алгоритм отыскания решения оптимизационных задач

Ниже представлен универсальный алгоритм нахождения решения любой из изучаемых в данном разделе оптимизационных задач. Следует только отметить, что на практике необходимо учитывать определенные свойства функциональных пространств, описывающих состояния процесса и внешние воздействия на этот процесс. Это требование продиктовано тем, что от формирования той или иной математической модели и последующего ее использования на практике существенным образом зависит учтение необходимых для анализа особенностей физической сущности изучаемого процесса.

Шаг 1. Определение типа оптимизационной задачи, установление структуры сетеподобной области, соответствующей типу изучаемого процесса.

Шаг 2. Формирование пространства состояний изучаемого процесса, включающее выбор класса функций для количественного и качественного описания свойств процесса.

Шаг 3. Формирование пространства внешних воздействий совместно с множеством допустимых внешних воздействий, определяемого для выбранного пространства состояний.

Шаг 4. Формирование математической модели изучаемого процесса с учетом выбранных пространств состояний и внешних воздействий, установление оператора (операторов), представляющего управляемую модель (дифференциальные или дифференциально-разностные операторы); установление условий, гарантирующих разрешимость того или иного типа операторных систем, представляющих управляемую модель.

Шаг 5. Формирование пространства наблюдений, содержащее наблюдения, как точно известные состояния изучаемого процесса.

Шаг 6. Выбор типа и построение минимизируемого функционала («функции стоимости»), определенный некоторым отображением множества допустимых внешних воздействий на пространство наблюдений, причем минимизируемый функционал должен обладать свойством, гарантирующим существование оптимального внешнего воздействия (единственного в зависимости от преследуемых целей и если это соответствует идеологии изучаемого процесса).

Шаг 7. Получение необходимых, или достаточных, или необходимых и достаточных условий существования инфимума минимизируемого функционала.

Выводы

1. Описана разрешимость параболической дифференциально-разностной системы на графе.

2. Представлены условия, гарантирующие определение оптимальных управляющих воздействий в задаче дискретной оптимизации для дифференциально-разностной системы на графе в классе суммируемых функций.

3. Указаны необходимые и достаточные условия определения оптимума оптимизационной задачи по стартовым условиям для дифференциально-разностной системы на графе в классе суммируемых функций.

4. Описаны необходимые и достаточные условия определения распределенного внешнего оптимального воздействия в оптимизационной задаче для дифференциально-разностной системы в классе суммируемых на графе функций.

5. Указаны условия для определения оптимального распределенного внешнего воздействия в оптимизационной задаче для дифференциально-разностной системы в классе суммируемых в сетеподобной области функций.

Глава 4 Анализ задач прикладного характера

Анализ задач прикладного характера осуществляется с помощью алгоритмов определения приближенного решения двухслойной и трехслойной дифференциально-разностной схемы, обоснование которых приведено в главах 2 и 3, в данной главе представлены математические модели прикладного характера и используются элементы спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [31, 35, 85, 86] (см. также [31, 39, 104]).

4.1 Алгоритмы построения приближений решений дифференциально-разностных схем

4.1.1 Алгоритм построения приближений решения дифференциально-разностной двухслойной схемы для параболического уравнения

Рассмотрим дифференциально-разностную двухслойную схему

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}[u(k) - u(k-1)] + Lu = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ u(0) = \varphi(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $u(k) := u(x; k)$, $f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt$, $\tau = T / K$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{D}_T)$, $Lu = - \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) + b(x)u$ (для частного случая при $x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^1$ см. [79,

80]). При фиксированных k ($k = 1, 2, \dots, K$) функция $u(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ определена как решение (4.1) с краевым условием

$$u(k)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0. \quad (4.2)$$

Система обобщенных собственных функций $\{\phi_i(x)\}$ оператора L ($L\phi = \lambda\phi$, $\phi(x)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0$, $\phi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$) является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ и $L_2(\mathfrak{D})$ [12, 14, 56].

Обозначим через $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ – множество собственных значений. Решение задачи (4.1), (4.2) определяется рядом

$$u(k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k \phi_i(x), \quad C_i^k = \text{const.}$$

Отсюда $Lu(k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k L\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k \lambda_i \phi_i(x)$, $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ – совокупность собственных значений оператора L . Для функций $f(k)$, $\varphi(x)$ имеют место разложения по базису $\{\phi_i(x)\}$ в $L_2(\mathfrak{D})$:

$$f(k) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^k \phi_i(x), \quad f_i^k = (f(k), \phi_i(x)), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \phi_i(x), \quad \varphi_i = (\varphi(x), \phi_i(x)).$$

Из (4.1) при $k=1$ следует $u(1) + \tau Lu(1) = u(0) + \tau f(1)$. Откуда имеем $C_i^1 = \frac{\varphi_i + \tau f_i^1}{1 + \tau \lambda_i}$, а

значит

$$u(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i + \tau f_i^1}{1 + \tau \lambda_i} \phi_i(x). \quad (4.3)$$

Из (4.1) при $k=2$ следует

$$u(2) + \tau Lu(2) = u(0) + \tau f(2),$$

$$C_i^2 = \frac{\varphi_i + \tau f_i^1 + \tau(1 + \tau \lambda_i) f_i^2}{(1 + \tau \lambda_i)^2},$$

$$u(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i + \tau f_i^1 + \tau(1 + \tau \lambda_i) f_i^2}{(1 + \tau \lambda_i)^2} \phi_i(x), \quad (4.4)$$

и т. д.,

при $k=K$ $C_i^K = \frac{\varphi_i + \tau \sum_{n=0}^{K-1} (1 + \tau \lambda_i)^n f_i^{n+1}}{(1 + \tau \lambda_i)^K}$ и

$$u(K) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i + \tau \sum_{n=0}^{K-1} (1 + \tau \lambda_i)^n f_i^{n+1}}{(1 + \tau \lambda_i)^K} \phi_i(x). \quad (4.5)$$

Алгоритм построения приближений решения. Исходными данными считаем функции $\varphi(x)$, $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k=1, 2, \dots, K$), числа $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ (вещественные числа), N, K (натуральные числа).

Алгоритм в соответствии с заданным τ и определенными числами φ_i , f_i^k :

1) при $k=1$ из соотношения (4.3) следует

$$u^N(1) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i + \tau f_i^1}{1 + \tau \lambda_i} \phi_i(x),$$

2) при $k=2$ из соотношения (4.4) следует

$$u^N(2) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i + \tau f_i^1 + \tau(1 + \tau \lambda_i) f_i^2}{(1 + \tau \lambda_i)^2} \phi_i(x),$$

...

K) при $k=K$ из соотношения (4.5) следует

$$u^N(K) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i + \tau \sum_{n=0}^{K-1} (1 + \tau \lambda_i)^n f_i^{n+1}}{(1 + \tau \lambda_i)^K} \phi_i(x),$$

$K+1$) критерием завершения процесса формирования K -го приближения $u^N(k)$ решения задачи (4.1), (4.2) является выполнение соотношения

$$\sum_{k=1}^K \|u^N(k) - u^{N-1}(k)\|_{\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})} < \varepsilon$$

в соответствии с заданным значением числа ε .

4.1.2 Алгоритм построения приближений решения дифференциально-разностной трехслойной схемы для гиперболического уравнения

Рассмотрим дифференциально-разностную трехслойную схему

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}[u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)] + Ly = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ u(0) = \varphi(x), \quad u(1) = \psi(x), \end{aligned} \quad (4.6)$$

здесь используются обозначения, представленные для схемы (4.1) п. 4.1.1. При фиксированном k ($k = 1, 2, \dots, K-1$) функция $u(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ определена как решение (4.6) с краевым условием

$$u(k)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0. \quad (4.7)$$

Как и выше, система обобщенных собственных функций $\{\phi_i(x)\}$ оператора L ($L\phi = \lambda\phi$, $\phi(x)|_{x \in \partial \mathfrak{D}} = 0$, $\phi(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$) является базисом в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{D})$ и $L_2(\mathfrak{D})$.

Обозначим через $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ – множество собственных значений. Решение задачи (4.6), (4.7) определяется рядом

$$u(k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k \phi_i(x), \quad k = 2, 3, \dots, K.$$

Отсюда $Lu(k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k L\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k \lambda_i \phi_i(x)$. Для функций $f(k)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют место разложения по базису в $L_2(\mathfrak{D})$:

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i^k \phi_i(x), \quad f_i^k = (f(k), \phi_i(x)), \quad k = 1, \dots, K, \\ \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \phi_i(x), \quad \varphi_i = (\varphi(x), \phi_i(x)), \\ \psi(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \phi_i(x), \quad \psi_i = (\psi(x), \phi_i(x)). \end{aligned}$$

Из (4.6) при $k=1$ следует $u(2) + \tau^2 Lu(2) = 2u(1) - u(0) + \tau^2 f(1)$. Откуда имеем

$$C_i^2 = \frac{2\psi_i - \varphi_i + \tau^2 f_i^1}{1 + \tau^2 \lambda_i}, \text{ а значит,}$$

$$u(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\psi_i - \varphi_i + \tau^2 f_i^1}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x). \quad (4.8)$$

Из (4.6) при $k=2$ следует $u(3) + \tau^2 Lu(3) = 2u(2) - u(1) + \tau^2 f(2)$, $C_i^3 = \frac{2C_i^2 - \psi_i + \tau^2 f_i^2}{1 + \tau^2 \lambda_i}$ и

$$u(3) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2C_i^2 - \psi_i + \tau^2 f_i^2}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x), \quad (4.9)$$

и т. д.

При $k = K - 1$ $C_i^K = \frac{2C_i^{K-1} - C_i^{K-2} + \tau^2 f_i^{K-1}}{1 + \tau^2 \lambda_i}$ и

$$u(K) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2C_i^{K-1} - C_i^{K-2} + \tau^2 f_i^{K-1}}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x). \quad (4.10)$$

Алгоритм построения приближений решения. Исходными данными считаем функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(k) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ($k = 1, 2, \dots, K$), числа $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ (вещественные числа), N, K (натуральные числа).

Алгоритм в соответствии с заданным τ и определенными числами φ_i , f_i^k :

1) при $k=1$ из соотношения (4.8) следует

$$u^N(2) = \sum_{i=1}^N \frac{2\psi_i - \varphi_i + \tau^2 f_i^1}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x),$$

2) при $k=2$ из соотношения (4.9) следует

$$u^N(3) = \sum_{i=1}^N \frac{2C_i^2 - \psi_i + \tau^2 f_i^2}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x),$$

...

$K-1$) при $k = K - 1$ из соотношения (4.10) следует

$$u^N(K) = \sum_{i=1}^N \frac{2C_i^{K-1} - C_i^{K-2} + \tau^2 f_i^{K-1}}{1 + \tau^2 \lambda_i} \phi_i(x),$$

K) критерием завершения процесса формирования K -го приближения $u^N(k)$ решения задачи (4.6), (4.7) является выполнение соотношения

$$\sum_{k=1}^K \|u^N(k) - u^{N-1}(k)\|_{\overline{W}_0^1(\mathfrak{Z})} < \varepsilon,$$

в соответствии с заданным значением числа ε .

4.2 Структура программного комплекса

Программный комплекс для реализации задач переноса сплошных сред и задач колебаний сплошных сред сформирован на базе алгоритмического языка PascalABCNET, структура которого указана на рис. 4.1.



Рис. 4.1. Структура программного комплекса для анализа процессов переноса сплошных сред и волновых процессов в сетевых носителях

Программный комплекс включает в себя **основные разделы**: 1)раздел обработки исходных данных, включающий модуль выбора типа процесса (рис. 4.2), модуль выбора носителей процесса и их структуры (рис. 4.3), модуль ввода начальных условий; 2)раздел формирования математических моделей изучаемых процессов (двух- или трехслойные схемы); 3)раздел определения спектральных параметров математических моделей изучаемых процессов, включающий модуль определения множеств частот и частотных функций(рис. 4.4), а также модуль определения коэффициентов Фурье для разложений исходных данных по частотным функциям и модуль определения коэффициентов Фурье для разложений приближенных состояний; 4)раздел определения приближенных состояний математических моделей (рис. 4.5); 5) раздел вывода числовых результатов с модулем вывода числовых результатов в виде таблиц

(рис. 4.6), и модулем вывода числовых результатов для графической интерпретации результатов (рис. 4.7) (Maple 2020.2)



Рис. 4.2. Модуль выбора типа процесса

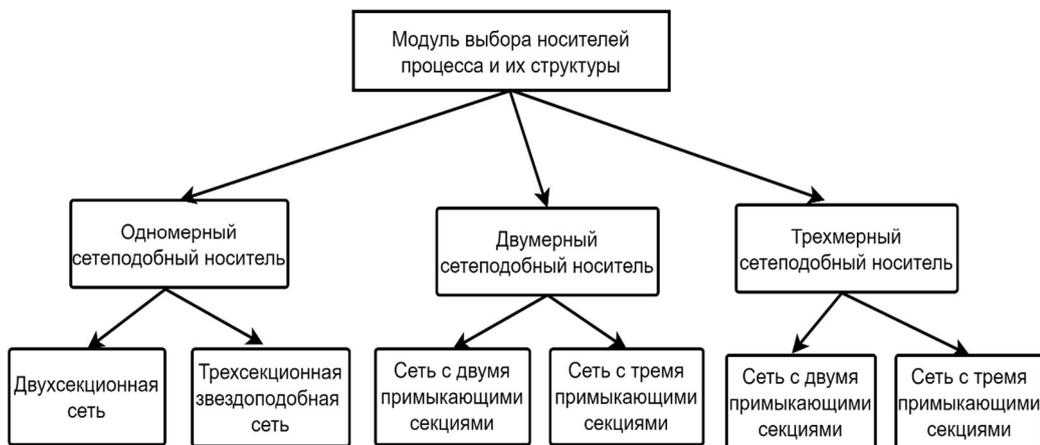


Рис. 4.3. Модуль выбора типа носителей процесса и их структуры



Рис. 4.4. Модуль определения множеств частот и частотных функций



Рис. 4.5. Раздел вычисления приближенных состояний математических моделей

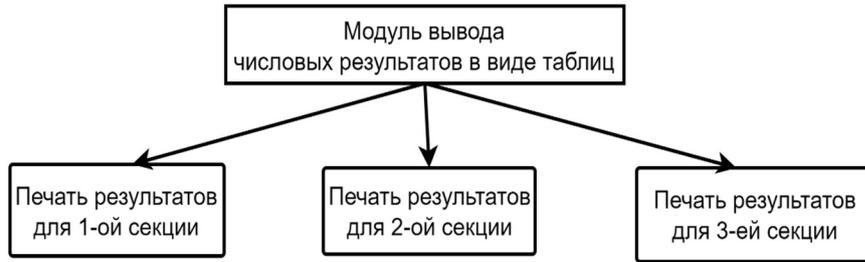


Рис. 4.6. Модуль вывода числовых результатов в виде таблиц

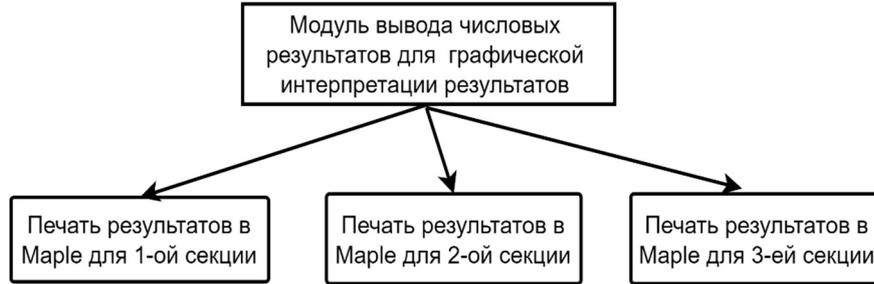


Рис. 4.7. Модуль вывода числовых результатов для графической интерпретации результатов

4.3 Численный анализ математических моделей сетеподобных процессов переноса сплошных сред

4.3.1 Задача переноса по двухсекционной сети

Пусть Γ – двухсекционная сеть (рис. 4.8), которая моделируется графом (мы оставляем для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с двумя ребрами γ_1, γ_2 (γ_1, γ_2 – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 соответствует отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_2 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$.

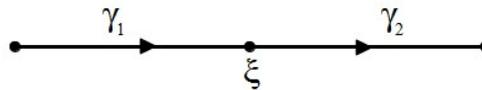


Рис. 4.8. Двухсекционная сеть

Функция $u(x, t)$, характеризующая количественные характеристики процесса переноса сплошной среды, подчиняется уравнению переноса по ребрам графа (секциям сети)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (4.11)$$

условиям в месте сочленения секций (узле) ξ

$$\begin{aligned} u(x,t)\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} &= u(x,t)\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

и условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.13)$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = u(x,t)\Big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (4.14)$$

здесь (4.13), (4.14) – начальное и граничное условия, соответственно.

Дифференциальную систему (4.11) – (4.14) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(k)}{dx}\right) + b(x)u(k) = f(k), \quad (4.15)$$

$$u(k) := u(x; k), \quad f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} u(k)\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} &= u(k)\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}, \\ \frac{du(k)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_1} &= \frac{du(k)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}\in\gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$u(0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.17)$$

$$u(k)\Big|_{x=0} = u(k)\Big|_{x=1} = 0. \quad (4.18)$$

Рассмотрим случай, когда $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$. При этом функция $\varphi(x)$ определена соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x, & x \in \gamma_1, \\ -6x^2 + 7x - 1, & x \in \gamma_2. \end{cases}$$

Дифференциальное выражение $-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(k)}{dx}\right)$ при $a(x) = 1$ порождает спектральную задачу

$$-\frac{d^2u(k)}{dx^2} = \lambda u(k), \quad u(k) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

для которой множество собственных значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, и множество обобщенных собственных функции $\{u_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$, (собственные функции ортономированы) определяются следующими формулами:

При $i = 2n - 1$

$$\lambda_{2n-1} = 4\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_1, \\ \sqrt{2} \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_2, \end{cases} \quad (4.19)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $u_{2n-1}(x)$: $\varphi_{2n-1} = (\varphi(x), u_{2n-1}(x)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n))$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 2n$,

$$\lambda_{2n} = \pi^2 (2n-1)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(\pi(2n-1)(x-1/2)), & x \in \gamma_1, \\ \sqrt{2} \cos(\pi(2n-1)(x-1/2)), & x \in \gamma_2, \end{cases} \quad (4.20)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $u_{2n}(x)$: $\varphi_{2n} = (\varphi(x), u_{2n}(x)) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближение решения для (4.15) – (4.18) определяется конечной суммой

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ представлено в пункте 4.1.1, шаг по переменной x : $h = 0.05$, шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$. На рис. 4.9 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x, t)$, описывающей тепловые характеристики для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.02$; [3] $t = 0.04$; [4]; [5] $t = 0.08$.

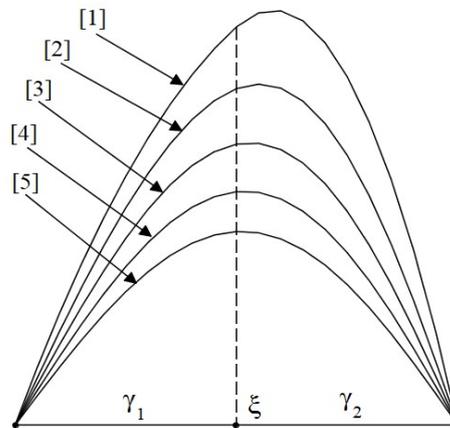


Рис. 4.9. Графическая интерпретация переноса теплоты на двухсекционной сети

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.1 и 2.1.1 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [70]).

4.3.2 Задача переноса по звездоподобной трехсекционной сети

Пусть Γ – трехсекционная звездоподобная сеть (рис. 4.10), которая моделируется графом-звездой (здесь также остается для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$.

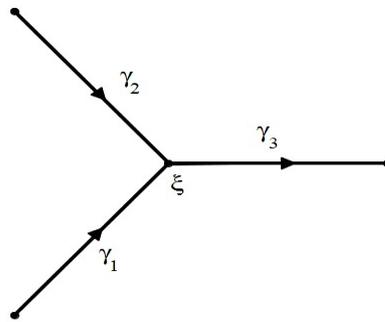


Рис. 4.10. Звездоподобная трехсекционная сеть

Функция $u(x, t)$, характеризующая количественные характеристики процесса переноса сплошной среды, подчиняется уравнению переноса по ребрам графа (секциям сети)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (4.21)$$

условиям в месте сочленения секций (узле) ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

и условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.23)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.24)$$

здесь (4.23), (4.24) – начальное и граничное условия, соответственно.

Дифференциальную систему (4.21) – (4.24) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k) = f(k), \quad (4.25)$$

$$u(k) := u(x; k), \quad f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt, \quad \tau = T / K, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2} = u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3}, \\ \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3} &= \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} + \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$u(0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.27)$$

$$u(k) \Big|_{x=0} = u(k) \Big|_{x=1} = 0. \quad (4.28)$$

Рассмотрим случай, когда $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$. При этом функция $\varphi(x)$ определена соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \in \gamma_1, \\ -x^2 + 2x, & x \in \gamma_2, \\ -7x^2 + 9x - 2, & x \in \gamma_3. \end{cases}$$

Дифференциальное выражение $-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \right)$ при $a(x) = 1$ порождает спектральную задачу

$$-\frac{d^2 u(k)}{dx^2} = \lambda u(k), \quad u(k) \in W_0^1(a, \Gamma),$$

для которой множество собственных значений $\{\lambda_i\}$ и множество обобщенных собственных функции $\{u_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$ (собственные функции ортономированы) определяются следующими формулами.

При $i = 3n - 2$

$$\begin{aligned} \lambda_{3n-2} &= 4\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u_{3n-2}(x) &= \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_1, \\ 0, & x \in \gamma_2, \\ \sqrt{2} \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.29)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $u_{3n-2}(x)$: $\varphi_{3n-2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n))$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 3n - 1$,

$$\lambda_{3n-1} = 4\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{3n-1}(x) = \begin{cases} -(\sqrt{6}/3) \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_1, \\ (2\sqrt{6}/3) \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_2, \\ (\sqrt{6}/3) \sin(2\pi n(x-1/2)), & x \in \gamma_3, \end{cases} \quad (4.30)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $u_{3n-1}(x)$: $\varphi_{3n-1} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n))$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 3n$,

$$\lambda_{3n} = \pi^2 (2n-1)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{3n}(x) = \begin{cases} (2/\sqrt{3}) \cos(\pi(2n-1)(x-1/2)), & x \in \gamma_1, \\ (2/\sqrt{3}) \cos(\pi(2n-1)(x-1/2)), & x \in \gamma_2, \\ (2/\sqrt{3}) \cos(\pi(2n-1)(x-1/2)), & x \in \gamma_3, \end{cases} \quad (4.31)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ по $u_{3n}(x)$: $\varphi_{3n} = \frac{12\sqrt{3}}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближение решения для (4.25) – (4.28) определяется конечной суммой

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ представлено в пункте 4.1.1, шаг по переменной x : $h = 0.05$, шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = 100$, $N = 99$. На рис. 4.11 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x, t)$, описывающей тепловые характеристики для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.02$; [3] $t = 0.04$; [4]; [5] $t = 0.08$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.2 и 2.1.2 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [70]).

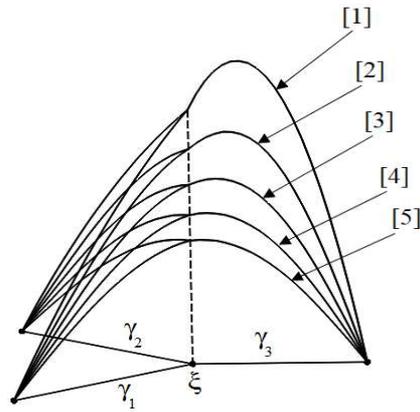


Рис. 4.11. Графическая интерпретация переноса теплоты по трехсекционной сети

4.3.3 Задача переноса на двумерной сети с двумя примыкающими секциями

Двумерная сеть \mathfrak{S} с двумя примыкающими секциями \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.12), состоящей из двух подобластей \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 и поверхности примыкания

$$S: \mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

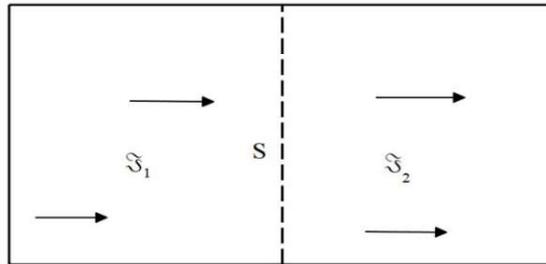


Рис. 4.12 Двумерная сеть с двумя примыкающими секциями

Пусть функция $u(x_1, x_2, t)$, определяющая процесс переноса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, \quad t \in (0, T), \quad (4.32)$$

где

$$\Lambda u = - \sum_{k, l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kl}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + b(x_1, x_2) u,$$

условиям в поверхности примыкания S

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

начальным

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \quad (4.34)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Начально-краевую задачу (4.32) – (4.35) аппроксимирует дифференциально-разностная система (4.36) – (4.39) (см. [76])

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = f(k), \quad (4.36)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} u(k)|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} = u(k)|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} = \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Рассмотрим случай, когда $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1$, $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$ и

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_1, \\ (-4x_1^2 + 5x_1 - 1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_2. \end{cases}$$

Выражение $-\sum_{\kappa, i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa i}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$, $\kappa = 1, 2$,

для функции $u(k)$ задает спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_2^2} \right) = \lambda u(k), \quad u(k) \in \widetilde{W}^1(\mathfrak{S}), \\ u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1} = 0 \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0, \end{aligned}$$

спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определяются следующим образом.

При $i = 2n - 1$

$$\lambda_{2n-1} = 4\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(2\pi n(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(2\pi n(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases} \quad (4.40)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{2n-1}(x_1, x_2)$: $\varphi_{2n-1} = \frac{1}{\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n))$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 2n$,

$$\lambda_{2n} = \pi^2 (2n-1)^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(\pi(2n-1)(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(\pi(2n-1)(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases} \quad (4.41)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{2n}(x_1, x_2)$: $\varphi_{2n} = \frac{8}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближение решения для (4.36) – (4.39) определяется конечной суммой

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x_1, x_2), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ представлено в пункте 4.1.1, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$. На рис. 4.13 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1, x_2, t)$, описывающей тепловые характеристики для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.05$; [3] $t = 0.1$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.3 и 2.1.3 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [71]).

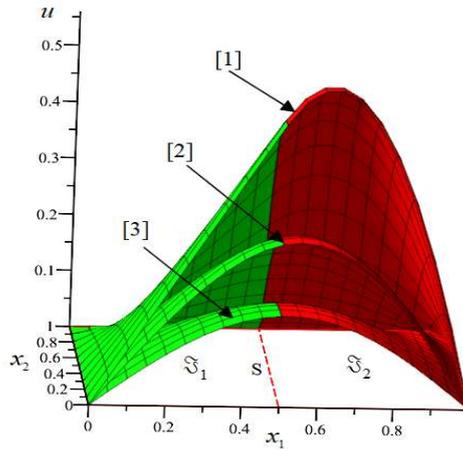


Рис. 4.13. Графическая интерпретация переноса теплоты на двумерной сети с двумя примыкающими секциями

4.3.4 Задача переноса на двумерной сети с тремя примыкающими секциями

Двумерная сеть \mathfrak{S} с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.14), состоящей из трех подобластей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ и двух

поверхностей примыкания S_1, S_2 : $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$,

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}, \mathfrak{S}_3 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

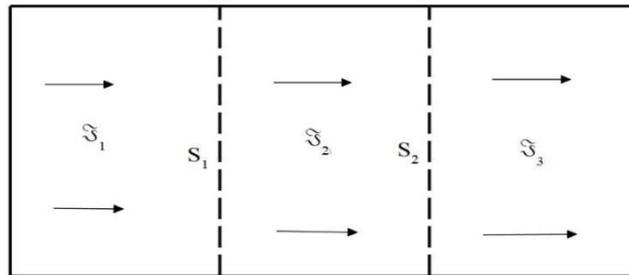


Рис. 4.14. Двумерная сеть с тремя примыкающими секциями

Пусть функция $u(x_1, x_2, t)$, определяющая процесс переноса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, \quad t \in (0, T), \quad (4.42)$$

где оператор Λ аналогичен определенному в п. 4.3.3,

условиям в поверхности примыкания S_1

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

условиям в поверхности примыкания S_2

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

начальным

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \quad (4.45)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Начально-краевую задачу (4.42) – (4.46) аппроксимирует дифференциально-разностная система (4.47) – (4.51) (см. [76])

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = f(k), \quad (4.47)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Рассмотрим случай, когда $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1$, $b(x_1, x_2) = 0$,

$f(x_1, x_2, t) = 0$ и

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ x_1 \cos \frac{\pi}{2} x_2, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ (-9x_1^2 + 13x_1 - 4) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3. \end{cases}$$

Выражение $-\sum_{\kappa, l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa l}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right)$ при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$, $\kappa = 1, 2$,

для функции $u(k)$ задает спектральную задачу (см. [77]):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_2^2} \right) &= \lambda u(k), \quad u(k) \in \widetilde{W}^1(\mathfrak{I}), \\ u(k)|_{x_1=0} &= u(k)|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0, \end{aligned}$$

спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определяются следующим образом.

При $i = 5n - 4$,

$$\begin{aligned} \lambda_{5n-4} &= 9\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u_{5n-4}(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.52)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{5n-4}(x_1, x_2)$: $\varphi_{5n-4} = \frac{2}{3\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1)$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 5n - 3$,

$$\begin{aligned} \lambda_{5n-3} &= s_1^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_1 = \pi(6n - 5), \quad n = 1, 2, \dots, \\ u_{5n-3}(x_1, x_2) &= \begin{cases} 2 \sin(s_1(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(s_1 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(s_1(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.53)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{5n-3}(x_1, x_2)$: $\varphi_{5n-3} = \frac{9}{s_1^3}$, $n=1, 2, \dots$

При $i = 5n - 2$,

$$\lambda_{5n-2} = s_2^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_2 = \pi(6n-1), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$u_{5n-2}(x_1, x_2) = \begin{cases} -2 \sin(s_2(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2 \sin(s_2 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2 \sin(s_2(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.54)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{5n-2}(x_1, x_2)$: $\varphi_{5n-2} = \frac{9}{s_2^3}$, $n=1, 2, \dots$

При $i = 5n - 1$,

$$\lambda_{i+3} = s_3^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_3 = \pi(6n-4), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$u_{5n-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} -2 \sin(s_3(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2 \sin(s_3 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2 \sin(s_3(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.55)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{5n-1}(x_1, x_2)$: $\varphi_{5n-1} = \frac{27}{s_3^3}$, $n=1, 2, \dots$

При $i = 5n$,

$$\lambda_{5n} = s_4^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_4 = \pi(6n-2), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$u_{5n}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(s_4(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(s_4 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(s_4(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.56)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2)$ по $u_{5n}(x_1, x_2)$: $\varphi_{5n} = \frac{27}{s_4^3}$, $n=1, 2, \dots$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j=1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для

собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближение решения для (4.47) – (4.51) определяется суммой

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x_1, x_2), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ представлено в пункте 4.1.1, шаг по x_1 : $h_1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h_2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$. На рис. 4.15 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1, x_2, t)$, описывающей тепловые характеристики для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.05$; [3] $t = 0.1$.

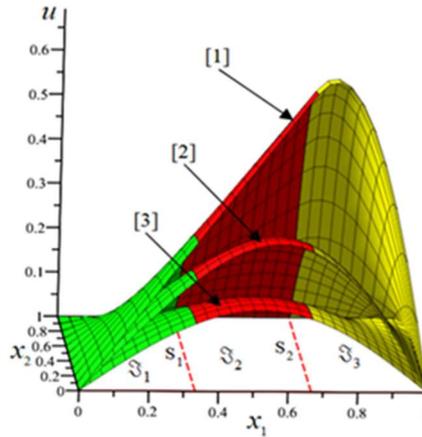


Рис. 4.15. Графическая интерпретация переноса теплоты по двумерной сети с тремя примыкающими секциями

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.4 и 2.1.4 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [71]).

4.3.5 Задача переноса на трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

Трехмерная сеть $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.16) состоит из двух области $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$:
 $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$ и поверхности примыкания S .

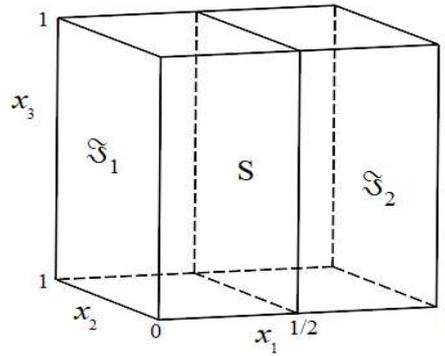


Рис. 4.16. Трехмерная сеть с двумя примыкающими секциями

Функция $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, определяющая тепловые характеристики теплового потока, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Bu = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}, \quad t \in (0, T], \quad (4.57)$$

где

$$Bu = - \sum_{\kappa, \iota=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa \iota}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) + b(x_1, x_2, x_3)u,$$

условиям примыкания на поверхности S

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

начальными

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (4.59)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1=0} &= u \Big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u \Big|_{x_3=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Начально-краевую задачу (4.57)–(4.60) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau} (u(k) - u(k-1)) + Bu(k) = f(k), \quad (4.61)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2, x_3; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2, x_3; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, x_3, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = \overline{1, K},$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1=0} &= u(k) \Big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u(k) \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u(k) \Big|_{x_3=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Рассмотрим случай, когда $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1, 3}$), $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, \iota \leq 3$, $\kappa \neq \iota$), $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$. Начальная функция определена соотношением

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 3x_1 \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_1, \\ (-12x_1^2 + 15x_1 - 3) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_2. \end{cases}$$

Выражение $-\sum_{\kappa, \iota=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)$ при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1, 3}$),

$a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, \iota \leq 3$, $\kappa \neq \iota$) для функции $u(k)$ задает спектральную задачу

$$-\left(\frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_3^2} \right) = \lambda u(k), \quad u(k) \in \widetilde{W}^1(\mathfrak{S}), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1=0} &= u(k) \Big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u(k) \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u(k) \Big|_{x_3=1} = 0, \end{aligned}$$

спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2, x_3)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определяются следующим образом (собственные функции ортонормированны).

При $i = 2n - 1$,

$$\lambda_{2n-1} = 4\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(2\pi n(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2\sqrt{2} \sin(2\pi n(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases} \quad (4.65)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{2n-1}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{2n-1} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n))$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 2n$,

$$\lambda_{2n} = \pi^2 (2n-1)^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2n}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(\pi(2n-1)(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2\sqrt{2} \sin(\pi(2n-1)(x_1 - \frac{1}{2})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases} \quad (4.66)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{2n}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{2n} = \frac{12\sqrt{2}}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций $\{u_j(x_1, x_2, x_3)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближенное решение для (4.61)-(4.64) представляется в виде

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x_1, x_2, x_3), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ аналогично представленному в пункте 4.1.1, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h3 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$. На рис. 4.17 (\mathfrak{I}_l^c ($l = 1, 2$), S^c – сечение x_3 и \mathfrak{I}) представлена графическая интерпретация переноса тепла $u(x_1, x_2, x_3, t)$ при различных значениях t, x_3 : [1]: $t = 0, x_3 = 0$; [2]: $t = 0, x_3 = 0.5$; [3]: $t = 0.05, x_3 = 0$; [4]: $t = 0.05, x_3 = 0.5$. Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.5 и 2.1.5 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [73]).

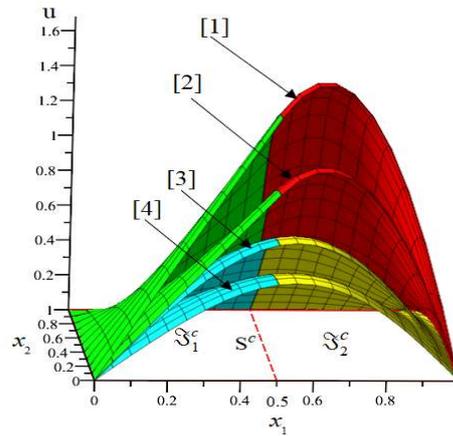


Рис. 4.17. Графическая интерпретация переноса теплоты для различных значений t и x_3 по трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

4.3.6 Задача переноса на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

Трехмерная сеть $\mathfrak{V} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.18) задана тремя примыкающими секциями $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3$:

$$\mathfrak{V}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{V}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{V}_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\} \text{ и поверхностями примыкания } S_1, S_2.$$

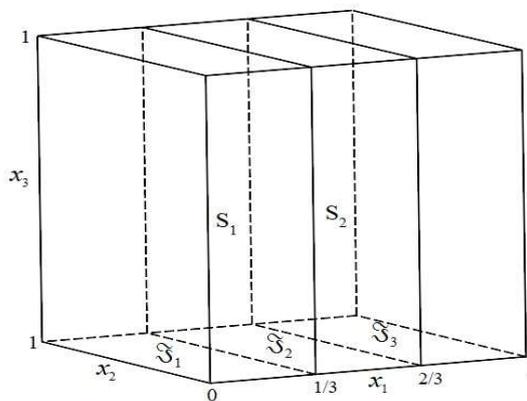


Рис. 4.18. Трехмерная сеть с тремя примыкающим секциями

Пусть функция $u(x_1, x_2, x_3, t)$, характеризующая тепловой поток, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Bu = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{V}, \quad t \in (0, T], \quad (4.67)$$

условиям в поверхности примыкания S_1

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= u \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

условиям в поверхности примыкания S_2

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= u \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

начальными

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (4.70)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1=0} &= u \Big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, u \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, u \Big|_{x_3=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

где выражение Bu аналогично определенному в п. 4.3.5.

Начально-краевую задачу (4.67)–(4.71) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + Bu(k) = f(k), \quad (4.72)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2, x_3; k), f(k) := f(x_1, x_2, x_3; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, x_3, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = \overline{1, K},$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= u(k) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned}
u(k)|_{x_1=0} &= u(k)|_{x_1=1} = 0, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_3=1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Пусть $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1,3}$), $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, \iota \leq 3$, $\kappa \neq \iota$), $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, начальная функция определена соотношением

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 4x_1 \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ (-9x_1^2 + 10x_1 - 1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ (-9x_1^2 + 10x_1 - 1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3. \end{cases}$$

Выражение $-\sum_{\kappa, \iota=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)$ при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1,3}$),

$a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, \iota \leq 3$, $\kappa \neq \iota$) для функции $u(k)$ определяет спектральную задачу

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_3^2} \right) &= \lambda u(k), \quad u(k) \in \widetilde{W}^1(\mathfrak{I}), \quad k = 1, 2, \dots, K, \\
u(k)|_{x_1=0} &= u(k)|_{x_1=1} = 0, \quad \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_3=1} = 0,
\end{aligned}$$

спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2, x_3)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определяются следующим образом (собственные функции ортонормированны).

При $i = 5n - 4$,

$$\begin{aligned}
\lambda_{5n-4} &= 9\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\
u_{5n-4}(x_1, x_2, x_3) &= \begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2\sqrt{2} \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2\sqrt{2} \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \tag{4.77}
\end{aligned}$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{5n-4}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{5n-4} = 0$, $n = 1, 2, \dots$

При $i = 5n - 3$,

$$\lambda_{5n-3} = s_1^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad s_1 = \pi(6n-5), \quad n=1,2,\dots,$$

$$u_{5n-3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(s_1(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2\sqrt{2} \sin(s_1 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2\sqrt{2} \sin(s_1(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.78)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{5n-3}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{5n-3} = \frac{27}{s_1^3}$, $n=1,2,\dots$

При $i = 5n - 2$,

$$\lambda_{5n-2} = s_2^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad s_2 = \pi(6n-1), \quad n=1,2,\dots,$$

$$u_{5n-2}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -2\sqrt{2} \sin(s_2(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2\sqrt{2} \sin(s_2 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2\sqrt{2} \sin(s_2(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.79)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{5n-2}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{5n-2} = \frac{27}{s_2^3}$, $n=1,2,\dots$

При $i = 5n - 1$,

$$\lambda_{5n-1} = s_3^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad s_3 = \pi(6n-4), \quad n=1,2,\dots$$

$$u_{5n-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -2\sqrt{2} \sin(s_3(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2\sqrt{2} \sin(s_3 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2\sqrt{2} \sin(s_3(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases} \quad (4.80)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{5n-1}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{5n-1} = \frac{27}{s_3^3}$, $n=1,2,\dots$

При $i = 5n$,

$$\lambda_{5n} = s_4^2 + \frac{\pi^2}{2}, \quad s_4 = \pi(6n-2), \quad n=1,2,\dots,$$

$$u_{5n}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(s_4(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_1, \\ 2\sqrt{2} \sin(s_4 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_2, \\ 2\sqrt{2} \sin(s_4(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_3, \end{cases} \quad (4.81)$$

коэффициенты Фурье $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по $u_{5n}(x_1, x_2, x_3)$: $\varphi_{5n} = \frac{27}{s_4^3}$, $n = 1, 2, \dots$

Введем нумерацию для собственных значений $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, так, чтобы $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2, x_3)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближенное решение для (4.72)–(4.76) представляется в виде

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x_1, x_2, x_3), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k)$ аналогично представленному в п.4.1.1, шаг по x_1 : $h1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$. На рис. 4.19 (\mathfrak{S}_l^c ($l = \overline{1,3}$), S_1^c, S_2^c – сечение x_3 и \mathfrak{S}) представлена графическая интерпретация переноса тепла $u(x_1, x_2, x_3, t)$ при различных значениях t, x_3 : [1]: $t = 0, x_3 = 0$; [2]: $t = 0, x_3 = 0.5$; [3]: $t = 0.05, x_3 = 0$; [4]: $t = 0.05, x_3 = 0.5$.

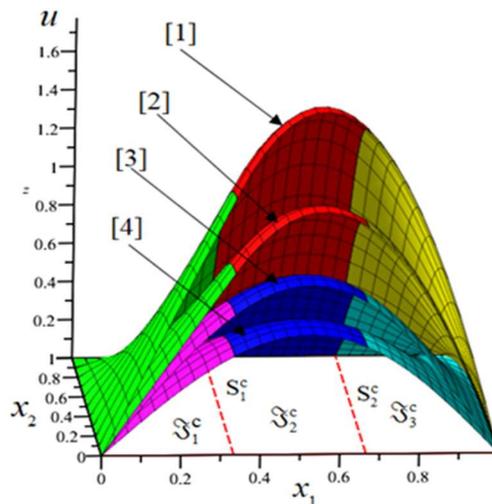


Рис. 4.19. Графическая интерпретация переноса теплоты при фиксированных x_3, t на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.1.6 и 2.1.6 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [73]).

4.4. Численный анализ математических моделей сетеподобных волновых процессов сплошных сред

4.4.1 Колебания двухсекционной сети

По аналогии с пунктом 4.3.1 Γ – двухсекционная сеть (рис. 4.8), которая моделируется графом (мы оставляем для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с двумя ребрами γ_1, γ_2 (γ_1, γ_2 – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 соответствует отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_2 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$.

Пусть функция $u(x, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (4.82)$$

условиям согласования в узле ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

со следующими начальными и граничным условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \alpha(x), \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.85)$$

Начально-краевую задачу (4.82) – (4.85) аппроксимирует дифференциально-разностная схема

$$\frac{1}{\tau^2} (u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k+1)}{dx} \right) + b(x)u(k+1) = f(k), \quad (4.86)$$

$$u(k) := u(x; k), \quad f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \\ \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$u(0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$\frac{u(1) - u(0)}{\tau} \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha(x), \quad u(1) = \varphi(x) + \tau\alpha(x), \quad (4.88)$$

$$u(k) \Big|_{x=0} = u(k) \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.89)$$

Рассмотрим случай, когда $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x,t) = 0$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x^2, & x \in \gamma_1, \\ -2x^2 + 3x - 1, & x \in \gamma_2, \end{cases}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} -2x^2 + x, & x \in \gamma_1, \\ 2x^2 - 3x + 1, & x \in \gamma_2, \end{cases}.$$

Выражение $\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k+1)}{dx} \right)$ при $a(x) = 1$ задает спектральную задачу, представленную

в пункте 4.3.1, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определены там же.

При $i = 2n - 1$: $\{\lambda_{2n-1}\}$, $\{u_{2n-1}(x)\}$ определяются набором (4.19) и разложения исходных данных по $\{u_{2n-1}(x)\}$ имеют коэффициенты Фурье вида

$$\varphi_{2n-1} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi^3 n^3}, \quad \alpha_{2n-1} = \frac{\sqrt{2}(\cos(\pi n) - 1)}{\pi^3 n^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 2n$: $\{\lambda_{2n}\}$, $\{u_{2n}(x)\}$ определяются набором (4.20) и разложения исходных данных по $\{u_{2n}(x)\}$ имеют коэффициенты Фурье вида:

$$\varphi_{2n} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) - \frac{24\sqrt{2}}{\pi^4 (2n-1)^4}, \quad \alpha_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$, тогда приближение решения для (4.61) – (4.64) определяется конечной суммой

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} u_j(x), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau\alpha_j, \quad k = 1, 2, \dots, K-1.$$

Подробное описание алгоритма определения приближенного решения $u^N(k)$ представлено в пункте 4.1.2, шаг по переменной x : $h = 0.05$, шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. На рис. 4.20 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x,t)$ для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.25$; [3] $t = 0.5$; [4] $t = 0.75$; [5] $t = 1$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик процесса содержится в приложениях 1.2.1 и 2.2.1 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [72]).

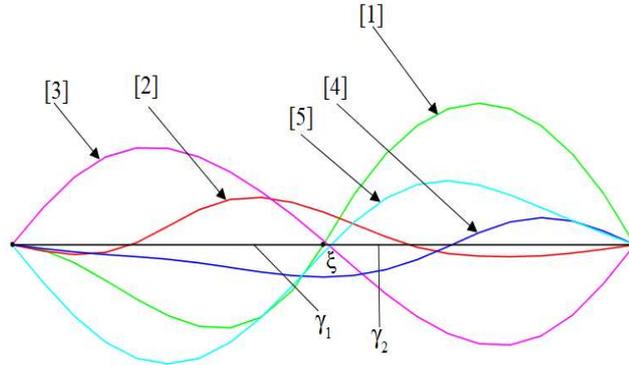


Рис. 4.20. Графическая интерпретация колебания двухсекционной сети

4.4.2 Колебания звездоподобной трехсекционной сети

По аналогии с пунктом 4.3.2 Γ – трехсекционная звездоподобная сеть (рис. 4.10), которая моделируется графом-звездой (здесь также остается для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$.

Функция $u(x, t)$, характеризующая количественные характеристики волнового процесса, подчиняется уравнению колебаний ребер графа (секций сети)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (4.90)$$

условиям в месте сочленения секций (узле) ξ

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2} = u(x, t) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

и условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.92)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=1} = 0, \quad (4.93)$$

здесь (4.67), (4.68) – начальное и граничное условия, соответственно.

Дифференциальную задачу (4.90) – (4.93) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau^2}(u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k+1)}{dx} \right) + b(x)u(k+1) = f(k), \quad (4.94)$$

$$u(k) := u(x; k), \quad f(k) := f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} &= u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2} = u(k) \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3}, \\ \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_3} &= \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} + \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2} \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \\ \frac{u(1) - u(0)}{\tau} &\approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha(x), \quad u(1) = u(0) + \tau\alpha(x), \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$u(k) \Big|_{x=0} = u(k) \Big|_{x=1} = 0. \quad (4.97)$$

Рассмотрим случай, когда $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2x^3 + x^2, & x \in \gamma_1, \\ -2x^3 + x^2, & x \in \gamma_2, \\ 2x^2 - 3x + 1, & x \in \gamma_3, \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} -2x^2 + x, & x \in \gamma_1, \\ -2x^2 + x, & x \in \gamma_2, \\ 4x^2 - 6x + 2, & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

Выражение $-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k+1)}{dx} \right)$ при $a(x) = 1$ задает спектральную задачу,

представленную в пункте 4.3.2, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определены там же. При $i = 3n - 2$: $\{\lambda_{3n-2}\}$, $\{u_{3n-2}(x)\}$ определяются набором (4.29) и разложения исходных данных по $\{u_{3n-2}(x)\}$ имеют коэффициенты Фурье вида

$$\varphi_{3n-2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^3 n^3} \left(\frac{\cos(\pi n)}{4} - 1 \right), \quad \alpha_{3n-2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 3n - 1$ имеет место набор (4.30). Разложения исходных данных по $\{u_{3n-1}(x)\}$ имеют коэффициенты Фурье

$$\varphi_{3n-1} = \frac{\sqrt{6}}{3\pi^3 n^3} \left(\frac{\cos(\pi n)}{4} - 1 \right), \quad \alpha_{3n-1} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 3n$ имеет набор (4.31). Разложим исходных данных по $\{u_{3n}(x)\}$ набора (4.31), коэффициенты Фурье :

$$\varphi_{3n} = \frac{-16}{\sqrt{3}\pi^3 (2n-1)^3} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) + \frac{48}{\sqrt{3}\pi^4 (2n-1)^4}, \quad \alpha_{3n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для

собственных функций: $\{u_j(x)\}$, $j=1,2,\dots$, тогда приближения решения для (4.94) – (4.97) определяется конечной суммой

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} u_j(x), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau \alpha_j, \quad k=1,2,\dots,K-1.$$

Подробное описание алгоритма определения приближенного решения $u^N(k+1)$ представлено в пункте 4.1.2, шаг по переменной x : $h=0.05$, шаг по t : $\tau=0.01$; $K=100$, $N=99$. На рис. 4.21 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x,t)$ для различных значений временной переменной t : [1] $t=0$; [2] $t=0.25$; [3] $t=0.5$; [4] $t=0.75$; [5] $t=1$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик волнового процесса содержится в приложениях 1.2.2 и 2.2.2 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая (регистрация ЭВМ-программы [72]).

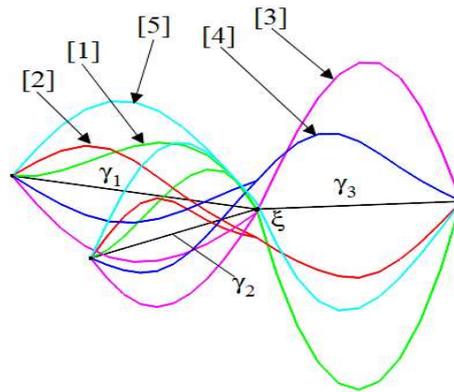


Рис. 4.21. Геометрическая интерпретация колебания трехсекционной сети

4.4.3 Колебания двумерной сети с двумя примыкающими секциями

По аналогии с пунктом 4.3.3 двумерная сеть \mathfrak{Z} с двумя примыкающими секциями \mathfrak{Z}_1 , \mathfrak{Z}_2 моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.12), состоящей из двух подобластей \mathfrak{Z}_1 , \mathfrak{Z}_2 и поверхности примыкания S :

$$\mathfrak{Z}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

Пусть функция $u = u(x_1, x_2, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda u = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{Z}, \quad t \in (0, T), \quad (4.98)$$

условиям в поверхности примыкания S

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2} \end{aligned} \quad (4.99)$$

начальным

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x_1, x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \alpha(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.101)$$

оператор Λ определяется в пункте 4.3.3.

Начально-краевую задачу (4.98) – (4.101) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau^2}(u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)) + \Lambda u(k+1) = f(k), \quad (4.102)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u(k) \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= \varphi(x_1, x_2), \\ \frac{u(1) - u(0)}{\tau} \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \alpha(x_1, x_2), \quad u(1) = u(0) + \tau\alpha(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.105)$$

Рассмотрим случай, когда $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1$, $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$,

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} (4x_1^3 - 2x_1^2) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ (-2x_1^2 + 3x_1 - 1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases}, \quad \alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} (-2x_1^2 + x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ (2x_1^2 - 3x_1 + 1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \end{cases}$$

Оператор Λu при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1$, $b(x_1, x_2) = 0$, задает спектральную задачу, представленную в пункте 4.3.3, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определены там же. При $i = 2n - 1$ эти характеристики представлены соотношениями (4.40), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{2n-1} = \frac{3}{2\pi^3 n^3}, \quad \alpha_{2n-1} = \frac{1}{\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 2n$ характеристики представлены соотношениями (4.41), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{2n} = \frac{8}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) - \frac{24}{\pi^4 (2n-1)^4}, \quad \alpha_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2)\}$, $j = 1, 2, \dots$, тогда приближения решения для (4.102) – (4.105) определяется рядом

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} \phi_j(x_1, x_2), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau \alpha_j, \quad k = 1, 2, \dots, K-1.$$

Подробное описание алгоритма определения приближений $u^N(k+1)$ представлено в пункте 4.1.2, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. На рис. 4.22 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1, x_2, t)$ для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.25$; [3] $t = 0.5$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик волнового процесса содержится в приложениях 1.2.3 и 2.2.3 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая.

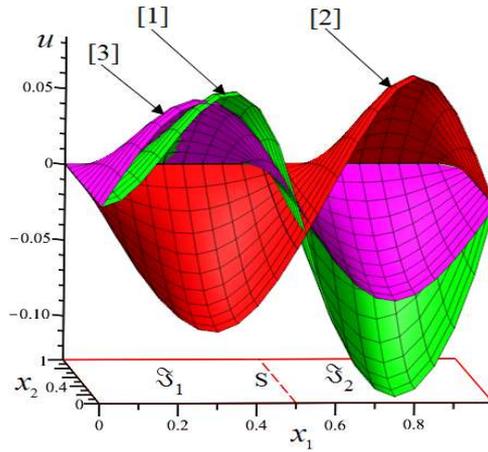


Рис. 4.22. Графическая интерпретация колебания двумерной сети с двумя примыкающими секциями

4.4.4 Колебания двумерной сети с тремя примыкающими секциями

По аналогии с пунктом 4.3.4 двумерная сеть \mathfrak{Z} с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.14), состоящей из трех подобластей $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ и двух поверхностей примыкания S_1, S_2 :

$$\mathfrak{Z}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{Z}_3 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

Пусть функция $u(x_1, x_2, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda u = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{Z}, \quad t \in (0, T], \quad (4.106)$$

условиям в поверхности примыкания S_1

$$u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{Z}_1} = u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{Z}_2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{Z}_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{Z}_2}, \quad (4.107)$$

условиям в поверхности примыкания S_2

$$u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{Z}_2} = u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{Z}_3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{Z}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{Z}_3}, \quad (4.108)$$

начальным

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \alpha(x_1, x_2), \quad (4.109)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

оператор Λ определяется в п. 4.3.3.

Начально-краевую задачу (4.106) – (4.110) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau^2}(u(k+1) - 2u(k) + u(k-1)) + \Lambda u(k+1) = f(k), \quad (4.111)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2),$$

$$\frac{u(1) - u(0)}{\tau} \approx \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \alpha(x_1, x_2), \quad u(1) = u(0) + \tau \alpha(x_1, x_2), \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Рассмотрим случай, когда $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1$, $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$ и

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} (-3x_1^2 + x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_1, \\ (9x_1^3 - 9x_1^2 + 2x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_2; \\ (-6x_1^2 + 10x_1 - 4) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_3, \end{cases} \quad \alpha(x_1, x_2) = \begin{cases} (-9x_1^2 + 3x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_1, \\ (9x_1^2 - 9x_1 + 2) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_2, \\ (-9x_1^2 + 15x_1 - 6) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{S}_3. \end{cases}$$

Оператор Lu при сделанных предположениях задает спектральную задачу, представленную в пункте 4.3.4, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2)\}$, $i=1, 2, \dots$, которой определены там же. При $i=5n-4$ эти характеристики представлены соотношениями (4.52), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-4} = \frac{2}{3\pi^3 n^3} (2 \cos(\pi n) - 1), \quad \alpha_{5n-4} = \frac{2}{3\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1), \quad n=1, 2, \dots$$

При $i=5n-3$ характеристики представлены соотношениями (4.53), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-3} = 0, \quad \alpha_{5n-3} = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

При $i=5n-2$ характеристики представлены соотношениями (4.54), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-2} = 0, \quad \alpha_{5n-2} = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

При $i=5n-1$ характеристики представлены соотношениями (4.55), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-1} = \frac{-54\sqrt{3}}{s_3^4} + \frac{18}{s_3^3}, \quad \alpha_{5n-1} = 0, \quad s_3 = \pi(6n-4), \quad n=1, 2, \dots$$

При $i=5n$ характеристики представлены соотношениями (4.56), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n} = \frac{54\sqrt{3}}{s_4^4} + \frac{18}{s_4^3}, \quad \alpha_{5n} = 0, \quad s_4 = \pi(6n-2), \quad n=1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j=1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2)\}$, $j=1, 2, \dots$, тогда приближения решения для (4.111) – (4.115) определяется конечной суммой

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} u_j(x_1, x_2), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau \alpha_j, \quad k=1, 2, \dots, K-1.$$

Подробное описание алгоритма определения приближений $u^N(k+1)$ представлено в пункте 4.1.2, шаг по x_1 : $h_1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h_2 = 0.1$, шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. На рис. 4.23 приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1, x_2, t)$ для различных значений временной переменной t : [1] $t = 0$; [2] $t = 0.25$; [3] $t = 0.5$.

Подробная информация об изменениях количественных характеристик волнового процесса содержится в приложениях 1.2.4 и 2.2.4 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая.

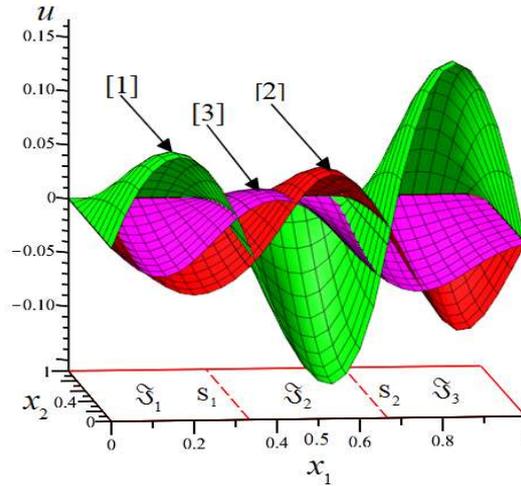


Рис. 4.23. Графическая интерпретация колебания двумерной сети с тремя примыкающими секциями

4.4.5 Колебания трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

Пусть трехмерная сеть $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.16), состоящая из двух области $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$:
 $\mathfrak{Z}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{Z}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$ и поверхности примыкания S ,

Пусть функция $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, определяющая характеристики волнового процесса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bu = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Z}, \quad t \in (0, T], \quad (4.116)$$

условиям в поверхности примыкания S

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{Z}_1} &= u \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{Z}_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{Z}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{2} \in \mathfrak{Z}_2} \end{aligned} \quad (4.117)$$

начальным

$$\begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \alpha(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (4.118)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}
u|_{x_1=0} &= u|_{x_1=1} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} &= 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} &= 0, \quad u|_{x_3=1} = 0,
\end{aligned} \tag{4.119}$$

где B -оператор определяется в п. 4.3.4.

Начально-краевую задачу (4.116)–(4.119) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + Bu(k) = f(k), \tag{4.120}$$

$$u(k) := u(x_1, x_2, x_3; k), f(k) := f(x_1, x_2, x_3; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, x_3, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned}
u(k)|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= u(k)|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2}, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_1} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_2},
\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
u(0) &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\
\frac{u(1) - u(0)}{\tau} &\approx \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \alpha(x_1, x_2, x_3), \quad u(1) \approx u(0) + \tau\alpha(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned}
u(k)|_{x_1=0} &= u(k)|_{x_1=1} = 0, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0, \\
\frac{\partial u(k)}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} &= 0, \quad u(k)|_{x_3=1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Рассмотрим случай, когда $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1 (\kappa = \overline{1, 3})$, $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0 (\kappa, \iota = \overline{1, 3}, \kappa \neq \iota)$, $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, x_3) &= \begin{cases} (-2x_1^2 + x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_1, \\ (4x_1^3 - 6x_1^2 + 2x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_2, \end{cases} \\
\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \begin{cases} (2x_1^2 - x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_1, \\ (-2x_1^2 + 3x_1 - 1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}_2, \end{cases}
\end{aligned}$$

Оператор Bu при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1 (\kappa = \overline{1, 3})$, $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0 (\kappa, \iota = \overline{1, 3}, \kappa \neq \iota)$,

$b(x_1, x_2, x_3) = 0$, задает спектральную задачу, представленную в пункте 4.3.5, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2, x_3)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определены там же. При $i = 2n - 1$ эти характеристики представлены соотношениями (4.65), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^3 n^3} \left(2 \cos(\pi n) - \frac{1}{2}\right), \quad \alpha_{2n-1} = \frac{1}{\pi^3 n^3} (1 - \cos(\pi n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 2n$ эти характеристики представлены соотношениями (4.66), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{2n} = \frac{-4\sqrt{2}}{\pi^3 (2n-1)^3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} + \frac{12\sqrt{2}}{\pi^4 (2n-1)^4}, \quad \alpha_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2, x_3)\}$, $j = 1, 2, \dots$, тогда приближения решения для (4.120) – (4.123) определяется конечной суммой

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} u_j(x_1, x_2, x_3), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau \alpha_j, \quad k = 1, \dots, K-1.$$

Подробное описание алгоритма отыскания приближенного решения $u^N(k+1)$ представлено в пункте 5.1.2, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$. На рис. 4.24 представлена графическая интерпретация $u(x_1, x_2, x_3, t)$ при различных значениях t, x_3 : [1]: $t = 0, x_3 = 0$; [2]: $t = 0, x_3 = 0.25$, [3]: $t = 0.5, x_3 = 0$; [4]: $t = 0.5, x_3 = 0.25$ (\mathfrak{S}_l^c ($l = 1, 2$), S^c – сечения x_3 и \mathfrak{S}).

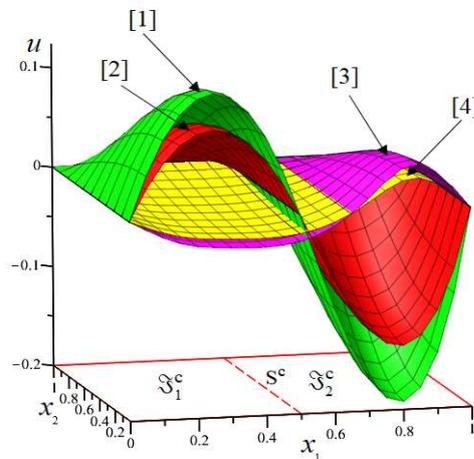


Рис. 4.24. Графическая интерпретация колебания трехмерной сети с двумя примыкающими сечениями при фиксированных x_3, t

Подробная информация об изменениях количественных характеристик волнового процесса содержится в приложениях 1.2.5 и 2.2.5 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая.

4.4.6 Колебания трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

Пусть трехмерная сеть $\mathfrak{V} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.18) с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3$:

$$\mathfrak{V}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{V}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{V}_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$$

и поверхностями примыкания S_1, S_2 .

Функция $u(x_1, x_2, x_3, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bu = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{V}, \quad t \in (0, T], \quad (4.124)$$

условиям в поверхности примыкания S_1

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{V}_1} &= u \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{V}_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{V}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{V}_2}, \end{aligned} \quad (4.125)$$

условиям в поверхности примыкания S_2

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{V}_2} &= u \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{V}_3}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{V}_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{V}_3}, \end{aligned} \quad (4.126)$$

начальными

$$\begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \alpha(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (4.127)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_1=0} &= u \Big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= 0, u \Big|_{x_2=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, u \Big|_{x_3=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.128)$$

где В определяется в п. 4.3.5.

Начально-краевую задачу (4.124)–(4.128) аппроксимирует дифференциально-разностная система

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + Bu(k) = f(k), \quad (4.129)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2, x_3; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2, x_3; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, x_3, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{I}_1} &= u(k) \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{I}_2}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{I}_1} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{1}{3} \in \mathfrak{I}_2} \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} u(k) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{I}_2} &= u(k) \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{I}_3}, \\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{I}_2} &= \frac{\partial u(k)}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = \frac{2}{3} \in \mathfrak{I}_3}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{u(1) - u(0)}{\tau} &\approx \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \alpha(x_1, x_2, x_3), \quad u(1) = u(0) + \tau \alpha(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$u(k) \Big|_{x_1=0} = u(k) \Big|_{x_1=1} = 0,$$

$$\frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u(k) \Big|_{x_2=1} = 0, \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial u(k)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad u(k) \Big|_{x_3=1} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1, 3}$), $a_{\kappa l}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($\kappa, l = \overline{1, 3}, \kappa \neq l$), $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (27x_1^3 - 9x_1^2) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ (-9x_1^2 + 9x_1 - 2) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ (9x_1^2 - 15x_1 + 6) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (-9x_1^2 + 3x_1) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_1, \\ (9x_1^2 - 9x_1 + 2) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_2, \\ (-9x_1^2 + 15x_1 - 6) \cos \frac{\pi x_2}{2} \cos \frac{\pi x_3}{2}, & x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

Оператор Bu при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1 (\kappa = \overline{1, 3})$, $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0 (\kappa, \iota = \overline{1, 3}, \kappa \neq \iota)$, $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, задает спектральную задачу, представленную в пункте 4.3.6, спектральные характеристики $\{\lambda_i\}$ и $\{u_i(x_1, x_2, x_3)\}$, $i = 1, 2, \dots$, которой определены там же. При $i = 5n - 4$ эти характеристики представлены соотношениями (4.77), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-4} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi^3 n^3} (4 - \cos(\pi n)), \quad \alpha_{5n-4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 5n - 3$ характеристики представлены соотношениями (4.78), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-3} = \frac{45}{s_1^3 \sqrt{2}} - \frac{81\sqrt{3}}{s_1^4 \sqrt{2}}, \quad \alpha_{5n-3} = 0, \quad s_1 = \pi(6n - 5), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 5n - 2$ характеристики представлены соотношениями (4.79), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-2} = \frac{45}{s_2^3 \sqrt{2}} + \frac{81\sqrt{3}}{s_2^4 \sqrt{2}}, \quad \alpha_{5n-2} = 0, \quad s_2 = \pi(6n - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 5n - 1$ характеристики представлены соотношениями (4.80), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n-1} = \frac{-27}{s_3^3 \sqrt{2}} + \frac{81\sqrt{3}}{s_3^4 \sqrt{2}}, \quad \alpha_{5n-1} = 0, \quad s_3 = \pi(6n - 4), \quad n = 1, 2, \dots$$

При $i = 5n$ характеристики представлены соотношениями (4.81), коэффициенты Фурье для разложений начальных данных имеют вид

$$\varphi_{5n} = \frac{-27}{s_4^3 \sqrt{2}} - \frac{81\sqrt{3}}{s_4^4 \sqrt{2}}, \quad \alpha_{5n} = 0, \quad s_4 = \pi(6n - 2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Упорядочим собственные значения по возрастанию и введем соответствующую нумерацию для них: $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$; такую же нумерацию установим и для собственных функций: $\{u_j(x_1, x_2, x_3)\}$, $j = 1, 2, \dots$, тогда приближения решения для (4.129) – (4.133) определяется конечной суммой

$$u^N(k+1) = \sum_{j=1}^N C_j^{k+1} u_j(x_1, x_2, x_3), \quad C_j^{k+1} = \frac{2C_j^k - C_j^{k-1}}{1 + \tau^2 \lambda_j}, \quad C_j^0 = \varphi_j, \quad C_j^1 = \varphi_j + \tau \alpha_j, \quad k = \overline{1, K-1}.$$

Подробное описание алгоритма определения приближений $u^N(k+1)$ представлено в пункте 4.1.2, шаг по переменной x_1 : $h1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. На рис. 4.25 (\mathfrak{S}_l^c ($l = \overline{1,3}$), S_1^c, S_2^c – сечения x_3 и \mathfrak{S}) приведена геометрическая информационная картина изменения функции $u(x_1, x_2, x_3, t)$ для различных значений временной переменной t, x_3 : [1]: $t = 0, x_3 = 0$; [2]: $t = 0, x_3 = 0.5$, [3]: $t = 0.25, x_3 = 0$; [4]: $t = 0.25, x_3 = 0.5$.

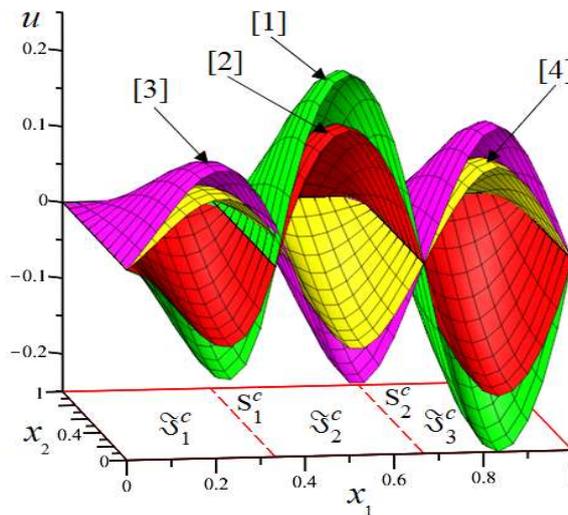


Рис. 4.25. Графическая интерпретация волнового процесса трехмерной сети с тремя примыкающими секциями при фиксированных x_3, t

Подробная информация об изменениях количественных характеристик волнового процесса содержится в приложениях 1.2.6 и 2.2.6 в виде таблиц, там же размещены тексты ЭВМ-программ, для данного случая.

Выводы

1. Разработаны алгоритмы определения приближенного решения двухслойных дифференциально-разностных схем для уравнения переноса и трехслойных – для уравнения колебания на одно-, двух-, трехмерной сети.

2. Получены представления множеств собственных значений и собственных функций для дифференциальных операторов изучаемых процессов

3. Проведены расчеты приближений числовых характеристик изучаемых процессов с использованием двухслойных и трехслойных дифференциально-разностных схем и

использованием различного типа носителями: (двухсекционная сеть, звездоподобная трехсекционная сеть, двумерная сеть с двумя примыкающими секциями, двумерная сеть с тремя примыкающими секциями, трехмерная сеть с двумя примыкающими секциями, трехмерная сеть с тремя примыкающими секциями). Численные результаты представлены графическими интерпретациями для различных моментов времени.

3. Представлены описания программных комплексов для анализа процессов переноса сплошных сред в сетевых носителях и анализа волновых процессов в сетях.

Заключение

В процессе исследования, проведенного в работе, были получены основные результаты, изложенные ниже:

1. Проведен анализ итогов численного моделирования на базе вычислительного эксперимента применительно к прикладным задачам переноса и задачам колебаний сплошных сред по сетеподобным носителям.

2. Разработан метод полудискретизации по временной переменной (метод Роте) для аппроксимаций начально-краевых задач параболического и гиперболического типа дифференциально-разностным сетевым схемам. При этом проведен анализ устойчивости дифференциально-разностных двухслойных и трехслойных схем (без весов и с весами) для этих задач.

3. Получены необходимые и достаточные условия существования оптимальных управляющих воздействий дискретной оптимизационной задачи, оптимизации по стартовым условиям, оптимизационной задачи по распределенным внешним воздействиям дифференциально-разностной системы на графе и оптимизационной задачи дифференциально-разностной системы в сетеподобных областях.

4. Получен комплекс алгоритмов отыскания приближенных решений дифференциально-разностной двухслойной схемы для параболического уравнения и трехслойной схемы для гиперболического уравнения в сетеподобных областях.

5. Реализованы серии прикладных задач процесса переноса и волнового процесса в сетях (одно-, двух- и трехмерной сетях), результаты численных расчетов которых представлены в виде таблиц.

Список литературы

1. Белишев, М. И. О граничной управляемости динамической системы, описываемой волновым уравнением на одном классе графов (на деревьях) / М. И. Белишев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004. – Т. 308. – С. 23-47.
2. Боровских, А. В. Формула распространения волн для одномерной неоднородной среды / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 758-767.
3. Буничева, А. Я. Вычислительный эксперимент в гемодинамике / А. Я. Буничева, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 920-935.
4. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
5. Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
6. Волкова, А. С. Аппроксимация краевой задачи для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе / А. С. Волкова // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – №1.1 (55). – С. 117-121.
7. Волкова, А. С. Единственность решения одной задачи Дирихле на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2012. – Т. 17, Вып. 2. – С. 527-529.
8. Волкова, А. С. Задача граничного управления сложносочлененной упругой системой струн / А. С. Волкова // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 4(50). – С. 79-83.
9. Волкова, А. С. Задача граничного управления дифференциальной системой на графе / А. С. Волкова, В. В. Провоторов // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2012, Вып. 1(39). – С. 30-32.
10. Волкова, А. С. Краевая задача для эллиптического уравнения на графе в соболевских пространствах / А. С. Волкова // «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. V между-нар. конф. «ПМТУКТ-2012». – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. – С. 73-76.
11. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для волнового уравнения на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2011. – Т. 16, Вып. 4. – С. 1050-1052.
12. Волкова, А. С. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе / А. С. Волкова, В. В. Провоторов // Известия высших учебных

заведений. Математика. – 2014. – №3. – С. 3-18.

13. Волкова, А. С. Математическая модель переноса вещества по графу кровеносных сосудов при наличии диффузии / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – Т. 19, Вып. 2. – С. 597-599.

14. Волкова, А. С. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе / А. С. Волкова, Ю. А. Гнилицкая, В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – №1 (51). – С. 11-15.

15. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для уравнения теплопроводности на графе / А. С. Волкова // Вестник С.-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 39-47.

16. Волкова А. С. Об одной краевой задачи для волнового уравнения в пространстве L_2 // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. ПМТУММ-2011. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2011. – С. 61-63.

17. Волкова, А. С. Обобщенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения на графе / А. С. Волкова // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2012. – № 1(39). – С. 28-30.

18. Волкова, А. С. Обобщенные решения для эллиптического уравнения в задачах граничного управления на геометрическом графе / А. С. Волкова // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. – С. 14-20.

19. Волкова, А. С. Однозначная разрешимость начально-краевых задач с распределенными параметрами на графе / А. С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5. – С. 2473-2475.

20. Волкова, А. С. Обобщенные решения краевой задачи для уравнения параболического типа на произвольном графе / А. С. Волкова // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. – С. 14-19.

21. Волкова, А. С. Об управлении дифференциальной системой в классе обобщенных решений на графе / А. С. Волкова // Математика и ее приложения: ЖИМО. – 2012, Вып. 1(9). – С. 15-24.

22. Волкова, А. С. Фредгольмова разрешимость в классе задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа на графе-звезде / А. С. Волкова // Математика и ее приложения, ЖИМО. – 1(8). – 2011. – С.15-28.

23. Гнилицкая, Ю. А. Граничное управление колебаниями системы струн / Ю. А. Гнилицкая // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной

конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. – СПб.: Издат. Дом С.-Петербургского гос. ун-та, 2012. – С. 21-25.

24. Жабко, А. П. Устойчивость дифференциально-разностных систем с неопределенными параметрами / А. П. Жабко, Д. В. Зарецкий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. – 2004, № 1. – С. 3-5.

25. Завгородний, М. Г. Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе / М. Г. Завгородний // Доклады РАН. – 1994. – Т.335, № 3. – С.281-285.

26. Завгородний, М. Г. Об эволюционных задачах на графе / М. Г. Завгородний // Успехи математических наук. – 1991. – Т.46, № 6. – С.199-200.

27. Знаменская, Л. Н. Управление упругими колебаниями / Л. Н. Знаменская. – М.: Физматлит, 2004. – 175 с.

28. Зубов, В.И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

29. Зубов, В. И. Проблема устойчивости процессов управления / В. И. Зубов. – Л.: Судпромгиз, 1980. – 253 с.

30. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 11. – С. 1517-1534.

31. Костюченко, А. Г. Распределение собственных значений / А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян. – М.: Наука, 1979. – 400 с.

32. Кошелев, В. Б. Математические модели квази-одномерной гемодинамики / В. Б. Кошелев, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 114 с.

33. Ладыженская, О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О. А. Ладыженская. – М.: Гостехиздат, 1953. – 279 с.

34. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

35. Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – М.: Наука, 1970. – 381 с.

36. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

37. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс / пер. с фр. Н. Х. Розова, под ред. Р. В. Гамкрелидзе. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

38. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

39. Марченко, В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. –

Киев: Наукова думка, 1977. – 384 с.

40. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1977. – 454 с.

41. Махинова, О. А. Задача теплопереноса на графах с циклом // Системы управления и информационные технологии / О. А. Махинова. – 2010. – № 1(39). – С. 19-22.

42. Махинова, О. А. Аппроксимация одномерного оператора Лапласа на графе-звезде / О. А. Махинова // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия естественных и технических наук. – 2011. – Т. 16, Вып. 4. – С. 1124-1126.

43. Махинова, О. А. Конечная проблема моментов для краевых задач на графе / О. А. Махинова // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия естественных и технических наук. – 2011. – Т. 16, Вып. 5. – С. 1264-1269.

44. Махинова, О.А. Свойства конечно-разностного аналога одномерного оператора Лапласа на графе / О. А. Махинова // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 10. – 2012. – № 1. – С. 54 – 60.

45. Махинова, О. А. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе / О. А. Махинова, А. С. Волкова // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – №1(55). – С. 19-22.

46. Назипова, Н. Н. Расчёт скоростей метаболических реакций в живой растущей клетке методом баланса стационарных метаболических потоков (метод БСМП) / Н. Н. Назипова, Ю. Е. Елькин, В. В. Панюков, Л. Н. Дроздов-Тихомиров // Матем. биолог. и биоинформ. – 2007. – 2:1. – С.98-119.

47. Пенкин, О. М. Эллиптические уравнения на стратифицированных множествах : дис д-ра физ.-мат. наук: 1.2.2 / Пенкин Олег Михайлович. – Воронеж, 2004. – 191 с.

48. Пенкин, О. М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах / О. М. Пенкин, Е. М. Богатов // Математические заметки. – 2000. – № 6. – С. 874-886.

49. Подвальный, С. Л. Численные методы и вычислительный эксперимент / С. Л. Подвальный, Л. В. Холопкина, Д.В. Попов. – Уфа: изд. УГАТУ, 2005. – 226 с.

50. Подвальный, С. Л. Точечная оптимизация ламинарного течения вязкой жидкости в сетевом носителе / С. Л. Подвальный, В. В. Провоторов, В. Н. Хоанг, З. Тран // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2022. – Т. 18, № 8. – С. 7-16.

51. Покорный, Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. – М.: Физматлит, 2004. – С. 268.

52. Провоторов, В. В. Математическое моделирование колебательных процессов

поддерживающих растяжек упругой мачты / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2006. – № 2. – С. 28-35.

53. Провоторов, В. В. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке / В. В. Провоторов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 3. – С. 50-62.

54. Провоторов, В. В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы "мачта-растяжки" / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – Т. 32, № 2-2. – С. 293-297.

55. Провоторов, В. В. Собственные функции краевых задач на графах и приложения / В. В. Провоторов. – Воронеж. – 2008. – 247 с.

56. Провоторов, В. В. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде / В. В. Провоторов // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 10. – С. 105-126.

57. Провоторов, В. В. Устойчивость разностных схем граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 2.2(36). – С. 280-285.

58. Провоторов, В. В. Разностные схемы граничных задач на графе / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 10. – С. 14-18.

59. Провоторов, В. В. Спектральная задача на графе с циклом / В. В. Провоторов // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1665-1666.

60. Провоторов, В. В. Управление колебаниями механической системы « мачта-растяжки » / В. В. Провоторов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 2. – С. 57-61.

61. Провоторов, В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В. В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2012. – № 1. – С. 62.

62. Провоторов, В. В. Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе / В. В. Провоторов, Ю. А. Гнилицкая // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 112-120.

63. Провоторов, В. В. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, А. С. Волкова. – Воронеж: Научная книга, 2014. – 188 с.

64. Провоторов, В. В. Аппроксимация эволюционных задач с носителем на графе // Провоторов В. В., Махинова О. А. // Вестник Воронежского государственного технического

университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 74-80.

65. Провоторов, В. В. Краевые задачи для уравнений с распределенными параметрами на графах / В. В. Провоторов, О. А. Махинова. – Воронеж: Научная книга, 2013. – 133 с.

66. Ризниченко, Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процессов / Г.Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 300 с.

67. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

68. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

69. Сергеев, С. М. Математическое моделирование работы коммерческих сетей в условиях инноваций / С. М. Сергеев // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 4(50). – С.27-32.

70. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021669023. Программный комплекс для решения задач нестационарного переноса сплошных сред с распределенными параметрами на сетеподобных областях. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ / В. Н. Хоанг ; заявл. 11.11.21; регистр. 23.11.21.

71. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022661479. Программный комплекс для моделирования сетеподобных процессов переноса с использованием двухслойных и трехслойных дифференциально-разностных схем / О. Р. Балабан, В. Н. Хоанг; заявл. 30.05.22; регистр. 22.06.22.

72. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023617568. Программный комплекс для качественного описания характеристик волнового процесса в упругих конструкциях сетеподобного типа / О. Р. Корчагина, В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов; заявл. 5.04.23; регистр. 11.04.23.

73. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023618051. Программный комплекс для анализа математических моделей процесса переноса теплового потока на трехмерной сети / О. Р. Корчагина, В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов; заявл. 5.04.23; регистр. 18.04.23.

74. Хоанг, В. Н. Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций / В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов // Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 137. – С. 80-94.

75. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной / В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов // Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 116-138.

76. Хоанг, В. Н. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах / В. Н. Хоанг, А. А. Парт, И. В. Перова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1326>.
77. Хоанг, В. Н. Конечномерные аналоги дифференциальных операторов переноса с носителями на пространственных сетях / В. Н. Хоанг, О. А. Махинова, В. В. Тимошенко // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2. – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1363>.
78. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2020. – Т. 7, № 1. – С. 127-132.
79. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 155-160.
80. Хоанг, В. Н. Приближенное решение дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. между-нар. конф. «ПМТУКТ-2021». – Воронеж: Изд-во «Научная книга». – 2021. – С. 179-182.
81. Хоанг, В. Н. Счетная устойчивость слабого решения дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. – Воронеж: Изд-во «Дом ВГУ», 2022. – С. 168-172.
82. Хоанг, В. Н. Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2022. – Т. 9, № 1. – С. 113-117.
83. Хоанг, В. Н. Задача дискретной оптимизации дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе / В. Н. Хоанг // Процессы управления и устойчивость. – 2023. – Т. 10, № 1. – С. 161-165.
84. Филиппов, А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений / А. Ф. Филиппов // Доклады РАН. – 1955. – Т. 100, № 6. – С. 81-87.
85. Юрко, В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В. А. Юрко. – Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 2001. – 499 с.
86. Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – С. 384.
87. Artemov, M. A. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov // Journal of Physics. Conference Series. 1203 (2019). Article ID 012094.

88. Baranovskii, E. S. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results / E. S. Baranovskii, V. V. Provotorov, M. A. Artemov, A. P. Zhabko // *Symmetry*. – 2021, 13(7), 1300.
89. Borisoglebskaya, L. N. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks / L. N. Borisoglebskaya, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, E. S. Kosinov // *IPO Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2019. – Vol. 537, Iss. 4.
90. Borisoglebskaya, L. N. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university / L. N. Borisoglebskaya, S. M. Sergeev // *Journal of Applied Economic Sciences*. – 2018. – Vol. 12, No 8. – C. 2423-2448.
91. Krasnov, S. V. Methodical forming business competencies for private label / S. V. Krasnov, S. M. Sergeev, N. V. Mukhanova, A. N. Grushkin // *6th International Conference on Reliability, Infocom Technologies and Optimization (Trends and Future Directions) ICRITO*. – 2017. – P. 569-574.
92. Neuman, J. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks / J. Neuman, R. D. Richtmyer // *Journal of Applied Physics*. V. A. Yurko Vol. 21, Iss. 3. – P. 232-237.
93. Yurko, V. A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graphs. Analysis on graphs and its applications / V. A. Yurko, G. Freiling, M. Ignatiev // *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. – 2008. – Vol. 77. – P. 397-408.
94. Friedrichs, K. O. Spectraltheorie halbbeschränkten Operatoren und ihre Anwendung auf Spectralzerlegung von Differentialoperatoren. Part 1 / K. O. Friedrichs // *Math. Ann.* – 1934. – Vol. 109. – P. 465-487.
95. Provotorov, V. V. Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes*. – 2021. – Vol. 17, No 3. – P. 277-286.
96. Provotorov, V. V. Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, E. N. Provotorova // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. – 2017. – Vol. 13, No 2. – P. 209-224.
97. Provotorov, V. V. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph / V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. – 2020. – Vol. 16, No 4. – P. 402-414.
98. Provotorov, V. V. Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain / V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitzkaya // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. – 2017. – Vol. 13. – Iss. 3. – P. 264-277.
99. Podvalny, S. L. The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters

on the graph / S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, E. S. Podvalny // *Procedia Computer Science*. – 103(2017). – C. 324-330.

100. Podvalny, S. L. The Problem of Optimal Control of the Laminar Flow of a Viscous Liquid in a Network Carrier / S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, V. N. Hoang // *4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).IEEE*, 2022. – C. 125-128.

101. Sergeev, S. M. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes / S. M. Sergeev, L. B. Raijhelgauz, V. N. Hoang, I. N. Panteleev // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – Vol. 1679: 022015.

102. Volkova, A. S. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs / A. S. Volkova, Yu. A. Gnilitzkaya, V. V. Provotorov // *Automation and Remote Control*. – 2014. – Vol. 75, No 2. – P. 405-412.

103. Zhabko, A. P. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. – 2019. – Vol. 15, No 2. – P. 187-198.

104. Zhabko, A. P. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation / A. P. Zhabko, K. B. Nurtazina, V. V. Provotorov // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. – 2019. – Vol. 15, No 3. – P. 322-335.

105. Zhabko, A. P. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, A. I. Shindyapin // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. – 2021. – Vol. 17, No 4. – P. 433-448.

106. Zhabko, A. P. Stability of operator-difference schemes with weights for the hyperbolic equation in the space of summable functions with carriers in the network-like domain / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes*. – 2022. – Vol. 18, No 3. – P. 425-437.

Приложения 1. Численные расчеты прикладных задач

Приложение 1.1 Таблицы численных расчетов задач переноса сплошных сред

Приложение 1.1.1 Таблицы численных расчетов задачи переноса по двухсекционной сети

Пусть Γ – двухсекционная сеть (рис. 4.8), которая моделируется графом (мы оставляем для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с двумя ребрами γ_1, γ_2 (γ_1, γ_2 – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 соответствует отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_2 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. Рассматривается начально-краевая задача (4.11) – (4.14), соответствующая ей дифференциально-разностная система (4.15) – (4.18) при $a(x)=1$, $b(x)=0$, $f(x,t)=0$, шаг по x : $h=0.05$, шаг по t $\tau=0.01$; $K=N=100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 1.1-1 – 1.1-2.

Таблица 1.1-1. Секция 1

$t=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t=0.8$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001
$t=0.6$	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004
$t=0.4$	0.000	0.004	0.007	0.011	0.014	0.017	0.019	0.021	0.023	0.024	0.024
$t=0.2$	0.000	0.025	0.048	0.071	0.092	0.111	0.127	0.140	0.149	0.155	0.157
$t=0.1$	0.000	0.062	0.122	0.179	0.232	0.280	0.321	0.355	0.380	0.396	0.403
$t=0.08$	0.000	0.073	0.145	0.214	0.277	0.335	0.385	0.426	0.457	0.477	0.486
$t=0.06$	0.000	0.087	0.172	0.253	0.329	0.398	0.458	0.508	0.547	0.573	0.586
$t=0.04$	0.000	0.102	0.201	0.297	0.387	0.469	0.541	0.603	0.652	0.686	0.705
$t=0.02$	0.000	0.119	0.234	0.345	0.450	0.546	0.631	0.706	0.768	0.815	0.845
$t=0$	0.000	0.145	0.280	0.405	0.520	0.625	0.720	0.805	0.880	0.945	1.000
$x=$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.1-2. Секция 2

$t=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t=0.8$	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t=0.6$	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000
$t=0.4$	0.024	0.024	0.023	0.021	0.019	0.017	0.014	0.011	0.007	0.004	0.000
$t=0.2$	0.157	0.155	0.149	0.140	0.127	0.111	0.092	0.071	0.049	0.025	0.000
$t=0.1$	0.403	0.399	0.386	0.362	0.330	0.289	0.241	0.187	0.127	0.064	0.000
$t=0.08$	0.486	0.483	0.467	0.440	0.402	0.353	0.294	0.228	0.156	0.079	0.000
$t=0.06$	0.586	0.584	0.568	0.537	0.492	0.433	0.362	0.281	0.192	0.098	0.000

$t = 0.04$	0.705	0.707	0.692	0.658	0.606	0.537	0.452	0.352	0.241	0.123	0.000
$t = 0.02$	0.845	0.856	0.846	0.813	0.757	0.678	0.576	0.453	0.313	0.160	0.000
$t = 0$	1.000	1.035	1.040	1.015	0.960	0.875	0.760	0.615	0.440	0.235	0.000
$x =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

**Приложение 1.1.2. Таблицы численных расчетов задачи переноса по звездоподобной
трехсекционной сети**

Пусть Γ – трехсекционная звездоподобная сеть (рис. 4.10), которая моделируется графом-звездой (здесь также остается для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. Рассматривается начально-краевая задача (4.21) – (4.24), ей соответствующая дифференциально-разностной системой (4.25) – (4.28) при $a(x) = 1, b(x) = 0, f(x, t) = 0$, шаг по x : $h = 0.05$, шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = 100, N = 99$. Результаты работы программы представлены в таблицах 1.2-1 – 1.2-2.

Таблица 1.2-1. Секции 1 и 2

$t = 1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t = 0.8$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t = 0.6$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003
$t = 0.4$	0.000	0.003	0.006	0.008	0.011	0.013	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
$t = 0.2$	0.000	0.018	0.036	0.053	0.069	0.083	0.095	0.105	0.112	0.116	0.118
$t = 0.1$	0.000	0.046	0.091	0.133	0.173	0.209	0.240	0.265	0.284	0.297	0.302
$t = 0.08$	0.000	0.054	0.107	0.158	0.206	0.249	0.286	0.317	0.341	0.357	0.364
$t = 0.06$	0.000	0.064	0.126	0.186	0.243	0.294	0.340	0.378	0.408	0.429	0.439
$t = 0.04$	0.000	0.074	0.146	0.216	0.282	0.343	0.398	0.445	0.484	0.512	0.529
$t = 0.02$	0.000	0.084	0.166	0.246	0.322	0.393	0.458	0.516	0.566	0.606	0.634
$t = 0$	0.000	0.098	0.190	0.277	0.360	0.437	0.510	0.578	0.640	0.697	0.750
$x =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.2-2. Секция 3

$t = 1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t = 0.8$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$t = 0.6$	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
$t = 0.4$	0.018	0.018	0.017	0.016	0.015	0.013	0.011	0.008	0.006	0.003	0.000

$t = 0.2$	0.118	0.116	0.112	0.105	0.096	0.084	0.070	0.054	0.037	0.019	0.000
$t = 0.1$	0.302	0.301	0.293	0.277	0.253	0.223	0.186	0.145	0.099	0.050	0.000
$t = 0.08$	0.364	0.365	0.357	0.339	0.312	0.276	0.232	0.180	0.123	0.063	0.000
$t = 0.06$	0.439	0.445	0.439	0.420	0.390	0.347	0.293	0.229	0.157	0.080	0.000
$t = 0.04$	0.529	0.544	0.544	0.528	0.495	0.445	0.379	0.299	0.206	0.105	0.000
$t = 0.02$	0.634	0.668	0.684	0.677	0.647	0.591	0.510	0.407	0.284	0.146	0.000
$t = 0$	0.750	0.833	0.880	0.892	0.870	0.813	0.720	0.592	0.430	0.233	0.000
$x =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Приложение 1.1.3 Таблицы численных расчетов задачи переноса на двумерной сети с двумя примыкающими секциями

Пусть двумерная сеть \mathfrak{S} с двумя примыкающими секциями $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.12), состоящей из двух подобластей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ и

поверхности примыкания S : $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$,

$\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$. Рассматривается начально-краевая задача (4.32) – (4.35), ей

соответствующая дифференциально-разностная система (4.36) – (4.39), при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$ ($\kappa = 1, 2$), $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 1.3-1 – 1.3-6.

Таблица 1.3-1. Секция 1 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.008	0.016	0.023	0.031	0.039	0.047	0.055	0.063	0.070	0.078
$x_2 = 0.80$	0.000	0.015	0.031	0.046	0.062	0.077	0.093	0.108	0.124	0.139	0.155
$x_2 = 0.70$	0.000	0.023	0.045	0.068	0.091	0.113	0.136	0.159	0.182	0.204	0.227
$x_2 = 0.60$	0.000	0.029	0.059	0.088	0.118	0.147	0.176	0.206	0.235	0.265	0.294
$x_2 = 0.50$	0.000	0.035	0.071	0.106	0.141	0.177	0.212	0.247	0.283	0.318	0.354
$x_2 = 0.40$	0.000	0.040	0.081	0.121	0.162	0.202	0.243	0.283	0.324	0.364	0.405
$x_2 = 0.30$	0.000	0.045	0.089	0.134	0.178	0.223	0.267	0.312	0.356	0.401	0.446
$x_2 = 0.20$	0.000	0.048	0.095	0.143	0.190	0.238	0.285	0.333	0.380	0.428	0.476
$x_2 = 0.10$	0.000	0.049	0.099	0.148	0.198	0.247	0.296	0.346	0.395	0.444	0.494
$x_2 = 0.00$	0.000	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.3-2. Секция 1 при $t = 0.05$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.006	0.012	0.018	0.023	0.028	0.033	0.037	0.041	0.043	0.045
$x_2 = 0.80$	0.000	0.012	0.024	0.035	0.046	0.056	0.066	0.074	0.081	0.086	0.089
$x_2 = 0.70$	0.000	0.017	0.035	0.052	0.068	0.083	0.096	0.108	0.118	0.126	0.131
$x_2 = 0.60$	0.000	0.023	0.045	0.067	0.088	0.107	0.125	0.140	0.153	0.163	0.169
$x_2 = 0.50$	0.000	0.027	0.054	0.080	0.105	0.129	0.150	0.169	0.184	0.196	0.203
$x_2 = 0.40$	0.000	0.031	0.062	0.092	0.121	0.147	0.172	0.193	0.211	0.224	0.233
$x_2 = 0.30$	0.000	0.034	0.068	0.101	0.133	0.162	0.189	0.213	0.232	0.247	0.256
$x_2 = 0.20$	0.000	0.037	0.073	0.108	0.142	0.173	0.202	0.227	0.248	0.264	0.274
$x_2 = 0.10$	0.000	0.038	0.076	0.112	0.147	0.180	0.210	0.236	0.258	0.274	0.284
$x_2 = 0.00$	0.000	0.039	0.077	0.114	0.149	0.182	0.212	0.239	0.261	0.277	0.288
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.3-3. Секция 1 при $t = 0.1$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.004	0.007	0.011	0.014	0.017	0.020	0.022	0.024	0.025	0.025
$x_2 = 0.80$	0.000	0.007	0.015	0.022	0.028	0.034	0.039	0.043	0.047	0.049	0.050
$x_2 = 0.70$	0.000	0.011	0.022	0.032	0.041	0.050	0.058	0.064	0.069	0.072	0.073
$x_2 = 0.60$	0.000	0.014	0.028	0.041	0.054	0.065	0.075	0.083	0.089	0.093	0.095
$x_2 = 0.50$	0.000	0.017	0.034	0.050	0.064	0.078	0.090	0.099	0.107	0.112	0.114
$x_2 = 0.40$	0.000	0.019	0.038	0.057	0.074	0.089	0.103	0.114	0.122	0.128	0.130
$x_2 = 0.30$	0.000	0.021	0.042	0.062	0.081	0.098	0.113	0.125	0.135	0.141	0.144
$x_2 = 0.20$	0.000	0.023	0.045	0.067	0.087	0.105	0.121	0.134	0.144	0.150	0.153
$x_2 = 0.10$	0.000	0.024	0.047	0.069	0.090	0.109	0.125	0.139	0.149	0.156	0.159
$x_2 = 0.00$	0.000	0.024	0.048	0.070	0.091	0.110	0.127	0.141	0.151	0.158	0.161
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.3-4. Секция 2 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.078	0.084	0.088	0.088	0.084	0.078	0.069	0.056	0.041	0.022	0.000
$x_2 = 0.80$	0.155	0.167	0.173	0.173	0.167	0.155	0.136	0.111	0.080	0.043	0.000
$x_2 = 0.70$	0.227	0.245	0.254	0.254	0.245	0.227	0.200	0.163	0.118	0.064	0.000
$x_2 = 0.60$	0.294	0.317	0.329	0.329	0.317	0.294	0.259	0.212	0.153	0.082	0.000
$x_2 = 0.50$	0.354	0.382	0.396	0.396	0.382	0.354	0.311	0.255	0.184	0.099	0.000
$x_2 = 0.40$	0.405	0.437	0.453	0.453	0.437	0.405	0.356	0.291	0.210	0.113	0.000
$x_2 = 0.30$	0.446	0.481	0.499	0.499	0.481	0.446	0.392	0.321	0.232	0.125	0.000
$x_2 = 0.20$	0.476	0.514	0.533	0.533	0.514	0.476	0.418	0.342	0.247	0.133	0.000

$x_2 = 0.10$	0.494	0.533	0.553	0.553	0.533	0.494	0.435	0.356	0.257	0.138	0.000
$x_2 = 0.00$	0.500	0.540	0.560	0.560	0.540	0.500	0.440	0.360	0.260	0.140	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 1.3-5. Секция 2 при $t = 0.05$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.045	0.046	0.045	0.043	0.040	0.035	0.030	0.023	0.016	0.008	0.000
$x_2 = 0.80$	0.089	0.090	0.089	0.085	0.079	0.070	0.059	0.046	0.032	0.016	0.000
$x_2 = 0.70$	0.131	0.132	0.130	0.125	0.116	0.103	0.087	0.068	0.047	0.024	0.000
$x_2 = 0.60$	0.169	0.171	0.169	0.162	0.150	0.133	0.113	0.088	0.060	0.031	0.000
$x_2 = 0.50$	0.203	0.206	0.203	0.194	0.180	0.160	0.135	0.106	0.073	0.037	0.000
$x_2 = 0.40$	0.233	0.236	0.232	0.222	0.206	0.184	0.155	0.121	0.083	0.042	0.000
$x_2 = 0.30$	0.256	0.259	0.256	0.245	0.227	0.202	0.171	0.133	0.092	0.047	0.000
$x_2 = 0.20$	0.274	0.277	0.273	0.262	0.242	0.216	0.182	0.142	0.098	0.050	0.000
$x_2 = 0.10$	0.284	0.288	0.284	0.272	0.252	0.224	0.189	0.148	0.102	0.052	0.000
$x_2 = 0.00$	0.288	0.291	0.287	0.275	0.255	0.227	0.192	0.150	0.103	0.052	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 1.3-6. Секция 2 при $t = 0.1$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.025	0.025	0.024	0.023	0.021	0.018	0.015	0.012	0.008	0.004	0.000
$x_2 = 0.80$	0.050	0.050	0.048	0.045	0.041	0.036	0.030	0.024	0.016	0.008	0.000
$x_2 = 0.70$	0.073	0.073	0.071	0.067	0.061	0.054	0.045	0.035	0.024	0.012	0.000
$x_2 = 0.60$	0.095	0.094	0.091	0.086	0.079	0.069	0.058	0.045	0.031	0.016	0.000
$x_2 = 0.50$	0.114	0.113	0.110	0.104	0.095	0.083	0.070	0.054	0.037	0.019	0.000
$x_2 = 0.40$	0.130	0.130	0.126	0.119	0.109	0.095	0.080	0.062	0.042	0.021	0.000
$x_2 = 0.30$	0.144	0.143	0.139	0.131	0.120	0.105	0.088	0.068	0.046	0.024	0.000
$x_2 = 0.20$	0.153	0.153	0.148	0.140	0.128	0.112	0.094	0.073	0.050	0.025	0.000
$x_2 = 0.10$	0.159	0.158	0.154	0.145	0.132	0.116	0.097	0.075	0.051	0.026	0.000
$x_2 = 0.00$	0.161	0.160	0.156	0.147	0.134	0.118	0.098	0.076	0.052	0.026	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

**Приложение 1.1.4 Таблицы численных расчетов задачи переноса
на двумерной сети с тремя примыкающими секциями**

Пусть двумерная сеть \mathfrak{Z} с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.14), состоящей из трех подобластей $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ и двух

поверхностей примыкания S_1, S_2 : $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$,
 $\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{S}_3 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$. Рассматривается

начально-краевая задача (4.42) – (4.46), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.47) – (4.51) при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$ ($\kappa = 1, 2$),
 $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$, шаг по x_1 : $h_1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h_2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$;
 $K = N = 100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 1.4.-1 – 1.4.-9.

Таблица 1.4-1. Секция 1 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.005	0.010	0.016	0.021	0.026	0.031	0.037	0.042	0.047	0.052
$x_2 = 0.80$	0.000	0.010	0.021	0.031	0.041	0.052	0.062	0.072	0.082	0.093	0.103
$x_2 = 0.70$	0.000	0.015	0.030	0.045	0.061	0.076	0.091	0.106	0.121	0.136	0.151
$x_2 = 0.60$	0.000	0.020	0.039	0.059	0.078	0.098	0.118	0.137	0.157	0.176	0.196
$x_2 = 0.50$	0.000	0.024	0.047	0.071	0.094	0.118	0.141	0.165	0.189	0.212	0.236
$x_2 = 0.40$	0.000	0.027	0.054	0.081	0.108	0.135	0.162	0.189	0.216	0.243	0.270
$x_2 = 0.30$	0.000	0.030	0.059	0.089	0.119	0.148	0.178	0.208	0.238	0.267	0.297
$x_2 = 0.20$	0.000	0.032	0.063	0.095	0.127	0.159	0.190	0.222	0.254	0.285	0.317
$x_2 = 0.10$	0.000	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165	0.198	0.230	0.263	0.296	0.329
$x_2 = 0.00$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.4-2. Секция 1 при $t = 0.05$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.004	0.008	0.013	0.017	0.021	0.025	0.029	0.032	0.036	0.039
$x_2 = 0.80$	0.000	0.008	0.017	0.025	0.033	0.041	0.049	0.056	0.064	0.070	0.077
$x_2 = 0.70$	0.000	0.012	0.024	0.037	0.049	0.060	0.072	0.083	0.093	0.103	0.113
$x_2 = 0.60$	0.000	0.016	0.032	0.047	0.063	0.078	0.093	0.107	0.121	0.134	0.146
$x_2 = 0.50$	0.000	0.019	0.038	0.057	0.076	0.094	0.112	0.129	0.145	0.161	0.176
$x_2 = 0.40$	0.000	0.022	0.044	0.065	0.086	0.107	0.128	0.147	0.166	0.184	0.201
$x_2 = 0.30$	0.000	0.024	0.048	0.072	0.095	0.118	0.141	0.162	0.183	0.203	0.221
$x_2 = 0.20$	0.000	0.026	0.051	0.077	0.102	0.126	0.150	0.173	0.196	0.217	0.236
$x_2 = 0.10$	0.000	0.027	0.053	0.080	0.106	0.131	0.156	0.180	0.203	0.225	0.245
$x_2 = 0.00$	0.000	0.027	0.054	0.081	0.107	0.133	0.158	0.182	0.206	0.228	0.248
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.4-3. Секция 1 при $t = 0.1$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.003	0.005	0.008	0.011	0.013	0.016	0.018	0.020	0.022	0.024
$x_2 = 0.80$	0.000	0.005	0.011	0.016	0.021	0.026	0.031	0.036	0.040	0.043	0.047
$x_2 = 0.70$	0.000	0.008	0.016	0.024	0.031	0.039	0.046	0.052	0.058	0.064	0.069
$x_2 = 0.60$	0.000	0.010	0.021	0.031	0.041	0.050	0.059	0.068	0.075	0.083	0.089
$x_2 = 0.50$	0.000	0.012	0.025	0.037	0.049	0.060	0.071	0.081	0.091	0.099	0.107
$x_2 = 0.40$	0.000	0.014	0.028	0.042	0.056	0.069	0.081	0.093	0.104	0.114	0.122
$x_2 = 0.30$	0.000	0.016	0.031	0.047	0.062	0.076	0.090	0.102	0.114	0.125	0.135
$x_2 = 0.20$	0.000	0.017	0.033	0.050	0.066	0.081	0.096	0.109	0.122	0.134	0.144
$x_2 = 0.10$	0.000	0.017	0.035	0.052	0.068	0.084	0.099	0.114	0.127	0.139	0.150
$x_2 = 0.00$	0.000	0.018	0.035	0.052	0.069	0.085	0.101	0.115	0.128	0.141	0.151
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.4-4. Секция 2 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.052	0.057	0.063	0.068	0.073	0.078	0.083	0.089	0.094	0.099	0.104
$x_2 = 0.80$	0.103	0.113	0.124	0.134	0.144	0.155	0.165	0.175	0.185	0.196	0.206
$x_2 = 0.70$	0.151	0.166	0.182	0.197	0.212	0.227	0.242	0.257	0.272	0.288	0.303
$x_2 = 0.60$	0.196	0.216	0.235	0.255	0.274	0.294	0.313	0.333	0.353	0.372	0.392
$x_2 = 0.50$	0.236	0.259	0.283	0.306	0.330	0.354	0.377	0.401	0.424	0.448	0.471
$x_2 = 0.40$	0.270	0.297	0.324	0.351	0.378	0.405	0.431	0.458	0.485	0.512	0.539
$x_2 = 0.30$	0.297	0.327	0.356	0.386	0.416	0.446	0.475	0.505	0.535	0.564	0.594
$x_2 = 0.20$	0.317	0.349	0.380	0.412	0.444	0.476	0.507	0.539	0.571	0.602	0.634
$x_2 = 0.10$	0.329	0.362	0.395	0.428	0.461	0.494	0.527	0.560	0.593	0.626	0.658
$x_2 = 0.00$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.4-5. Секция 2 при $t = 0.05$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.039	0.042	0.045	0.047	0.049	0.050	0.051	0.052	0.051	0.051	0.049
$x_2 = 0.80$	0.077	0.083	0.088	0.093	0.096	0.099	0.101	0.102	0.102	0.100	0.097
$x_2 = 0.70$	0.113	0.121	0.129	0.136	0.142	0.146	0.149	0.150	0.149	0.147	0.142
$x_2 = 0.60$	0.146	0.157	0.167	0.176	0.183	0.189	0.192	0.194	0.193	0.190	0.184
$x_2 = 0.50$	0.176	0.189	0.201	0.212	0.220	0.227	0.231	0.233	0.232	0.229	0.222
$x_2 = 0.40$	0.201	0.216	0.230	0.242	0.252	0.260	0.265	0.267	0.266	0.262	0.254
$x_2 = 0.30$	0.221	0.238	0.254	0.267	0.278	0.286	0.292	0.294	0.293	0.288	0.279
$x_2 = 0.20$	0.236	0.254	0.271	0.285	0.297	0.305	0.311	0.314	0.313	0.307	0.298

$x_2 = 0.10$	0.245	0.264	0.281	0.296	0.308	0.317	0.323	0.326	0.325	0.319	0.310
$x_2 = 0.00$	0.248	0.268	0.285	0.299	0.312	0.321	0.327	0.330	0.329	0.323	0.314
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.4-6 – Секция 2 при $t = 0.1$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.024	0.025	0.026	0.027	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.027	0.025
$x_2 = 0.80$	0.047	0.050	0.052	0.054	0.055	0.056	0.056	0.056	0.054	0.053	0.050
$x_2 = 0.70$	0.069	0.073	0.077	0.079	0.081	0.082	0.082	0.082	0.080	0.077	0.074
$x_2 = 0.60$	0.089	0.095	0.099	0.103	0.105	0.107	0.107	0.106	0.104	0.100	0.096
$x_2 = 0.50$	0.107	0.114	0.119	0.123	0.127	0.128	0.128	0.127	0.125	0.121	0.115
$x_2 = 0.40$	0.122	0.130	0.136	0.141	0.145	0.147	0.147	0.146	0.143	0.138	0.132
$x_2 = 0.30$	0.135	0.143	0.150	0.156	0.159	0.161	0.162	0.160	0.157	0.152	0.145
$x_2 = 0.20$	0.144	0.153	0.160	0.166	0.170	0.172	0.173	0.171	0.168	0.162	0.155
$x_2 = 0.10$	0.150	0.159	0.167	0.172	0.177	0.179	0.179	0.178	0.174	0.168	0.161
$x_2 = 0.00$	0.151	0.161	0.169	0.175	0.179	0.181	0.182	0.180	0.176	0.171	0.163
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.4-7. Секция 3 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.104	0.108	0.108	0.106	0.100	0.091	0.079	0.064	0.046	0.025	0.000
$x_2 = 0.80$	0.206	0.213	0.214	0.209	0.198	0.180	0.157	0.127	0.091	0.048	0.000
$x_2 = 0.70$	0.303	0.313	0.315	0.307	0.291	0.265	0.230	0.186	0.133	0.071	0.000
$x_2 = 0.60$	0.392	0.406	0.408	0.398	0.376	0.343	0.298	0.241	0.172	0.092	0.000
$x_2 = 0.50$	0.471	0.488	0.490	0.478	0.453	0.412	0.358	0.290	0.207	0.111	0.000
$x_2 = 0.40$	0.539	0.558	0.561	0.547	0.518	0.472	0.410	0.332	0.237	0.127	0.000
$x_2 = 0.30$	0.594	0.615	0.618	0.603	0.570	0.520	0.451	0.365	0.261	0.140	0.000
$x_2 = 0.20$	0.634	0.656	0.659	0.644	0.609	0.555	0.482	0.390	0.279	0.149	0.000
$x_2 = 0.10$	0.658	0.681	0.685	0.668	0.632	0.576	0.500	0.405	0.290	0.155	0.000
$x_2 = 0.00$	0.667	0.690	0.693	0.677	0.640	0.583	0.507	0.410	0.293	0.157	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 1.4-8. Секция 3 при $t = 0.05$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.049	0.047	0.044	0.040	0.036	0.031	0.026	0.020	0.013	0.007	0.000
$x_2 = 0.80$	0.097	0.093	0.087	0.080	0.071	0.061	0.051	0.039	0.026	0.013	0.000
$x_2 = 0.70$	0.142	0.136	0.127	0.117	0.104	0.090	0.074	0.057	0.039	0.019	0.000
$x_2 = 0.60$	0.184	0.176	0.165	0.151	0.135	0.117	0.096	0.074	0.050	0.025	0.000

$x_2 = 0.90$	0.000	0.023	0.047	0.070	0.094	0.117	0.141	0.164	0.188	0.211	0.235
$x_2 = 0.80$	0.000	0.046	0.093	0.139	0.185	0.232	0.278	0.324	0.371	0.417	0.464
$x_2 = 0.70$	0.000	0.068	0.136	0.204	0.272	0.340	0.409	0.477	0.545	0.613	0.681
$x_2 = 0.60$	0.000	0.088	0.176	0.265	0.353	0.441	0.529	0.617	0.705	0.794	0.882
$x_2 = 0.50$	0.000	0.106	0.212	0.318	0.424	0.530	0.636	0.742	0.849	0.955	1.061
$x_2 = 0.40$	0.000	0.121	0.243	0.364	0.485	0.607	0.728	0.849	0.971	1.092	1.214
$x_2 = 0.30$	0.000	0.134	0.267	0.401	0.535	0.668	0.802	0.936	1.069	1.203	1.337
$x_2 = 0.20$	0.000	0.143	0.285	0.428	0.571	0.713	0.856	0.999	1.141	1.284	1.427
$x_2 = 0.10$	0.000	0.148	0.296	0.444	0.593	0.741	0.889	1.037	1.185	1.333	1.482
$x_2 = 0.00$	0.000	0.150	0.300	0.450	0.600	0.750	0.900	1.050	1.200	1.350	1.500
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.5-2. Секция 1 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.017	0.033	0.050	0.066	0.083	0.100	0.116	0.133	0.149	0.166
$x_2 = 0.80$	0.000	0.033	0.066	0.098	0.131	0.164	0.197	0.229	0.262	0.295	0.328
$x_2 = 0.70$	0.000	0.048	0.096	0.144	0.193	0.241	0.289	0.337	0.385	0.433	0.482
$x_2 = 0.60$	0.000	0.062	0.125	0.187	0.249	0.312	0.374	0.436	0.499	0.561	0.623
$x_2 = 0.50$	0.000	0.075	0.150	0.225	0.300	0.375	0.450	0.525	0.600	0.675	0.750
$x_2 = 0.40$	0.000	0.086	0.172	0.257	0.343	0.429	0.515	0.601	0.686	0.772	0.858
$x_2 = 0.30$	0.000	0.095	0.189	0.284	0.378	0.473	0.567	0.662	0.756	0.851	0.945
$x_2 = 0.20$	0.000	0.101	0.202	0.303	0.403	0.504	0.605	0.706	0.807	0.908	1.009
$x_2 = 0.10$	0.000	0.105	0.210	0.314	0.419	0.524	0.629	0.733	0.838	0.943	1.048
$x_2 = 0.00$	0.000	0.106	0.212	0.318	0.424	0.530	0.636	0.742	0.849	0.955	1.061
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.5-3. Секция 1 при $t = 0.05$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.016	0.032	0.048	0.063	0.076	0.089	0.100	0.110	0.117	0.121
$x_2 = 0.80$	0.000	0.032	0.063	0.094	0.124	0.151	0.176	0.198	0.217	0.230	0.239
$x_2 = 0.70$	0.000	0.047	0.093	0.138	0.181	0.222	0.259	0.291	0.318	0.339	0.351
$x_2 = 0.60$	0.000	0.061	0.121	0.179	0.235	0.287	0.335	0.377	0.412	0.438	0.455
$x_2 = 0.50$	0.000	0.073	0.145	0.215	0.283	0.346	0.403	0.454	0.496	0.527	0.547
$x_2 = 0.40$	0.000	0.084	0.166	0.246	0.323	0.395	0.461	0.519	0.567	0.603	0.626
$x_2 = 0.30$	0.000	0.092	0.183	0.271	0.356	0.435	0.508	0.572	0.624	0.665	0.690
$x_2 = 0.20$	0.000	0.098	0.195	0.290	0.380	0.465	0.542	0.610	0.666	0.709	0.736
$x_2 = 0.10$	0.000	0.102	0.203	0.301	0.395	0.483	0.563	0.634	0.692	0.737	0.765
$x_2 = 0.00$	0.000	0.103	0.205	0.305	0.400	0.489	0.570	0.641	0.701	0.746	0.774

$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
---------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Таблица 1.5-4. Секция 1 при $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.011	0.023	0.034	0.044	0.054	0.063	0.071	0.078	0.082	0.086
$x_2 = 0.80$	0.000	0.023	0.045	0.067	0.087	0.107	0.125	0.140	0.153	0.163	0.169
$x_2 = 0.70$	0.000	0.033	0.066	0.098	0.128	0.157	0.183	0.206	0.225	0.239	0.249
$x_2 = 0.60$	0.000	0.043	0.085	0.127	0.166	0.203	0.237	0.267	0.291	0.310	0.322
$x_2 = 0.50$	0.000	0.052	0.103	0.152	0.200	0.244	0.285	0.321	0.350	0.373	0.387
$x_2 = 0.40$	0.000	0.059	0.117	0.174	0.229	0.280	0.326	0.367	0.401	0.427	0.443
$x_2 = 0.30$	0.000	0.065	0.129	0.192	0.252	0.308	0.359	0.404	0.442	0.470	0.488
$x_2 = 0.20$	0.000	0.070	0.138	0.205	0.269	0.329	0.383	0.431	0.471	0.502	0.521
$x_2 = 0.10$	0.000	0.072	0.143	0.213	0.279	0.341	0.398	0.448	0.489	0.521	0.541
$x_2 = 0.00$	0.000	0.073	0.145	0.215	0.283	0.346	0.403	0.454	0.496	0.527	0.547
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 1.5-5 Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.235	0.253	0.263	0.263	0.253	0.235	0.206	0.169	0.122	0.066	0.000
$x_2 = 0.80$	0.464	0.501	0.519	0.519	0.501	0.464	0.408	0.334	0.241	0.130	0.000
$x_2 = 0.70$	0.681	0.735	0.763	0.763	0.735	0.681	0.599	0.490	0.354	0.191	0.000
$x_2 = 0.60$	0.882	0.952	0.987	0.987	0.952	0.882	0.776	0.635	0.458	0.247	0.000
$x_2 = 0.50$	1.061	1.146	1.188	1.188	1.146	1.061	0.933	0.764	0.552	0.297	0.000
$x_2 = 0.40$	1.214	1.311	1.359	1.359	1.311	1.214	1.068	0.874	0.631	0.340	0.000
$x_2 = 0.30$	1.337	1.443	1.497	1.497	1.443	1.337	1.176	0.962	0.695	0.374	0.000
$x_2 = 0.20$	1.427	1.541	1.598	1.598	1.541	1.427	1.255	1.027	0.742	0.399	0.000
$x_2 = 0.10$	1.482	1.600	1.659	1.659	1.600	1.482	1.304	1.067	0.770	0.415	0.000
$x_2 = 0.00$	1.500	1.620	1.680	1.680	1.620	1.500	1.320	1.080	0.780	0.420	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 1.5-6 Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.166	0.179	0.186	0.186	0.179	0.166	0.146	0.119	0.086	0.046	0.000
$x_2 = 0.80$	0.328	0.354	0.367	0.367	0.354	0.328	0.288	0.236	0.170	0.092	0.000
$x_2 = 0.70$	0.482	0.520	0.539	0.539	0.520	0.482	0.424	0.347	0.250	0.135	0.000
$x_2 = 0.60$	0.623	0.673	0.698	0.698	0.673	0.623	0.549	0.449	0.324	0.175	0.000
$x_2 = 0.50$	0.750	0.810	0.840	0.840	0.810	0.750	0.660	0.540	0.390	0.210	0.000

$x_2 = 0.40$	0.858	0.927	0.961	0.961	0.927	0.858	0.755	0.618	0.446	0.240	0.000
$x_2 = 0.30$	0.945	1.021	1.058	1.058	1.021	0.945	0.832	0.680	0.491	0.265	0.000
$x_2 = 0.20$	1.009	1.089	1.130	1.130	1.089	1.009	0.888	0.726	0.525	0.282	0.000
$x_2 = 0.10$	1.048	1.131	1.173	1.173	1.131	1.048	0.922	0.754	0.545	0.293	0.000
$x_2 = 0.00$	1.061	1.146	1.188	1.188	1.146	1.061	0.933	0.764	0.552	0.297	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 1.5-7 Секция 2 при $t = 0.05$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.121	0.123	0.121	0.116	0.108	0.096	0.081	0.063	0.043	0.022	0.000
$x_2 = 0.80$	0.239	0.242	0.239	0.229	0.212	0.189	0.160	0.125	0.086	0.044	0.000
$x_2 = 0.70$	0.351	0.356	0.351	0.336	0.312	0.278	0.235	0.184	0.126	0.064	0.000
$x_2 = 0.60$	0.455	0.461	0.455	0.436	0.404	0.360	0.304	0.238	0.163	0.083	0.000
$x_2 = 0.50$	0.547	0.554	0.547	0.524	0.486	0.433	0.365	0.286	0.196	0.100	0.000
$x_2 = 0.40$	0.626	0.634	0.626	0.600	0.556	0.495	0.418	0.327	0.225	0.114	0.000
$x_2 = 0.30$	0.690	0.698	0.689	0.660	0.612	0.545	0.461	0.360	0.248	0.126	0.000
$x_2 = 0.20$	0.736	0.746	0.735	0.705	0.654	0.582	0.492	0.385	0.264	0.135	0.000
$x_2 = 0.10$	0.765	0.774	0.764	0.732	0.679	0.604	0.510	0.399	0.274	0.140	0.000
$x_2 = 0.00$	0.774	0.784	0.773	0.741	0.687	0.612	0.517	0.404	0.278	0.141	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 1.5-8. Секция 2 при $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.086	0.087	0.086	0.082	0.076	0.068	0.057	0.045	0.031	0.016	0.000
$x_2 = 0.80$	0.169	0.171	0.169	0.162	0.150	0.134	0.113	0.088	0.061	0.031	0.000
$x_2 = 0.70$	0.249	0.252	0.248	0.238	0.221	0.196	0.166	0.130	0.089	0.045	0.000
$x_2 = 0.60$	0.322	0.326	0.321	0.308	0.286	0.254	0.215	0.168	0.115	0.059	0.000
$x_2 = 0.50$	0.387	0.392	0.387	0.371	0.344	0.306	0.258	0.202	0.139	0.071	0.000
$x_2 = 0.40$	0.443	0.448	0.442	0.424	0.393	0.350	0.296	0.231	0.159	0.081	0.000
$x_2 = 0.30$	0.488	0.494	0.487	0.467	0.433	0.386	0.326	0.255	0.175	0.089	0.000
$x_2 = 0.20$	0.521	0.527	0.520	0.498	0.462	0.412	0.348	0.272	0.187	0.095	0.000
$x_2 = 0.10$	0.541	0.547	0.540	0.518	0.480	0.427	0.361	0.282	0.194	0.099	0.000
$x_2 = 0.00$	0.547	0.554	0.547	0.524	0.486	0.433	0.365	0.286	0.196	0.100	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Приложение 1.1.6 Таблицы численных расчетов задачи переноса на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

Пусть трехмерная сеть $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.18) с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$:

$$\mathfrak{Z}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\},$$

$$\mathfrak{Z}_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}. \text{ Рассматривается начально-краевая задача (4.67) –}$$

(4.71), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.72) – (4.76) при

$$a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1 (\kappa = \overline{1, 3}), \quad a_{\kappa t}(x_1, x_2, x_3) = 0 (1 \leq \kappa, t \leq 3, \kappa \neq t), \quad b(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f(x_1, x_2, x_3, t) = 0;$$

шаг по x_1 : $h1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$, $K = N = 100$.

Результаты работы программы представлены в таблицах 1.6-1 – 1.6-12.

Таблица 1.6-1. Секция 1 при $t = 0, x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.021	0.042	0.063	0.083	0.104	0.125	0.146	0.167	0.188	0.209
$x_2 = 0.80$	0.000	0.041	0.082	0.124	0.165	0.206	0.247	0.288	0.330	0.371	0.412
$x_2 = 0.70$	0.000	0.061	0.121	0.182	0.242	0.303	0.363	0.424	0.484	0.545	0.605
$x_2 = 0.60$	0.000	0.078	0.157	0.235	0.313	0.392	0.470	0.549	0.627	0.705	0.784
$x_2 = 0.50$	0.000	0.094	0.189	0.283	0.377	0.471	0.566	0.660	0.754	0.849	0.943
$x_2 = 0.40$	0.000	0.108	0.216	0.324	0.431	0.539	0.647	0.755	0.863	0.971	1.079
$x_2 = 0.30$	0.000	0.119	0.238	0.356	0.475	0.594	0.713	0.832	0.950	1.069	1.188
$x_2 = 0.20$	0.000	0.127	0.254	0.380	0.507	0.634	0.761	0.888	1.014	1.141	1.268
$x_2 = 0.10$	0.000	0.132	0.263	0.395	0.527	0.658	0.790	0.922	1.054	1.185	1.317
$x_2 = 0.00$	0.000	0.133	0.267	0.400	0.533	0.667	0.800	0.933	1.067	1.200	1.333
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.6-2. Секция 1 при $t = 0, x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.015	0.029	0.044	0.059	0.074	0.088	0.103	0.118	0.133	0.147
$x_2 = 0.80$	0.000	0.029	0.058	0.087	0.117	0.146	0.175	0.204	0.233	0.262	0.291
$x_2 = 0.70$	0.000	0.043	0.086	0.128	0.171	0.214	0.257	0.300	0.342	0.385	0.428
$x_2 = 0.60$	0.000	0.055	0.111	0.166	0.222	0.277	0.333	0.388	0.443	0.499	0.554
$x_2 = 0.50$	0.000	0.067	0.133	0.200	0.267	0.333	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667
$x_2 = 0.40$	0.000	0.076	0.153	0.229	0.305	0.381	0.458	0.534	0.610	0.686	0.763
$x_2 = 0.30$	0.000	0.084	0.168	0.252	0.336	0.420	0.504	0.588	0.672	0.756	0.840
$x_2 = 0.20$	0.000	0.090	0.179	0.269	0.359	0.448	0.538	0.628	0.717	0.807	0.897

$x_2 = 1.00$	0.000	0.093	0.186	0.279	0.372	0.466	0.559	0.652	0.745	0.838	0.931
$x_2 = 0.00$	0.000	0.094	0.189	0.283	0.377	0.471	0.566	0.660	0.754	0.849	0.943
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.6-3. Секция 1 при $t = 0.05$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.013	0.026	0.039	0.052	0.064	0.075	0.086	0.096	0.105	0.114
$x_2 = 0.80$	0.000	0.026	0.052	0.077	0.102	0.126	0.148	0.170	0.190	0.208	0.224
$x_2 = 0.70$	0.000	0.038	0.076	0.113	0.149	0.185	0.218	0.250	0.279	0.306	0.330
$x_2 = 0.60$	0.000	0.049	0.098	0.147	0.194	0.239	0.282	0.323	0.361	0.396	0.427
$x_2 = 0.50$	0.000	0.059	0.118	0.176	0.233	0.287	0.340	0.389	0.435	0.476	0.514
$x_2 = 0.40$	0.000	0.068	0.135	0.202	0.266	0.329	0.388	0.445	0.497	0.545	0.588
$x_2 = 0.30$	0.000	0.075	0.149	0.222	0.293	0.362	0.428	0.490	0.548	0.600	0.647
$x_2 = 0.20$	0.000	0.080	0.159	0.237	0.313	0.387	0.457	0.523	0.584	0.641	0.691
$x_2 = 0.10$	0.000	0.083	0.165	0.246	0.325	0.401	0.474	0.543	0.607	0.665	0.717
$x_2 = 0.00$	0.000	0.084	0.167	0.249	0.329	0.406	0.480	0.550	0.615	0.674	0.726
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.6-4. Секция 1 при $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.009	0.019	0.028	0.036	0.045	0.053	0.061	0.068	0.075	0.080
$x_2 = 0.80$	0.000	0.018	0.037	0.054	0.072	0.089	0.105	0.120	0.134	0.147	0.159
$x_2 = 0.70$	0.000	0.027	0.054	0.080	0.106	0.130	0.154	0.176	0.197	0.216	0.233
$x_2 = 0.60$	0.000	0.035	0.070	0.104	0.137	0.169	0.200	0.229	0.255	0.280	0.302
$x_2 = 0.50$	0.000	0.042	0.084	0.125	0.165	0.203	0.240	0.275	0.307	0.337	0.363
$x_2 = 0.40$	0.000	0.048	0.096	0.143	0.188	0.233	0.275	0.315	0.352	0.385	0.416
$x_2 = 0.30$	0.000	0.053	0.105	0.157	0.207	0.256	0.303	0.346	0.387	0.424	0.458
$x_2 = 0.20$	0.000	0.056	0.113	0.168	0.221	0.273	0.323	0.370	0.413	0.453	0.489
$x_2 = 0.10$	0.000	0.059	0.117	0.174	0.230	0.284	0.335	0.384	0.429	0.470	0.507
$x_2 = 0.00$	0.000	0.059	0.118	0.176	0.233	0.287	0.340	0.389	0.435	0.476	0.514
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 1.6-5. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.209	0.228	0.244	0.257	0.267	0.274	0.277	0.278	0.275	0.270	0.261
$x_2 = 0.80$	0.412	0.450	0.482	0.508	0.527	0.541	0.548	0.549	0.544	0.533	0.515
$x_2 = 0.70$	0.605	0.661	0.708	0.746	0.775	0.794	0.805	0.807	0.799	0.782	0.757

$x_2 = 0.60$	0.784	0.856	0.917	0.966	1.003	1.029	1.042	1.044	1.035	1.013	0.980
$x_2 = 0.50$	0.943	1.030	1.103	1.162	1.207	1.237	1.254	1.256	1.245	1.219	1.179
$x_2 = 0.40$	1.079	1.178	1.262	1.329	1.381	1.416	1.435	1.437	1.424	1.394	1.348
$x_2 = 0.30$	1.188	1.298	1.390	1.464	1.521	1.559	1.580	1.583	1.568	1.536	1.485
$x_2 = 0.20$	1.268	1.385	1.484	1.563	1.623	1.664	1.687	1.690	1.674	1.639	1.585
$x_2 = 0.10$	1.317	1.439	1.541	1.623	1.686	1.728	1.751	1.755	1.738	1.702	1.646
$x_2 = 0.00$	1.333	1.457	1.560	1.643	1.707	1.750	1.773	1.777	1.760	1.723	1.667
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.6-6. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.147	0.161	0.173	0.182	0.189	0.194	0.196	0.197	0.195	0.191	0.184
$x_2 = 0.80$	0.291	0.318	0.341	0.359	0.373	0.382	0.387	0.388	0.385	0.377	0.364
$x_2 = 0.70$	0.428	0.468	0.501	0.528	0.548	0.562	0.569	0.570	0.565	0.553	0.535
$x_2 = 0.60$	0.554	0.605	0.648	0.683	0.709	0.727	0.737	0.738	0.732	0.716	0.693
$x_2 = 0.50$	0.667	0.728	0.780	0.822	0.853	0.875	0.887	0.888	0.880	0.862	0.833
$x_2 = 0.40$	0.763	0.833	0.892	0.940	0.976	1.001	1.014	1.016	1.007	0.986	0.953
$x_2 = 0.30$	0.840	0.918	0.983	1.035	1.075	1.103	1.117	1.119	1.109	1.086	1.050
$x_2 = 0.20$	0.897	0.980	1.049	1.105	1.148	1.177	1.193	1.195	1.184	1.159	1.121
$x_2 = 0.10$	0.931	1.017	1.090	1.148	1.192	1.222	1.238	1.241	1.229	1.204	1.164
$x_2 = 0.00$	0.943	1.030	1.103	1.162	1.207	1.237	1.254	1.256	1.245	1.219	1.179
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.6-7. Секция 2 при $t = 0.05$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.114	0.121	0.127	0.131	0.135	0.137	0.137	0.136	0.133	0.129	0.123
$x_2 = 0.80$	0.224	0.239	0.250	0.260	0.266	0.270	0.271	0.268	0.263	0.254	0.243
$x_2 = 0.70$	0.330	0.351	0.368	0.381	0.391	0.396	0.398	0.394	0.386	0.374	0.357
$x_2 = 0.60$	0.427	0.454	0.476	0.494	0.506	0.513	0.515	0.510	0.500	0.484	0.462
$x_2 = 0.50$	0.514	0.546	0.573	0.594	0.609	0.618	0.619	0.614	0.602	0.582	0.556
$x_2 = 0.40$	0.588	0.625	0.656	0.680	0.697	0.707	0.708	0.702	0.688	0.666	0.636
$x_2 = 0.30$	0.647	0.688	0.722	0.749	0.768	0.778	0.780	0.774	0.758	0.734	0.700
$x_2 = 0.20$	0.691	0.734	0.771	0.799	0.819	0.831	0.833	0.826	0.809	0.783	0.748
$x_2 = 0.10$	0.717	0.763	0.800	0.830	0.851	0.863	0.865	0.857	0.840	0.813	0.776
$x_2 = 0.00$	0.726	0.772	0.810	0.840	0.861	0.873	0.876	0.868	0.851	0.823	0.786
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.6-8. Секция 2 при $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.080	0.085	0.090	0.093	0.095	0.097	0.097	0.096	0.094	0.091	0.087
$x_2 = 0.80$	0.159	0.169	0.177	0.184	0.188	0.191	0.191	0.190	0.186	0.180	0.172
$x_2 = 0.70$	0.233	0.248	0.260	0.270	0.277	0.280	0.281	0.279	0.273	0.264	0.252
$x_2 = 0.60$	0.302	0.321	0.337	0.349	0.358	0.363	0.364	0.361	0.354	0.342	0.327
$x_2 = 0.50$	0.363	0.386	0.405	0.420	0.431	0.437	0.438	0.434	0.425	0.412	0.393
$x_2 = 0.40$	0.416	0.442	0.464	0.481	0.493	0.500	0.501	0.497	0.487	0.471	0.450
$x_2 = 0.30$	0.458	0.487	0.511	0.529	0.543	0.550	0.552	0.547	0.536	0.519	0.495
$x_2 = 0.20$	0.489	0.519	0.545	0.565	0.579	0.587	0.589	0.584	0.572	0.554	0.529
$x_2 = 0.10$	0.507	0.539	0.566	0.587	0.602	0.610	0.612	0.606	0.594	0.575	0.549
$x_2 = 0.00$	0.514	0.546	0.573	0.594	0.609	0.618	0.619	0.614	0.602	0.582	0.556
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 1.6-9. Секция 3 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.261	0.249	0.234	0.215	0.194	0.169	0.142	0.111	0.077	0.040	0.000
$x_2 = 0.80$	0.515	0.491	0.461	0.425	0.383	0.335	0.280	0.219	0.152	0.079	0.000
$x_2 = 0.70$	0.757	0.722	0.678	0.625	0.563	0.492	0.412	0.322	0.224	0.117	0.000
$x_2 = 0.60$	0.980	0.935	0.878	0.809	0.729	0.637	0.533	0.417	0.290	0.151	0.000
$x_2 = 0.50$	1.179	1.124	1.056	0.973	0.877	0.766	0.641	0.502	0.349	0.181	0.000
$x_2 = 0.40$	1.348	1.286	1.208	1.114	1.003	0.876	0.734	0.574	0.399	0.208	0.000
$x_2 = 0.30$	1.485	1.417	1.331	1.227	1.105	0.965	0.808	0.633	0.440	0.229	0.000
$x_2 = 0.20$	1.585	1.512	1.420	1.309	1.179	1.030	0.862	0.675	0.469	0.244	0.000
$x_2 = 0.10$	1.646	1.570	1.475	1.360	1.225	1.070	0.896	0.701	0.487	0.254	0.000
$x_2 = 0.00$	1.667	1.590	1.493	1.377	1.240	1.083	0.907	0.710	0.493	0.257	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 1.6-10. Секция 3 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.184	0.176	0.165	0.152	0.137	0.120	0.100	0.079	0.055	0.028	0.000
$x_2 = 0.80$	0.364	0.347	0.326	0.301	0.271	0.237	0.198	0.155	0.108	0.056	0.000
$x_2 = 0.70$	0.535	0.510	0.479	0.442	0.398	0.348	0.291	0.228	0.158	0.082	0.000
$x_2 = 0.60$	0.693	0.661	0.621	0.572	0.515	0.450	0.377	0.295	0.205	0.107	0.000
$x_2 = 0.50$	0.833	0.795	0.747	0.688	0.620	0.542	0.453	0.355	0.247	0.128	0.000
$x_2 = 0.40$	0.953	0.910	0.854	0.788	0.709	0.620	0.519	0.406	0.282	0.147	0.000
$x_2 = 0.30$	1.050	1.002	0.941	0.867	0.781	0.683	0.571	0.447	0.311	0.162	0.000
$x_2 = 0.20$	1.121	1.069	1.004	0.926	0.834	0.729	0.610	0.477	0.332	0.173	0.000

$x_2 = 0.10$	1.164	1.110	1.043	0.961	0.866	0.757	0.633	0.496	0.345	0.179	0.000
$x_2 = 0.00$	1.179	1.124	1.056	0.973	0.877	0.766	0.641	0.502	0.349	0.181	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 1.6-11. Секция 3 при $t = 0.05$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.123	0.116	0.107	0.097	0.085	0.073	0.060	0.045	0.031	0.015	0.000
$x_2 = 0.80$	0.243	0.228	0.211	0.191	0.169	0.144	0.118	0.090	0.061	0.030	0.000
$x_2 = 0.70$	0.357	0.336	0.310	0.281	0.248	0.212	0.173	0.132	0.089	0.045	0.000
$x_2 = 0.60$	0.462	0.435	0.402	0.364	0.321	0.274	0.224	0.171	0.115	0.058	0.000
$x_2 = 0.50$	0.556	0.523	0.483	0.438	0.386	0.330	0.270	0.205	0.138	0.070	0.000
$x_2 = 0.40$	0.636	0.598	0.553	0.501	0.442	0.378	0.308	0.235	0.158	0.080	0.000
$x_2 = 0.30$	0.700	0.659	0.609	0.551	0.487	0.416	0.340	0.259	0.174	0.088	0.000
$x_2 = 0.20$	0.748	0.703	0.650	0.589	0.520	0.444	0.363	0.276	0.186	0.094	0.000
$x_2 = 0.10$	0.776	0.730	0.675	0.611	0.540	0.461	0.376	0.287	0.193	0.097	0.000
$x_2 = 0.00$	0.786	0.739	0.683	0.619	0.546	0.467	0.381	0.290	0.196	0.099	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 1.6-12. Секция 3 при $t = 0.05$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.087	0.082	0.076	0.068	0.060	0.052	0.042	0.032	0.022	0.011	0.000
$x_2 = 0.80$	0.172	0.162	0.149	0.135	0.119	0.102	0.083	0.063	0.043	0.022	0.000
$x_2 = 0.70$	0.252	0.237	0.219	0.199	0.175	0.150	0.122	0.093	0.063	0.032	0.000
$x_2 = 0.60$	0.327	0.307	0.284	0.257	0.227	0.194	0.158	0.121	0.081	0.041	0.000
$x_2 = 0.50$	0.393	0.370	0.342	0.309	0.273	0.233	0.191	0.145	0.098	0.049	0.000
$x_2 = 0.40$	0.450	0.423	0.391	0.354	0.313	0.267	0.218	0.166	0.112	0.056	0.000
$x_2 = 0.30$	0.495	0.466	0.431	0.390	0.344	0.294	0.240	0.183	0.123	0.062	0.000
$x_2 = 0.20$	0.529	0.497	0.460	0.416	0.367	0.314	0.256	0.195	0.132	0.066	0.000
$x_2 = 0.10$	0.549	0.516	0.477	0.432	0.382	0.326	0.266	0.203	0.137	0.069	0.000
$x_2 = 0.00$	0.556	0.523	0.483	0.438	0.386	0.330	0.270	0.205	0.138	0.070	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Приложение 1.2 Таблицы численных расчетов задач колебаний сплошных сред

Приложение 1.2.1 Таблицы численных расчетов

задачи колебаний двухсекционной сети

Пусть Γ – двухсекционная сеть (рис. 4.8), которая моделируется графом (мы оставляем для

графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с двумя ребрами γ_1, γ_2 (γ_1, γ_2 – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 соответствует отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_2 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. Рассматривается начально-краевая задача (4.82) – (4.85), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.86) – (4.89) при $a(x)=1$, $b(x)=0$, $f(x,t)=0$, шаг по x : $h=0.05$, шаг по t : $\tau=0.01$, $K=N=100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 2.1-1 – 2.1-2.

Таблица 2.1-1. Секция 1

$t=1$	0.000	-0.033	-0.063	-0.086	-0.100	-0.105	-0.100	-0.086	-0.064	-0.036	-0.007
$t=0.8$	0.000	-0.013	-0.025	-0.035	-0.042	-0.046	-0.045	-0.042	-0.037	-0.031	-0.024
$t=0.6$	0.000	0.026	0.048	0.064	0.071	0.069	0.058	0.041	0.019	-0.003	-0.023
$t=0.4$	0.000	0.018	0.037	0.053	0.065	0.072	0.074	0.071	0.063	0.049	0.028
$t=0.2$	0.000	-0.009	-0.015	-0.017	-0.013	-0.006	0.004	0.014	0.021	0.023	0.022
$t=0.1$	0.000	-0.008	-0.015	-0.024	-0.033	-0.042	-0.046	-0.044	-0.033	-0.014	0.007
$t=0.08$	0.000	-0.007	-0.014	-0.025	-0.037	-0.047	-0.054	-0.053	-0.043	-0.022	0.005
$t=0.06$	0.000	-0.006	-0.014	-0.026	-0.040	-0.052	-0.060	-0.061	-0.051	-0.029	0.003
$t=0.04$	0.000	-0.004	-0.014	-0.028	-0.043	-0.056	-0.065	-0.067	-0.058	-0.035	0.001
$t=0.02$	0.000	-0.004	-0.015	-0.029	-0.046	-0.060	-0.069	-0.071	-0.062	-0.039	0.000
$t=0$	0.000	-0.004	-0.016	-0.031	-0.048	-0.063	-0.072	-0.074	-0.064	-0.041	0.000
$x=$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.1-2. Секция 2

$t=1$	-0.007	0.020	0.041	0.053	0.056	0.053	0.044	0.033	0.021	0.010	0.000
$t=0.8$	-0.024	-0.016	-0.006	0.006	0.019	0.029	0.036	0.035	0.028	0.016	0.000
$t=0.6$	-0.023	-0.037	-0.047	-0.053	-0.056	-0.056	-0.052	-0.044	-0.031	-0.016	0.000
$t=0.4$	0.028	0.002	-0.027	-0.055	-0.077	-0.090	-0.091	-0.079	-0.058	-0.030	0.000
$t=0.2$	0.022	0.021	0.020	0.023	0.028	0.031	0.028	0.021	0.013	0.006	0.000
$t=0.1$	0.007	0.030	0.056	0.077	0.091	0.095	0.091	0.077	0.055	0.028	0.000
$t=0.08$	0.005	0.034	0.063	0.086	0.100	0.104	0.100	0.086	0.063	0.033	0.000
$t=0.06$	0.003	0.037	0.069	0.093	0.107	0.112	0.107	0.093	0.069	0.037	0.000
$t=0.04$	0.001	0.041	0.074	0.098	0.113	0.118	0.113	0.098	0.074	0.041	0.000
$t=0.02$	0.000	0.044	0.078	0.103	0.117	0.122	0.117	0.103	0.078	0.044	0.000
$t=0$	0.000	0.045	0.080	0.105	0.120	0.125	0.120	0.105	0.080	0.045	0.000
$x=$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Приложение 1.2.2 Таблицы численных расчетов

задачи колебаний звездоподобной трехсекционной сети

Пусть Γ – трехсекционная звездоподобная сеть (рис. 4.10), которая моделируется графом-звездой (здесь также остается для графа символ $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$) с тремя ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – секции сети, ξ – узел графа, место сочленения секций); γ_1 и γ_2 соответствуют отрезку $[0, \frac{1}{2}]$, γ_3 – отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. Рассматривается начально-краевая задача (4.90) – (4.93), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.94) – (4.97) при $a(x) = 1, b(x) = 0, f(x, t) = 0$, шаг по $x: h = 0.05$, шаг по $t: \tau = 0.01$; $K = 100, N = 99$. Результаты работы программы представлены в таблицах 2.2-1 – 2.2-2.

Таблица 2.2-1. Секция 1 и 2

$t = 1$	0.000	0.021	0.038	0.052	0.059	0.061	0.057	0.049	0.036	0.020	0.005
$t = 0.8$	0.000	-0.002	-0.003	-0.003	-0.002	0.000	0.002	0.005	0.009	0.012	0.016
$t = 0.6$	0.000	-0.020	-0.037	-0.049	-0.056	-0.055	-0.049	-0.036	-0.020	-0.002	0.015
$t = 0.4$	0.000	-0.004	-0.009	-0.013	-0.018	-0.022	-0.025	-0.026	-0.027	-0.025	-0.019
$t = 0.2$	0.000	0.013	0.024	0.031	0.034	0.031	0.025	0.015	0.005	-0.005	-0.015
$t = 0.1$	0.000	0.009	0.018	0.027	0.034	0.038	0.040	0.036	0.027	0.013	-0.005
$t = 0.08$	0.000	0.008	0.016	0.024	0.032	0.038	0.041	0.038	0.030	0.016	-0.003
$t = 0.06$	0.000	0.007	0.014	0.022	0.030	0.037	0.041	0.040	0.032	0.018	-0.002
$t = 0.04$	0.000	0.005	0.012	0.020	0.028	0.036	0.040	0.040	0.033	0.019	-0.001
$t = 0.02$	0.000	0.004	0.010	0.017	0.026	0.034	0.039	0.039	0.033	0.020	0.000
$t = 0$	0.000	0.002	0.008	0.016	0.024	0.031	0.036	0.037	0.032	0.020	0.000
$x =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.2-2. Секция 3

$t = 1$	0.005	-0.024	-0.048	-0.064	-0.071	-0.070	-0.062	-0.050	-0.035	-0.018	0.000
$t = 0.8$	0.016	0.022	0.025	0.025	0.022	0.016	0.010	0.005	0.002	0.001	0.000
$t = 0.6$	0.015	0.044	0.068	0.085	0.095	0.098	0.092	0.078	0.057	0.030	0.000
$t = 0.4$	-0.019	-0.002	0.018	0.037	0.053	0.061	0.061	0.053	0.039	0.020	0.000
$t = 0.2$	-0.015	-0.033	-0.051	-0.068	-0.082	-0.087	-0.082	-0.067	-0.046	-0.023	0.000
$t = 0.1$	-0.005	-0.042	-0.077	-0.105	-0.124	-0.131	-0.125	-0.106	-0.077	-0.040	0.000
$t = 0.08$	-0.003	-0.044	-0.081	-0.109	-0.127	-0.133	-0.127	-0.109	-0.081	-0.043	0.000
$t = 0.06$	-0.002	-0.045	-0.083	-0.112	-0.128	-0.133	-0.128	-0.111	-0.083	-0.045	0.000
$t = 0.04$	-0.001	-0.045	-0.084	-0.112	-0.127	-0.132	-0.127	-0.111	-0.084	-0.046	0.000
$t = 0.02$	0.000	-0.044	-0.083	-0.110	-0.125	-0.129	-0.124	-0.109	-0.084	-0.046	0.000

$t = 0$	0.000	-0.045	-0.080	-0.105	-0.120	-0.125	-0.120	-0.105	-0.080	-0.045	0.000
$x =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

**Приложение 1.2.3 Таблицы численных расчетов задачи колебаний
двумерной сети с двумя примыкающими секциями**

Пусть двумерная сеть \mathfrak{S} с двумя примыкающими секциями $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.12), состоящей из двух подобластей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ и поверхности примыкания S : $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$. Рассматривается начально-краевая задача (4.98) – (4.101), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.102) – (4.105) при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$ ($\kappa = 1, 2$), $b(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2, t) = 0$, шаг по x_1 : $h_1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h_2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 2.3-1 – 2.3-6.

Таблица 2.3.-1. Секция 1 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.001	-0.003	-0.005	-0.008	-0.010	-0.011	-0.011	-0.010	-0.006	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.001	-0.005	-0.010	-0.015	-0.019	-0.022	-0.023	-0.020	-0.013	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.002	-0.007	-0.014	-0.022	-0.028	-0.033	-0.033	-0.029	-0.018	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.003	-0.009	-0.019	-0.028	-0.037	-0.042	-0.043	-0.038	-0.024	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.003	-0.011	-0.022	-0.034	-0.044	-0.051	-0.052	-0.045	-0.029	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.004	-0.013	-0.025	-0.039	-0.051	-0.058	-0.059	-0.052	-0.033	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.004	-0.014	-0.028	-0.043	-0.056	-0.064	-0.065	-0.057	-0.036	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.004	-0.015	-0.030	-0.046	-0.059	-0.068	-0.070	-0.061	-0.039	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.004	-0.016	-0.031	-0.047	-0.062	-0.071	-0.073	-0.063	-0.040	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.005	-0.016	-0.032	-0.048	-0.063	-0.072	-0.074	-0.064	-0.041	0.000
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.3-2. Секция 1 при $t = 0.25$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.004	0.007	0.009	0.011	0.013	0.013	0.012	0.010	0.008	0.004
$x_2 = 0.80$	0.000	0.007	0.013	0.019	0.022	0.025	0.025	0.024	0.020	0.015	0.009
$x_2 = 0.70$	0.000	0.010	0.020	0.027	0.033	0.036	0.037	0.035	0.030	0.022	0.013

$x_2 = 0.60$	0.000	0.013	0.026	0.035	0.043	0.047	0.048	0.045	0.038	0.028	0.016
$x_2 = 0.50$	0.000	0.016	0.031	0.042	0.051	0.057	0.058	0.054	0.046	0.034	0.020
$x_2 = 0.40$	0.000	0.019	0.035	0.049	0.059	0.065	0.066	0.062	0.053	0.039	0.022
$x_2 = 0.30$	0.000	0.020	0.039	0.054	0.065	0.072	0.073	0.068	0.058	0.043	0.025
$x_2 = 0.20$	0.000	0.022	0.041	0.057	0.069	0.076	0.078	0.073	0.062	0.046	0.026
$x_2 = 0.10$	0.000	0.023	0.043	0.059	0.072	0.079	0.081	0.076	0.064	0.048	0.027
$x_2 = 0.00$	0.000	0.023	0.043	0.060	0.073	0.080	0.082	0.077	0.065	0.048	0.028
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.3.-3. Секция 1 при $t = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.003	-0.006	-0.008	-0.010	-0.011	-0.010	-0.009	-0.007	-0.004	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.006	-0.012	-0.016	-0.019	-0.021	-0.021	-0.018	-0.013	-0.007	-0.001
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.009	-0.017	-0.024	-0.029	-0.031	-0.030	-0.026	-0.020	-0.011	-0.001
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.012	-0.022	-0.031	-0.037	-0.040	-0.039	-0.034	-0.026	-0.014	-0.001
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.014	-0.027	-0.037	-0.045	-0.048	-0.047	-0.041	-0.031	-0.017	-0.001
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.016	-0.030	-0.043	-0.051	-0.055	-0.054	-0.047	-0.035	-0.019	-0.002
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.017	-0.033	-0.047	-0.056	-0.061	-0.059	-0.052	-0.039	-0.021	-0.002
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.019	-0.036	-0.050	-0.060	-0.065	-0.063	-0.055	-0.041	-0.023	-0.002
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.019	-0.037	-0.052	-0.062	-0.067	-0.066	-0.057	-0.043	-0.023	-0.002
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.020	-0.038	-0.053	-0.063	-0.068	-0.067	-0.058	-0.043	-0.024	-0.002
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.3-4. Секция 2 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.007	0.013	0.016	0.019	0.020	0.019	0.016	0.013	0.007	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.014	0.025	0.032	0.037	0.039	0.037	0.032	0.025	0.014	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.020	0.036	0.048	0.054	0.057	0.054	0.048	0.036	0.020	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.026	0.047	0.062	0.071	0.073	0.071	0.062	0.047	0.026	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.032	0.057	0.074	0.085	0.088	0.085	0.074	0.057	0.032	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.036	0.065	0.085	0.097	0.101	0.097	0.085	0.065	0.036	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.040	0.071	0.094	0.107	0.111	0.107	0.094	0.071	0.040	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.043	0.076	0.100	0.114	0.119	0.114	0.100	0.076	0.043	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.044	0.079	0.104	0.119	0.123	0.119	0.104	0.079	0.044	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.045	0.080	0.105	0.120	0.125	0.120	0.105	0.080	0.045	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 2.3-5. Секция 2 при $t = 0.25$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.004	0.001	-0.003	-0.006	-0.010	-0.012	-0.013	-0.012	-0.010	-0.005	0.000
$x_2 = 0.80$	0.009	0.002	-0.006	-0.013	-0.019	-0.024	-0.026	-0.024	-0.019	-0.010	0.000
$x_2 = 0.70$	0.013	0.002	-0.008	-0.019	-0.028	-0.035	-0.038	-0.036	-0.028	-0.015	0.000
$x_2 = 0.60$	0.016	0.003	-0.011	-0.024	-0.036	-0.045	-0.049	-0.046	-0.036	-0.020	0.000
$x_2 = 0.50$	0.020	0.003	-0.013	-0.029	-0.044	-0.055	-0.059	-0.056	-0.043	-0.024	0.000
$x_2 = 0.40$	0.022	0.004	-0.015	-0.034	-0.050	-0.062	-0.068	-0.064	-0.049	-0.027	0.000
$x_2 = 0.30$	0.025	0.004	-0.017	-0.037	-0.055	-0.069	-0.075	-0.070	-0.054	-0.030	0.000
$x_2 = 0.20$	0.026	0.005	-0.018	-0.040	-0.059	-0.073	-0.080	-0.075	-0.058	-0.032	0.000
$x_2 = 0.10$	0.027	0.005	-0.018	-0.041	-0.061	-0.076	-0.083	-0.078	-0.060	-0.033	0.000
$x_2 = 0.00$	0.028	0.005	-0.019	-0.042	-0.062	-0.077	-0.084	-0.079	-0.061	-0.033	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 2.3-6. Секция 2 при $t = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.003	0.006	0.008	0.009	0.010	0.009	0.008	0.005	0.003	0.000
$x_2 = 0.80$	-0.001	0.006	0.012	0.016	0.019	0.019	0.018	0.015	0.011	0.006	0.000
$x_2 = 0.70$	-0.001	0.009	0.017	0.023	0.027	0.028	0.026	0.022	0.016	0.008	0.000
$x_2 = 0.60$	-0.001	0.011	0.022	0.030	0.035	0.036	0.034	0.028	0.020	0.011	0.000
$x_2 = 0.50$	-0.001	0.014	0.027	0.036	0.042	0.044	0.041	0.034	0.024	0.013	0.000
$x_2 = 0.40$	-0.002	0.016	0.030	0.042	0.048	0.050	0.047	0.039	0.028	0.014	0.000
$x_2 = 0.30$	-0.002	0.017	0.034	0.046	0.053	0.055	0.051	0.043	0.031	0.016	0.000
$x_2 = 0.20$	-0.002	0.018	0.036	0.049	0.057	0.059	0.055	0.046	0.033	0.017	0.000
$x_2 = 0.10$	-0.002	0.019	0.037	0.051	0.059	0.061	0.057	0.048	0.034	0.018	0.000
$x_2 = 0.00$	-0.002	0.019	0.038	0.052	0.060	0.062	0.058	0.048	0.034	0.018	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Приложение 1.2.4 Таблицы численных расчетов задачи колебаний двумерной сети с тремя примыкающими секциями

Пусть двумерная сеть \mathfrak{Z} с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ моделируется сетеподобной областью $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 4.14), состоящей из трех подобластей $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ и двух

поверхностей примыкания S_1, S_2 : $\mathfrak{Z}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$,

$\mathfrak{Z}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{Z}_3 = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$. Рассматривается

начально-краевая задача (4.106) – (4.110), ей соответствующая дифференциально-разностная

система (4.111) – (4.115) при $a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0$, $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2) = 1$ ($\kappa = 1, 2$), $f(x_1, x_2, t) = 0$, $b(x_1, x_2) = 0$, шаг по x_1 : $h1 = 0.05$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$.
 Результаты работы программы представлены в таблицах 2.4-1 – 2.4-9.

Таблица 2.4-1. Секция 1 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.005	0.008	0.011	0.013	0.013	0.013	0.011	0.008	0.005	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.009	0.016	0.022	0.025	0.026	0.025	0.022	0.016	0.009	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.014	0.024	0.032	0.036	0.038	0.036	0.032	0.024	0.014	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.018	0.031	0.041	0.047	0.049	0.047	0.041	0.031	0.018	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.021	0.038	0.049	0.057	0.059	0.057	0.049	0.038	0.021	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.024	0.043	0.057	0.065	0.067	0.065	0.057	0.043	0.024	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.027	0.048	0.062	0.071	0.074	0.071	0.062	0.048	0.027	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.029	0.051	0.067	0.076	0.079	0.076	0.067	0.051	0.029	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.030	0.053	0.069	0.079	0.082	0.079	0.069	0.053	0.030	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.030	0.053	0.070	0.080	0.083	0.080	0.070	0.053	0.030	0.000
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.4-2. Секция 1 при $t = 0.25$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.002	-0.003	-0.004	-0.006	-0.007	-0.007	-0.007	-0.006	-0.005	-0.003
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.003	-0.006	-0.009	-0.011	-0.013	-0.014	-0.013	-0.012	-0.009	-0.006
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.004	-0.009	-0.013	-0.017	-0.019	-0.020	-0.019	-0.017	-0.014	-0.009
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.006	-0.011	-0.017	-0.022	-0.025	-0.026	-0.025	-0.022	-0.018	-0.011
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.007	-0.014	-0.020	-0.026	-0.030	-0.031	-0.030	-0.027	-0.021	-0.013
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.008	-0.016	-0.023	-0.030	-0.034	-0.036	-0.034	-0.030	-0.024	-0.015
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.009	-0.017	-0.026	-0.033	-0.038	-0.039	-0.038	-0.033	-0.027	-0.017
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.009	-0.018	-0.027	-0.035	-0.040	-0.042	-0.040	-0.036	-0.028	-0.018
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.010	-0.019	-0.028	-0.036	-0.042	-0.044	-0.042	-0.037	-0.029	-0.019
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.010	-0.019	-0.029	-0.037	-0.042	-0.044	-0.042	-0.038	-0.030	-0.019
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.4-3. Секция 1 при $t = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.002	-0.003	-0.004	-0.004	-0.003	-0.002	0.000	0.002	0.004	0.005
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.004	-0.006	-0.008	-0.008	-0.007	-0.004	0.000	0.004	0.008	0.011
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.005	-0.010	-0.012	-0.012	-0.010	-0.006	0.000	0.006	0.011	0.016

$x_2 = 0.60$	0.000	-0.007	-0.012	-0.016	-0.016	-0.013	-0.007	0.000	0.008	0.015	0.020
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.008	-0.015	-0.019	-0.019	-0.015	-0.009	0.000	0.009	0.018	0.024
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.009	-0.017	-0.021	-0.022	-0.018	-0.010	0.000	0.011	0.020	0.028
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.010	-0.019	-0.024	-0.024	-0.019	-0.011	0.000	0.012	0.022	0.030
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.011	-0.020	-0.025	-0.026	-0.021	-0.012	0.000	0.012	0.024	0.033
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.011	-0.021	-0.026	-0.027	-0.022	-0.012	0.000	0.013	0.025	0.034
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.012	-0.021	-0.027	-0.027	-0.022	-0.012	0.000	0.013	0.025	0.034
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.4-4. Секция 2 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.005	-0.010	-0.014	-0.018	-0.020	-0.020	-0.019	-0.015	-0.009	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.010	-0.020	-0.028	-0.035	-0.039	-0.040	-0.037	-0.030	-0.018	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.015	-0.029	-0.041	-0.051	-0.057	-0.058	-0.054	-0.044	-0.026	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.019	-0.038	-0.053	-0.066	-0.073	-0.075	-0.070	-0.056	-0.033	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.023	-0.045	-0.064	-0.079	-0.088	-0.091	-0.084	-0.068	-0.040	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.027	-0.052	-0.074	-0.091	-0.101	-0.104	-0.096	-0.078	-0.046	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.029	-0.057	-0.081	-0.100	-0.111	-0.114	-0.106	-0.086	-0.051	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.031	-0.061	-0.087	-0.107	-0.119	-0.122	-0.113	-0.091	-0.054	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.033	-0.063	-0.090	-0.111	-0.123	-0.126	-0.118	-0.095	-0.056	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.033	-0.064	-0.091	-0.112	-0.125	-0.128	-0.119	-0.096	-0.057	0.000
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.4-5. Секция 2 при $t = 0.25$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	-0.003	-0.001	0.002	0.005	0.008	0.010	0.010	0.010	0.008	0.006	0.003
$x_2 = 0.80$	-0.006	-0.002	0.004	0.010	0.015	0.019	0.020	0.020	0.017	0.012	0.006
$x_2 = 0.70$	-0.009	-0.002	0.006	0.014	0.022	0.028	0.030	0.029	0.024	0.018	0.009
$x_2 = 0.60$	-0.011	-0.003	0.007	0.018	0.029	0.036	0.039	0.037	0.032	0.023	0.011
$x_2 = 0.50$	-0.013	-0.004	0.009	0.022	0.034	0.043	0.047	0.045	0.038	0.027	0.013
$x_2 = 0.40$	-0.015	-0.004	0.010	0.025	0.039	0.049	0.053	0.051	0.043	0.031	0.015
$x_2 = 0.30$	-0.017	-0.004	0.011	0.028	0.043	0.054	0.059	0.056	0.048	0.034	0.017
$x_2 = 0.20$	-0.018	-0.005	0.012	0.030	0.046	0.058	0.063	0.060	0.051	0.037	0.018
$x_2 = 0.10$	-0.019	-0.005	0.012	0.031	0.048	0.060	0.065	0.062	0.053	0.038	0.019
$x_2 = 0.00$	-0.019	-0.005	0.012	0.031	0.049	0.061	0.066	0.063	0.054	0.039	0.019
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.4-6. Секция 2 при $t = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.005	0.006	0.007	0.006	0.006	0.004	0.002	0.000	-0.002	-0.004	-0.005
$x_2 = 0.80$	0.011	0.012	0.013	0.013	0.011	0.008	0.004	0.000	-0.004	-0.008	-0.011
$x_2 = 0.70$	0.016	0.018	0.019	0.019	0.016	0.012	0.007	0.000	-0.006	-0.011	-0.016
$x_2 = 0.60$	0.020	0.024	0.025	0.024	0.021	0.016	0.009	0.000	-0.008	-0.015	-0.020
$x_2 = 0.50$	0.024	0.029	0.030	0.029	0.026	0.019	0.010	0.001	-0.009	-0.018	-0.024
$x_2 = 0.40$	0.028	0.033	0.035	0.034	0.029	0.022	0.012	0.001	-0.010	-0.020	-0.028
$x_2 = 0.30$	0.030	0.036	0.038	0.037	0.032	0.024	0.013	0.001	-0.011	-0.022	-0.030
$x_2 = 0.20$	0.033	0.038	0.041	0.039	0.034	0.025	0.014	0.001	-0.012	-0.024	-0.033
$x_2 = 0.10$	0.034	0.040	0.042	0.041	0.036	0.026	0.014	0.001	-0.013	-0.025	-0.034
$x_2 = 0.00$	0.034	0.040	0.043	0.042	0.036	0.027	0.015	0.001	-0.013	-0.025	-0.034
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.4-7. Секция 3 при $t = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.009	0.017	0.022	0.025	0.026	0.025	0.022	0.017	0.009	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.019	0.033	0.043	0.049	0.052	0.049	0.043	0.033	0.019	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.027	0.048	0.064	0.073	0.076	0.073	0.064	0.048	0.027	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.035	0.063	0.082	0.094	0.098	0.094	0.082	0.063	0.035	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.042	0.075	0.099	0.113	0.118	0.113	0.099	0.075	0.042	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.049	0.086	0.113	0.129	0.135	0.129	0.113	0.086	0.049	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.053	0.095	0.125	0.143	0.148	0.143	0.125	0.095	0.053	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.057	0.101	0.133	0.152	0.159	0.152	0.133	0.101	0.057	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.059	0.105	0.138	0.158	0.165	0.158	0.138	0.105	0.059	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.060	0.107	0.140	0.160	0.167	0.160	0.140	0.107	0.060	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 2.4-8. Секция 3 при $t = 0.25$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.003	-0.001	-0.004	-0.008	-0.011	-0.012	-0.012	-0.010	-0.007	-0.004	0.000
$x_2 = 0.80$	0.006	-0.001	-0.009	-0.016	-0.022	-0.025	-0.024	-0.020	-0.014	-0.007	0.000
$x_2 = 0.70$	0.009	-0.002	-0.013	-0.024	-0.032	-0.036	-0.035	-0.030	-0.021	-0.011	0.000
$x_2 = 0.60$	0.011	-0.002	-0.017	-0.031	-0.041	-0.047	-0.046	-0.039	-0.027	-0.014	0.000
$x_2 = 0.50$	0.013	-0.003	-0.020	-0.037	-0.050	-0.056	-0.055	-0.046	-0.033	-0.017	0.000
$x_2 = 0.40$	0.015	-0.003	-0.023	-0.042	-0.057	-0.065	-0.063	-0.053	-0.038	-0.019	0.000
$x_2 = 0.30$	0.017	-0.003	-0.025	-0.046	-0.063	-0.071	-0.069	-0.059	-0.042	-0.021	0.000
$x_2 = 0.20$	0.018	-0.004	-0.027	-0.049	-0.067	-0.076	-0.074	-0.063	-0.044	-0.023	0.000

$x_2 = 0.10$	0.019	-0.004	-0.028	-0.051	-0.070	-0.079	-0.077	-0.065	-0.046	-0.024	0.000
$x_2 = 0.00$	0.019	-0.004	-0.028	-0.052	-0.070	-0.080	-0.078	-0.066	-0.047	-0.024	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 2.4-9. Секция 3 при $t = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	-0.005	-0.006	-0.007	-0.007	-0.006	-0.005	-0.004	-0.002	-0.001	-0.001	0.000
$x_2 = 0.80$	-0.011	-0.012	-0.013	-0.013	-0.012	-0.010	-0.007	-0.005	-0.003	-0.001	0.000
$x_2 = 0.70$	-0.016	-0.018	-0.020	-0.019	-0.017	-0.014	-0.011	-0.007	-0.004	-0.002	0.000
$x_2 = 0.60$	-0.020	-0.024	-0.025	-0.025	-0.023	-0.019	-0.014	-0.009	-0.005	-0.002	0.000
$x_2 = 0.50$	-0.024	-0.029	-0.031	-0.030	-0.027	-0.022	-0.017	-0.011	-0.006	-0.003	0.000
$x_2 = 0.40$	-0.028	-0.033	-0.035	-0.034	-0.031	-0.026	-0.019	-0.013	-0.007	-0.003	0.000
$x_2 = 0.30$	-0.030	-0.036	-0.038	-0.038	-0.034	-0.028	-0.021	-0.014	-0.008	-0.004	0.000
$x_2 = 0.20$	-0.033	-0.038	-0.041	-0.040	-0.036	-0.030	-0.022	-0.015	-0.009	-0.004	0.000
$x_2 = 0.10$	-0.034	-0.040	-0.043	-0.042	-0.038	-0.031	-0.023	-0.016	-0.009	-0.004	0.000
$x_2 = 0.00$	-0.034	-0.040	-0.043	-0.042	-0.038	-0.032	-0.024	-0.016	-0.009	-0.004	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Приложение 1.2.5 Таблицы численных расчетов задачи колебаний трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

Пусть трехмерная сеть $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.16), состоящая из двух области $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$:
 $\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$, $\mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$, и поверхности примыкания S . Рассматривается начально-краевая задача (4.116) – (4.119), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.120) – (4.123) при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1, 3}$), $a_{\kappa l}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, l \leq 3, \kappa \neq l$), $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$; шаг по x_1 : $h1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 2.5-1 – 2.5-8.

Таблица 2.5-1. Секция 1 при $t = 0, x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.007	0.013	0.016	0.019	0.020	0.019	0.016	0.013	0.007	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.014	0.025	0.032	0.037	0.039	0.037	0.032	0.025	0.014	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.020	0.036	0.048	0.054	0.057	0.054	0.048	0.036	0.020	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.026	0.047	0.062	0.071	0.073	0.071	0.062	0.047	0.026	0.000

$x_2 = 0.50$	0.000	0.032	0.057	0.074	0.085	0.088	0.085	0.074	0.057	0.032	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.036	0.065	0.085	0.097	0.101	0.097	0.085	0.065	0.036	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.040	0.071	0.094	0.107	0.111	0.107	0.094	0.071	0.040	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.043	0.076	0.100	0.114	0.119	0.114	0.100	0.076	0.043	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.044	0.079	0.104	0.119	0.123	0.119	0.104	0.079	0.044	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.045	0.080	0.105	0.120	0.125	0.120	0.105	0.080	0.045	0.000
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.5-2. Секция 1 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.005	0.009	0.012	0.013	0.014	0.013	0.012	0.009	0.005	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.010	0.017	0.023	0.026	0.027	0.026	0.023	0.017	0.010	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.014	0.026	0.034	0.039	0.040	0.039	0.034	0.026	0.014	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.019	0.033	0.044	0.050	0.052	0.050	0.044	0.033	0.019	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.023	0.040	0.053	0.060	0.063	0.060	0.053	0.040	0.023	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.026	0.046	0.060	0.069	0.072	0.069	0.060	0.046	0.026	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.028	0.050	0.066	0.076	0.079	0.076	0.066	0.050	0.028	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.030	0.054	0.071	0.081	0.084	0.081	0.071	0.054	0.030	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.031	0.056	0.073	0.084	0.087	0.084	0.073	0.056	0.031	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.032	0.057	0.074	0.085	0.088	0.085	0.074	0.057	0.032	0.000
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.5-3. Секция 1 при $t = 0.25$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	-0.001	-0.003	-0.005
$x_2 = 0.80$	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.005	0.004	0.001	-0.002	-0.006	-0.009
$x_2 = 0.70$	0.000	0.002	0.004	0.005	0.007	0.007	0.005	0.002	-0.003	-0.008	-0.014
$x_2 = 0.60$	0.000	0.002	0.005	0.007	0.009	0.009	0.007	0.002	-0.004	-0.011	-0.018
$x_2 = 0.50$	0.000	0.003	0.006	0.008	0.010	0.011	0.008	0.003	-0.005	-0.013	-0.021
$x_2 = 0.40$	0.000	0.003	0.007	0.010	0.012	0.012	0.010	0.003	-0.005	-0.015	-0.024
$x_2 = 0.30$	0.000	0.004	0.007	0.010	0.013	0.014	0.010	0.004	-0.006	-0.017	-0.027
$x_2 = 0.20$	0.000	0.004	0.008	0.011	0.014	0.015	0.011	0.004	-0.006	-0.018	-0.029
$x_2 = 0.10$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.015	0.012	0.004	-0.007	-0.018	-0.030
$x_2 = 0.00$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.015	0.015	0.012	0.004	-0.007	-0.019	-0.030
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.5-4. Секция 1 при $t = 0.25$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.001	0.000	-0.001	-0.002	-0.003
$x_2 = 0.80$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.001	-0.001	-0.004	-0.007
$x_2 = 0.70$	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.005	0.004	0.001	-0.002	-0.006	-0.010
$x_2 = 0.60$	0.000	0.002	0.003	0.005	0.006	0.006	0.005	0.002	-0.003	-0.008	-0.012
$x_2 = 0.50$	0.000	0.002	0.004	0.006	0.007	0.008	0.006	0.002	-0.003	-0.009	-0.015
$x_2 = 0.40$	0.000	0.002	0.005	0.007	0.008	0.009	0.007	0.002	-0.004	-0.011	-0.017
$x_2 = 0.30$	0.000	0.003	0.005	0.007	0.009	0.010	0.007	0.003	-0.004	-0.012	-0.019
$x_2 = 0.20$	0.000	0.003	0.005	0.008	0.010	0.010	0.008	0.003	-0.004	-0.012	-0.020
$x_2 = 0.10$	0.000	0.003	0.006	0.008	0.010	0.011	0.008	0.003	-0.005	-0.013	-0.021
$x_2 = 0.00$	0.000	0.003	0.006	0.008	0.010	0.011	0.008	0.003	-0.005	-0.013	-0.021
$x_1 =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50

Таблица 2.5-5. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.008	-0.015	-0.021	-0.026	-0.029	-0.030	-0.028	-0.023	-0.013	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.015	-0.030	-0.042	-0.052	-0.058	-0.059	-0.055	-0.044	-0.026	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.022	-0.044	-0.062	-0.076	-0.085	-0.087	-0.081	-0.065	-0.039	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.029	-0.056	-0.080	-0.099	-0.110	-0.113	-0.105	-0.085	-0.050	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.035	-0.068	-0.097	-0.119	-0.133	-0.136	-0.126	-0.102	-0.060	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.040	-0.078	-0.110	-0.136	-0.152	-0.155	-0.144	-0.116	-0.069	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.044	-0.086	-0.122	-0.150	-0.167	-0.171	-0.159	-0.128	-0.076	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.047	-0.091	-0.130	-0.160	-0.178	-0.183	-0.170	-0.137	-0.081	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.049	-0.095	-0.135	-0.166	-0.185	-0.190	-0.176	-0.142	-0.084	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.050	-0.096	-0.137	-0.168	-0.188	-0.192	-0.179	-0.144	-0.086	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 2.5-6. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.005	-0.011	-0.015	-0.019	-0.021	-0.021	-0.020	-0.016	-0.009	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.011	-0.021	-0.030	-0.037	-0.041	-0.042	-0.039	-0.031	-0.019	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.016	-0.031	-0.044	-0.054	-0.060	-0.062	-0.057	-0.046	-0.027	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.021	-0.040	-0.057	-0.070	-0.078	-0.080	-0.074	-0.060	-0.036	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.025	-0.048	-0.068	-0.084	-0.094	-0.096	-0.089	-0.072	-0.043	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.028	-0.055	-0.078	-0.096	-0.107	-0.110	-0.102	-0.082	-0.049	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.031	-0.060	-0.086	-0.106	-0.118	-0.121	-0.112	-0.091	-0.054	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.033	-0.065	-0.092	-0.113	-0.126	-0.129	-0.120	-0.097	-0.057	0.000

$x_2 = 0.10$	0.000	-0.035	-0.067	-0.095	-0.117	-0.131	-0.134	-0.125	-0.101	-0.060	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.035	-0.068	-0.097	-0.119	-0.133	-0.136	-0.126	-0.102	-0.060	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 2.5-7. Секция 2 при $t = 0.25$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	-0.005	-0.006	-0.007	-0.007	-0.006	-0.004	-0.001	0.000	0.001	0.001	0.000
$x_2 = 0.80$	-0.009	-0.012	-0.014	-0.014	-0.012	-0.008	-0.003	0.001	0.002	0.001	0.000
$x_2 = 0.70$	-0.014	-0.018	-0.020	-0.020	-0.017	-0.011	-0.004	0.001	0.003	0.002	0.000
$x_2 = 0.60$	-0.018	-0.023	-0.026	-0.027	-0.023	-0.015	-0.005	0.001	0.003	0.003	0.000
$x_2 = 0.50$	-0.021	-0.028	-0.032	-0.032	-0.027	-0.018	-0.007	0.001	0.004	0.003	0.000
$x_2 = 0.40$	-0.024	-0.032	-0.036	-0.036	-0.031	-0.020	-0.008	0.002	0.005	0.003	0.000
$x_2 = 0.30$	-0.027	-0.035	-0.040	-0.040	-0.034	-0.022	-0.008	0.002	0.005	0.004	0.000
$x_2 = 0.20$	-0.029	-0.038	-0.043	-0.043	-0.036	-0.024	-0.009	0.002	0.006	0.004	0.000
$x_2 = 0.10$	-0.030	-0.039	-0.044	-0.045	-0.038	-0.025	-0.009	0.002	0.006	0.004	0.000
$x_2 = 0.00$	-0.030	-0.039	-0.045	-0.045	-0.038	-0.025	-0.009	0.002	0.006	0.004	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Таблица 2.5-8. Секция 2 при $t = 0.25$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	-0.003	-0.004	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003	-0.001	0.000	0.001	0.000	0.000
$x_2 = 0.80$	-0.007	-0.009	-0.010	-0.010	-0.008	-0.005	-0.002	0.000	0.001	0.001	0.000
$x_2 = 0.70$	-0.010	-0.013	-0.014	-0.014	-0.012	-0.008	-0.003	0.001	0.002	0.001	0.000
$x_2 = 0.60$	-0.012	-0.016	-0.019	-0.019	-0.016	-0.010	-0.004	0.001	0.002	0.002	0.000
$x_2 = 0.50$	-0.015	-0.020	-0.023	-0.023	-0.019	-0.013	-0.005	0.001	0.003	0.002	0.000
$x_2 = 0.40$	-0.017	-0.023	-0.026	-0.026	-0.022	-0.014	-0.005	0.001	0.003	0.002	0.000
$x_2 = 0.30$	-0.019	-0.025	-0.028	-0.028	-0.024	-0.016	-0.006	0.001	0.004	0.003	0.000
$x_2 = 0.20$	-0.020	-0.027	-0.030	-0.030	-0.026	-0.017	-0.006	0.001	0.004	0.003	0.000
$x_2 = 0.10$	-0.021	-0.028	-0.031	-0.031	-0.027	-0.017	-0.006	0.001	0.004	0.003	0.000
$x_2 = 0.00$	-0.021	-0.028	-0.032	-0.032	-0.027	-0.018	-0.007	0.001	0.004	0.003	0.000
$x_1 =$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00

Приложение 1.2.6 Таблицы численных расчетов задачи колебаний трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

Пусть трехмерная сеть $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 4.18) с тремя примыкающими секциями $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$:

$$\mathfrak{S}_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{S}_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\},$$

$\mathfrak{D}_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2, x_3 \leq 1 \right\}$ и поверхности примыкания S_1, S_2 . Рассматривается

начально-краевая задача (4.124) – (4.128), ей соответствующая дифференциально-разностная система (4.129) – (4.133) при $a_{\kappa\kappa}(x_1, x_2, x_3) = 1$ ($\kappa = \overline{1,3}$), $a_{\kappa\iota}(x_1, x_2, x_3) = 0$ ($1 \leq \kappa, \iota \leq 3, \kappa \neq \iota$), $b(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$; шаг по x_1 : $h1 = 1/30$, шаг по x_2 : $h2 = 0.1$, шаг по x_3 : $h3 = 0.1$ и шаг по t : $\tau = 0.01$; $K = N = 100$. Результаты работы программы представлены в таблицах 2.6-1 – 2.6-12.

Таблица 2.6-1. Секция 1 при $t = 0, x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.001	-0.005	-0.010	-0.015	-0.020	-0.023	-0.023	-0.020	-0.013	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.003	-0.010	-0.019	-0.030	-0.039	-0.044	-0.045	-0.040	-0.025	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.004	-0.015	-0.029	-0.044	-0.057	-0.065	-0.067	-0.058	-0.037	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.005	-0.019	-0.037	-0.056	-0.073	-0.085	-0.086	-0.075	-0.048	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.006	-0.023	-0.045	-0.068	-0.088	-0.102	-0.104	-0.090	-0.057	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.007	-0.026	-0.051	-0.078	-0.101	-0.116	-0.119	-0.104	-0.065	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.008	-0.029	-0.056	-0.086	-0.111	-0.128	-0.131	-0.114	-0.072	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.009	-0.030	-0.060	-0.091	-0.119	-0.137	-0.140	-0.122	-0.077	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.009	-0.032	-0.062	-0.095	-0.123	-0.142	-0.145	-0.126	-0.080	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.009	-0.032	-0.063	-0.096	-0.125	-0.144	-0.147	-0.128	-0.081	0.000
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.6-2. Секция 1 при $t = 0, x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.001	-0.004	-0.007	-0.011	-0.014	-0.016	-0.016	-0.014	-0.009	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.002	-0.007	-0.014	-0.021	-0.027	-0.031	-0.032	-0.028	-0.018	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.003	-0.010	-0.020	-0.031	-0.040	-0.046	-0.047	-0.041	-0.026	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.004	-0.013	-0.026	-0.040	-0.052	-0.060	-0.061	-0.053	-0.034	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.004	-0.016	-0.031	-0.048	-0.062	-0.072	-0.073	-0.064	-0.040	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.005	-0.018	-0.036	-0.055	-0.072	-0.082	-0.084	-0.073	-0.046	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.006	-0.020	-0.040	-0.060	-0.079	-0.091	-0.093	-0.081	-0.051	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.006	-0.022	-0.042	-0.065	-0.084	-0.097	-0.099	-0.086	-0.054	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.006	-0.022	-0.044	-0.067	-0.087	-0.101	-0.103	-0.089	-0.057	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.006	-0.023	-0.045	-0.068	-0.088	-0.102	-0.104	-0.090	-0.057	0.000
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.6-3. Секция 1 при $t = 0.25$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.015	0.018	0.020	0.020	0.018	0.014	0.009
$x_2 = 0.80$	0.000	0.007	0.015	0.023	0.031	0.036	0.039	0.039	0.036	0.028	0.017
$x_2 = 0.70$	0.000	0.011	0.022	0.034	0.045	0.053	0.058	0.058	0.052	0.041	0.025
$x_2 = 0.60$	0.000	0.014	0.029	0.044	0.058	0.069	0.075	0.075	0.068	0.054	0.032
$x_2 = 0.50$	0.000	0.017	0.035	0.053	0.070	0.083	0.090	0.090	0.082	0.065	0.039
$x_2 = 0.40$	0.000	0.019	0.039	0.061	0.080	0.095	0.103	0.103	0.093	0.074	0.044
$x_2 = 0.30$	0.000	0.021	0.043	0.067	0.088	0.104	0.113	0.113	0.103	0.081	0.049
$x_2 = 0.20$	0.000	0.023	0.046	0.071	0.094	0.111	0.121	0.121	0.110	0.087	0.052
$x_2 = 0.10$	0.000	0.023	0.048	0.074	0.098	0.116	0.125	0.125	0.114	0.090	0.054
$x_2 = 0.00$	0.000	0.024	0.049	0.075	0.099	0.117	0.127	0.127	0.116	0.091	0.055
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.6-4. Секция 1 при $t = 0.25$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.003	0.005	0.008	0.011	0.013	0.014	0.014	0.013	0.010	0.006
$x_2 = 0.80$	0.000	0.005	0.011	0.016	0.022	0.026	0.028	0.028	0.025	0.020	0.012
$x_2 = 0.70$	0.000	0.008	0.016	0.024	0.032	0.038	0.041	0.041	0.037	0.029	0.018
$x_2 = 0.60$	0.000	0.010	0.020	0.031	0.041	0.049	0.053	0.053	0.048	0.038	0.023
$x_2 = 0.50$	0.000	0.012	0.024	0.037	0.049	0.059	0.063	0.063	0.058	0.046	0.027
$x_2 = 0.40$	0.000	0.014	0.028	0.043	0.057	0.067	0.073	0.073	0.066	0.052	0.031
$x_2 = 0.30$	0.000	0.015	0.031	0.047	0.062	0.074	0.080	0.080	0.073	0.057	0.034
$x_2 = 0.20$	0.000	0.016	0.033	0.050	0.067	0.079	0.085	0.085	0.078	0.061	0.037
$x_2 = 0.10$	0.000	0.017	0.034	0.052	0.069	0.082	0.089	0.089	0.081	0.064	0.038
$x_2 = 0.00$	0.000	0.017	0.035	0.053	0.070	0.083	0.090	0.090	0.082	0.065	0.039
$x_1 =$	0.000	0.033	0.067	0.100	0.133	0.167	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333

Таблица 2.6-5. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.014	0.025	0.033	0.038	0.039	0.038	0.033	0.025	0.014	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.028	0.049	0.065	0.074	0.077	0.074	0.065	0.049	0.028	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.041	0.073	0.095	0.109	0.113	0.109	0.095	0.073	0.041	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.053	0.094	0.123	0.141	0.147	0.141	0.123	0.094	0.053	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.064	0.113	0.148	0.170	0.177	0.170	0.148	0.113	0.064	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.073	0.129	0.170	0.194	0.202	0.194	0.170	0.129	0.073	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.080	0.143	0.187	0.214	0.223	0.214	0.187	0.143	0.080	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.086	0.152	0.200	0.228	0.238	0.228	0.200	0.152	0.086	0.000

$x_2 = 0.10$	0.000	0.089	0.158	0.207	0.237	0.247	0.237	0.207	0.158	0.089	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.090	0.160	0.210	0.240	0.250	0.240	0.210	0.160	0.090	0.000
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.6-6. Секция 2 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.010	0.018	0.023	0.027	0.028	0.027	0.023	0.018	0.010	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.020	0.035	0.046	0.052	0.055	0.052	0.046	0.035	0.020	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.029	0.051	0.067	0.077	0.080	0.077	0.067	0.051	0.029	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.037	0.066	0.087	0.100	0.104	0.100	0.087	0.066	0.037	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.045	0.080	0.105	0.120	0.125	0.120	0.105	0.080	0.045	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.051	0.092	0.120	0.137	0.143	0.137	0.120	0.092	0.051	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.057	0.101	0.132	0.151	0.157	0.151	0.132	0.101	0.057	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.060	0.108	0.141	0.161	0.168	0.161	0.141	0.108	0.060	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.063	0.112	0.147	0.168	0.175	0.168	0.147	0.112	0.063	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.064	0.113	0.148	0.170	0.177	0.170	0.148	0.113	0.064	0.000
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.6-7. Секция 2 при $t = 0.25$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.009	0.001	-0.007	-0.015	-0.021	-0.024	-0.024	-0.021	-0.015	-0.008	0.000
$x_2 = 0.80$	0.017	0.003	-0.013	-0.029	-0.041	-0.048	-0.048	-0.041	-0.030	-0.015	0.000
$x_2 = 0.70$	0.025	0.004	-0.020	-0.042	-0.060	-0.070	-0.070	-0.061	-0.044	-0.023	0.000
$x_2 = 0.60$	0.032	0.005	-0.025	-0.055	-0.078	-0.091	-0.091	-0.078	-0.057	-0.029	0.000
$x_2 = 0.50$	0.039	0.006	-0.031	-0.066	-0.094	-0.110	-0.109	-0.094	-0.068	-0.035	0.000
$x_2 = 0.40$	0.044	0.007	-0.035	-0.075	-0.107	-0.125	-0.125	-0.108	-0.078	-0.040	0.000
$x_2 = 0.30$	0.049	0.007	-0.038	-0.083	-0.118	-0.138	-0.138	-0.119	-0.086	-0.045	0.000
$x_2 = 0.20$	0.052	0.008	-0.041	-0.088	-0.126	-0.147	-0.147	-0.127	-0.091	-0.048	0.000
$x_2 = 0.10$	0.054	0.008	-0.043	-0.092	-0.131	-0.153	-0.153	-0.132	-0.095	-0.049	0.000
$x_2 = 0.00$	0.055	0.008	-0.043	-0.093	-0.133	-0.155	-0.155	-0.133	-0.096	-0.050	0.000
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.6-8. Секция 2 при $t = 0.25$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.006	0.001	-0.005	-0.010	-0.015	-0.017	-0.017	-0.015	-0.011	-0.006	0.000
$x_2 = 0.80$	0.012	0.002	-0.009	-0.020	-0.029	-0.034	-0.034	-0.029	-0.021	-0.011	0.000
$x_2 = 0.70$	0.018	0.003	-0.014	-0.030	-0.043	-0.050	-0.050	-0.043	-0.031	-0.016	0.000

$x_2 = 0.60$	0.023	0.003	-0.018	-0.039	-0.055	-0.064	-0.064	-0.055	-0.040	-0.021	0.000
$x_2 = 0.50$	0.027	0.004	-0.022	-0.046	-0.066	-0.077	-0.077	-0.067	-0.048	-0.025	0.000
$x_2 = 0.40$	0.031	0.005	-0.025	-0.053	-0.076	-0.089	-0.089	-0.076	-0.055	-0.029	0.000
$x_2 = 0.30$	0.034	0.005	-0.027	-0.059	-0.084	-0.098	-0.097	-0.084	-0.061	-0.031	0.000
$x_2 = 0.20$	0.037	0.006	-0.029	-0.062	-0.089	-0.104	-0.104	-0.090	-0.065	-0.034	0.000
$x_2 = 0.10$	0.038	0.006	-0.030	-0.065	-0.093	-0.108	-0.108	-0.093	-0.067	-0.035	0.000
$x_2 = 0.00$	0.039	0.006	-0.031	-0.066	-0.094	-0.110	-0.109	-0.094	-0.068	-0.035	0.000
$x_1 =$	0.333	0.367	0.400	0.433	0.467	0.500	0.533	0.567	0.600	0.633	0.667

Таблица 2.6-9. Секция 3 при $t = 0$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.014	-0.025	-0.033	-0.038	-0.039	-0.038	-0.033	-0.025	-0.014	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.028	-0.049	-0.065	-0.074	-0.077	-0.074	-0.065	-0.049	-0.028	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.041	-0.073	-0.095	-0.109	-0.113	-0.109	-0.095	-0.073	-0.041	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.053	-0.094	-0.123	-0.141	-0.147	-0.141	-0.123	-0.094	-0.053	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.064	-0.113	-0.148	-0.170	-0.177	-0.170	-0.148	-0.113	-0.064	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.073	-0.129	-0.170	-0.194	-0.202	-0.194	-0.170	-0.129	-0.073	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.080	-0.143	-0.187	-0.214	-0.223	-0.214	-0.187	-0.143	-0.080	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.086	-0.152	-0.200	-0.228	-0.238	-0.228	-0.200	-0.152	-0.086	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.089	-0.158	-0.207	-0.237	-0.247	-0.237	-0.207	-0.158	-0.089	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.090	-0.160	-0.210	-0.240	-0.250	-0.240	-0.210	-0.160	-0.090	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 2.6-10. Секция 3 при $t = 0$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	-0.010	-0.018	-0.023	-0.027	-0.028	-0.027	-0.023	-0.018	-0.010	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	-0.020	-0.035	-0.046	-0.052	-0.055	-0.052	-0.046	-0.035	-0.020	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	-0.029	-0.051	-0.067	-0.077	-0.080	-0.077	-0.067	-0.051	-0.029	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	-0.037	-0.066	-0.087	-0.100	-0.104	-0.100	-0.087	-0.066	-0.037	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	-0.045	-0.080	-0.105	-0.120	-0.125	-0.120	-0.105	-0.080	-0.045	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	-0.051	-0.092	-0.120	-0.137	-0.143	-0.137	-0.120	-0.092	-0.051	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	-0.057	-0.101	-0.132	-0.151	-0.158	-0.151	-0.132	-0.101	-0.057	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	-0.061	-0.108	-0.141	-0.161	-0.168	-0.161	-0.141	-0.108	-0.060	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	-0.063	-0.112	-0.147	-0.168	-0.175	-0.168	-0.147	-0.112	-0.063	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	-0.064	-0.113	-0.148	-0.170	-0.177	-0.170	-0.148	-0.113	-0.064	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 2.6-11. Секция 3 при $t = 0.25$, $x_3 = 0$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.008	0.015	0.022	0.026	0.028	0.026	0.022	0.015	0.008	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.016	0.030	0.043	0.051	0.054	0.051	0.043	0.030	0.016	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.023	0.045	0.063	0.075	0.080	0.075	0.063	0.045	0.023	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.030	0.058	0.081	0.098	0.103	0.098	0.081	0.058	0.030	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.036	0.069	0.098	0.117	0.124	0.117	0.098	0.069	0.036	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.041	0.079	0.112	0.134	0.142	0.134	0.112	0.079	0.041	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.045	0.087	0.123	0.148	0.157	0.148	0.123	0.087	0.045	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.048	0.093	0.132	0.158	0.167	0.158	0.132	0.093	0.048	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.050	0.097	0.137	0.164	0.174	0.164	0.137	0.097	0.050	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.051	0.098	0.138	0.166	0.176	0.166	0.138	0.098	0.051	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Таблица 2.6-12. Секция 3 при $t = 0.25$, $x_3 = 0.5$

$x_2 = 1.00$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$x_2 = 0.90$	0.000	0.006	0.011	0.015	0.018	0.019	0.018	0.015	0.011	0.006	0.000
$x_2 = 0.80$	0.000	0.011	0.021	0.030	0.036	0.038	0.036	0.030	0.021	0.011	0.000
$x_2 = 0.70$	0.000	0.016	0.031	0.044	0.053	0.057	0.053	0.044	0.031	0.016	0.000
$x_2 = 0.60$	0.000	0.021	0.041	0.058	0.069	0.073	0.069	0.058	0.041	0.021	0.000
$x_2 = 0.50$	0.000	0.025	0.049	0.069	0.083	0.088	0.083	0.069	0.049	0.025	0.000
$x_2 = 0.40$	0.000	0.029	0.056	0.079	0.095	0.101	0.095	0.079	0.056	0.029	0.000
$x_2 = 0.30$	0.000	0.032	0.062	0.087	0.105	0.111	0.105	0.087	0.062	0.032	0.000
$x_2 = 0.20$	0.000	0.034	0.066	0.093	0.112	0.118	0.112	0.093	0.066	0.034	0.000
$x_2 = 0.10$	0.000	0.035	0.069	0.097	0.116	0.123	0.116	0.097	0.069	0.035	0.000
$x_2 = 0.00$	0.000	0.036	0.069	0.098	0.117	0.124	0.117	0.098	0.069	0.036	0.000
$x_1 =$	0.667	0.700	0.733	0.767	0.800	0.833	0.867	0.900	0.933	0.967	1.000

Приложение 2. Листинги программ для решения прикладных задач

Приложение 2.1 Листинг программ для решения задач переноса сплошных сред

Приложение 2.1.1 Текст программы для решения задачи переноса по двухсекционной сети

```

program net1d_2s;
const n=10; {число точек разбиений отрезка переменной x без учета крайних}
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..n,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..2*n+1] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: array[0..2*n+1,0..m] of real; {приближенное решение}
r1,r2 : ve2; {массивы для секций}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi:ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h,s,s1: real;
fi: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j] then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье для u(0)
s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si:=0 to n do

```

```

begin
s2:=phi[i,si];
phi[i,si]:=phi[j,si];
phi[j,si]:=s2;
s3:=phi[i,si+n+1];
phi[i,si+n+1]:=phi[j,si+n+1];
phi[j,si+n+1]:=s3;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1, kn: integer);
begin
for var k:=0 to m do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik];
u[ik,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var j := m downto 10 do
if (j mod 10 = 0) then
begin
write(fi, "(j):3, '-слой:');
for var i := 0 to n do
write (fi, ss[i,j]:5:3, ' ');
writeln(fi);
end;
for var j := 10 downto 0 do
if (j mod 2 = 0) then
begin
write(fi, '(j):3, '-слой:');
for var i := 0 to n do
write (fi, ss[i,j]:5:3, ' ');
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h:=1/(2*n); {шаг по x}
tau:=1/m; {шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n do {на 1-ой секции}
begin

```

```

s:=i*h;
u[i,0]:=-2*s*s+3*s; {начальная функция u(0)}
end;
for var i:=n+1 to 2*n+1 do {на 2-ой секции}
begin
s:=(i-1)*h;
u[i,0]:=-6*s*s+7*s-1;
end;
repeat
s:=2*pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(2*jj-1);//служебные переменные
lamda[ii]:=s*s; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1; {вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si:=0 to n do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si]:=sqrt(2)*sin(s*(si*h-1/2)); {на 1-ой секции}
phi[ii,si+n+1]:=sqrt(2)*sin(s*si*h); {на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si]:=sqrt(2)*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+n+1]:=sqrt(2)*cos(s1*si*h);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(sqrt(2)/ex(s/2,3))*(1-cos(s/2)); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=sqrt(2)*(16/ex(s1,3))*sin(s1/2); {по набору (2)}
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n+1,2*n+1); {вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n do
for var j:=0 to m do
begin
r1[i,j]:=u[i,j];
r2[i,j]:=u[n+i+1,j];
end;
Assign(fi,'net1d_2s.txt'); {связать с файлом net1d_2s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi); {открываем создаваемый файл для записи данных}
writeln(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения ');
writeln(fi,'задачи переноса по двухсекционной сети');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1 секция-----');
writeln(fi);
out(r1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2 секция-----');

```

```
writeln(fi);
out(r2);
close(fi);
end. {завершение программы}
```

Приложение 2.1.2 Текст программы для решения задачи переноса по звездоподобной трехсекционной сети

```
program net1d_3s;
const n=10; {число точек разбиений отрезка переменной x без учета начальной}
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=99; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..n,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n+2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: array[0..3*n+2,0..m] of real; {приближенное решение}
r1,r2,r3: ve2; {массивы для секций}
phi:ve3; {ортонормированные собственные функции}
ii,jj: integer;
lamda : ve1; {массивы для собственных значений}
vphi:ve4; {массивы для коэффициентов Фурье }
tau,h,s,s1,s2: real;
fi,f1: text;

//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
    ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx( );
var s2,s3,s4 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
```

```

s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si:=0 to n do
begin
s2:=phi[i,si];
phi[i,si]:=phi[j,si];
phi[j,si]:=s2;
s3:=phi[i,si+n+1];
phi[i,si+n+1]:=phi[j,si+n+1];
phi[j,si+n+1]:=s3;
s4:=phi[i,si+2*n+2];
phi[i,si+2*n+2]:=phi[j,si+2*n+2];
phi[j,si+2*n+2]:=s4;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=1 to m do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik];
u[ik,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var j := m downto 10 do
if (j mod 10 = 0) then
begin
write(fi,'',(j):3,' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3,' ');
writeln(fi);
end;
for var j := 9 downto 0 do
begin
write(fi,'',(j):3,' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3,' ');
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin

```

```

h:=1/(2*n);{шаг по x}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n do {на 1-ой секции}
begin
s:=i*h;
u[i,0]:=-s*s+2*s;{начальная функция u(0)}
end;
for var i:=n+1 to 2*n+1 do {на 2-ой секции}
begin
s:=(i-n-1)*h;
u[i,0]:=-s*s+2*s;{u(0)}
end;
for var i:=2*n+2 to 3*n+2 do {на 3-ей секции}
begin
s:=(i-n-2)*h;
u[i,0]:=-7*s*s+9*s-2;
end;
repeat
s:=2*pi*jj;{служебные переменные}
s1:=pi*(2*jj-1);{служебные переменные}
s2:=pi*jj;{служебные переменные}
lamda[ii]:=s*s;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s*s;{вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s1*s1;{вычисляем третий набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si:=0 to n do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si]:=sqrt(2)*sin(s*(si*h-1/2));{на 1-ой секции}
phi[ii,si+n+1]:=0;{на 2-ой секции}
phi[ii,si+2*n+2]:=sqrt(2)*sin(s*si*h);{на 3-ей секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si]:=-(sqrt(6)/3)*sin(s*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+n+1]:=(2*sqrt(6)/3)*sin(s*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+2*n+2]:=(sqrt(6)/3)*sin(s*si*h);
//третий набор (3)
phi[ii+2,si]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+2,si+n+1]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+2,si+2*n+2]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*si*h);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(3/(sqrt(2)*ex(s2,3)))*(1-cos(s2));{по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=(sqrt(6)/(2*ex(s2,3)))*(1-cos(s2));{по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=(12*sqrt(3)/ex(s1,3))*sin(s1/2);{по набору (3)}
ii:=ii+3;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx();{упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}

```

```

for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n+1,2*n+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
cal(2*n+2,3*n+2);{вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n do
for var j:=0 to m do
begin
r1[i,j]:=u[i,j];
r2[i,j]:=u[n+i+1,j];
r3[i,j]:=u[2*n+i+2,j];
end;
Assign(fi,'net1d_3s.txt');{связать с файлом net1d_3s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи переноса');
write(fi,'по звездоподобной трехсекционной сети');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r2);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r3);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.1.3 Текст программы для решения задачи переноса на двумерной сети с двумя примыкающими секциями

```

Program net2d_2s;
const n1=10;{число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10;{ число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
m=100;{число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100;{число ортонормированных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..2*n1+1,0..n2,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..2*n1+1,0..n2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: ve2;{приближенное решение}
d1,d2 : ve2;{массивы для областей}
lamda: ve1;{массивы для собственных значений}
phi:ve3;{ортонормированные собственные функции}
vphi: ve4;{массивы для коэффициентов Фурье}

```

```

ii,jj: integer;
tau,h1,h2,s,s1,p: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
  begin
if lamda[i]>lamda[j]
  then
    begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
  begin
s2:=phi[i,si1,si2];
phi[i,si1,si2]:=phi[j,si1,si2];
phi[j,si1,si2]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2];
phi[i,si1+n1+1,si2]:=phi[j,si1+n1+1,si2];
phi[j,si1+n1+1,si2]:=s3;
  end;
  end;
  end;
  end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=1 to m do
for var jk:=0 to n2 do
for var ik:=k1 to kn do
  begin
s:=0;

```

```

for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik,jk];
u[ik,jk,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to m do
if (k mod 5 = 0) then
begin
writeln(fi,'k=',k);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(2*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do {на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
begin
u[i,j,0]:=i*h1*cos((pi/2)*h2*j);{начальная функция u(0)}
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do{на 2-ой секции }
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=(i-1)*h1;
u[i,j,0]=(-4*s*s+5*s-1)*cos((pi/2)*h2*j);
end;
repeat
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(2*jj-1);//служебные переменные
p:=pi*h2/2;//служебные переменные
lamda[ii]:=4*s*s+pi*pi/4;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+pi*pi/4;{вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do

```

```

begin
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2]:=2*sin(2*s*(si1*h1-(1/2)))*cos(si2*p); {на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2]:=2*sin(2*s*si1*h1)*cos(si2*p); {на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2]:=2*cos(s1*(si1*h1-(1/2)))*cos(si2*p);
phi[ii+1,si1+n1+1,si2]:=2*cos(s1*si1*h1)*cos(si2*p);
end;
//вычисляем коэффициенты фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(1/ex(s,3))*(1-cos(s)); { по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=(8/ex(s1,3))*sin(s1/2); {по набору (2)}
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n1); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1); {вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,k]:=u[i,j,k];
d2[i,j,k]:=u[n1+i+1,j,k];
end;
Assign(fi,'net2d_2s.txt'); {связать с файлом net2d_2s.txt файловую переменную fi}
Rewrite(fi); {открываем создаваемый файл для записи данных}
writeln(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения');
writeln(fi,'задачи переноса на двумерной сети с двумя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln(fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln(fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.1.4 Текст программы для решения задачи переноса на двумерной сети с тремя примыкающими секциями

```

Program net2d_3s;
const n1=10; {число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10; { число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной }
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}

```

```

sn=100; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n1+2,0..n2,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n1+2,0..n2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
d1,d2,d3 : ve2; {массивы для секций}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,s,s1,p,s2,s3,s4,p1: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2];
phi[i,si1,si2]:=phi[j,si1,si2];
phi[j,si1,si2]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2];
phi[i,si1+n1+1,si2]:=phi[j,si1+n1+1,si2];
phi[j,si1+n1+1,si2]:=s3;
s4:=phi[i,si1+2*n1+2,si2];
phi[i,si1+2*n1+2,si2]:=phi[j,si1+2*n1+2,si2];

```

```

phi[j,si1+2*n1+2,si2]:=s4;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=1 to m do
for var jk:=0 to n2 do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik,jk];
u[ik,jk,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to m do
if (k mod 5 = 0) then
begin
writeln(fi,'k=',k);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(3*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формирование начальных данных
for var i:=0 to n1 do{на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
u[i,j,0]:=i*h1*cos((pi/2)*h2*j);{начальная функция u(0)}
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do{на 2-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
u[i,j,0]:=i*h1*cos((pi/2)*h2*j);
for var i:=2*n1+2 to 3*n1+2 do{на 3-ей секции}

```

```

for var j:=0 to n2 do
begin
s:=(i-2)*h1;
u[i,j,0]:=(-9*s*s+13*s-4)*cos((pi/2)*h2*j);
end;
repeat
p:=pi*pi/4;
p1:=pi*h2/2;
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(6*jj-5);//служебные переменные
s2:=pi*(6*jj-1);//служебные переменные
s3:=pi*(6*jj-4);//служебные переменные
s4:=pi*(6*jj-2);//служебные переменные
lamda[ii]:=9*s*s+p; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+p; {вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s2*s2+p; {вычисляем третий набор собственных значений}
lamda[ii+3]:=s3*s3+p; {вычисляем четвертый набор собственных значений}
lamda[ii+4]:=s4*s4+p; {вычисляем пятый набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2]:=2*sin(3*s*(si1*h1-1/3))*cos(p1*si2); {на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2]:=2*sin(3*s*si1*h1)*cos(p1*si2); {на 2-ой секции}
phi[ii,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(3*s*(si1*h1+1/3))*cos(p1*si2); {на 3-ей секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2]:=2*sin(s1*(si1*h1-1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+1,si1+n1+1,si2]:=2*sin(s1*si1*h1+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+1,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(s1*(si1*h1+1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
//третий набор (3)
phi[ii+2,si1,si2]:=-2*sin(s2*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+2,si1+n1+1,si2]:=-2*sin(s2*si1*h1+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+2,si1+2*n1+2,si2]:=-2*sin(s2*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
//четвертый набор (4)
phi[ii+3,si1,si2]:=-2*sin(s3*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+3,si1+n1+1,si2]:=-2*sin(s3*si1*h1+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+3,si1+2*n1+2,si2]:=-2*sin(s3*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
//пятый набор (5)
phi[ii+4,si1,si2]:=2*sin(s4*(si1*h1-1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+4,si1+n1+1,si2]:=2*sin(s4*si1*h1+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+4,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(s4*(si1*h1+1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(2/(3*ex(s,3)))*(cos(s)-1); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=9/ex(s1,3); {по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=9/ex(s2,3); {по набору (3)}
vphi[ii+3,0]:=(27/ex(s3,3)); {по набору (4)}
vphi[ii+4,0]:=(27/ex(s4,3)); {по набору (5)}
ii:=ii+5;
jj:=jj+1;
until ii > sn;

```

```

sx());{упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n1);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
cal(2*n1+2,3*n1+2);{вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,k]:=u[i,j,k];
d2[i,j,k]:=u[n1+i+1,j,k];
d3[i,j,k]:=u[2*n1+i+2,j,k];
end;
Assign(fi,'net2d_3s.txt');{связать с файлом net2d_3s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи ');
write(fi,'переноса на двумерной сети с тремя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d3);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.1.5 Текст программы для решения задачи переноса на трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

```

program net3d_2s;
const n1=10;{число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10;{ число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
n3=10;{ число точек разбиений отрезка переменной x3 без учета начальной }
m=100;{число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100;{число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..2*n1+1,0..n2,0..n3,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..2*n1+1,0..n2,0..n3] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: ve2;{приближенное решение}

```

```

d1,d2 : ve2; {массивы для областей}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,h3,s,s1,p,p1,pp: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2,si3];
phi[i,si1,si2,si3]:=phi[j,si1,si2,si3];
phi[j,si1,si2,si3]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2,si3];
phi[i,si1+n1+1,si2,si3]:=phi[j,si1+n1+1,si2,si3];
phi[j,si1+n1+1,si2,si3]:=s3;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin

```

```

for var k:=0 to m do
for var jk:=0 to n3 do
for var j:=0 to n2 do
for var i:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var ii:=1 to sn do
s:=s+vphi[ii,k]*phi[ii,i,j,jk];
u[i,j,jk,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to 20 do
if (k mod 5 = 0) then
begin
for var jk:=0 to n3 do
if (jk mod 5 = 0) then
begin
writeln(fi,'t=',k*tau);
writeln(fi,'x3=',jk*h3);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,jk,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(2*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
h3:=1/n3;{шаг по x3}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do {на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=i*h1;
u[i,j,jk,0]:=3*s*cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);{начальная функция u(0)}
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do {на 2-ой секции}

```

```

for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-1)*h1;
u[i,j,k,0]:=(-12*s*s+15*s-3)*cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
end;
repeat
p:=pi*h2/2;
p1:=pi*h3/2;
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(2*jj-1);//служебные переменные
lamda[ii]:=4*s*s+pi*pi/2;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+pi*pi/2;{ вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
pp:=cos(si2*p)*cos(si3*p1);//служебные переменные
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2,si3]:=sqrt(8)*sin(2*s*(si1*h1-(1/2)))*pp;{на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2,si3]:=sqrt(8)*sin(2*s*si1*h1)*pp;{на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2,si3]:=sqrt(8)*cos(s1*(si1*h1-(1/2)))*pp;
phi[ii+1,si1+n1+1,si2,si3]:=sqrt(8)*cos(s1*si1*h1)*pp;
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(3/(sqrt(2)*ex(s,3)))*(1-cos(s));{по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=(12*sqrt(2)/ex(s1,3))*sin(s1/2);{по набору (2)}
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx();{упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do{вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n1);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,jk,k]:=u[i,j,jk,k];
d2[i,j,jk,k]:=u[n1+i+1,j,jk,k];
end;
Assign(fi,'net3d_2s.txt');{связать с файлом net3d_2s.txt файловую переменную fi}
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
writeln(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи переноса');
writeln(fi,'на трехмерной сети с двумя примыкающими секциями');
writeln(fi);

```

```
writeln(fi,'-----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln(fi,'-----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
close(fi);
end. {завершение программы}
```

Приложение 2.1.6 Текст программы для решения задачи переноса на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

```
program net3d_3s;
const n1=10; {число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10; { число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной }
n3=10; { число точек разбиений отрезка переменной x3 без учета начальной }
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной }
sn=100; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n1+2,0..n2,0..n3,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n1+2,0..n2,0..n3] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
d1,d2,d3 : ve2; {массивы для областей}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,h3,s,s1,p,s2,s3,s4,p1,p2,q,pp: real;
fi,fl: text;

//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
Var kq:real;
Begin
kq:=1;
For var i:=1 to n do
kq:=kq*a;
ex:=kq;
End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
```

```

if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;

//упорядочиваем коэффициенты Фурье
s1:=vphi[i,0];
vphi[i,0]:=vphi[j,0];
vphi[j,0]:=s1;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2,si3];
phi[i,si1,si2,si3]:=phi[j,si1,si2,si3];
phi[j,si1,si2,si3]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2,si3];
phi[i,si1+n1+1,si2,si3]:=phi[j,si1+n1+1,si2,si3];
phi[j,si1+n1+1,si2,si3]:=s3;
s4:=phi[i,si1+2*n1+2,si2,si3];
phi[i,si1+2*n1+2,si2,si3]:=phi[j,si1+2*n1+2,si2,si3];
phi[j,si1+2*n1+2,si2,si3]:=s4;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=0 to m do
for var jk:=0 to n3 do
for var j:=0 to n2 do
for var i:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var ii:=1 to sn do
s:=s+vphi[ii,k]*phi[ii,i,j,jk];
u[i,j,jk,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to m do
if (k mod 5 = 0) then
begin
for var jk:=0 to n3 do
if (jk mod 5 = 0) then

```

```

begin
writeln(fi,'t=',k*tau);
writeln(fi,'x3=',jk*h3);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,jk,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(3*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
h3:=1/n3;{шаг по x3}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do{ на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
u[i,j,jk,0]:=4*i*h1*cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);{начальная функция u(0)}
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do{2-ая секция}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-1)*h1;
u[i,j,jk,0]:=(-9*s*s+10*s-1)*cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
end;
for var i:=2*n1+2 to 3*n1+2 do{на 3-ей секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-2)*h1;
u[i,j,jk,0]:=(-9*s*s+10*s-1)*cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
end;
repeat
p:=pi*pi/2;
p1:=pi*h2/2;
p2:=pi*h3/2;
q:=sqrt(8);
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(6*jj-5);//служебные переменные
s2:=pi*(6*jj-1);//служебные переменные
s3:=pi*(6*jj-4);//служебные переменные

```

```

s4:=pi*(6*jj-2);//служебные переменные
lamda[ii]:=9*s*s+p; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+p; {вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s2*s2+p; {вычисляем третий набор собственных значений}
lamda[ii+3]:=s3*s3+p; {вычисляем четвертый набор собственных значений}
lamda[ii+4]:=s4*s4+p; {вычисляем пятый набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
pp:=cos(p1*si2)*cos(p2*si3);//служебные переменные
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2,si3]:=q*sin(3*s*(si1*h1-1/3))*pp; {на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(3*s*si1*h1)*pp; {на 2-ой секции}
phi[ii,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(3*s*(si1*h1+1/3))*pp; {на 3-ей секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2,si3]:=q*sin(s1*(si1*h1-1/3)+pi/3)*pp;
phi[ii+1,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(s1*si1*h1+pi/3)*pp;
phi[ii+1,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(s1*(si1*h1+1/3)+pi/3)*pp;
//третий набор (3)
phi[ii+2,si1,si2,si3]:=-q*sin(s2*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+2,si1+n1+1,si2,si3]:=-q*sin(s2*si1*h1+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+2,si1+2*n1+2,si2,si3]:=-q*sin(s2*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*pp;
//четвертый набор (4)
phi[ii+3,si1,si2,si3]:=-q*sin(s3*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+3,si1+n1+1,si2,si3]:=-q*sin(s3*si1*h1+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+3,si1+2*n1+2,si2,si3]:=-q*sin(s3*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*pp;
//пятый набор (5)
phi[ii+4,si1,si2,si3]:=q*sin(s4*(si1*h1-1/3)+pi/3)*pp;
phi[ii+4,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(s4*si1*h1+pi/3)*pp;
phi[ii+4,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(s4*(si1*h1+1/3)+pi/3)*pp;
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=0; {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=27/(sqrt(2)*ex(s1,3)); {по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=27/(sqrt(2)*ex(s2,3)); {по набору (3)}
vphi[ii+3,0]:=27/(sqrt(2)*ex(s3,3)); {по набору (4)}
vphi[ii+4,0]:=27/(sqrt(2)*ex(s4,3)); {по набору (5)}
ii:=ii+5;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k]:=(1/(1+lamda[i]*tau))*vphi[i,k-1];
cal(0,n1); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1); {вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
cal(2*n1+2,3*n1+2); {вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do

```

```

for var jk:=0 to n3 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,jk,k]:=u[i,j,jk,k];
d2[i,j,jk,k]:=u[n1+i+1,j,jk,k];
d3[i,j,jk,k]:=u[2*n1+i+2,j,jk,k];
end;
Assign(fi,'net3d_3s.txt'); {связать с файлом net3d_3s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi); {открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи переноса');
write(fi,'на трехмерной сети с тремя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d3);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.2 Листинг программ для решения задач колебаний сплошных сред

Приложение 2.2.1 Текст программы для решения задачи колебаний двухсекционной сети

```

program net1d_2s;
const n=10; {число точек разбиений отрезка переменной x без учета начальной}
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n+2,0..m]of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n+2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..3*n+3] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
alpha: ve5; {начальная скорость}
r1,r2: ve2; {массивы для секций}
lamda : ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi:ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h,s,s1: real;

```

```

fi: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx( );
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to 1 do
begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
end;
//упорядочиваем ортонормированные обобщенные собственные функции
for var si:=0 to n do
begin
s2:=phi[i,si];
phi[i,si]:=phi[j,si];
phi[j,si]:=s2;
s3:=phi[i,si+n+1];
phi[i,si+n+1]:=phi[j,si+n+1];
phi[j,si+n+1]:=s3;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=2 to m do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do

```

```

s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik];
u[ik,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var j := m downto 10 do
if (j mod 10 = 0) then
begin
write(fi,',(j):3,' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3,' ');
writeln(fi);
end;
for var j := 3 downto 0 do
begin
write(fi,',(j):3,' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3,' ');
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h:=1/(2*n);{шаг по x}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n do{на 1-ой секции}
begin
s:=i*h;
u[i,0]:=4*s*s*s-2*s*s;{начальная функция u(0)}
alpha[i]:=-2*s*s+s;{начальная скорость}
u[i,1]:=u[i,0]+tau*alpha[i];{u(1)}
end;
for var i:=n+1 to 2*n+1 do{на 2-ой секции}
begin
s:=(i-1)*h;
u[i,0]:=-2*s*s+3*s-1;
alpha[i]:=2*s*s-3*s+1;
u[i,1]:=u[i,0]+tau*alpha[i];
end;
repeat
s:=2* $\pi$ *jj;//служебные переменные
s1:= $\pi$ *(2*jj-1);//служебные переменные
lamda[ii]:=s*s;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1;{вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si:=0 to n do
begin

```

```

//первый набор (1)
phi[ii,si]:=sqrt(2)*sin(s*(si*h-1/2)); {на 1-ой секции}
phi[ii,si+n+1]:=sqrt(2)*sin(s*si*h); {на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si]:=sqrt(2)*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+n+1]:=sqrt(2)*cos(s1*si*h);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(3/(sqrt(2)*ex(s/2,3))); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=8*sqrt(2)*sin(s1/2)/(ex(s1,3))-24*sqrt(2)/ex(s1,4); {по (2)}
// вычисляем коэффициенты Фурье u(1)
vphi[ii,1]:=vphi[ii,0]+tau*(sqrt(2)/ex(s/2,3))*(cos(s/2)-1);
vphi[ii+1,1]:=vphi[ii+1,0];
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m-1 do //вычисляем коэффициенты Фурье u(k+1)
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamba[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n+1,2*n+1); {вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n do
for var j:=0 to m do
begin
r1[i,j]:=u[i,j];
r2[i,j]:=u[n+i+1,j];
end;
Assign(fi,'net1d_2s.txt'); {связать с файлом net1d_2s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi); {открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения');
write(fi,' задачи колебаний двухсекционной сети');
writeln(fi);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r2);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.2.2 Текст программы для решения задачи колебаний звездоподобной трехсекционной сети

```

Program net1d_3s;
const n=10; {число точек разбиений отрезка переменной x без учета начальной}

```

```

m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=99; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n+2,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n+2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..3*n+2] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
r1,r2,r3: ve2; {массивы для секций}
alpha: ve5; {начальная скорость}
lamda : ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные собственные функции}
vphi:ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h,s,s1: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
    ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3,s4 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
  begin
if lamda[i]>lamda[j]
  then
    begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to m do
      begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
      end;
//упорядочиваем ортонормированные обобщенные собственные функции
for var si:=0 to n do
      begin
s2:=phi[i,si];
phi[i,si]:=phi[j,si];

```

```

phi[j,si]:=s2;
s3:=phi[i,si+n+1];
phi[i,si+n+1]:=phi[j,si+n+1];
phi[j,si+n+1]:=s3;
s4:=phi[i,si+2*n+2];
phi[i,si+2*n+2]:=phi[j,si+2*n+2];
phi[j,si+2*n+2]:=s4;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=0 to m do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik];
u[ik,k]:=s;
end;
end;
//процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var j := m downto 10 do
if (j mod 10 = 0) then
begin
write(fi, '(j):3, ' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3, ');
writeln(fi);
end;
for var j := 9 downto 0 do
begin
write(fi, '(j):3, ' - слой: ');
for var i := 0 to n do
write (fi,ss[i,j]:5:3, ');
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h:=1/(2*n); {шаг по x}
tau:=1/m; {шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n do {на 1-ой секции}
begin
s:=i*h;

```

```

u[i,0]:=-2*s*s*s+s*s; {начальная функция u(0)}
alpha[i]:=-2*s*s+s; {начальная скорость}
u[i,1]:=u[i,0]+tau*alpha[i]; {u(1)}
end;
for var i:=n+1 to 2*n+1 do {на 2-ой секции}
begin
s:=(i-n-1)*h;
u[i,0]:=-2*s*s*s+s*s;
alpha[i]:=-2*s*s+s;
u[i,1]:=u[i,0]+tau*alpha[i];
end;
for var i:=2*n+2 to 3*n+2 do {на 3-ей секции}
begin
s:=(i-n-2)*h;
u[i,0]:=2*s*s-3*s+1;
alpha[i]:=4*s*s-6*s+2;
u[i,1]:=u[i,0]+tau*alpha[i];
end;
repeat
s:=2*pi*jj; {служебные переменные}
s1:=pi*(2*jj-1); {служебные переменные}
lamda[ii]:=s*s; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s*s; {вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s1*s1; {вычисляем третий набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si:=0 to n do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si]:=sqrt(2)*sin(s*(si*h-1/2)); {на 1-ой секции}
phi[ii,si+n+1]:=0; {на 2-ой секции}
phi[ii,si+2*n+2]:=sqrt(2)*sin(s*si*h); {на 3-ей секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si]:=-(sqrt(6)/3)*sin(s*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+n+1]:=(2*sqrt(6)/3)*sin(s*(si*h-1/2));
phi[ii+1,si+2*n+2]:=(sqrt(6)/3)*sin(s*si*h);
// третий набор (3)
phi[ii+2,si]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+2,si+n+1]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*(si*h-1/2));
phi[ii+2,si+2*n+2]:=(2/sqrt(3))*cos(s1*si*h);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=((sqrt(2)/ex(s/2,3))*((cos(s/2)/4)-1)); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=(sqrt(6)/(3*ex(s/2,3))*((cos(s/2)/4)-1)); {по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=(2/sqrt(3))*(-8*sin(s/2)/(ex(s1,3))+24/ex(s1,4)); {по набору (3)}
//вычисляем коэффициенты Фурье u(1)
vphi[ii,1]:=vphi[ii,0]+tau*((3/(sqrt(2)*ex(s/2,3)))*(cos(s/2)-1));
vphi[ii+1,1]:=vphi[ii+1,0]+tau*(sqrt(6)/(2*ex(s/2,3)))*(cos(s/2)-1);
vphi[ii+2,1]:=vphi[ii+2,0];
ii:=ii+3;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}

```

```

for var k:=1 to m-1 do{вычисляем коэффициенты Фурье u(k+1)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamba[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n+1,2*n+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
cal(2*n+2,3*n+2);{вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n do
for var j:=0 to m do
begin
r1[i,j]:=u[i,j];
r2[i,j]:=u[n+i+1,j];
r3[i,j]:=u[2*n+i+2,j];
end;
Assign(fi,'net1d_3s.txt');{связать с файлом net1d_3s.txt файловую переменную fi}
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения');
write(fi,'задачи колебаний звездоподобной трехсекционной сети');
writeln(fi);
writeln(fi);
writeln(fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r1);
writeln(fi);
writeln(fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r2);
writeln(fi);
writeln(fi,' -----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(r3);
close(fi);
end.{завершение программы}

```

Приложение 2.2.3 Текст программы для решения задачи колебаний двумерной сети с двумя примыкающими секциями

```

program net2d_2s;
const n1=10;{число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10;{число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
m=100;{число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100;{число ортонормированных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..2*n1+1,0..n2,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..2*n1+1,0..n2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..2*n1+1,0..n2] of real;

```

```

var u: ve2; {приближенное решение}
alpha: ve5; {начальная скорость}
d1,d2 : ve2; {массивы для секций}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,s,s1,p: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
      ex:=kq;
    End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to 1 do
begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
end;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2];
phi[i,si1,si2]:=phi[j,si1,si2];
phi[j,si1,si2]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2];
phi[i,si1+n1+1,si2]:=phi[j,si1+n1+1,si2];
phi[j,si1+n1+1,si2]:=s3;
end;
end;
end;

```

```

end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=0 to m do
for var jk:=0 to n2 do
for var ik:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik,jk];
u[ik,jk,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to 50 do
if k mod 25=0 then
begin
writeln(fi,'k=',k);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(2*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do{на 1-ой секция}
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=i*h1;
u[i,j,0]:=(4*s*s*s-2*s*s)*cos((pi/2)*h2*j);{начальная функция u(0)}
alpha[i,j]:=(-2*s*s+s)*cos((pi/2)*h2*j);{начальная скорость}
u[i,j,1]:=u[i,j,0]+tau*alpha[i,j];{u(1)}
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do{на 2-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=(i-1)*h1;

```

```

u[i,j,0]:=(-2*s*s+3*s-1)*cos((pi/2)*h2*j);
alpha[i,j]:=(2*s*s-3*s+1)*cos((pi/2)*h2*j);
u[i,j,1]:=u[i,j,0]+tau*alpha[i,j];
end;
repeat
p:=pi*h2/2;
s:=2*pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(2*jj-1);//служебные переменные
lamda[ii]:=4*s*s+pi*pi/4;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+pi*pi/4;{вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2]:=2*sin(s*(si1*h1-(1/2)))*cos(si2*p);{на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2]:=2*sin(s*si1*h1)*cos(si2*p);{на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2]:=2*cos(s1*(si1*h1-(1/2)))*cos(si2*p);
phi[ii+1,si1+n1+1,si2]:=2*cos(s1*si1*h1)*cos(si2*p);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=3/(2*ex(s/2,3));{по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=8*sin(s1/2)/(ex(s1,3))-24/ex(s1,4);{по набору (2)}
//вычисляем коэффициенты Фурье u(1)
vphi[ii,1]:=vphi[ii,0]+tau*(1/ex(s/2,3))*(cos(s/2)-1);
vphi[ii+1,1]:=vphi[ii+1,0];
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx();{упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m-1 do//вычисляем коэффициенты фурье u(k+1)
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamda[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n1);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,k]:=u[i,j,k];
d2[i,j,k]:=u[n1+i+1,j,k];
end;
Assign(fi,'net2d_2s.txt');{связать с файлом net2d_2s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
writeln(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи колебаний ');
writeln(fi,'двумерной сети с двумя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);

```

```
writeln(fi);
writeln (fi, ' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
close(fi);
end. {завершение программы}
```

Приложение 2.2.4 Текст программы для решения задачи колебаний двумерной сети с тремя примыкающими секциями

```
program net2d_3s;
const n1=10; {число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10; {число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
m=100; {число точек разбиений временной переменной t без учета начальной}
sn=100; {число ортонормированных собственных функций}
type
ve1 = array[0..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n1+2,0..n2,0..m] of real;
ve3 = array[0..sn,0..3*n1+2,0..n2] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..3*n1+2,0..n2] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
alpha: ve5; {начальная скорость}
d1,d2,d3 : ve2; {массивы для областей}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,s,s1,p,s2,s3,s4,p1: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
    ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
  begin
if lamda[i]>lamda[j]
  then
    begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
```

```

lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to m do
  begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
end;
//упорядочиваем ортонормированные обобщенные собственные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
  begin
s2:=phi[i,si1,si2];
phi[i,si1,si2]:=phi[j,si1,si2];
phi[j,si1,si2]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2];
phi[i,si1+n1+1,si2]:=phi[j,si1+n1+1,si2];
phi[j,si1+n1+1,si2]:=s3;
s4:=phi[i,si1+2*n1+2,si2];
phi[i,si1+2*n1+2,si2]:=phi[j,si1+2*n1+2,si2];
phi[j,si1+2*n1+2,si2]:=s4;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=0 to m do
for var jk:=0 to n2 do
for var ik:=k1 to kn do
  begin
s:=0;
for var i:=1 to sn do
s:=s+vphi[i,k]*phi[i,ik,jk];
u[ik,jk,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to 50 do
  if k mod 25=0 then
begin
writeln(fi,'k=',k);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,k]:5:3);
if(i=n1) then

```

```

writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(3*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do {на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=i*h1;
u[i,j,0]:=(-3*s*s+s)*cos((pi/2)*h2*j); {начальная функция u(0)}
alpha[i,j]:=(-9*s*s+3*s)*cos((pi/2)*h2*j); {начальная скорость}
u[i,j,1]:=u[i,j,0]+tau*alpha[i,j]; {u(1)}
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do {на 2-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=(i-1)*h1;
u[i,j,0]:=(9*s*s*s-9*s*s+2*s)*cos((pi/2)*h2*j);
alpha[i,j]:=(9*s*s-9*s+2)*cos((pi/2)*h2*j);
u[i,j,1]:=u[i,j,0]+tau*alpha[i,j];
end;
for var i:=2*n1+2 to 3*n1+2 do {на 3-ей секции}
for var j:=0 to n2 do
begin
s:=(i-2)*h1;
u[i,j,0]:=(-6*s*s+10*s-4)*cos((pi/2)*h2*j);
alpha[i,j]:=(-9*s*s+15*s-6)*cos((pi/2)*h2*j);
u[i,j,1]:=u[i,j,0]+tau*alpha[i,j];
end;
repeat
p:=pi*pi/4;
p1:=pi*h2/2;
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(6*jj-5);//служебные переменные
s2:=pi*(6*jj-1);//служебные переменные
s3:=pi*(6*jj-4);//служебные переменные
s4:=pi*(6*jj-2);//служебные переменные
lamda[ii]:=9*s*s+p; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+p; {вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s2*s2+p; {вычисляем третий набор собственных значений}
lamda[ii+3]:=s3*s3+p; {вычисляем четвертый набор собственных значений}
lamda[ii+4]:=s4*s4+p; {вычисляем пятый набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций

```

```

for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
begin
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2]:=2*sin(3*s*(si1*h1-1/3))*cos(p1*si2); {на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2]:=2*sin(3*s*si1*h1)*cos(p1*si2); {на 2-ой секции}
phi[ii,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(3*s*(si1*h1+1/3))*cos(p1*si2); {на 3-ей секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2]:=2*sin(s1*(si1*h1-1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+1,si1+n1+1,si2]:=2*sin(s1*si1*h1+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+1,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(s1*(si1*h1+1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
//третий набор (3)
phi[ii+2,si1,si2]:=-2*sin(s2*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+2,si1+n1+1,si2]:=-2*sin(s2*si1*h1+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+2,si1+2*n1+2,si2]:=-2*sin(s2*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
//четвертый набор (4)
phi[ii+3,si1,si2]:=-2*sin(s3*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+3,si1+n1+1,si2]:=-2*sin(s3*si1*h1+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
phi[ii+3,si1+2*n1+2,si2]:=-2*sin(s3*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*cos(p1*si2);
//пятый набор (5)
phi[ii+4,si1,si2]:=2*sin(s4*(si1*h1-1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+4,si1+n1+1,si2]:=2*sin(s4*si1*h1+pi/3)*cos(p1*si2);
phi[ii+4,si1+2*n1+2,si2]:=2*sin(s4*(si1*h1+1/3)+pi/3)*cos(p1*si2);
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(2/(3*ex(s,3)))*(2*cos(s)-1); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=0; {по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=0; {по набору (3)}
vphi[ii+3,0]:=-(54*sqrt(3))/ex(s3,4)+18/ex(s3,3); {по набору (4)}
vphi[ii+4,0]:=(54*sqrt(3))/ex(s4,4)+18/ex(s4,3); {по набору (5)}
//вычисляем коэффициенты Фурье u(1)
vphi[ii,1]=vphi[ii,0]+tau*((2/(ex(s,3)))*(cos(s)-1));
vphi[ii+1,1]:=0;
vphi[ii+2,1]:=0;
vphi[ii+3,1]=vphi[ii+3,0];
vphi[ii+4,1]=vphi[ii+4,0];
ii:=ii+5;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx(); {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m-1 do {вычисляем коэффициенты Фурье u(k+1)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamda[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n1); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1); {вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
cal(2*n1+2,3*n1+2); {вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,k]:=u[i,j,k];

```

```

d2[i,j,k]:=u[n1+i+1,j,k];
d3[i,j,k]:=u[2*n1+i+2,j,k];
end;
Assign(fi,'net2d_3s.txt');{связать с файлом net2d_3s.txt файловую переменную fi}
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи колебаний');
write(fi,'двумерной сети с тремя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln (fi,' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
writeln (fi,' -----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d3);
close(fi);
end.{завершение программы}

```

Приложение 2.2.5 Текст программы для решения задачи колебаний трехмерной сети с двумя примыкающими секциями

```

program net3d_2s;
const n1=10;{число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10;{число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
n3=10;{число точек разбиений отрезка переменной x3 без учета начальной}
m=100;{число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100;{число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..2*n1+1,0..n2,0..n3,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..2*n1+1,0..n2,0..n3] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..2*n1+1,0..n2,0..n3] of real;
var u: ve2;{приближенное решение}
alpha: ve5;{начальная скорость}
d1,d2 : ve2;{массивы для областей}
lamda: ve1;{массивы для собственных значений}
phi:ve3;{ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi: ve4;{массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,h3,s,s1,p,p1,pp: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin

```

```

    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
        kq:=kq*a;
        ex:=kq;
    End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do
for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to 1 do
begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
end;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2,si3];
phi[i,si1,si2,si3]:=phi[j,si1,si2,si3];
phi[j,si1,si2,si3]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2,si3];
phi[i,si1+n1+1,si2,si3]:=phi[j,si1+n1+1,si2,si3];
phi[j,si1+n1+1,si2,si3]:=s3;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1,kn: integer);
begin
for var k:=2 to m do
for var jk:=0 to n3 do
for var j:=0 to n2 do
for var i:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var ii:=1 to sn do
s:=s+vphi[ii,k]*phi[ii,i,j,jk];

```

```

u[i,j,jk,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to 50 do
if (k mod 25 = 0) then
begin
for var jk:=0 to n3 do
if (jk mod 5 = 0) then
begin
writeln(fi,'t=',k*tau);
writeln(fi,'x3=',jk*h3);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,jk,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(2*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
h3:=1/n3;{шаг по x3}
tau:=1/m;{шаг по t}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do {на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=i*h1;
s1:=cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
u[i,j,jk,0]:=(-2*s*s+s)*s1;{начальная функция u(0)}
alpha[i,j,jk]:=(2*s*s-s)*s1;{начальная скорость}
u[i,j,jk,1]:=u[i,j,jk,0]+tau*alpha[i,j,jk];{u(1)}
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do {на 2-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-1)*h1;
s1:=cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);

```

```

u[i,j,jk,0]:=(4*s*s*s-6*s*s+2*s)*s1;
alpha[i,j,jk]:=(-2*s*s+3*s-1)*s1;
u[i,j,jk,1]:=u[i,j,jk,0]+tau*alpha[i,j,jk];
end;
repeat
p:=pi*h2/2;
p1:=pi*h3/2;
s:=2*pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(2*jj-1);//служебные переменные
lamda[ii]:=s*s+pi*pi/2;{вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+pi*pi/2;{вычисляем второй набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
pp:=cos(si2*p)*cos(si3*p1);//служебные переменные
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2,si3]:=sqrt(8)*sin(s*(si1*h1-(1/2)))*pp;{на 1-ой секции}
phi[ii,si1+n1+1,si2,si3]:=sqrt(8)*sin(s*si1*h1)*pp;{на 2-ой секции}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2,si3]:=sqrt(8)*cos(s1*(si1*h1-(1/2)))*pp;
phi[ii+1,si1+n1+1,si2,si3]:=sqrt(8)*cos(s1*si1*h1)*pp;
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье u(0)
vphi[ii,0]:=(1/(sqrt(2)*ex(s/2,3)))*(2*cos(s/2)-1/2);{по (1)}
vphi[ii+1,0]:=(-4*sqrt(2)/ex(s1,3))*sin(s1/2)+(12*sqrt(2))/ex(s1,4);{по (2)}
//вычисляем коэффициенты Фурье u(1)
vphi[ii,1]:=(1+tau)*vphi[ii,0];
vphi[ii+1,1]:=(1+tau)*vphi[ii+1,0];
ii:=ii+2;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
sx();{упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m-1 do{заполняем коэффициенты Фурье функций u(k+1)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamda[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n1);{вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1);{вычисляем приближенное решение на 2-ой секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,jk,k]:=u[i,j,jk,k];
d2[i,j,jk,k]:=u[n1+i+1,j,jk,k];
end;
Assign(fi,'net3d_2s.txt');{связать с файлом net3d_2s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi);{открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,' Численный метод отыскания приближенного решения задачи колебаний ');
write(fi,' трехмерной сети с двумя примыкающими секциями');

```

```

writeln(fi);
writeln(fi);
writeln (fi, ' -----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln (fi, ' -----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
close(fi);
end. {завершение программы}

```

Приложение 2.2.6 Текст программы для решения задачи колебаний трехмерной сети с тремя примыкающими секциями

```

program net3d_3s;
const n1=10; {число точек разбиений отрезка переменной x1 без учета начальной}
n2=10; {число точек разбиений отрезка переменной x2 без учета начальной}
n3=10; {число точек разбиений отрезка переменной x3 без учета начальной}
m=100; {число точек разбиений отрезка временной переменной t без учета начальной}
sn=100; {число ортонормированных обобщенных собственных функций}
type
ve1 = array[1..sn] of real;
ve2 = array[0..3*n1+2,0..n2,0..n3,0..m] of real;
ve3 = array[1..sn,0..3*n1+2,0..n2,0..n3] of real;
ve4 = array[1..sn,0..m] of real;
ve5 = array[0..3*n1+2,0..n2,0..n3] of real;
var u: ve2; {приближенное решение}
alpha:ve5; {начальная скорость}
d1,d2,d3 : ve2; {массивы для областей}
lamda: ve1; {массивы для собственных значений}
phi:ve3; {ортонормированные обобщенные собственные функции}
vphi: ve4; {массивы для коэффициентов Фурье}
ii,jj: integer;
tau,h1,h2,h3,s,s1,s2,s3,s4,p,q,p1,p2,pp: real;
fi,f1: text;
//функция для вычисления экспоненциала
Function ex(a:real;n:integer):real;
  Var kq:real;
  Begin
    kq:=1;
    For var i:=1 to n do
      kq:=kq*a;
    ex:=kq;
  End;
//процедура для упорядочения собственных функций в порядке возрастания
procedure sx();
var s2,s3 : real;
begin
for var i:=1 to sn-1 do

```

```

for var j:=i+1 to sn do
begin
if lamda[i]>lamda[j]
then
begin
//упорядочиваем собственные значения
s:=lamda[i];
lamda[i]:=lamda[j];
lamda[j]:=s;
//упорядочиваем коэффициенты Фурье
for var k:=0 to 1 do
begin
s1:=vphi[i,k];
vphi[i,k]:=vphi[j,k];
vphi[j,k]:=s1;
end;
//упорядочиваем ортонормированные функции
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
s2:=phi[i,si1,si2,si3];
phi[i,si1,si2,si3]:=phi[j,si1,si2,si3];
phi[j,si1,si2,si3]:=s2;
s3:=phi[i,si1+n1+1,si2,si3];
phi[i,si1+n1+1,si2,si3]:=phi[j,si1+n1+1,si2,si3];
phi[j,si1+n1+1,si2,si3]:=s3;
end;
end;
end;
end;
//процедура для вычисления приближенного решения
procedure cal(k1, kn: integer);
begin
for var k:=2 to m do
for var jk:=0 to n3 do
for var j:=0 to n2 do
for var i:=k1 to kn do
begin
s:=0;
for var ii:=1 to sn do
s:=s+vphi[ii,k]*phi[ii,i,j,jk];
u[i,j,jk,k]:=s;
end;
end;
// процедура для вывода данных
procedure out(var ss : ve2);
begin
for var k := 0 to m do
if (k mod 25 = 0) then
begin
for var jk:=0 to n3 do

```

```

if (jk mod 5 = 0) then
begin
writeln(fi,'t=',k*tau);
writeln(fi,'x3=',jk*h3);
for var j:=n2 downto 0 do
begin
for var i:=0 to n1 do
begin
write(fi,' ',ss[i,j,jk,k]:5:3);
if(i=n1) then
writeln(fi);
end;
end;
writeln(fi);
end;
end;
end;
//основная часть программы
begin
h1:=1/(3*n1);{шаг по x1}
h2:=1/n2;{шаг по x2}
h3:=1/n3;{шаг по x3}
tau:=1/m;{шаг по времени}
ii:=1;
jj:=1;
//формируем начальные данные
for var i:=0 to n1 do{ на 1-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=i*h1;
s1:=cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
u[i,j,jk,0]:=(27*s*s*s-9*s*s)*s1;{начальная функция u(0)}
alpha[i,j,jk]:=(-9*s*s+3*s)*s1;{начальная скорость}
u[i,j,jk,1]:=u[i,j,jk,0]+tau*alpha[i,j,jk];
end;
for var i:=n1+1 to 2*n1+1 do{ на 2-ой секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-1)*h1;
s1:=cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);
u[i,j,jk,0]:=(-9*s*s+9*s-2)*s1;
alpha[i,j,jk]:=(9*s*s-9*s+2)*s1;
u[i,j,jk,1]:=u[i,j,jk,0]+tau*alpha[i,j,jk];
end;
for var i:=2*n1+2 to 3*n1+2 do{ на 3-ей секции}
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
begin
s:=(i-2)*h1;
s1:=cos((pi/2)*h2*j)*cos((pi/2)*h3*jk);

```

```

u[i,j,jk,0]:=(9*s*s-15*s+6)*s1;
alpha[i,j,jk]:=(-9*s*s+15*s-6)*s1;
u[i,j,jk,1]:=u[i,j,jk,0]+tau*alpha[i,j,jk];
end;
repeat
p:=pi*pi/2;
p1:=pi*h2/2;
p2:=pi*h3/2;
q:=sqrt(8);
s:=pi*jj;//служебные переменные
s1:=pi*(6*jj-5);//служебные переменные
s2:=pi*(6*jj-1);//служебные переменные
s3:=pi*(6*jj-4);//служебные переменные
s4:=pi*(6*jj-2);//служебные переменные
lamda[ii]:=9*s*s+p; {вычисляем первый набор собственных значений}
lamda[ii+1]:=s1*s1+p; {вычисляем второй набор собственных значений}
lamda[ii+2]:=s2*s2+p; {вычисляем третий набор собственных значений}
lamda[ii+3]:=s3*s3+p; {вычисляем четвертый набор собственных значений}
lamda[ii+4]:=s4*s4+p; {вычисляем пятый набор собственных значений}
//вычисляем наборы ортонормированных обобщенных собственных функций
for var si1:=0 to n1 do
for var si2:=0 to n2 do
for var si3:=0 to n3 do
begin
pp:=cos(p1*si2)*cos(p2*si3);//служебные переменные
//первый набор (1)
phi[ii,si1,si2,si3]:=q*sin(3*s*(si1*h1-1/3))*pp; {на 1-ой области}
phi[ii,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(3*s*si1*h1)*pp; {на 2-ой области}
phi[ii,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(3*s*(si1*h1+1/3))*pp; {на 3-ей области}
//второй набор (2)
phi[ii+1,si1,si2,si3]:=q*sin(s1*(si1*h1-1/3)+pi/3)*pp;
phi[ii+1,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(s1*si1*h1+pi/3)*pp;
phi[ii+1,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(s1*(si1*h1+1/3)+pi/3)*pp;
//третий набор (3)
phi[ii+2,si1,si2,si3]:=-q*sin(s2*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+2,si1+n1+1,si2,si3]:=-q*sin(s2*si1*h1+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+2,si1+2*n1+2,si2,si3]:=-q*sin(s2*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*pp;
//четвертый набор (4)
phi[ii+3,si1,si2,si3]:=-q*sin(s3*(si1*h1-1/3)+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+3,si1+n1+1,si2,si3]:=-q*sin(s3*si1*h1+(2*pi/3))*pp;
phi[ii+3,si1+2*n1+2,si2,si3]:=-q*sin(s3*(si1*h1+1/3)+(2*pi/3))*pp;
//пятый набор (5)
phi[ii+4,si1,si2,si3]:=q*sin(s4*(si1*h1-1/3)+pi/3)*pp;
phi[ii+4,si1+n1+1,si2,si3]:=q*sin(s4*si1*h1+pi/3)*pp;
phi[ii+4,si1+2*n1+2,si2,si3]:=q*sin(s4*(si1*h1+1/3)+pi/3)*pp;
end;
//вычисляем коэффициенты Фурье для u(0)
vphi[ii,0]:=sqrt(2)/(3*ex(s,3))*(4-cos(s)); {по набору (1)}
vphi[ii+1,0]:=(45/ex(s1,3)-81*sqrt(3)/ex(s1,4))/sqrt(2); {по набору (2)}
vphi[ii+2,0]:=(45/ex(s2,3)+81*sqrt(3)/ex(s2,4))/sqrt(2); {по набору (3)}
vphi[ii+3,0]:=(-27/ex(s3,3)+81*sqrt(3)/ex(s3,4))/sqrt(2); {по набору (4)}
vphi[ii+4,0]:=(-27/ex(s4,3)-81*sqrt(3)/ex(s4,4))/sqrt(2); {по набору (5)}

```

```

//вычисляем коэффициенты Фурье для u(1)
vphi[ii,1]:=vphi[ii,0]+tau*(sqrt(2)/(ex(s,3)))*(cos(s)-1);
vphi[ii+1,1]:=vphi[ii+1,0];
vphi[ii+2,1]:=vphi[ii+2,0];
vphi[ii+3,1]:=vphi[ii+3,0];
vphi[ii+4,1]:=vphi[ii+4,0];
ii:=ii+5;
jj:=jj+1;
until ii > sn;
{sx()}; {упорядочение собственных функций в порядке возрастания}
for var k:=1 to m-1 do {вычисляем коэффициенты Фурье функций u(k+1)}
for var i:=1 to sn do
vphi[i,k+1]:=(1/(1+lamba[i]*tau*tau))*(2*vphi[i,k]-vphi[i,k-1]);
cal(0,n1); {вычисляем приближенное решение на 1-ой секции}
cal(n1+1,2*n1+1); {вычисляем приближенное решение 2-ой секции}
cal(2*n1+2,3*n1+2); {вычисляем приближенное решение на 3-ей секции}
//вывод результатов расчетов приближенного решения u(k) по области в файл
for var i:=0 to n1 do
for var j:=0 to n2 do
for var jk:=0 to n3 do
for var k:=0 to m do
begin
d1[i,j,jk,k]:=u[i,j,jk,k];
d2[i,j,jk,k]:=u[n1+i+1,j,jk,k];
d3[i,j,jk,k]:=u[2*n1+i+2,j,jk,k];
end;
Assign(fi,'net3d_3s.txt'); {связать с файлом net3d_3s.txt файловую переменную fi }
Rewrite(fi); {открываем создаваемый файл для записи данных}
write(fi,'Численный метод отыскания приближенного решения задачи колебаний');
write(fi,'трехмерной сети с тремя примыкающими секциями');
writeln(fi);
writeln(fi,'-----1-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d1);
writeln(fi);
writeln(fi,'-----2-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d2);
writeln(fi);
writeln(fi,'-----3-ая секция-----');
writeln(fi);
out(d3);
close(fi);
end. {конец программы}

```

Приложение 3 Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ


RU2021669023

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2021669023 Дата регистрации: 23.11.2021 Номер и дата поступления заявки: 2021667989 11.11.2021 Дата публикации и номер бюллетеня: 23.11.2021 Бюл. № 12	Автор(ы): Хоанг Ван Нгуен (VN) Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ВГУ») (RU)
---	---

Название программы для ЭВМ:

Программный комплекс для решения задач нестационарного переноса сплошных сред с распределенными параметрами на сетеподобных областях

Реферат:

Программа предназначена для расчета теплопроводности, возникающей на волноводе-цепочке с двумя ребрами и на волноводе-звезде с тремя ребрами. Используется формализм краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с распределенными параметрами на сети (графе) и сетеподобных объектах (областях). В качестве исходных данных возможно использование собственных значений, ортонормированных собственных функций и коэффициенты фурье. При этом приближенное решение данной задачи строится по исходным собственным значениям, ортонормированным собственным функциям и коэффициентам фурье в узловых ячейках. Результаты численных расчетов представляются в виде таблиц. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК; ОС: Windows 10.

Язык программирования: PascalABC.NET

Объем программы для ЭВМ: 14 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2022661479**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2022661479
Дата регистрации: 22.06.2022
Номер и дата поступления заявки:
2022619938 30.05.2022
Дата публикации и номер бюллетеня:
22.06.2022 Бюл. № 7
Контактные реквизиты:
нет

Автор(ы):
Балабан Олеся Руслановна (RU),
Хоанг Ван Нгуен (VN)
Правообладатель(и):
Балабан Олеся Руслановна (RU)

Название программы для ЭВМ:

«Программный комплекс для моделирования сетеподобных процессов переноса с использованием двухслойных и трехслойных дифференциально-разностных схем»

Реферат:

Программа предназначена для обработки математических моделей процесса переноса сплошных сред по двумерным и трехмерным носителям, а также при анализе задач оптимизации указанных процессов. Область применения: программа может использоваться в учебном процессе инженерных специальностей высших учебных заведений с ориентацией на изучение прикладных вопросов естествознания, при проведении лабораторных и практических занятий. Функциональные возможности программы: в качестве исходных данных используются множества собственных значений и ортонормированных обобщенных собственных функций, с помощью которых определяются коэффициенты Фурье. При этом приближенные решения данной задачи строятся в виде отрезков ряда Фурье, при решении оптимизационной задачи присутствует управляющее воздействие на математическом модели. Результаты численных расчетов представляются в виде таблиц. ОС: Window 10 Pro. Тип ЭВМ: Ноутбук (на базе платформы Intel core i5 8265U).

Язык программирования: PascalABC.NET

Объем программы для ЭВМ: 17 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2023617568

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2023617568
Дата регистрации: 11.04.2023
Номер и дата поступления заявки:
2023616666 05.04.2023
Дата публикации и номер бюллетеня:
11.04.2023 Бюл. № 4

Автор(ы):
Корчагина Олеся Руслановна (RU),
Хоанг Ван Нгуен (RU),
Провоторов Вячеслав Васильевич (RU)
Правообладатель(и):
Корчагина Олеся Руслановна (RU)

Название программы для ЭВМ:

«Программный комплекс для качественного описания характеристик волнового процесса в упругих конструкциях сетеподобного типа»

Реферат:

Программа предназначена для численного анализа математических моделей, описывающих волновой процесс звездоподобных упругих конструкциях. Программа может использоваться в учебном процессе инженерных специальностей высших учебных заведений с ориентацией на изучение прикладных вопросов естествознания, при проведении лабораторных и практических занятий, а также в исследовательской работе при анализе сетеподобных волновых процессов. Функциональные возможности программы: для построения приближенных решений данной задачи используются множества собственных значений и ортонормированных обобщенных собственных функций, которые позволяют получить коэффициенты Фурье. При этом приближенные решения строятся в виде отрезков ряда Фурье. Полученные результаты численных расчетов представляются в виде таблиц. Тип ЭВМ: Ноутбук (на базе платформы AMD Ryzen 5 5500U); ОС: Windows 11 Home Single Language.

Язык программирования: PascalABC.NET

Объем программы для ЭВМ: 13 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2023618051**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2023618051 Дата регистрации: 18.04.2023 Номер и дата поступления заявки: 2023616656 05.04.2023 Дата публикации и номер бюллетеня: 18.04.2023 Бюл. № 4	Автор(ы): Корчагина Олеся Руслановна (RU), Хоанг Ван Нгуен (VN), Провоторов Вячеслав Васильевич (RU) Правообладатель(и): Корчагина Олеся Руслановна (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:

«Программный комплекс для анализа математических моделей процесса переноса теплового потока на трехмерной сети»

Реферат:

Программа предназначена для численного анализа математических моделей, описывающих процесс переноса теплового потока на трехмерной сети с несколькими примыкающими секциями. Функциональные возможности: формирование приближений точного решения поставленной задачи основано на свойстве полноты и базисности множества ортонормированных обобщенных собственных функций в пространстве задания данной задачи. Спектральные характеристики (обобщенные собственные функции и собственные значения) однозначно определяют коэффициенты Фурье и приближения решения в виде отрезков ряда Фурье. Результаты вычислительного процесса формируются в виде серии числовых таблиц, содержащих обозначения пространственных и временной переменных, а также числовые значения решения. Программа может использоваться в учебном процессе инженерных специальностей высших учебных заведений с ориентацией на изучение прикладных вопросов естествознания, при проведении лабораторных и практических занятий, а так же в исследовательской работе при анализе процесса переноса сплошных сред. Тип ЭВМ: Ноутбук (на базе платформы AMD Ryzen 5 5500U). ОС: Windows 11 Home Single Language.

Язык программирования: PascalABC.NET.

Объем программы для ЭВМ: 16 КБ