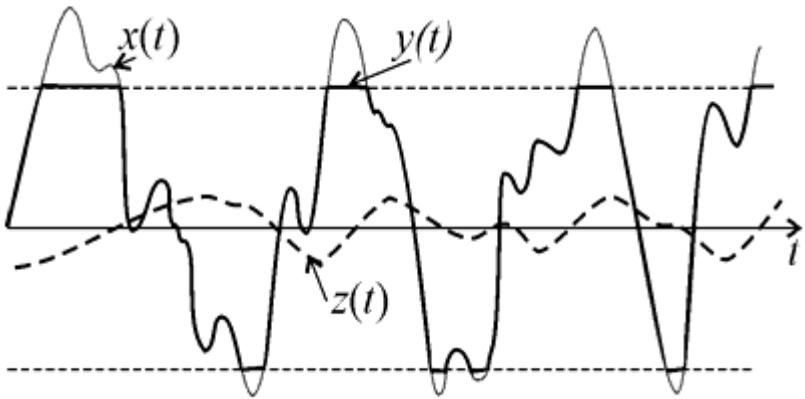


А.Б. Токарев

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В РАДИОТЕХНИКЕ:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие



Воронеж 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

А.Б. Токарев

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В РАДИОТЕХНИКЕ:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 621.391(075.8)

ББК 32.84я7

Т 51

Токарев А.Б. Случайные процессы в радиотехнике: лабораторный практикум: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (12,5 Мб) / А.Б. Токарев. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие содержит комплекс заданий к лабораторным занятиям по дисциплине «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике». Цикл лабораторных занятий охватывает вопросы измерения параметров и статистических характеристик случайных процессов, преобразования случайных сигналов в различных радиотехнических цепях, оптимальной обработки данных при частотной фильтрации сигналов неизвестной формы и при обнаружении сигналов на фоне помех.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 11.03.01 «Радиотехника» (направленность «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов»).

Табл. 14. Ил. 21. Библиогр.: 8 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных систем и технологий Воронежского института МВД России (начальник кафедры д-р техн. наук, проф. О.И. Бокова);
д-р техн. наук, проф. Ю.Г. Пастернак

© Токарев А.Б., 2017

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2017

ВВЕДЕНИЕ

Освоение дисциплины «Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике» предполагает изучение студентами теоретических основ математического описания случайных процессов и особенностей их преобразования в различных радиотехнических устройствах, а также решение задач и выполнение лабораторных работ, позволяющих в деталях проанализировать свойства и особенности случайных сигналов, встречающихся в радиотехнической практике. Каждый раздел настоящего учебного пособия содержит краткое теоретическое введение, определяющее круг вопросов, подлежащих изучению, домашнее задание к лабораторным исследованиям и методические рекомендации по проведению экспериментов.

Выполнение лабораторных исследований рекомендуется осуществлять в малых исследовательских группах с анализом и обсуждением их итогов и последующей защитой полученных результатов перед преподавателем. Состав малых исследовательских групп, а также выполняемые ими варианты лабораторных исследований согласуются с преподавателем на начальном этапе освоения учебного курса.

Следует иметь в виду, что предусматриваемый данным пособием объем теории и лабораторных исследований является лишь необходимым минимумом. Студентам, заинтересованным в получении высококачественной подготовки необходимо расширять этот минимум чтением рекомендованной учебной литературы и проработкой дополнительного круга задач по индивидуальному согласованию с преподавателем.

1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Теоретические основы

Случайный процесс (СП) – это численное выражение некоторого явления, протекающего во времени случайным образом. Подробную информацию о вероятностном описании СП, а также об их основных числовых характеристиках можно найти в учебной литературе [1, с. 56-63; 2, с. 109-118; 3, с. 9-14, 21-28, 31-33; 4, с. 91-100, 106-108, 116-119].

1.1.1. Одномерные характеристики случайных процессов

Одномерная функция распределения характеризует вероятность наблюдения реализаций СП, проходящих в выбранный момент времени t ниже заданного порога x

$$F_{\xi}(x;t) = P\{\xi(t) < x\} \quad (0.1)$$

Одномерная плотность вероятностей (ПВ) характеризует возможность наблюдения реализаций СП, принимающих в заданный момент времени t значения близкие к аргументу x , и определяется отношением вероятности попадания значений реализации процесса $\xi(t)$ в бесконечно малую окрестность аргумента x к ширине этой окрестности

$$W_{\xi}(x;t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \xi(t) < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{\partial F_{\xi}(x;t)}{\partial x} \quad (0.2)$$

Из (0.1)-(0.2) следует, что по плотности распределения вероятностей функцию распределения СП можно найти как

$$F_{\xi}(x_0;t) = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x;t) dx. \quad (0.3)$$

Обратите внимание, что все расчетные операции осуществляются по отношению к аргументу x ; что же касается аргумента

t , то в расчетных формулах он не участвует, выступая лишь как “внешний параметр”, определяющий к какому моменту времени относятся анализируемые характеристики.

Математическое ожидание СП характеризует зависимость от времени среднего арифметического значений разных реализаций, наблюдаемых в момент t ,

$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W_{\xi}(x;t) dx . \quad (0.4)$$

Это среднее значение определяется применительно ко всей совокупности реализаций и имеет такую же размерность, как и сам случайный процесс $\xi(t)$.

Дисперсия характеризует разброс значений, принадлежащих различным реализациям, относительно математического ожидания

$$D_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi}(t))^2 \cdot W_{\xi}(x;t) dx , \quad (0.5)$$

принимает лишь неотрицательные значения, а её размерность – это квадрат размерности исследуемого случайного процесса.

1.1.2. Многомерные характеристики случайных процессов

Многомерные характеристики СП характеризуют его поведение для совокупности моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n (совокупности временных сечений) и отражают динамику развития СП вдоль оси времени. Однако даже двухмерные законы распределения представляют собой многомерные поверхности, оперировать с которыми достаточно трудно; с инженерной точки зрения более востребованными оказываются корреля-

ционное и спектральное описание, которые будут рассматриваться в разделе 2.

1.1.3. Классификация случайных процессов

Случайные процессы, свойства которых изменяются во времени произвольным образом, называются нестационарными. Процессы, *свойства* которых не зависят от момента начала отсчета времени и остаются неизменными вдоль всей временной оси, называются стационарными.

Свойства стационарных СП:

У стационарных процессов одномерная функция распределения, характеризующая вероятность наблюдения реализаций, проходящих ниже заданного порога x , остается неизменной вдоль всей временной оси, а потому аргумент t оказывается избыточным

$$F_{\xi}(x; t) = F_{\xi}(x). \quad (0.6)$$

Аналогично, и плотность вероятности не зависит от времени

$$W_{\xi}(x; t) = \frac{\partial F_{\xi}(x)}{\partial x} = W_{\xi}(x). \quad (0.7)$$

Свойства стационарных СП остаются неизменными вдоль всей временной оси, поэтому и математическое ожидание, и дисперсия таких процессов является константой по отношению к аргументу t , а двумерные функция распределения и плотность вероятности зависят не от размещения сечений t_1 и t_2 на оси времени, а лишь от интервала $\tau = t_2 - t_1$ между ними

$$F_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\} = F_{\xi}(x_1, x_2; \tau). \quad (0.8)$$

Эргодические СП и их свойства:

Эргодическими называют стационарные СП, состоящие лишь из однотипных реализаций, по каждой из которых путём её соответствующего усреднения вдоль оси времени можно определить любую вероятностную характеристику всего СП. Для эргодических процессов определяемая $F_{\xi}(x)$ вероятность проявляет себя в виде среднего времени, которое каждая из реализаций данного СП проводит ниже уровня x

$$F_{\xi}(x;t) = F_{\xi}(x) = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \sum T_{[\xi^{(i)}(t) \leq x]} \quad (0.9)$$

а плотность вероятности будет показывать отношение частоты наблюдения значений из интервала $[x; x + \Delta x]$ к ширине этого интервала Δx

$$W_{\xi}(x;t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T_{набл} \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x \cdot T_{набл}} \cdot \sum T_{[x \leq \xi^{(i)}(t) \leq x + \Delta x]} \quad (0.10)$$

Математическое ожидание эргодических СП совпадает со средним по времени значением – постоянной составляющей любой из реализаций

$$M_{\xi}(t) = M_{\xi} = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)} \quad (0.11)$$

Дисперсия эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей любой из реализаций СП

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \lim_{T_{набл} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{набл}} \cdot \int_{-T_{набл}/2}^{+T_{набл}/2} (\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)})^2 dt = P_{cp \sim \xi^{(i)}} \quad (0.12)$$

Ещё раз подчеркнём, что определяемые (0.9)-(0.12) свойства являются проявлением единого принципа: любая характеристика эргодического СП может быть получена путем соответст-

вующего усреднения по времени (на интервале бесконечной протяженности) произвольной реализации этого процесса. Тот же самый принцип можно выразить и иначе: для эргодических процессов “среднее по времени” любой из реализаций совпадает со “средним по ансамблю реализаций процесса”.

Отметим также, что наиболее эффективно правила (0.9)-(0.12) удаётся применять на практике для эргодических процессов, реализации которых являются периодическими функциями времени. При этом нет необходимости в устремлении времени наблюдения к бесконечности; в качестве интервала усреднения достаточно использовать один произвольный период любой реализации. В частности, для периодических сигналов формулы расчета числовых характеристик могут быть записаны в форме:

$$M_{\xi} = \frac{1}{T_{\pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\pi}} \xi^{(i)}(t) dt = \xi_{-}^{(i)}. \quad (0.13)$$

$$D_{\xi} = \frac{1}{T_{\pi}} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_{\pi}} (\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)})^2 dt = P_{\text{ср-}\xi^{(i)}}. \quad (0.14)$$

Лабораторная работа № 1. Вероятностные характеристики случайных процессов

Цель работы – экспериментальное исследование одномерных вероятностных и числовых характеристик случайных процессов (СП).

В работе изучаются основные свойства функции распределения вероятностей и плотности вероятностей СП – шума, периодической последовательности импульсов и смеси сигнала с шумом. Для разных типов процессов измеряются математическое ожидание и дисперсия, анализируются взаимосвязи числовых и вероятностных характеристик, исследуется влияние шумов на сигналы.

1.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

1.2.1. При расчете вероятностных характеристик шума следует учитывать, что:

- 1) разные процессы с весьма отличающимися по виду реализациями могут иметь одно и то же одномерное нормальное распределение, поскольку одномерные вероятностные характеристики определяют лишь свойства реализаций в одном произвольном временном сечении, но никак не регламентируют скорость изменения значений СП во времени;
- 2) стационарные СП имеют неизменяющееся во времени распределение мгновенных значений, и, следовательно, их функция распределения и плотность вероятности является функцией одного лишь аргумента x как и у нормальной случайной величины (СВ);
- 3) функция распределения нормальной СВ не выражается в элементарных функциях. Ее можно найти в справочниках в табличной форме, а также в прил. 1 настоящего пособия.

1.2.2. Таблицы нормального распределения приводятся всегда для стандартной случайной величины (имеющей нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию), поэтому для получения закона распределения шума с произвольным эффективным значением необходимо найти правило перерасчета табличных значений распределения стандартной нормальной СВ в значения исследуемого шума. Для нахождения этого правила учтем, что произвольную ξ и стандартную $\eta_{ст}$ случайные величины связывает соотношение

$$\eta_{ст} = \frac{\xi - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}. \quad (0.15)$$

Если значения, принимаемые величиной $\eta_{ст}$ обозначить через y , а значения величины ξ , соответствующей исследуе-

тому шуму, – через x , то функция, позволяющая определить y по известному x , будет иметь вид

$$y = \varphi(x) = \frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}. \quad (0.16)$$

Тогда на основе стандартных правил, определяющих изменения законов распределения при функциональных преобразованиях случайных величин, можно записать

$$W_{\xi}(x) = W_{\text{ст}}(\varphi(x)) \cdot \left| \frac{d\varphi}{dx} \right| = \frac{1}{\sigma_{\xi}} \cdot W_{\text{ст}}\left(\frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right). \quad (0.17)$$

Для получения соотношения, связывающего функции распределения вспомним, что

$$F_{\xi}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} W_{\xi}(x) dx. \quad (0.18)$$

Подставляя (0.17) в (0.18) имеем (используя замену переменных)

$$F_{\xi}(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma_{\xi}} \cdot W_{\text{ст}}\left(\frac{x - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right) dx = F_{\text{ст}}\left(\frac{x_0 - M_{\xi}}{\sigma_{\xi}}\right). \quad (0.19)$$

Примечание: математическое ожидание шума для всех вариантов лабораторной работы считается нулевым $M_{\xi} = 0$.

Значения функций $W_{\text{ст}}(x)$ и $F_{\text{ст}}(x)$ представлены в таблице прил. 1 (см. с. 93), а возможный вид реализации нормального случайного процесса и его вероятностных характеристик показан на рис. 1.1.

1.2.3. Числовые характеристики нормального шума (при произвольной корреляционной функции) равны

$$M_{\text{шум}} = 0,0 \text{ (В)}; \quad D_{\text{шум}} = \sigma_{\xi}^2 \text{ (В}^2\text{)}, \quad (0.20)$$

где σ_{ξ} – среднеквадратическое отклонение (или, иначе, эффективное значение) шума.

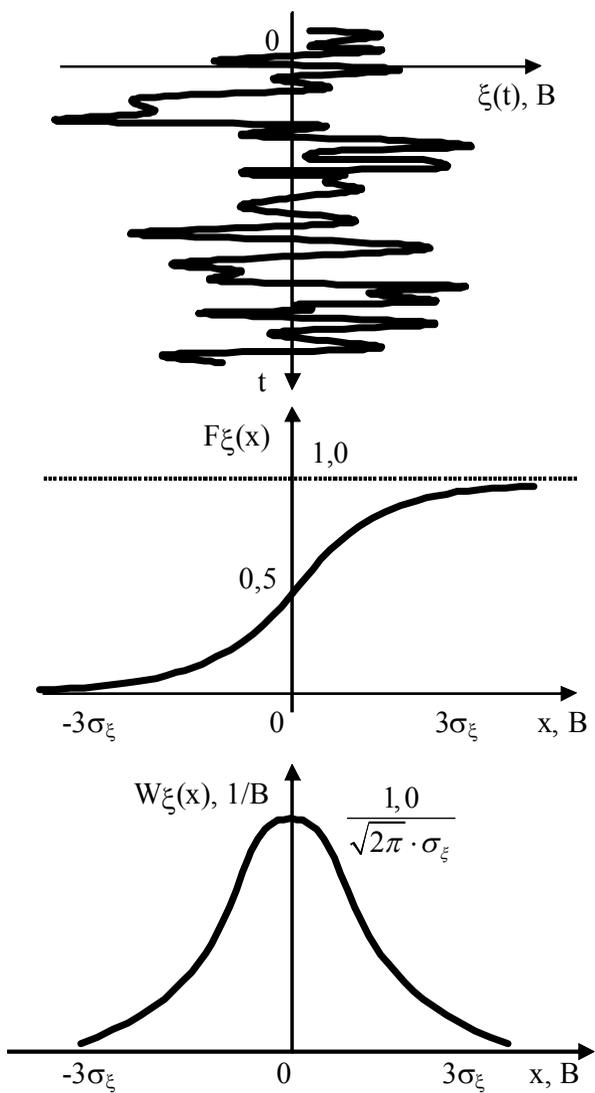


Рис. 1.1. Вероятностные характеристики нормального шума

1.2.4. Характеристики гармонического сигнала со случайной начальной фазой задаются соотношениями

$$\text{плотность вероятности } W_{\cos}(x) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{U_m^2 - x^2}}, \quad -U_m \leq x \leq U_m;$$

$$\text{функция распределения } F_{\cos}(x) = \begin{cases} 0, & x < -U_m \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{U_m}\right), & -U_m \leq x \leq U_m \\ 1, & x > U_m \end{cases}$$

$$\text{дисперсия } D_{\cos} = U_m^2/2; \text{ эффективное значение } \sigma_{\cos} = U_m/\sqrt{2}.$$

1.2.5. Последовательность прямоугольных импульсов со случайной начальной фазой имеет следующие характеристики

$$\text{плотность вероятности } W_{\text{rect}}(x) = 0,5 \cdot \delta(x+U_m) + 0,5 \cdot \delta(x-U_m)$$

$$\text{функция распределения } F_{\text{rect}}(x) = \begin{cases} 0, & x < -U_m \\ 1/2, & -U_m \leq x \leq U_m \\ 1, & x > U_m \end{cases}$$

$$\text{дисперсия } D_{\text{rect}} = U_m^2; \text{ эффективное значение } \sigma_{\text{rect}} = U_m.$$

1.2.6. Последовательность треугольных импульсов характеризуется равномерным законом распределения:

$$\text{плотность вероятности } W_{\wedge}(x) = 1/(U_{\max} - U_{\min}), \quad U_{\min} \leq x \leq U_{\max}$$

$$\text{функция распределения } F_{\wedge}(x) = \begin{cases} 0, & x < U_{\min} \\ \frac{x - U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}, & U_{\min} \leq x \leq U_{\max} \\ 1, & x > U_{\max} \end{cases}$$

$$\text{дисперсия } D_{\wedge} = U_m^2/3; \text{ эффективное значение } \sigma_{\wedge} = U_m/\sqrt{3}.$$

Графически все эти характеристики показаны на рис. 1.2.

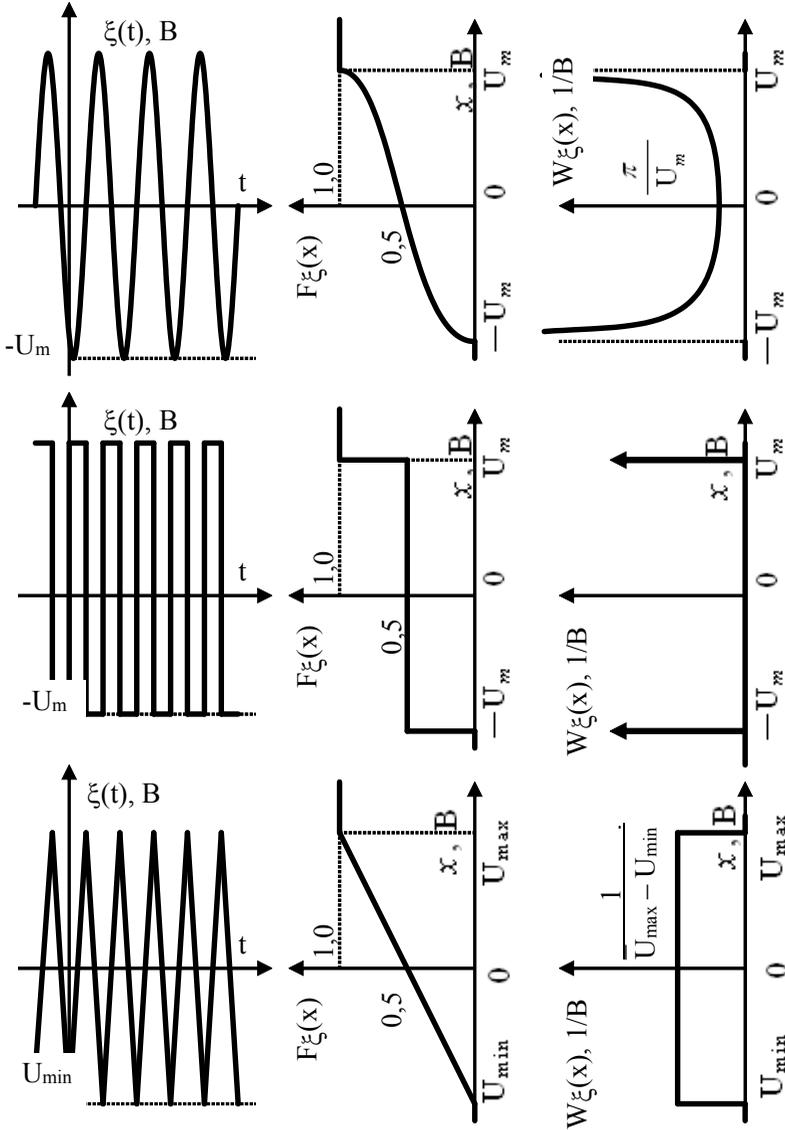


Рис. 1.2. Вероятностные характеристики квазислучайных сигналов

1.2.7. Наиболее просто и наглядно влияние шума на вероятностные характеристики смеси сигнала и шума проявляется применительно к последовательности прямоугольных импульсов, имеющей плотность вероятности

$$W_{\text{rect}}(x) = 0,5 \cdot \delta(x + U_m) + 0,5 \cdot \delta(x - U_m)$$

Шум характеризуется законом распределения

$$W_{\text{шум}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\text{шум}}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma_{\text{шум}}^2}} \quad (0.21)$$

Эти две составляющие смеси, очевидно, статистически независимы друг от друга, поэтому плотность распределения суммы $\zeta(t)$ определяется сверткой распределений слагаемых

$$W_{\zeta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\xi}(x) \cdot W_{\text{шум}}(z - x) dx, \quad (0.22)$$

откуда

$$W_{\zeta}(z) = 0,5 \cdot W_{\text{шум}}(z + U_m) + 0,5 \cdot W_{\text{шум}}(z - U_m). \quad (0.23)$$

Полученный результат схематично отображен на рис. 1.3. Как видно из рисунка, искомое распределение является суперпозицией распределений шума, сдвинутых относительно нуля на $\pm U_m$. Анализ "привязки" распределения к оси абсцисс показывает, что его ширина зависит от абсолютных значений интенсивностей сигнала и шума, а форма – определяется отношением сигнал-шум. Оно может задаваться, как отношение эффективных напряжений сигнала и шума, в этом случае говорят об отношении сигнал-шум по напряжению

$$h = \sigma_{\text{сигн}} / \sigma_{\text{шум}}; \quad (0.24)$$

в других случаях выгоднее сопоставлять мощности и гово-

речь об отношении сигнал-шум по мощности

$$h^2 = \sigma_{\text{сигн}}^2 / \sigma_{\text{шум}}^2. \quad (0.25)$$

Как следствие статистической независимости сигнала и шума дисперсия смеси определяется суммой дисперсия слагаемых

$$D_{\zeta} = D_{\xi} + D_{\text{шум}}. \quad (0.26)$$

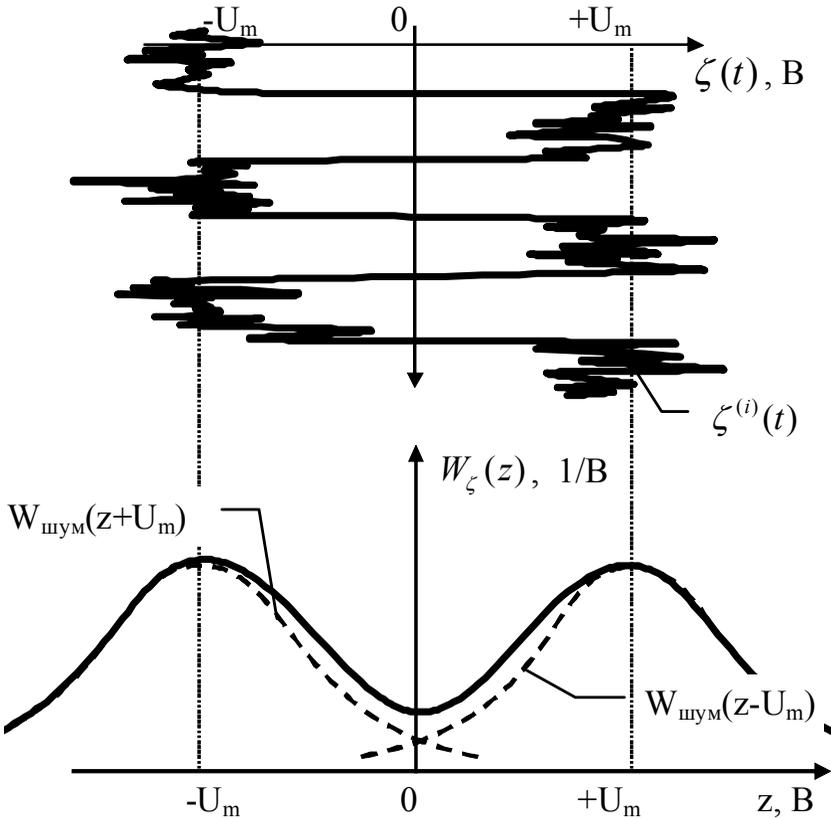


Рис. 1.3. Аддитивная смесь последовательности прямоугольных импульсов и нормального шума и ее распределение

1.2.8. Если при проведении экспериментов сведения о наблюдаемых случайных процессах фиксируются в виде совокупности отсчетов реализаций, то для оценки дисперсии обычно используют формулу

$$\tilde{D}_\xi = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \tilde{M}_\xi)^2, \quad (0.27)$$

где
$$\tilde{M}_\xi = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (0.28)$$

– оценка математического ожидания эргодического случайного процесса.

Оценки \tilde{M}_ξ и \tilde{D}_ξ формируются из получаемых в эксперименте случайных результатов измерений и потому сами являются случайными. Исходя из (0.28) можно показать, что дисперсия оценки \tilde{M}_ξ будет в N раз меньше дисперсии исследуемого СП; её эффективное значение оценки может вычисляться как

$$\sigma_{\tilde{M}_\xi} = \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{N}}. \quad (0.29)$$

При экспериментальной проверке соответствия наблюдаемых значений величине $\sigma_{\tilde{M}_\xi}$ можно воспользоваться «правилом 3 сигм». Ситуация с дисперсией оценки дисперсии сложнее. Её эффективное значение в соответствии с [8, (14.3.16)] может рассчитываться как

$$\sigma_{\tilde{D}_\xi} \approx \sqrt{\frac{2}{N}} \sigma_\xi^2, \quad (0.30)$$

однако распределение величины \tilde{D}_ξ заметно отличается от нормального, из-за чего «правило 3 сигм» выполняется с значительным запасом.

1.3. Домашнее задание к лабораторной работе

1.3.1. Ознакомьтесь с разделом 1.2 данного руководства. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант лабораторных исследований.

1.3.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте и внесите в отчет графики функции распределения и плотности вероятности нормального шума, параметры которого заданы в табл. 1.1. При расчетах следует иметь в виду, что тип источника шума, задаваемый центральной колонкой таблицы, характеризует динамичность развития процесса во времени и не влияет на одномерные характеристики случайного процесса.

1.3.3. Используя соотношения (0.29), (0.30) рассчитайте ожидаемые значения величин $\sigma_{\tilde{M}_\xi}$ и $\sigma_{\tilde{D}_\xi}$.

1.3.4. Рассчитайте и внесите в отчет с указанием масштабов графики функции распределения и плотности вероятности сигнала из табл. 1.2.

1.3.5. Определите, чему будет равно отношение сигнал-шум, если проанализированный в п. 1.5.4 сигнал смешать с соответствующим Вашему индивидуальному заданию шумом.

1.3.6. Определите, как следует изменить параметры входящих в смесь процессов, чтобы отношение сигнал-шум стало равно $h = 1$. (Примечание: если номер Вашей бригады четный – изменяйте интенсивность сигнала; для бригад с нечетным номером следует изменять эффективное значение шума)

1.3.7. Если в Вашем распоряжении есть подходящая вычислительная техника, то для двух случаев, рассмотренных в п. 1.3.5-1.3.6 рассчитайте плотность вероятности смеси Вашего сигнала с шумом (см. (0.22)); при «ручном» расчете допустимо заменять сигнал из Вашего индивидуального задания последовательностью прямоугольных импульсов и руководствоваться в расчетах соотношением (0.23).

Таблица 1.1

Номер бригады	Модуль №1 - источник шума	Параметры источника шума
1	широкополосный	$\sigma = 0,5 \text{ В}$
2	широкополосный	$\sigma = 0,7 \text{ В}$
3	низкочастотный	$\sigma = 0,9 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}$
4	узкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 1,6 \text{ кГц}$
5	широкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}$
6	широкополосный	$\sigma = 0,6 \text{ В}$
7	низкочастотный	$\sigma = 0,7 \text{ В}; \tau = 2,5 \text{ мс}$
8	узкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 2,0 \text{ кГц}$

Таблица 1.2

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1	гармонический	$U_m = 2,2 \text{ В}; F = 1,3 \text{ кГц}$
2	прямоугольный	$U_m = 1,8 \text{ В}; F = 1,4 \text{ кГц}$
3	треугольный	$U_{\min} = -1,3 \text{ В}; U_{\max} = +2,7 \text{ В}; F = 1,5 \text{ кГц}$
4	гармонический	$U_m = 3,2 \text{ В}; F = 1,6 \text{ кГц}$
5	прямоугольный	$U_m = 2,8 \text{ В}; F = 1,7 \text{ кГц}$
6	треугольный	$U_{\min} = -2,3 \text{ В}; U_{\max} = +1,7 \text{ В}; F = 1,8 \text{ кГц}$
7	гармонический	$U_m = 4,2 \text{ В}; F = 1,9 \text{ кГц}$
8	прямоугольный	$U_m = 3,8 \text{ В}; F = 2,0 \text{ кГц}$

1.4. Возможности моделирующей программы и рекомендации по работе с ней

Программа моделирования состоит из 3 основных модулей, обеспечивающих управление совокупностью анализируемых источников сигналов и цепей обработки, параметрами моделируемых устройств, блоком анализа характеристик.

1.4.1. Окно "Источники сигналов и блоки обработки"

Начинать работу с программой необходимо с определения совокупности исходных сигналов и используемых для их обработки радиотехнических блоков. Для осуществления указанных действий служит окно "Источники сигналов и блоки обработки", показанное на рис. 1.4.

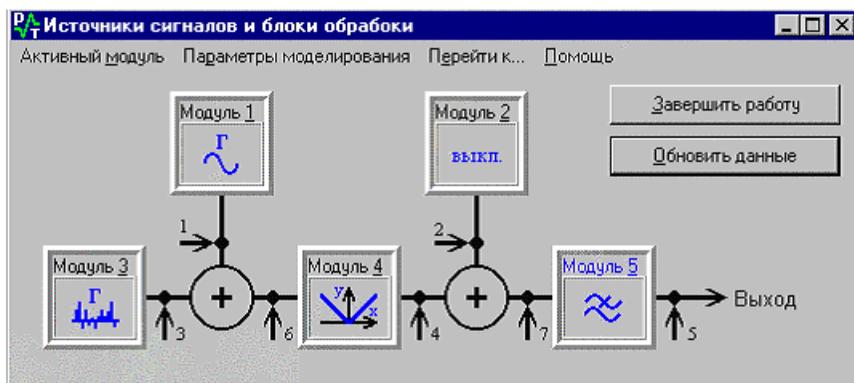


Рис. 1.4. Окно управления исследуемыми сигналами и блоками обработки

Пять прямоугольников с надписями "Модуль1"... "Модуль5" предназначены для схематичного отображения совокупности моделируемых источников случайных процессов, цепей, используемых для их обработки, и способа их объединения. При этом модули № 1...3 предназначены для моделирования сигналов и лишь блоки № 4...5 применяются для выбора устройства

обработки. Конечно, в реальности преобразование случайных процессов может быть гораздо более сложным и многоступенчатым, чем предусматривает данная схема, но даже подобная простая структура позволяет наблюдать и анализировать громадную совокупность различных случайных процессов и для учебных целей вполне достаточна.

Изменить назначение любого из модулей весьма просто. Для этого необходимо лишь:

- С помощью щелчка "мышью" или нажатия комбинации <Alt>+<номер модуля> сделать нужный модуль активным. Например, после нажатия <Alt>+<5> активным станет модуль №5 и его заголовок выделится синим цветом (см. рис. 1.4);
- Активировать пункт меню "Активный модуль" → "Изменить тип" и выбрать подходящий вариант из предлагаемого подменю; Так, при выборе варианта, показанного на рис. 1.5, модуль №5 будет представлять собой уже не идеальный ФНЧ, а реальную интегрирующую RC-цепочку;
- Активировать пункт меню "Активный модуль" → "Изменить параметры модуля" и изменить свойства моделируемого устройства, пользуясь описанным в следующем подразделе окном "Параметры модулей".

1.4.2. Выбор параметров используемых модулей

Для контроля и изменения параметров моделируемых устройств служит окно "Параметры модулей", показанное на рис. 1.6 (при старом варианте функционирования модуля №5).

В показанном на рис. 1.6 виде блоки управления параметрами предназначены для непосредственного ввода значений величин с клавиатуры. Для быстрой (хотя и менее точной) вариации параметра пользователем предназначена вкладка, показанная на рис. 1.7, используя которую значение параметра легко изменять, просто перемещая движок регулятора мышью. Последующие вкладки являются служебными и при выполнении лабораторных работ не используются.

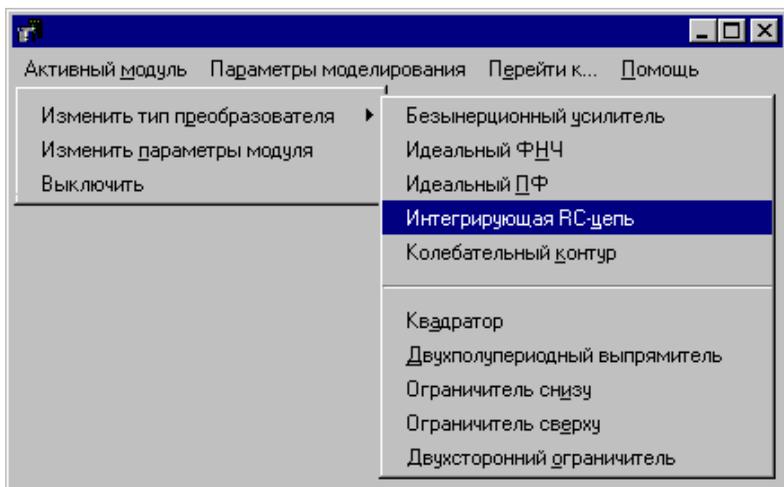


Рис. 1.5. Меню управления типом преобразователей

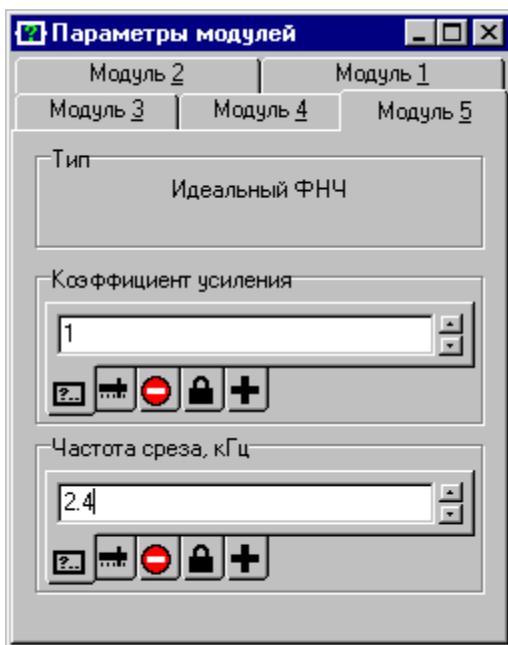


Рис. 1.6. Управление параметрами моделируемых устройств



Рис. 1.7. Вкладка ускоренной регулировки параметра

1.4.3. Общее представление об измерительной подсистеме

Для выполнения оценки параметров наблюдаемых случайных процессов предназначен блок анализаторов. Визуально блок анализаторов отображается как окно, содержащее один или два измерительных блока, подключенных к какой-либо из контрольных точек №1...7, показанных на рис. 1.4. Один из возможных вариантов внешнего вида блока анализаторов представлен на рис. 1.8.

Метки "(5)" и "(6)", отображаемые в верхней части каждого анализатора, показывают, к какой именно контрольной точке схемы подключен измерительный прибор. Так на рис. 1.8 правый осциллограф показывает случайный процесс, формируемый как аддитивная смесь гармонического сигнала и шума, а левый прибор подключен к контрольной точке №5 ("Выход") и отображает результат детектирования этой смеси выпрямителем и идеальным ФНЧ (блоки №4 и №5 на рис. 1.8).

Каждый измерительный прибор снабжен регуляторами вертикального и горизонтального масштабирования изображения, расположенными сверху и снизу от окна отображения результатов измерения. Для корректировки масштаба достаточно лишь щелкнуть "мышью" по соответствующему сектору переключателя. Выделенные на рис.1.8 секторы переключателя показывают, например, что при отображении информации на экране осциллографа вертикальный масштаб составляет 1 В/дел,

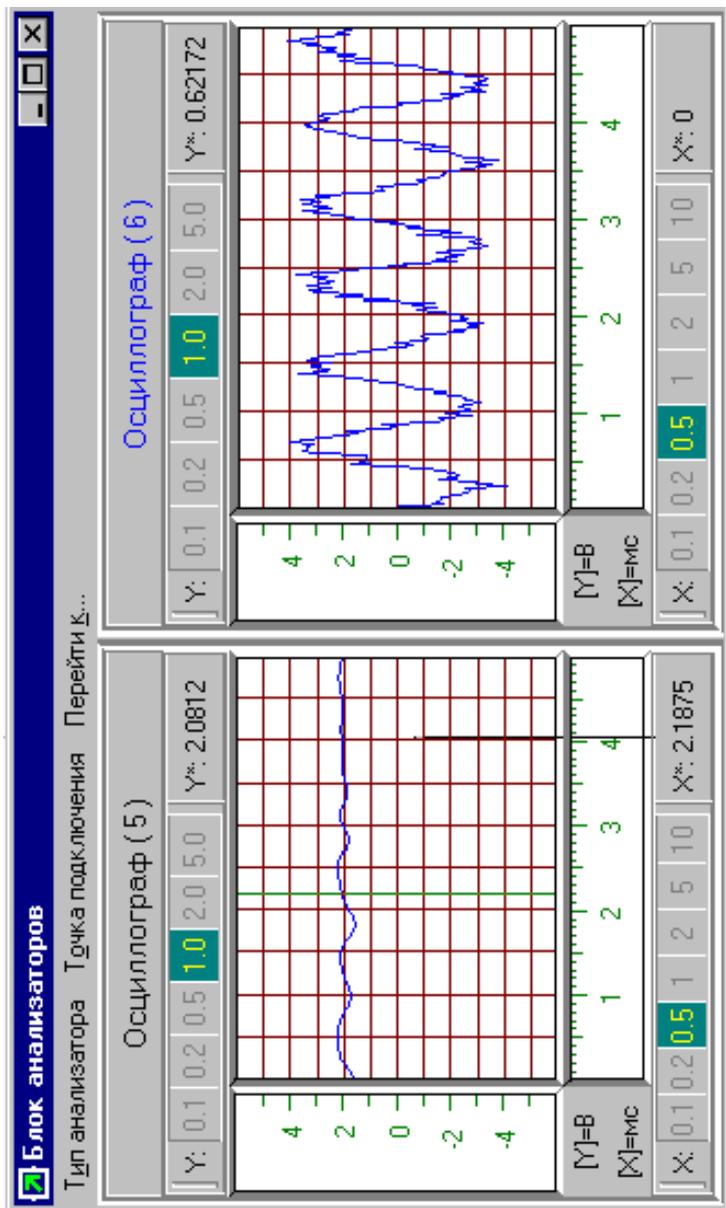


Рис. 1.8. Окно подсистемы измерения характеристик случайных процессов

а горизонтальный - 0,5 мс/дел. Изменять масштаб можно и при помощи клавиш "+", "-", "*", "/" дополнительной клавиатуры, а именно:

- </> - Увеличить масштаб изображения по вертикали;
- <*> - Уменьшить масштаб изображения по вертикали;
- <-> - Увеличить масштаб изображения по горизонтали;
- <+> - Уменьшить масштаб изображения по горизонтали.

Для более точного измерения каких-либо точек или фрагментов диаграмм предназначены вертикальные маркеры. Они легко управляются как с клавиатуры, так и при помощи "мыши", а их текущие горизонтальные и вертикальные координаты отображаются справа от соответствующих переключателей масштаба. Так, например, на левом приборе, изображенном на рис. 1.8, маркер расположен по оси времени на расстоянии 2,1875 мс от момента начала отсчета и, судя по индикатору в верхней правой части анализатора, наблюдаемое в данном временном сечении значение напряжения составляет 2.0812 В.

1.4.4. Выбор используемых измерительных приборов

Для изменения состава и/или точек подключения контрольно-измерительных приборов служит главное меню окна "Блок анализаторов". Разберем использование данного меню на примере замены осциллографа, показанного на рис. 1.8 справа, спектроанализатором, подключенным к выходу схемы. Для этого выполним следующие шаги:

1) Щелчком мышью по надписи "Осциллограф (6)" сделаем данный измерительный прибор активным (на рис. 1.8 это уже выполнено);

2) При помощи меню "Тип анализатора" заменяем осциллограф спектроанализатором (рис. 1.9);

3) При помощи меню "Точка подключения" изменяем контрольную точку схемы на №5 (см. рис. 1.4).

В результате блок анализаторов приобретает вид, показанный на рис. 1.10.

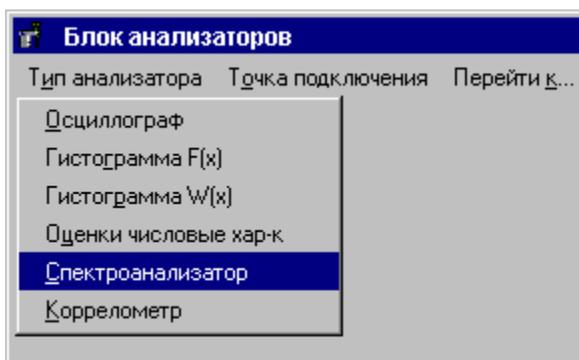


Рис. 1.9. Выбор типа используемого контрольно-измерительного прибора

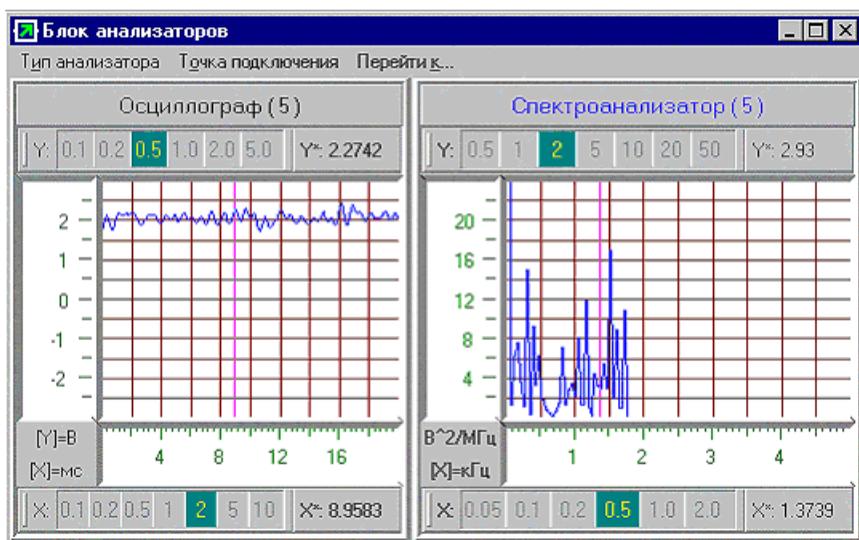


Рис. 1.10. Результат временного и спектрального анализа процесса на выходе схемы

1.5. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование характеристик нормального шума

Цели этапа:

- 1) получить гистограммы распределения шума и сравнить их с теоретическими распределениями;
- 2) исследовать оценки математического ожидания и эффективного значения процесса;
- 3) проанализировать влияние объема используемой выборки на точность оценивания этих характеристик.

Рекомендации по выполнению:

1.5.1. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требованиями табл. 1.1; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. В блоке анализаторов настроить оба анализатора на контрольную точку №1; установить левый анализатор в состояние осциллографа, а правый - в состояние оценки числовых характеристик СП.

1.5.2. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. По наблюдаемым осциллограммам оценить изменения формы реализаций. Определить по значениям, выводимым на правый анализатор, диапазон изменения оценок математического ожидания и среднеквадратического отклонения СП. Наибольшее и наименьшее наблюдавшиеся значения для каждой из оценок занести в отчет. Сопоставляя диапазоны разброса оценок с значениями $\sigma_{\tilde{M}_\xi}$ и $\sigma_{\tilde{D}_\xi}$ из п. 1.3.3 домашнего задания, оценить предсказуемость поведения оценок математического ожидания и дисперсии наблюдаемого шума.

1.5.3. Переключить измеритель числовых характеристик в режим построения гистограмм $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и провести еще 15...20 экспериментов. Оценить стабильность формы (значений) наблюдаемых гистограмм. Внести в отчет одну или (при существенной нестабильности данных) две гистограммы и сравнить их с теоретическими функциями распределения шума.

1.5.4. Аналогично п.1.5.3 зафиксировать в отчете гистограммы $W_{\xi}^*(\tilde{x})$ плотности распределения вероятностей СП.

1.5.5. Повторить пп. 1.5.2-1.5.4, установив предварительно объем формируемой выборки $N = 256$ отсчетов.

Этап 2. Исследование зависимости статистических характеристик квазислучайных процессов от их параметров

Цели этапа:

- 1) получить гистограммы распределения периодического сигнала и сравнить их с теоретическими распределениями;
- 2) исследовать зависимость статистических характеристик сигналов от их параметров.

Рекомендации по выполнению:

1.5.6. Восстановить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. Установить тип и параметры модуля №1 моделирующей программы в соответствии с требованиями табл. 1.2.

1.5.7. Установить режим отображения гистограмм $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и провести серию из 15...20 экспериментов. Занести в отчет одну или две из полученных гистограмм. Аналогично зафиксировать в отчете получаемые гистограммы плотности вероятности $W_{\xi}^*(\tilde{x})$.

1.5.8. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 1.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 1.3, и для каждой зафиксировать в отчете гистограммы распределения получаемых случайных процессов; сопоставить их с наблюдавшимися ранее и записать выводы.

Таблица 1.3

Номер бригады	Первая корректировка параметров	Вторая корректировка параметров
1, 2	увеличить амплитуду сигнала до $U_m^* = 4 \text{ В}$	добавить к сигналу постоянную составляющую $U = -2,2 \text{ В}$
3, 6	установить частоту сигнала $F^* = 2,5 \text{ кГц}$	при исходной частоте изменить минимальный уровень сигнала на $U_{\min}^* = -2 \text{ В}$
4, 5	установить частоту сигнала $F^* = 2,5 \text{ кГц}$	добавить к сигналу постоянную составляющую $U = 0,8 \text{ В}$
7, 8	уменьшить амплитуду сигнала до $U_m^* = 1,3 \text{ В}$	при исходных параметрах сигнала установить его частоту $F^* = 2,5 \text{ кГц}$

Примечание: если корректировка подразумевает добавление к сигналу постоянной составляющей, то этого можно добиться, настроив модуль №3 на формирование постоянной составляющей и анализируя результат суммирования процессов в контрольной точке № 6.

Этап 3. Исследование влияния аддитивного шума на вероятностные характеристики СП

Цель этапа:

1) исследовать зависимость характеристик смеси сигнала и шума от интенсивностей составляющих и отношения сигнал-шум.

Рекомендации по выполнению:

1.5.9. Настроить модуль №1 схемы моделирования на формирование квазислучайного сигнала из табл. 1.2, а модуль №3 - на формирование шума из табл. 1.1. Внести в отчет гистограммы функции распределения и плотности распределения вероят-

ностей для наблюдаемой в контрольной точке №6 аддитивной смеси сигнала и шума, указав соответствующее Вашему индивидуальному варианту отношение сигнал-шум.

1.5.10. Установить отношение сигнал-шум $h = 1$, изменив параметры процессов на рассчитанные в п. 1.3.6. Внести в отчет получаемые гистограммы $F_{\xi}^*(\tilde{x})$ и $W_{\xi}^*(\tilde{x})$; сравнить их с результатами теоретических расчетов (п. 1.3.7) и записать выводы о влиянии аддитивного шума на закон распределение мгновенных значений сигнала.

1.6. Рекомендации к написанию отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- наименование работы и все материалы домашней подготовки (расчеты, таблицы, графики);
- результаты экспериментальных исследований в виде таблиц, графиков и осциллограмм с их физическим толкованием;
- выводы по работе с сопоставлением расчетных теоретических и экспериментальных данных.

Текст в целом должен быть написан кратким и ясным языком; не следует переписывать в отчет рассуждения общетеоретического характера, не имеющие прямого отношения к поставленной задаче и ее решению. Вместе с тем, основные результаты работы желательно прокомментировать, обратив особое внимание на расхождения между теоретическими положениями и результатами исследований и указывая, по возможности, причины выявленных отличий.

Особое внимание следует уделять оформлению рисунков и графиков. Они должны:

- иметь название, указываемое в верхней части рисунка;
- располагаться сразу же за ссылкой на них по тексту или в крайнем случае на следующей странице;
- иметь на каждой оси координат масштабную сетку, символ отображаемой переменной и (через запятую) ее размерность;
- содержать пометки о значениях параметров, которым соответствует построенный график.

1.7. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Дайте определение одномерной функции распределения случайного процесса, опишите ее основные свойства, приведите примеры.

2. Что такое одномерная плотность вероятности случайного процесса? Перечислите ее основные свойства и приведите примеры.

3. Дайте определение многомерной функции распределения случайного процесса и перечислите ее основные свойства.

4. Что такое многомерная плотность вероятности, и какие статистические свойства случайного процесса она характеризует?

5. Дайте определения важнейших числовых характеристик случайных процессов и перечислите их основные свойства.

6. Какие случайные процессы называются стационарными? Дайте определения строгой стационарности и стационарности в “широком” смысле; приведите примеры.

7. Как могут быть вычислены или измерены числовые характеристики эргодических процессов?

8. Укажите принципы измерения вероятностных характеристик эргодических процессов.

9. Каков физический смысл (математического ожидания) и дисперсии эргодического процесса? Как связаны между собой форма (вид) реализаций процесса и его среднее значение, дисперсия и функции распределения?

10. Какие изменения вносит аддитивный шум в распределения мгновенных значений квазислучайных сигналов? Проиллюстрируйте ответ на конкретных примерах.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Теоретические основы

Часто используемыми энергетическими характеристиками случайного процесса являются корреляционная, ковариационная функция и спектральная плотность мощности.

2.1.1. Корреляционная функция численно определяется величиной взаимной корреляции значений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.1)$$

Для стационарных случайных процессов, свойства которых не изменяются вдоль оси времени, она зависит лишь от продолжительности временного интервала между контролируемыми моментами времени $\tau = t_2 - t_1$ и характеризует степень линейной взаимосвязи между двумя значениями, разнесенными во времени на интервал τ . Как следствие:

1. $B_{\xi}(\tau)$ является четной функцией аргумента τ .
2. $B_{\xi}(\tau)$ имеет размерность квадрата случайной величины, в частности, V^2 - для напряжения и A^2 - для тока.
3. Значение, принимаемое корреляционной функцией в начале координат равно второму начальному моменту процесса, что для эргодических случайных процессов соответствует полной средней мощности любой из реализаций процесса

$$B_{\xi}(0) = m_2 \{ \xi(t) \} \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t)]^2 dt \quad (2.2)$$

Также корреляционная функция $B_{\xi}(\tau)$ подчиняется теореме Винера-Хинчина, о которой будет говориться в п. 2.1.3.

Родственной к $B_{\xi}(\tau)$ является ковариационная функция, отличающаяся от (2.1) компенсацией математического ожидания процесса

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M_{\xi}) \cdot (x_2 - M_{\xi}) \cdot W_{\xi}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

и характеризующая степень линейной взаимосвязи между значениями переменной составляющей процесса, наблюдаемыми через временной интервал τ друг от друга. Ковариационная функция связана с корреляционным соотношением

$$K_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(\tau) - M_{\xi}^2, \quad (2.4)$$

а её значение при $\tau = 0$ совпадает с дисперсией СП, которая, в свою очередь, для эргодических СП совпадает со средней мощностью переменной составляющей каждой из реализаций

$$K_{\xi}(0) = D_{\xi} \rightarrow P_{\xi^{(i)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} [\xi^{(i)}(t) - \xi_{-}^{(i)}]^2 dt. \quad (2.5)$$

Взаимозависимость значений в разные моменты времени не может быть больше, чем в совпадающие, поэтому значения, принимаемые корреляционной и ковариационной функциями при $\tau \neq 0$, не могут превышать их значение в начале координат

$$B_{\xi}(0) \geq |B_{\xi}(\tau)|_{\tau \neq 0}, \quad K_{\xi}(0) \geq |K_{\xi}(\tau)|_{\tau \neq 0}. \quad (2.6)$$

Отметим, что для эргодических СП, реализаций которых являются периодическими функциями времени, в соотношениях (2.2), (2.5) и им аналогичных достаточно осуществлять усреднение во времени лишь на одном произвольном периоде сигнала, например

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{T_n} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_n} \xi^{(i)}(t) \cdot \xi^{(i)}(t-\tau) dt. \quad (2.7)$$

2.1.2. Спектральная плотность мощности случайного процесса определяется выражением

$$S_{\xi}(f) = m_1 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} |\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T)|^2 / T \right\}, \quad (2.8)$$

где $\dot{G}_{\xi^{(i)}}(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} \xi^{(i)}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$ - комплексные спектральные плотности отдельных реализаций процесса $\xi(t)$.

Спектральная плотность мощности характеризует среднее распределение мощности реализаций вдоль оси частот.

Наиболее важные свойства спектральной плотности мощности состоят в следующем:

1. $S_{\xi}(f)$ является четной (двухсторонней) функцией частоты f и принимает неотрицательные действительные значения.

2. $S_{\xi}(f)$ характеризует мощность, приходящуюся на каждый герц оси частот, и для напряжений имеет размерность $V^2/\Gamma_{\text{ц}}$, а для токов – $A^2/\Gamma_{\text{ц}}$.

3. Если реализации процесса $\xi(t)$ обладают дискретными спектральными составляющими, то спектральная плотность мощности на этих частотах выражается δ -функциями. В частности, для процессов с ненулевым математическим ожиданием

$$\begin{aligned} S_{\xi}(f) &= S_{\xi_{-}}(f) + M_{\xi}^2 \cdot \delta(f), \\ S_{\xi}(\omega) &= S_{\xi_{-}}(\omega) + 2\pi \cdot M_{\xi}^2 \cdot \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.9)$$

4. Полная средняя мощность реализаций случайного процесса $\xi(t)$ может быть определена путем интегрирования спектральной плотности мощности вдоль всей оси частот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = m_2 \{ \xi(t) \} = D_{\xi} + M_{\xi}^2 \rightarrow P_{\text{полн } \xi^{(i)}} \quad (2.10)$$

5. Спектральная плотность мощности подчиняется теореме Винера-Хинчина.

2.1.3. Теорема Винера-Хинчина утверждает: “Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса связаны интегральным преобразованием Фурье”

$$S_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (2.11)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} df \quad (2.12)$$

Выражения (2.11), (2.12) являются лишь одним из многих возможных вариантов записи теоремы Винера-Хинчина. Так, с учетом четности обеих функций, оказываются справедливыми варианты записи приведенные ниже

$$S_{\xi}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \right\} = 2 \cdot \int_0^{+\infty} B_{\xi}(\tau) \cdot \cos(\omega \tau) d\tau, \quad (2.13)$$

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_{\xi}(\omega) \cdot \cos(\omega \tau) d\omega. \quad (2.14)$$

Следствием теоремы Винера-Хинчина является свойство положительной определенности корреляционной функции случайного процесса. Положительная определенность означает, что корреляционной функцией может быть лишь такая четная функция аргумента τ , преобразование Фурье от которой неотрицательно на всех частотах.

2.1.4. Ширина спектра и интервал корреляции случайного процесса

Практической шириной спектра случайного процесса $\xi(t)$ называют величину

$$Ш_f = \frac{1}{\max_{f>0} S_{\xi}(f)} \cdot \int_{0+0}^{+\infty} S_{\xi}(f) df \quad (2.15)$$

Смысл этого определения состоит в том, что если взять процесс $\eta(t)$ с прямоугольным спектром, ширина которого в области положительных частот равна Π_f , а максимальное значение совпадает с максимумом $S_\xi(f)$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут обладать одинаковыми средними мощностями (рис. 2.1). Нижний предел интегрирования в (2.15) равный «0+0» указывает на то, что постоянная составляющая в расчете ширины спектра не участвует.

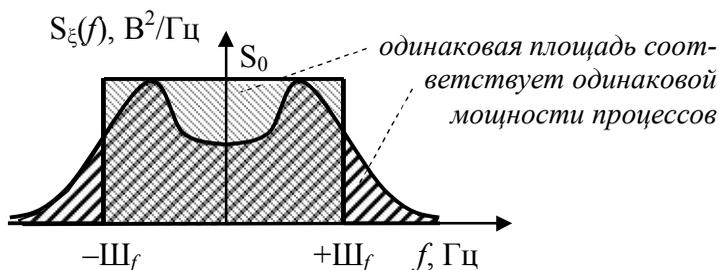


Рис. 2.1. Определение практической ширины спектра СП

Интервалом корреляции случайного процесса $\zeta(t)$ называют величину

$$\tau_k = \frac{1}{K_\zeta(0)} \cdot \int_0^{+\infty} |K_\zeta(\tau)| d\tau \quad (2.16)$$

За счет наличия модуля в подынтегральном выражении интервал корреляции определяется скоростью убывания абсолютных значений корреляционной функции и характеризует временной интервал предсказуемости значений случайного процесса. В соответствии со свойствами преобразования Фурье малый интервал корреляции соответствует процессам с широким спектром и быстро изменяющимися реализациями. Напротив, процессы с большим интервалом корреляции имеют узкий спектр и изменяются медленно, оставаясь достаточно предсказуемыми на протяжении значительного интервала времени.

Для процессов с нулевым математическим ожиданием, неотрицательной (при всех τ) корреляционной функцией и максимумом спектра на нулевой частоте между шириной спектра и интервалом корреляции существует жесткое соответствие

$$Ш_f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_\xi(f)}{S_\xi(0)} df = \frac{m_2\{\xi\}}{2 \cdot S_\xi(0)} = \frac{B_\xi(0)}{2 \cdot \left(2 \cdot \int_0^{+\infty} B_\xi(\tau) d\tau \right)} = \frac{1}{4 \cdot \tau_\kappa}. \quad (2.17)$$

2.1.5. Понятие белого шума и его практическое применение

Белым шумом называется случайный процесс, спектральная плотность мощности которого остается постоянной на всех частотах $S_\xi(f) = N_0$. Корреляционная функция такого процесса

имеет вид $B_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot e^{+j\omega\tau} d\omega = N_0 \cdot \delta(\tau)$, т.е. его сколь

угодно близко расположенные отсчеты не коррелированы. Иначе говоря, значение белого шума невозможно предсказать в момент t_2 , даже сколь угодно близкий к отсчету $\xi(t_1)$. Следует иметь в виду, что белый шум – это абстрактная математическая модель и в реальности не встречается, т.к. он должен был бы обладать бесконечной средней мощностью. Полезность понятия белого шума заключается в том, что для наблюдения и обработки случайных процессов в радиотехнике используются реальные цепи, обладающие конечной полосой пропускания, а ширина спектра многих реально существующих шумов существенно превышает эту полосу пропускания, так что по отношению к используемым устройствам обработки реальные шумы вполне допустимо считать белыми.

Полезную информацию об энергетических характеристиках СП можно также найти в учебной литературе [2, с. 118-123; 3, с. 27-39 или 4, с. 139-142, 147-148].

Лабораторная работа № 2. Энергетические характеристики случайных процессов

Цель работы – экспериментальное исследование энергетических (корреляционных и спектральных) характеристик случайных процессов.

2.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

2.2.1. При определении энергетических характеристик шума следует учитывать, что процессы с одним и тем же одномерным распределением могут иметь весьма отличающиеся корреляционные функции и спектральные плотности мощности (СПМ), так как одномерные законы распределения определяют поведение СП в одном временном сечении, а энергетические характеристики – развитие процесса во времени.

К примеру, случайный процесс, обладающий неизменной в ограниченной области частотной оси спектральной плотностью мощности, называют ограниченным по частоте белым шумом. Его энергетические характеристики, показанные на рис. 2.2(б), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \text{СПМ} & S_{\text{Оч}}(f) = N_0, \quad \text{при } |f| < F_{\text{max}}, \\ \text{коррел. функция} & B_{\text{Оч}}(\tau) = 2 \cdot N_0 \cdot F_{\text{max}} \cdot \text{sinc}(2\pi \cdot F_{\text{max}} \cdot \tau), \\ \text{дисперсия} & D_{\text{Оч}} = 2 \cdot N_0 \cdot F_{\text{max}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.

Другим интересным для радиотехнической практики является белый шум ограниченный по полосе. Его характеристики (см. рис. 2.3) определяются выражениями

$$\begin{aligned} S_{\text{Оп}}(f) &= N_0, \quad \text{при } F_{\text{min}} < |f| < F_{\text{max}}, \\ B_{\text{Оп}}(\tau) &= 2 \cdot N_0 \cdot \text{Ш}_f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \text{Ш}_f \cdot \tau) \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 \cdot \tau), \\ D_{\text{Оп}} &= 2 \cdot N_0 \cdot \text{Ш}_f, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $F_0 = 0,5 \cdot (F_{\max} + F_{\min})$ - центральная частота,
 $\Delta F = (F_{\max} - F_{\min})$ - ширина спектра процесса.

Анализ свойств этих СП показывает, что:

1) реализации ограниченного по частоте белого шума изменяются достаточно плавно, причем чем меньше величина F_{\max} (т.е. чем более узким является спектр процесса), тем более гладкими оказываются эти реализации;

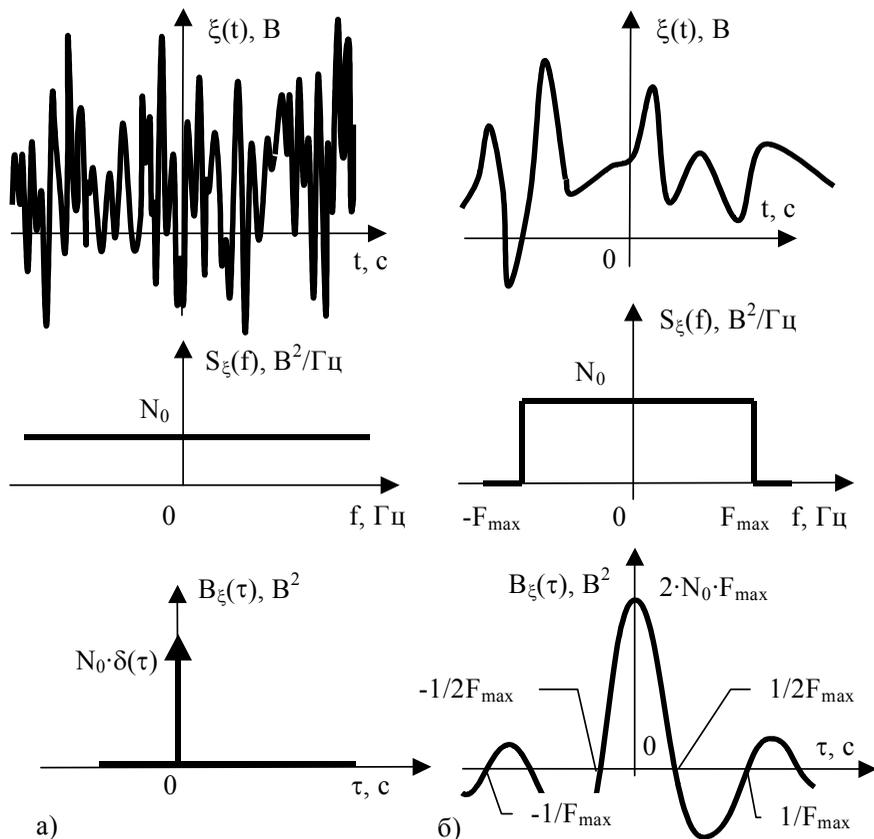


Рис. 2.2. Энергетические характеристики белого шума (а) и белого шума, ограниченного по частоте (б)

2) для шума, ограниченного по полосе, характерен колебательный характер изменения мгновенных значений, причем, чем меньше величина Δf (т.е. чем более узким является спектр СП), тем более гладкой является огибающая реализаций; чем больше частота F_0 , тем более высокочастотным является заполнение;

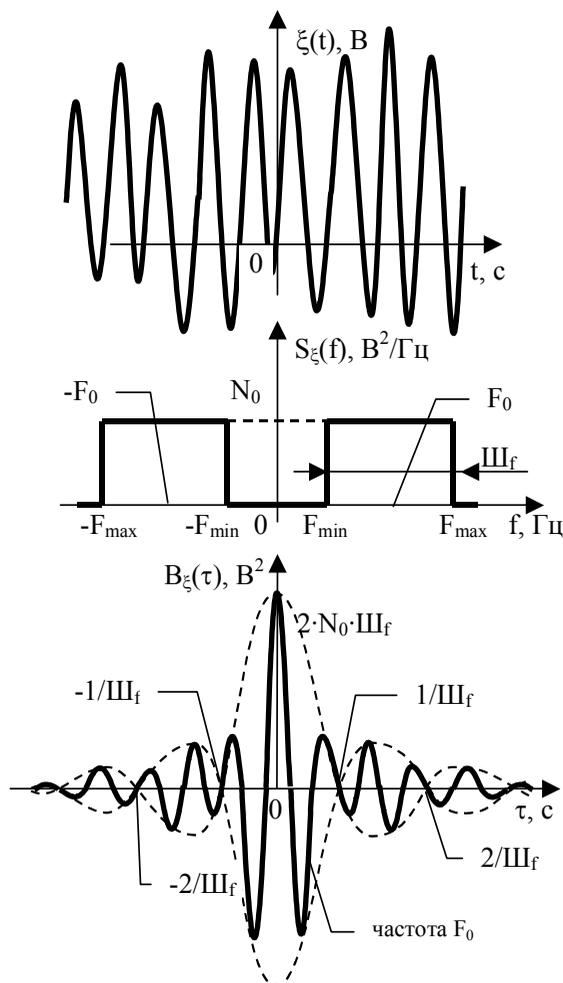


Рис. 2.3. Энергетические характеристики ограниченного по полосе белого шума

3) при $F_{\max} = 3Ш_f$ процессы будут обладать совпадающими дисперсиями и потому, несмотря на явное различие внешнего вида реализаций, будут характеризоваться одним и тем же нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и совпадающим эффективным значением.

Обратите внимание, что во всех ранее представленных случаях спектральная плотность мощности – это двухсторонняя (т.е. справедливая как для положительных, так и на отрицательных частот) функция, измеряемая в $B^2/Гц$.

2.2.2. Распределение по частоте мощности спектральных составляющих для периодических сигналов будет существенно иным, чем у шума; всплески мощности приходятся на частоты, кратные частоте наблюдаемого сигнала:

Энергетические характеристики **гармонического** сигнала со случайной начальной фазой задаются соотношениями

корреляционная функция $B_{\cos}(\tau) = 0,5 \cdot U_m^2 \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 \cdot \tau)$, B^2
 СПМ $S_{\cos}(f) = 0,25 \cdot U_m^2 \cdot [\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)]$, $B^2/Гц$
 дисперсия $D_{\cos} = U_m^2 / 2$; эффективное значение $\sigma_{\cos} = U_m / \sqrt{2}$.

Графически эти характеристики показаны на рис. 2.4.

Последовательность **прямоугольных** импульсов со случайной начальной фазой имеет энергетические характеристики:

корреляционную функцию $B_{\text{rect}}(\tau) = U_m^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\text{rect}}(\tau - kT_n)$, B^2 ,

где $\gamma_{\text{rect}}(\tau) = 1 - 4 \cdot |\tau| / T_n$, при $|\tau| \leq 0,5 \cdot T_n$

СПМ $S_{\text{rect}}(\omega) = \frac{4 \cdot U_m^2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \delta\left(f - \frac{2n+1}{T_n}\right)$, $B^2/Гц$,

дисперсию $D_{\text{rect}} = U_m^2$; эффективное значение $\sigma_{\text{rect}} = U_m$.

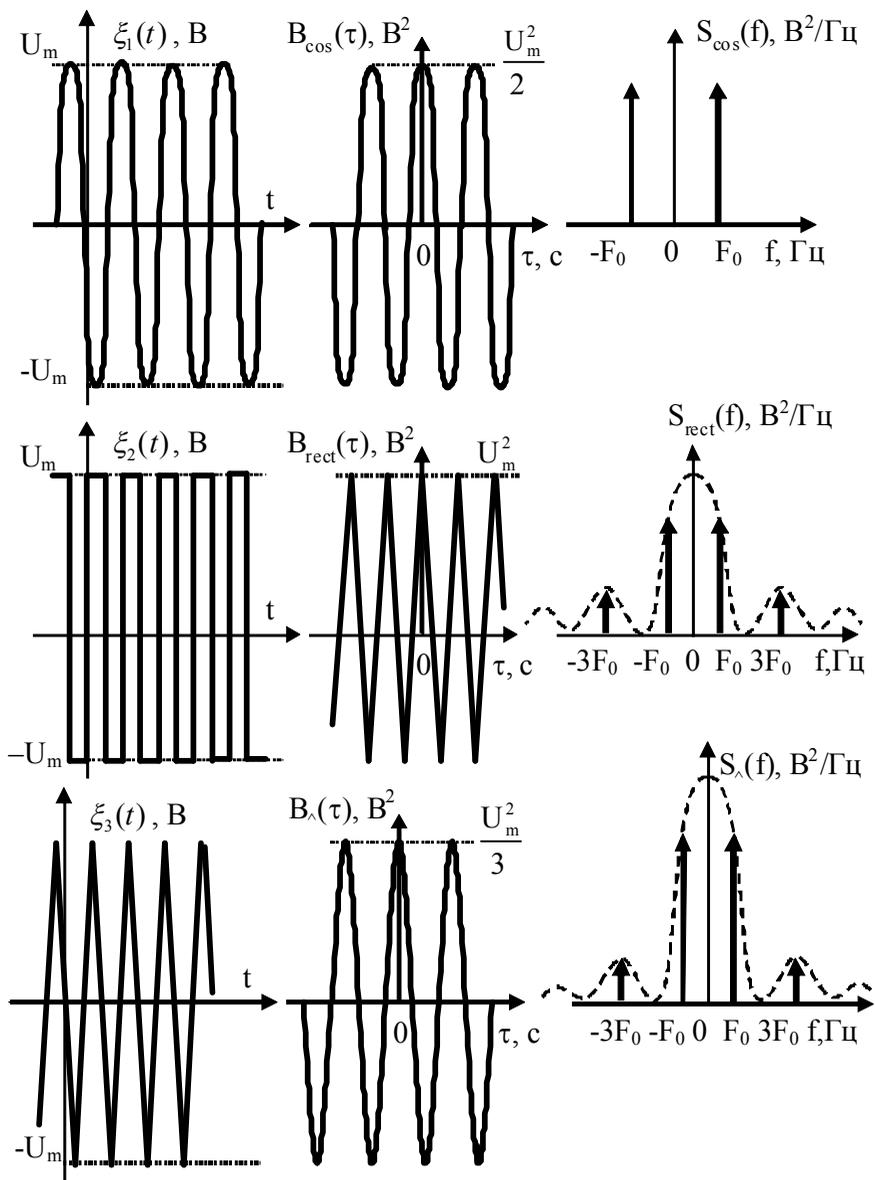


Рис. 2.4. Энергетические характеристики случайных сигналов

Последовательность **треугольных** импульсов со случайной временной задержкой характеризуется следующими энергетическими показателями

$$\text{корреляционной функцией } B_{\wedge}(\tau) = U_m^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\wedge}(\tau - kT_n), \quad B^2,$$

$$\text{где } \gamma_{\wedge}(\tau) = \frac{1}{3} - 8 \cdot \left| \frac{\tau}{T_n} \right|^2 + \frac{32}{3} \cdot \left| \frac{\tau}{T_n} \right|^3, \quad \text{при } |\tau| \leq 0,5 \cdot T_n$$

$$\text{СПМ } S_{\wedge}(\omega) = \frac{16 \cdot U_m^2}{\pi^4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cdot \delta \left(f - \frac{2n+1}{T_n} \right), \quad B^2/\Gamma_{\text{ц}},$$

$$\text{дисперсия } D_{\wedge} = U_m^2/3; \quad \text{эффективное значение } \sigma_{\wedge} = U_m / \sqrt{3}.$$

Таблица 2.1

Номер бригады	Тип шума: ограниченный по...	Максимальное значение СПМ S_0 , В ² /Гц	Частотные ограничения
1	частоте	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{max}} = 1,0 \text{ кГц}$
2	полосе	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{min}} = 1,2 \text{ кГц};$ $F_{\text{max}} = 2,0 \text{ кГц}$
3	частоте	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 25,0 \text{ кГц}$
4	частоте	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 32,0 \text{ кГц}$
5	частоте	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{max}} = 1,6 \text{ кГц}$
6	полосе	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$F_{\text{min}} = 1,6 \text{ кГц};$ $F_{\text{max}} = 2,4 \text{ кГц}$
7	частоте	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 36,0 \text{ кГц}$
8	частоте	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$F_{\text{max}} = 32,0 \text{ кГц}$

2.3. Домашнее задание к лабораторной работе

2.3.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

2.3.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте и внесите в отчет графики спектральной плотности мощности и корреляционной функции нормального шума, параметры которого заданы в табл. 2.1.

2.3.3. Применительно к квазислучайным сигналам, указанным в табл. 2.2, и проанализированному нормальному шуму (из табл. 2.1) рассчитайте амплитуду сигнала A_{\max} , обеспечивающую отношение сигнал-шум по напряжению $h = 2.5$, и амплитуду сигнала A_{\min} , обеспечивающую отношение сигнал-шум

$h = 0,25$. Для каждой из найденных амплитуд рассчитайте и постройте графики корреляционных функций и спектральных плотностей мощности аддитивной смеси сигнала и шума.

Таблица 2.2

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 0,9 \text{ кГц}$
2	Треугольный	$U_{\min} = -A_{\max}; U_{\max} = +A_{\max};$ $F = 1,1 \text{ кГц}$
3	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,3 \text{ кГц}$
4	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 1,5 \text{ кГц}$
5	Треугольный	$U_{\min} = -A_{\max}; U_{\max} = +A_{\max};$ $F = 0,9 \text{ кГц}$
6	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,1 \text{ кГц}$
7	Прямоугольный	$U_m = A_{\max}; F = 1,3 \text{ кГц}$
8	Гармонический	$U_m = A_{\max}; F = 1,5 \text{ кГц}$

Примечание: при построении энергетических характеристик смеси сигнала и шума следует иметь в виду, что для некоррелированных СП корреляционная функция суммы равна сумме корреляционных функций слагаемых. Аналогичное утверждение справедливо и для спектральной плотности процессов.

2.4. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование энергетических характеристик шума

Цели этапа:

- 1) получить оценки корреляционной функции и спектральной плотности мощности шума и сравнить их с теоретическими;
- 2) оценить стабильность получаемых оценок энергетических характеристик СП.

Таблица 2.3

Номер бригады	Модуль №1 - источник шума	Параметры источника шума
1	Низкочастотный	$\sigma = 0,5 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}$
2	Узкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 1,6 \text{ кГц}$
3	Широкополосный	$\sigma = 1,0 \text{ В}$
4	Широкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}$
5	Низкочастотный	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 1,5 \text{ мс}$
6	Узкополосный	$\sigma = 0,8 \text{ В}; \tau = 2 \text{ мс}; F = 2,0 \text{ кГц}$
7	Широкополосный	$\sigma = 1,2 \text{ В}$
8	Широкополосный	$\sigma = 1,6 \text{ В}$

Рекомендации по выполнению:

2.4.1. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требованиями табл. 2.3; остальные модули перевести (при необхо-

димости) в выключенное состояние. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов; частоту дискретизации $F_d = 48$ кГц. В блоке анализаторов настроить оба анализатора на контрольную точку №1; установить левый анализатор в состояние осциллографа, а правый - коррелометра. Ось вертикального масштабирования коррелометра установить в состояние наибольшего разрешения (мелкий масштаб).

2.4.2. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. Оценить стабильность наблюдаемых корреляционных функций. Одну или две из них занести в отчет.

2.4.3. Переключить правый анализатор в состояние спектроанализатора. Продолжая обновлять данные, убедиться, что в отличие от корреляционной функции оценка спектральной плотности мощности даже при большой длительности выборки оказывается весьма неустойчивой, однако расположение спектральных выбросов по частоте носит случайный характер и при усреднении различных спектральных оценок результирующая функция частоты будет носить гладкий характер. Зарисовать в отчет приближенный вид произвольного наблюдаемого спектра.

Этап 2. Исследование энергетических характеристик квазислучайных процессов

Цели этапа:

1) получить и сравнить их с теоретическими оценки корреляционной функции и спектральной плотности мощности периодических квазислучайных сигналов;

2) исследовать влияние объема анализируемой выборки сигнала на точность получаемых оценок;

3) оценить влияние параметров сигналов на вид (масштаб) их энергетических характеристик.

Рекомендации по выполнению:

2.4.4. Установить тип и параметры модуля №1 схемы моделирования в соответствии с требованиями табл. 2.2; вертикальный масштаб спектроанализатора установить максимально возможным. Проследить за изменениями оценок спектральной плотности мощности наблюдаемого СП и типовой спектр качественно (приближенно) занести в отчет.

2.4.5. Переключить левый анализатор в режим оценки числовых характеристик СП, а правый анализатор – в состояние коррелометра. Провести серию из 15...20 экспериментов, в ходе которой сопоставить наблюдаемые корреляционные функции с теоретическими. Зафиксировать в отчете (строго, с соблюдением масштаба) типовую оценку корреляционной функции и полученные по той же реализации значения оценок математического ожидания и дисперсии СП.

2.4.6. Установить объем выборки $N = 512$. Провести серию из 15...20 экспериментов и, если изменение N повлияло на вид наблюдаемых оценок, занести одну из наиболее отличающихся оценок корреляционной функции СП в отчет.

2.4.7. Восстановить объем выборки $N = 4096$ отсчетов, переключить оба анализатора на выход первого сумматора, т.е. на контрольную точку №6 и установить модуль №3 схемы моделирования в режим формирования постоянной составляющей, выбирая ее величину по правилу

$$U = 1 + 0,3 \cdot N_{бр}, \quad В$$

где $N_{бр}$ - номер бригады.

Для указанного способа формирования СП повторить п. 2.4.5.

Этап 3. Исследование влияния аддитивного шума на энергетические характеристики СП

Цель этапа:

1) исследовать зависимость характеристик смеси сигнала и шума от интенсивностей составляющих и отношения сигнал-шум.

Рекомендации по выполнению:

2.4.8. Переключить модуль №3 схемы моделирования в режим формирования шума с параметрами из табл. 2.3. Проверить, что модуль №1 обеспечивает генерацию сигнала, задаваемого табл. 2.2. Установить анализаторы в состояние осциллографа и коррелометра и настроить (если это не было сделано ранее) на выход первого сумматора, т.е. на контрольную точку №6.

2.4.9. Подобрать такой горизонтальный масштаб отображения корреляционной функции, чтобы при сохранении различимости ее формы на экране умещалось как можно больше периодов колебаний. Формируя новые реализации случайного процесса путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и внести в отчет типовую корреляционную функцию СП. Для упрощения построения графика допустимо фиксировать его качественно, т.е. с приближенным сохранением формы и регистрацией наиболее важных вертикальных и горизонтальных координат.

2.4.10. Повторить предыдущий пункт, изменив амплитуду сигнала, формируемого модулем №1, на величину A_{\min} , рассчитанную при выполнении п. 2.3.3 домашнего задания.

2.4.11. В окне программы "Параметры модулей" открыть вкладку "Модуль 3", контролирующую параметры формируемого схемой моделирования шума. Осуществляя ручную кор-

ректировку уровня шума в пределах от $0,2 \cdot \sigma^*$ до $2 \cdot \sigma^*$, (где σ^* – эффективное значение шума, определяемое индивидуальным вариантом задания) проследить за изменением оценок корреляционной функции СП, обращая внимание на разницу в поведении этих функций при значениях аргумента $|\tau| \approx 0$ и при $|\tau| \gg 0$.

По результатам наблюдения принять решение о возможности по форме корреляционной функции обнаружить наличие в составе анализируемого СП некоторой периодической компоненты. Сделанное заключение внести в отчет.

2.4.12. Переключить коррелометр в состояние спектроанализатора и повторить исследования, описанные в предыдущем пункте. Оценить возможность обнаружения факта присутствия в составе наблюдаемого СП периодической компоненты по результатам анализа его спектральной плотности мощности и внести соответствующее заключение в отчет.

2.5. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Дайте определения корреляционной и ковариационной функций СП. Перечислите их основные свойства.

2. Что называется спектральной плотностью мощности СП? Как она связана с амплитудным Фурье-спектром реализации и с корреляционной функцией СП?

3. Приведите известные Вам определения интервала корреляции и ширины спектра СП. Как они связаны между собой?

4. Какие процессы называют узкополосными? Как аналитически рассчитываются корреляционные функции узкополосных случайных процессов при известной спектральной плотности мощности? Приведите примеры.

5. Как определить эффективное значение случайного процесса по его корреляционной функции и спектральной плотности мощности?

6. Какой случайный процесс называют “белым” шумом? Каковы энергетические характеристики ограниченного по частоте и ограниченного по полосе белого шума ?

7. Как влияет аддитивный широкополосной шум на корреляционную функцию гармонического колебания со случайной начальной фазой? Приведите примеры для нескольких существенно различных отношений сигнал-шум.

8. Можно ли обнаружить факт присутствия периодического сигнала в шуме при отношении сигнал-шум $h < 1$? Предложите способ реализации такого обнаружителя.

9. Как может быть определена экспериментально корреляционная функция и спектральная плотность мощности эргодического процесса?

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

3.1. Теоретические основы

Случайный процесс $\zeta(t)$, поступающий на вход линейного устройства порождает на его выходе реакцию $\eta(t)$, которая, естественно, также является случайной, а её вероятностные и энергетические характеристики определяются статистическими характеристиками воздействия $\zeta(t)$ и свойствами цепи.

3.1.1. Оценка вероятностных характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

Большинство линейных цепей являются цепями инерционными, поэтому текущее значение на выходе цепи определяется не только значением, воздействующим на вход в данный момент времени, но и всей бесконечной совокупностью значений воздействия, поступавших на вход ранее. Поскольку расчет закона распределения даже для суммы двух случайных величин требует выполнения свертки плотностей вероятности слагаемых, а в рассматриваемых случаях таких слагаемых бесконечно много, то общего способа расчета закона распределения реакции линейной цепи на случайное воздействие не существует. Вместе с тем, есть два случая, когда вероятностные свойства реакции цепи можно предсказать:

1. Если на линейную цепь воздействует нормальный СП, то и процесс на выходе цепи будет обладать нормальным распределением.

2. При воздействии на узкополосную цепь широкополосного СП наблюдается “**эффект нормализации**”, заключающийся в том, что закон распределения реакции цепи неограни-

ченно приближается к нормальному. Причиной эффекта нормализации служит центральная предельная теорема Ляпунова.

3.1.2. Частотный метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

Частотный метод предполагает известной амплитудно-частотную характеристику цепи $|\dot{K}(f)|$ и устанавливает соответствие между спектральными плотностями мощности процессов на входе и выходе цепи

$$S_{\eta}(f) = S_{\xi}(f) \cdot |\dot{K}(f)|^2. \quad (3.1)$$

Корреляционные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $S_{\eta}(f)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.12), (2.14).

3.1.3. Временной метод расчета энергетических характеристик реакции линейной цепи на случайное воздействие

При использовании временного метода анализа свойства цепи определяются корреляционной функцией ее импульсной характеристики

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}(\omega)|^2 \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot g(x - \tau) dx, \quad (3.2)$$

где $|\dot{K}(\omega)|$ – АЧХ, а $g(\tau)$ – импульсная характеристика цепи.

Согласно временному методу соответствие между корреляционными функциями воздействия и реакции цепи имеет вид

$$B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\xi}(x) \cdot R_g(\tau - x) dx. \quad (3.3)$$

Спектральные свойства реакции цепи могут быть рассчитаны по $B_{\eta}(\tau)$ в соответствии с теоремой Винера-Хинчина (2.11), (2.13).

3.1.4. Понятие шумовой полосы пропускания цепи

Шумовая полоса пропускания линейной цепи используется при воздействии на цепь белого шума или процесса, спектр которого существенно шире величины полосы пропускания цепи. Она представляет собой полосу пропускания идеального фильтра, который обладает коэффициентом передачи равным максимальному коэффициенту передачи анализируемой цепи и обеспечивает на выходе ту же мощность реакции, что и анализируемая цепь. Выражение для расчета шумовой полосы имеет вид

$$P_{\text{шф}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\dot{K}(f)|^2}{\max_f \{|\dot{K}(f)|^2\}} df. \quad (3.4)$$

Ширина шумовой полосы линейной цепи, как правило, пропорциональна полосе пропускания по уровню 0,707. Для RC-цепочек и колебательных контуров, в частности, соотношение между этими двумя параметрами составляет

$$P_{\text{шф}} = \frac{\pi}{2} \cdot P_{f 0,707}. \quad (3.5)$$

Лабораторная работа № 3. Прохождение случайных процессов через линейные цепи

Цель работы – экспериментальное исследование вероятностных и энергетических характеристик СП при типовых линейных преобразованиях.

3.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

3.2.1. При расчете энергетических характеристик СП на выходе линейных цепей полезно учесть, что если линейная цепь обладает малой полосой пропускания, а воздействующий

шум в области частот, охватывающей (с запасом) полосу пропускания цепи, характеризуется постоянной спектральной плотностью мощности, то для подобной цепи этот шум оказывается по свойствам эквивалентен белому шуму и расчет дисперсии (средней мощности переменной составляющей) выходного СП можно производить с использованием понятия шумовой полосы по формуле

$$D_{\text{вых}} = 2 \cdot \Pi_{\text{шф}} \cdot K_0^2 \cdot N_0, \quad (3.6)$$

где N_0 – спектральная плотность мощности процесса на входе цепи, K_0 – максимальное значение АЧХ цепи.

3.2.2. Шум и полезный сигнал порождаются разными источниками (причинами) и потому оказываются независимыми (некоррелированными) случайными процессами. Как следствие, корреляционная функция смеси сигнала и шума, поступающих на вход устройства обработки, может быть рассчитана путем суммирования соответствующих характеристик, относящихся отдельно к сигналу и шуму

$$V_{\xi \text{ смеси}}(\tau) = V_{\xi \text{ сигнала}}(\tau) + V_{\xi \text{ шума}}(\tau). \quad (3.7)$$

При линейных преобразованиях в соответствии с принципом суперпозиции реакция цепи на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из воздействий в отдельности. По этой причине и на выходе линейной цепи энергетические характеристики смеси оказываются равными сумме энергетических характеристик прошедших через цепь сигнала и шума

$$V_{\eta \text{ смеси}}(\tau) = V_{\eta \text{ сигнала}}(\tau) + V_{\eta \text{ шума}}(\tau). \quad (3.8)$$

Наконец, так как спектральные плотности мощности связаны с корреляционными функциями линейным преобразованием Фурье, то аналогичные (3.7) и (3.8) соотношения справедливы и для спектральных характеристик процессов.

3.2.3. При прохождении через линейную цепь, обладающую фильтрующими свойствами, форма реализаций, а значит и характеристики процессов, могут существенно изменяться. Например, если на идеальный полосовой фильтр, пропускающий составляющие, лежащие в полосе частот от 1,5 до 4,5 кГц, воздействует сигнал треугольной формы с частотой $F_0 = 1$ кГц, то из всех спектральных составляющих этого сигнала на выход фильтра пройдет лишь третья гармоника. Таким образом, отклик фильтра вместо треугольной формы будет иметь характер гармонического колебания со строго косинусоидальной корреляционной функцией.

При количественном расчете учтем, что спектр исходного колебания может быть представлен в виде (см. п. 2.2.2)

$$S_{\wedge}(f) = \frac{16 \cdot U_m^2}{\pi^4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cdot \delta\left(f - \frac{2n+1}{T_{\Pi}}\right). \quad (3.9)$$

В этом выражении индекс n используется лишь для указания порядкового номера слагаемого, а не номера гармоники сигнала. В частности, при $n = 0$ дельта-функция, входящая в слагаемое имеет вид $\delta(f - 1/T_{\Pi})$, что соответствует первой гармонике сигнала. Подобные особенности нумерации связаны с тем, что в спектральной плотности мощности треугольного сигнала значимыми являются лишь нечетные гармоники. Интенсивность же четных составляющих равна нулю, и вносить номера четных гармоник в расчетное выражение (3.9) нецелесообразно.

Третья гармоника характеризуется δ -функцией $\delta(f - 3/T_{\Pi})$, то есть слагаемым с $n = 1$ и поправочным коэффициентом при δ -функции равным $P_3 = \frac{16 \cdot U_m^2}{\pi^4 \cdot (2n+1)^4} \Big|_{n=1} \approx 0,002 \cdot U_m^2$, определяющим мощность составляющей спектра на частоте $3F_0$. На выходе идеального фильтра амплитуды составляющих уве-

личиваются в K_0 раз, а мощности – в K_0^2 раз, поэтому спектральная плотность мощности профильтрованных треугольных импульсов будет иметь вид, представленный на рис. 3.2 слева.

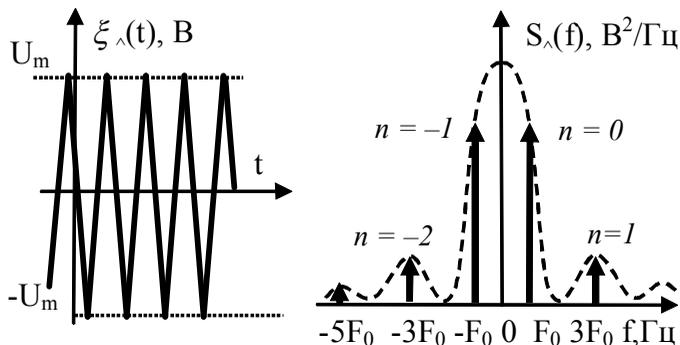


Рис. 3.1. Спектральная плотность мощности периодической последовательности треугольных импульсов со случайным сдвигом вдоль оси времени

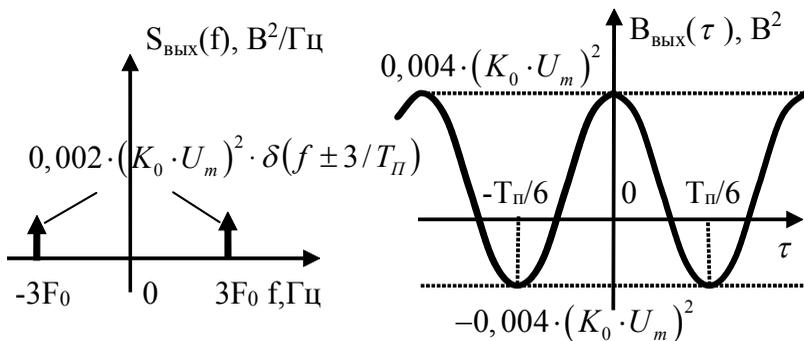


Рис. 3.2. Спектральная плотность мощности отклика идеального фильтра на последовательность треугольных импульсов

Корреляционная функция, соответствующая наблюдаемому после фильтрации гармоническому сигналу, показана на рис. 3.2

справа. Её максимальное значение, равное $0,004 \cdot (K_0 U_m)^2$, возникает в результате суммирования мощностей составляющих на частотах $+3F_0$ и $-3F_0$ (вспомните, СПМ – это двухсторонняя функция частоты, соответствующая комплексному спектру сигналов) и соответствует средней мощности гармонического колебания, наблюдаемого на выходе фильтра.

3.2.4. Энергетические характеристики прочих случайных сигналов, исследуемых в работе, можно найти в подразделе 2.2, а комплексные коэффициенты передачи используемых в работе линейных цепей в табл. 3.1. При расчете шумовых полос пропускания цепей полезно помнить, что у RC-цепи и колебательного контура они в $\pi/2$ раз превышают величину полосы пропускания по уровню 0,707.

Таблица 3.1

Интегрирующая RC-цепь	$\dot{K}(f) = \frac{K_0}{1 + j \cdot f / F_{cp}}$
Колебательный контур	$\dot{K}(f) = \frac{K_0}{1 + j \cdot \xi}, \quad \xi = 2Q \frac{f - F_{рез}}{F_{рез}}, \quad f > 0$
Идеальный ФНЧ	$\dot{K}(f) = \begin{cases} K_0, & \text{при } f \leq F_{cp} \\ 0, & \text{при } f > F_{cp} \end{cases}$
Идеальный полосовой фильтр	$\dot{K}(f) = \begin{cases} K_0, & \text{при } F_{cp \text{ ниж}} \leq f \leq F_{cp \text{ верх}} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases}$

3.2.5. Дополнительную полезную информацию по вопросам прохождения случайных процессов через линейные цепи можно найти в учебной литературе [2, с.202-204, 218-220, 329-337; 3, с.71-82; 4, с.307-316, 492-493].

3.3. Домашнее задание к лабораторной работе

3.3.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

3.3.2. Определите и запишите в отчет шумовую полосу пропускания фильтра, указанного в табл. 3.2. Рассчитайте корреляционную функцию, спектральную плотность мощности и дисперсию шума, который будет наблюдаться на выходе этого фильтра, если на его вход воздействует нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Графики полученных теоретических зависимостей занесите в отчет в масштабе, достаточном для отображения поверх них результатов лабораторных исследований.

Таблица 3.2

Номер бригады	Модуль №4 - тип фильтра	Параметры фильтра
1	идеальный ПФ	$K_0 = 2,2$; $F_{\text{ср ниж}} = 0,7 \text{ кГц}$, $F_{\text{ср верх}} = 3,3 \text{ кГц}$
2	колебат. контур	$K_0 = 8$; $F_{\text{резон}} = 4 \text{ кГц}$; $Q = 32$
3	идеальный ФНЧ	$K_0 = 2,5$; $F_{\text{ср}} = 2 \text{ кГц}$
4	интегр. RC-цепь	$K_0 = 2$; $F_{\text{ср}} = 2 \text{ кГц}$
5	интегр. RC-цепь	$K_0 = 2,8$; $F_{\text{ср}} = 1 \text{ кГц}$
6	идеальный ФНЧ	$K_0 = 2,9$; $F_{\text{ср}} = 1,5 \text{ кГц}$
7	колебат. контур	$K_0 = 10$; $F_{\text{резон}} = 3 \text{ кГц}$; $Q = 40$
8	идеальный ПФ	$K_0 = 3,2$; $F_{\text{ср ниж}} = 1,9 \text{ кГц}$, $F_{\text{ср верх}} = 3,1 \text{ кГц}$

3.3.3. Полагая, что на вход фильтра помимо шума будет действовать еще и сигнал, указанный в табл. 3.3, рассчитайте и постройте корреляционную функцию и спектральную плотность мощности смеси, наблюдаемой на выходе фильтра. Укажите особенности получаемых энергетических характеристик, указывающие на присутствие периодического сигнала в составе воздействующего на фильтр случайного процесса. Определите и внесите в отчет отношение сигнал-шум на входе и выходе фильтра. Продумайте, как может изменяться наблюдаемое на выходе фильтра отношение сигнал-шум при изменении его параметров.

Таблица 3.3

Номер бригады	Вид формируемого сигнала	Параметры сигнала
1,8	треугольный	$U_{\min} = -0,5 \text{ В}; U_{\max} = +0,5 \text{ В};$ $F = 2 \text{ кГц}$
2,7	гармонический	$U_m = 0,3 \text{ В}; F = 3,5 \text{ кГц}$
3,6	прямоугольный	$U_m = 0,4 \text{ В}; F = 1 \text{ кГц}$
4,5	гармонический	$U_m = 0,2 \text{ В}; F = 1 \text{ кГц}$

3.4. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Преобразование нормального шума в линейных цепях

Цели этапа:

- 1) получить экспериментально статистические характеристики шума и сравнить их с теоретическими;
- 2) исследовать влияние характеристик линейных цепей на энергетические характеристики СП, наблюдаемых на их выходе.

Рекомендации по выполнению:

3.4.1. Установить частоту дискретизации $F_{\text{дискр}} = 48$ кГц, а объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов. Настроить модуль №1 схемы моделирования случайных процессов на формирование широкополосного нормального шума с эффективным значением $\sigma_{\text{шум}} = 0,5$ В, а модуль №4 - в соответствии с требованиями табл. 3.2; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. В блоке анализаторов установить оба анализатора в состояние осциллографа и настроить левый на контрольную точку №6, а правый - на контрольную точку №4.

3.4.2. Обновляя данных (нажатием одноименной кнопки в окне управления, показанном на рис. 1.8), сопоставить сигналы на входе и выходе фильтра и качественно (приблизительно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных наблюдаемых реализаций.

3.4.3. Переключить анализаторы в режим оценки числовых характеристик и занести в отчет показатели процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра.

3.4.4. Перейти к исследованию гистограмм $W(x)$ наблюдаемых случайных процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и оценить (визуально) близость распределения вероятностей процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра, к нормальному. Внести в отчет по одной наиболее типичной гистограмме.

3.4.5. Переключить анализаторы в режим измерения спектральной плотности мощности. Продолжая обновление данных, провести серию из 15...20 экспериментов, контролируя распределение по частотам выбросов наблюдаемых гра-

фигов. Зафиксировав (приблизенно, по результатам визуального наблюдения) для каждой из частот среднее значение интенсивности спектральных составляющих, занести в отчет усредненные спектральные характеристики процессов, наблюдаемых на входе и выходе фильтра.

3.4.6. Переключить анализаторы в режим коррелометра и, обновляя данные, выделить и внести в отчет корреляционные функции, соответствующие процессам на входе и выходе фильтра.

3.4.7. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 3.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 3.4. Для каждой корректировки проанализировать осциллограммы, а также вероятностные и энергетические характеристики на выходе фильтра, сопоставить их (можно без занесения в отчет) с уже зафиксированными ранее (при выполнении пп. 3.4.1-3.4.6) данными и записать выводы о влиянии предложенных корректировок на результаты фильтрации.

Таблица 3.4

Номер бригады	Первая корректировка параметров	Вторая корректировка параметров
1, 8	сохраняя центральную частоту, уменьшить вдвое полосу пропускания, а K_0 вдвое увеличить	установить нижнюю частоту среза $F_{\text{ср ниж}} = 2,5 \text{ кГц}$
2, 7	увеличить и резонансную частоту, и добротность контура в 3 раза	установить добротность контура $Q = 10$
3 – 6	уменьшить частоту среза в 3 раза	увеличить K_0 в 3 раза

Этап 2. Прохождение смеси квазислучайного сигнала и шума через линейную цепь

Цели этапа:

- 1) получить экспериментально энергетические характеристики для смеси шума и полезного периодического сигнала;
- 2) исследовать признаки, указывающие на присутствие в шуме периодических сигналов.

Рекомендации по выполнению:

3.4.8. Вернуть параметры модуля №4 к данным из табл. 3.2, а модуль №3 установить в режим формирования сигнала из табл. 3.3. Оба анализатора, контролирующие ситуацию на входе и выходе фильтра, установить в состояние осциллографа.

3.4.9. Сопоставить сигналы, наблюдаемые на входе и выходе фильтра, и качественно (приближенно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных реализаций.

3.4.10. Переключить анализаторы в режим спектрального анализа процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и зафиксировать в отчете типовые графики распределения интенсивностей спектральных составляющих на входе и выходе фильтра.

3.4.11. Переключить анализаторы в режим коррелометра и внести в отчет типовую корреляционную функцию, соответствующую процессу на выходе фильтра. Оценить по этой функции отношение сигнал-шум на выходе фильтра.

3.4.12. Выполнить (по отдельности, каждый раз по отношению к варианту из табл. 3.2) две корректировки параметров, указанные в табл. 3.4. Для каждой корректировки внести в отчет типовые осциллограммы и энергетические характеристики процессов на выходе фильтра и сделать выводы о влиянии фильтрации на отношение сигнал-шум.

3.5. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Можно ли в линейных цепях отдельно анализировать прохождение сигнала и шума? Как изменяется форма реализаций широкополосного СП при низкочастотной и полосовой фильтрации?

2. При каких условиях СП на выходе линейной цепи является стационарным? Как влияет амплитудно-частотная характеристика цепи на спектральную плотность мощности и корреляционную функцию выходного СП? Каково влияние на те же свойства СП фазо-частотной характеристики цепи?

3. Каковы возможные изменения энергетических и вероятностных характеристик СП при его прохождении через **безынерционную** линейную цепь?

4. Может ли увеличиваться дисперсия СП после прохождения через линейную цепь? Может ли уменьшаться? Если "да", то приведите примеры. (Рассмотрите как пассивные, так и активные линейные цепи)

5. В каких случаях при теоретическом анализе допустимо считать шум на входе цепи «белым»? Как влияет изменение центральной частоты полосового фильтра на корреляционную функцию выходного СП, когда на входе действует «белый» шум?

6. Как изменяются вероятностные, энергетические и числовые характеристики **нормального** СП при его прохождении через линейные цепи?

7. Что называют эффектом нормализации широкополосных СП в узкополосных линейных цепях? Разъясните причины возникновения эффекта нормализации.

8. Для смеси узкополосного полезного сигнала и широкополосного шума объясните качественно, как изменяется отношение сигнал-шум на выходе ФНЧ при уменьшении его верхней граничной частоты?

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Теоретические основы

4.1.1. Безынерционные нелинейные преобразования случайных процессов

Если каждое значение $y(t)$ случайного процесса $\eta(t)$ на выходе нелинейного преобразователя определяется значением $x(t)$ сигнала $\xi(t)$, воздействующего на вход преобразователя в тот же самый момент времени, то говорят, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ связаны безынерционным нелинейным преобразованием $y = f(x)$. Для функций $y = f(x)$, не содержащих горизонтальных участков (см. пример на рис. 4.1 слева), каждое выходное значение y может быть получено из конечного числа аргументов x , т.е. существует *конечнозначная* обратная функция $x = \varphi_i(y)$, где i – номер ветви обратной функции $\varphi(\cdot)$. В таком случае взаимосвязь между одномерными законами распределения выходного и входного СП имеет вид

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right|, \quad (4.1)$$

где суммирование идет по всем ветвям обратной функции.

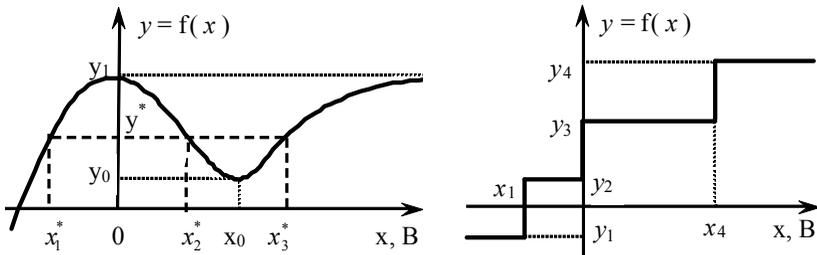


Рис. 4.1. Возможные варианты функции прямого преобразования для безынерционного преобразователя

Если же функция прямого преобразования $y = f(x)$, напротив, состоит лишь из горизонтальных участков (как показано на рис. 4.1 справа), то получаемый СП может принимать лишь квантованное множество значений y_m (на рис. 4.1 справа подобных значений четыре – от y_1 до y_4). Значение y_m на выходе будет наблюдаться только в тех случаях, когда значение воздействия $\xi(t)$ будет лежать в пределах соответствующего этому y_m интервала оси x . Например, вероятность появления значения y_1

$$P\{\eta = y_1\} = P\{\xi \leq x_1\} = \int_{-\infty}^{x_1} W_\xi(x) dx.$$

Аналогично, для уровня y_2 имеем

$$P\{\eta = y_2\} = P\{x_1 \leq \xi < 0\} = \int_{x_1}^0 W_\xi(x) dx.$$

И поскольку записанные выше вероятности приходятся на отдельные точки оси x плотность вероятности в этих точках оказывается бесконечно большой и может быть записана посредством дельта-функции

$$W_\eta(y) = \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.2)$$

где число слагаемых определяется количеством горизонтальных участков зависимости $y = f(x)$.

Универсальная формула, определяющая одномерную плотность вероятности СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя, имеет вид:

$$W_\eta(y) = \sum_i W_\xi(\varphi_i(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi_i(y)}{dy} \right| + \sum_m P\{\eta = y_m\} \cdot \delta(y - y_m), \quad (4.3)$$

где первая сумма включает все ветви обратных функций по всем наклонным участкам зависимости $y = f(x)$, а вторая сумма – все горизонтальные участки той же самой зависимости.

Числовые характеристики СП на выходе безынерционного нелинейного преобразователя могут быть рассчитаны по стандартным правилам (на основе найденной $W_\eta(y)$), либо минуя данный этап по правилам:

$$M_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot W_\xi(x) dx, \quad (4.4)$$

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - M_\eta]^2 \cdot W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 \cdot W_\xi(x) dx - M_\eta^2. \quad (4.5)$$

4.1.2. Амплитудное и фазовое детектирование узкополосных нормальных случайных процессов

Узкополосными называют случайные процессы, центральная частота спектра которых существенно превышает его ширину. Их реализации представляют собой квазигармонические колебания с медленно изменяющимися огибающей

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} \quad (4.6)$$

и фазой

$$\Theta(t) = \arctg\left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right). \quad (4.7)$$

Здесь вспомогательный процесс $\eta(t)$ является сопряженным с $\xi(t)$ по Гильберту.

Для выделения огибающей и фазы случайных процессов используют амплитудный и фазовый детекторы. Идеальным амплитудным детектором называют устройство, которое в ответ на воздействие узкополосного СП $\zeta(t)$ формирует на своем выходе его огибающую $A(t)$. Напряжение на выходе идеального фазового детектора, формируемое в ответ на воздействие узкополосного СП $\zeta(t)$, определяется набегом фазы, т.е. пропорционально $\Delta\varphi(t) = \Theta(t) - 2\pi f_0 t$.

Для нормального случайного процесса с нулевым средним значением огибающая имеет релеевский закон распределения с параметром σ , равным эффективному значению исходного процесса. Фаза подобного процесса имеет равномерный в пределах от 0 до 2π закон распределения. Таким образом, при воздействии на идеальный амплитудный детектор процесса $\xi(t)$ с плотностью вероятности

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\xi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \quad (4.8)$$

распределение выходного напряжения будет иметь вид

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right), \quad x \geq 0. \quad (4.9)$$

При этом, в соответствии со свойствами распределения Релея

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_{\xi} \approx 1,25 \cdot \sigma_{\xi}, \quad (4.10)$$

$$D_A = \sigma_{\xi}^2 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \approx 0,43 \cdot \sigma_{\xi}^2. \quad (4.11)$$

Если же на идеальный амплитудный детектор подать смесь детерминированного гармонического сигнала и узкополосного нормального шума

$$\zeta(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \psi_0) + \xi(t), \quad (4.12)$$

где U_0 , ω_0 и ψ_0 – некоторые константы, то наблюдаемая на выходе огибающая будет иметь обобщенное релеевское распределение (распределение Релея-Райса)

$$W_A(x) = \frac{x}{\sigma_{\xi}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + U_0^2}{2 \cdot \sigma_{\xi}^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x \cdot U_0}{\sigma_{\xi}^2}\right), \quad x \geq 0, \quad (4.13)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 0-го порядка первого рода (ее табличные значения можно найти в прил. 3).

Математическое ожидание распределения Релея-Райса равно

$$M_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_\xi \cdot \left\{ I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + h^2 \cdot \left[I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.14)$$

где отношение сигнал-шум $h^2 = 0,5 \cdot U_0^2 / \sigma_\xi^2$. (4.15)

Наконец, на выходе фазового детектора, формирующего на своем выходе набег фазы $\Delta\varphi(t)$, при приёме смеси гармонического сигнала и нормального шума имеет вид будет наблюдаться СП с плотностью распределения вероятностей

$$W_{\Delta\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{U_0^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2}\right) + \frac{\chi \cdot F_{cm}(\chi)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\chi^2}{2} - \frac{U_0^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \quad (4.16)$$

где $\chi = \left(\frac{U_0}{\sigma_\xi}\right) \cdot \cos(\varphi - \psi_0)$. (4.17)

Лабораторная работа № 4. Нелинейные преобразования случайных процессов

Цель работы – экспериментальное исследование изменения вероятностных и энергетических характеристик СП при их нелинейных преобразованиях.

4.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

4.2.1. Полезно учесть, что сложность теоретического анализа преобразования случайных процессов в нелинейных цепях существенно зависит от инерционности этих преобразований. Выпрямители, ограничители, квадраторы и другие аналогичные цепи можно считать идеальными безынерционными устройствами, реализующими кусочно-линейные преобразования, представленные на рис. 4.2. Расчет вероятностных и числовых характеристик процессов на выходе этих устройств следует вести по правилам (4.3)-(4.5).

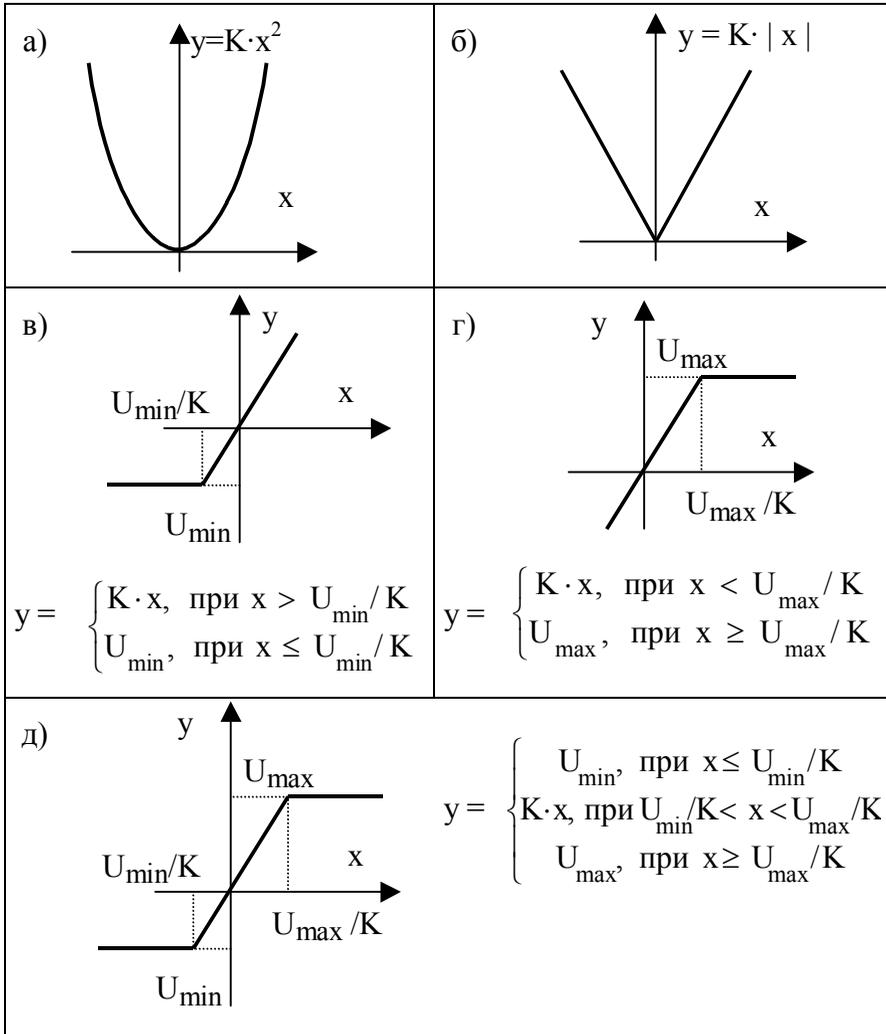


Рис. 4.2. Преобразования, реализуемые исследуемыми безынерционными нелинейными устройствами:
 а - квадратором, б - двухполупериодным выпрямителем,
 в - ограничителем снизу, г - ограничителем сверху,
 д - двухсторонним ограничителем

4.2.2. Если же нелинейные цепи являются одновременно инерционными, то определение вероятностных характеристик и расчет корреляционных и спектральных показателей процессов на выходе этих цепей оказывается весьма проблематичным. Особым случаем, когда анализ характеристик всё же возможен, является, например, исследование нелинейных цепей безынерционных по отношению к огибающим процессов. К числу подобных цепей можно отнести амплитудный детектор. Свойства СП, наблюдаемых на его выходе, определяются соотношениями (4.9)-(4.15).

4.3. Домашнее задание к лабораторной работе

4.3.1 Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

4.3.2. Применительно к сигналу и нелинейному преобразователю из табл. 4.1, рассчитайте и постройте плотность распределения вероятности процесса на выходе цепи. Продумайте, как будет изменяться данный график при изменении параметров воздействующего на цепь случайного процесса или характеристик самого преобразователя.

4.4. Выполнение лабораторных исследований

4.4.1. Установить оба анализатора в состояние осциллографа и настроить левый из них на контрольную точку №6, а правый - на контрольную точку №5. Модули №1 и №4 схемы моделирования настроить в соответствии с требованиями табл. 4.1, а все прочие модули выключить.

Примечание: исключение составляет задание для бригад №7-8, которым необходимо детектировать сигнал. Идеального амплитудного детектора программа моделирования не предлагает, поэтому для проведения лабораторных исследований следует использовать модуль №4 схемы моделирования как двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления 1,5, а модуль №5 - как ИФНЧ с частотой среза $F_{cp} = 0,5$ кГц.

Таблица 4.1

Номер бригады	Формируемый сигнал	Нелинейный преобразователь
1	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,5 \text{ В}$	двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления $K = 3$
2	гармонический с $U_m = 1,2 \text{ В}$; $F = 3 \text{ кГц}$	двухполупериодный выпрямитель с коэффициентом усиления $K = 2$
3	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	ограничитель снизу с коэф. усиления $K = 2$ и уровнем ограничения $U_{\min} = -1 \text{ В}$
4	гармонический с $U_m = 1,8 \text{ В}$; $F = 1 \text{ кГц}$	квадратор с коэффициентом усиления $K = 2$
5	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 1,0 \text{ В}$	двухсторонний ограничитель с $K = 1,5$ и уровнями ограничения $U_{\max} = +0,6 \text{ В}$, $U_{\min} = -0,6 \text{ В}$
6	гармонический с $U_m = 4 \text{ В}$; $F = 2 \text{ кГц}$	ограничитель сверху с коэф. усиления $K = 0,5$ и уровнем ограничения $U_{\max} = +1 \text{ В}$
7	широкополосный нормальный шум с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$	идеальный амплитудный детектор (см. прим. к п. 4.4.1)
8	нормальный шум (тип 2) с $\sigma_{ш} = 0,8 \text{ В}$ $\tau = 2 \text{ мс}$; $F = 4 \text{ кГц}$	идеальный амплитудный детектор (см. прим. к п. 4.4.1)

4.4.2. Сопоставить сигналы, наблюдаемые на входе и выходе преобразователя, и качественно (приближенно) зарисовать в отчет вид наиболее типичных реализаций.

4.4.3. Переключить анализаторы в режим отображения гистограмм плотности вероятности случайного процесса и, формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов. Зафиксировать в отчете типовые графики плотности распределения вероятности процессов на входе и выходе цепи.

4.4.4. Переключить анализаторы в режим спектрального анализа процессов. Формируя новые реализации СП путем нажатия кнопки "Обновить данные", провести серию из 15...20 экспериментов и зафиксировать в отчете типовые графики распределения усредненных интенсивностей спектральных составляющих на входе и выходе фильтра.

4.4.5. Переключив анализатор, подсоединенный к точке №5, в режим расчета числовых характеристик СП, зафиксировать в отчете значения оценок математического ожидания и эффективного значения процесса на выходе нелинейного преобразователя.

4.5. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Как рассчитывается одномерная плотность вероятности при функциональном преобразовании СП? Приведите примеры.

2. Каков будет закон распределения СП на выходе квантователя с разным числом уровней, если на его вход подать шум или гармонический сигнал со случайной начальной фазой?

3. Запишите аналитические выражения законов распределения огибающей и фазы узкополосного нормального СП с нулевым матожиданием и рассчитайте их средние и дисперсии.

4. Каким образом на вероятностных характеристиках огибающей и фазы аддитивной смеси узкополосного нормального шума и детерминированного гармонического сигнала отража-

ется изменение амплитуды сигнала при фиксированном уровне шума и изменение уровня шума при фиксированной амплитуде сигнала?

5. Как рассчитать корреляционную функцию и спектральную плотность мощности процесса на выходе безынерционного нелинейного преобразователя?

6. Каковы возможные изменения спектрального состава процессов на входе и выходе нелинейного преобразователя? Поясните на примерах работы ограничителя и квадратора.

7. Каковы возможные изменения корреляционных функций процессов при воздействии на вход нелинейного преобразователя квазислучайных периодических колебаний?

8. Поясните изменение спектральных характеристик случайных процессов при воздействии на вход идеального амплитудного детектора узкополосного нормального шума.

5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ

5.1. Теоретические основы

Пусть на вход устройства обработки на фоне аддитивного шума поступает сигнал неизвестной формы несущий полезную информацию. Обработку смеси сигнала и шума, направленную на максимально точное восстановление формы этого полезного сигнала, называют оптимальной фильтрацией сигналов неизвестной формы. Ограничивая поиск классом линейных устройств, можно показать, что минимальную среднеквадратическую погрешность выделения полезного сигнала из смеси с аддитивным шумом обеспечивает фильтр с нулевой фазо-частотной характеристикой и АЧХ, определяемой выражением

$$|\dot{K}_{\text{опт}}(f)| = \frac{S(f)}{S(f) + N(f)} = \frac{1}{1 + N(f)/S(f)}, \quad (5.1)$$

где $S(f)$ – спектральная плотность мощности полезного сигнала; $N(f)$ – спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой поступает полезный сигнал.

Обеспечиваемая оптимальным фильтром минимальная среднеквадратическая погрешность характеризуется средней мощностью сигнала ошибки, рассчитываемой по формуле

$$P_{\Delta \text{cp}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(f) \cdot N(f)}{S(f) + N(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1/N(f) + 1/S(f)} df. \quad (5.2)$$

Лабораторная работа № 5. Оптимальная фильтрация сигналов неизвестной формы

Цель работы – экспериментальное исследование процедуры обработки смеси случайного полезного сигнала и шума фильтром Колмогорова-Винера.

В работе изучаются основные свойства фильтра Колмо-

горова-Винера, производится оценка дисперсии сигнала ошибки на выходе фильтра, анализируется возрастание погрешности при использовании для обработки фильтров с характеристиками, отличающимися от оптимальных.

5.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

5.2.1. Ознакомьтесь с теорией фильтрации случайных сигналов на фоне шума по учебной литературе [1, с. 206-211, 7, с. 199-201]. Для выполнения лабораторной работы следует учесть взятые из монографии [6, с. 100-112] рекомендации по формированию стационарных случайных процессов с разнообразными спектральными свойствами, кратко изложенные ниже:

5.2.2. **Процессом типа 1** далее в настоящей работе называется низкочастотный СП с корреляционной функцией вида

$$B_1(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot \exp\{-|\tau|/\tau_u\} \quad (5.3)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau) \cdot \exp\{-j\omega\tau\} d\tau = \sigma_\xi^2 \cdot \frac{2\tau_u}{1+(\omega\tau_u)^2} \quad (5.4)$$

Сформировать реализации данного СП можно любым из модулей № 1...3 при выборе режима их функционирования «Низкочастотный нормальный шум».

5.2.3. Под **процессом типа 2** далее понимается узкополосный СП с корреляционной функцией вида

$$B_2(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot \exp\{-|\tau|/\tau_u\} \cdot \cos(\omega_0\tau) \quad (5.5)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_2(\omega) = \sigma_\xi^2 \cdot \frac{2\tau_u \left(1 + (\omega\tau_u)^2 + (\omega_0\tau_u)^2\right)}{\left\{1 + ((\omega + \omega_0)\tau_u)^2\right\} \cdot \left\{1 + ((\omega - \omega_0)\tau_u)^2\right\}} \quad (5.6)$$

Сформировать реализации данного СП можно любым из модулей № 1...3 при выборе режима их функционирования «Узкополосный нормальный шум» (Примечание: при этом вместо частоты ω_0 в радианах в секунду задаётся циклическая частота $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ (Гц)).

5.2.4. Перечисленные выше СП могут в разных ситуациях играть роль как шума, так и подлежащего фильтрации полезного сигнала. Следующим СП, который, очевидно, может выполнять лишь роль шума, является **широкополосный нормальный шум**. Спектральная плотность мощности этого шума зависит от используемой при моделировании частоты дискретизации и может быть рассчитана как

$$S_{\text{БШ}}(\omega) = T \cdot \sigma_{\xi}^2, \quad (5.7)$$

где $T = 1/F_s$ – интервал дискретизации.

5.2.5. **Процессом типа 3** условимся считать низкочастотный СП, получаемый при прохождении широкополосного нормального шума с эффективным значением σ_{ξ} через фильтр с прямоугольной АЧХ, подобный идеальному фильтру нижних частот – ИФНЧ. Спектральная плотность мощности этого СП равна

$$S_3(f) = \begin{cases} \sigma_{\xi}^2 \cdot T \cdot K_0^2, & |f| \leq F_c \\ 0, & |f| > F_c \end{cases} \quad (5.8)$$

Для формирования реализаций такого СП необходимо широкополосный нормальный шум (см. п. 5.2.4), формируемый модулями № 1 или № 3, пропустить через модуль № 4, установленный в режим «ИФНЧ» с частотой среза, равной F_c .

5.2.6. Под **процессом типа 4** далее понимается узкополосный СП, получаемый при прохождении широкополосного нормального шума через полосовой фильтр с прямоугольной АЧХ. Спектральная плотность мощности этого СП равна

$$S_4(f) = \begin{cases} \sigma_{\xi}^2 \cdot T \cdot K_0^2, & F_{c \text{ ниж}} \leq |f| \leq F_{c \text{ верх}} \\ 0, & \text{при прочих } f \end{cases} \quad (5.9)$$

Для формирования реализаций СП необходимо пропустить широкополосный нормальный шум (см. п. 5.2.4), формируемый модулями № 1 или № 3, через модуль № 4, работающий в режиме «ИПФ» с частотами среза $F_{c \text{ ниж}}$ и $F_{c \text{ верх}}$.

5.2.7. Наконец, **процесс типа 5** – это низкочастотный СП с корреляционной функцией вида

$$B_5(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \cdot \left\{ 1 - |\tau|/\tau_u \right\}, \quad |\tau| \leq \tau_u \quad (5.10)$$

и спектральной плотностью мощности

$$S_5(\omega) = \sigma_{\xi}^2 \cdot 4\tau_u \cdot \text{sinc}^2(\omega\tau_u) \quad (5.11)$$

Для формирования реализаций СП необходимо пропустить широкополосный нормальный шум (см. п. 5.2.4), формируемый модулями № 1 или № 3, через модуль № 4, осуществляющий скользящее суммирование последних $N_{av} = 1 + \text{int}(\tau_u / T)$ отсчетов.

5.2.8. Учтите также, что лабораторная работа предполагает цифровую обработку сигналов с частотой дискретизации $F_s = 48$ кГц, что позволяет осуществлять обработку сигналов с частотами до 24 кГц. В подобных условиях, учитывая дополнительно четный характер подынтегрального выражения в (5.2), для расчета средней мощности ошибки фильтрации можно рекомендовать выражение

$$P_{out} \approx 2 \cdot \int_0^{F_s/2} \frac{S(f) \cdot N(f)}{S(f) + N(f)} df. \quad (5.12)$$

5.3. Домашнее задание к лабораторной работе

5.3.1. Согласуйте с преподавателем Ваш номер бригады. Сведения о полезных сигналах и помехах, соответствующих заданиям разных бригад, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер бригады	Полезный сигнал $s(t)$			Аддитивный шум $n(t)$		
	Тип СП	$\sigma_{ш}$, В	Прочие параметры	Тип СП	$\sigma_{ш}$, В	Прочие параметры
1	1	$1,0^{02}$	$\tau_y = 1,0$ мс	4	1,0	$K_0 = 5,$ $F_{c\text{ ниж}} = 1$ кГц, $F_{c\text{ верх}} = 5$ кГц
2	2	$1,0^{02}$	$f_0 = 2,5$ кГц $\tau_y = 2,0$ мс	3	2,5	$K_0 = 1$ $F_c = 8$ кГц
3	3	$1,0^{01}$	$K_0 = 1,$ $F_c = 4$ кГц	1	1,2	$\tau_y = 1,8$ мс
4	4	$1,0^{01}$	$K_0 = 3,$ $F_{c\text{ ниж}} = 2$ кГц, $F_{c\text{ верх}} = 4$ кГц	БШ	2,0	–
5	1	$1,5^{01}$	$\tau_{\delta} = 0,8$ мс	БШ	0,5	–
6	3	$1,0^{01}$	$K_0 = 4,$ $F_c = 4$ кГц	БШ	1,5	–
7	4	$1,0^{01}$	$K_0 = 3,$ $F_{c\text{ ниж}} = 2$ кГц, $F_{c\text{ верх}} = 4$ кГц	1	3,0	$\tau_{\delta} = 1,0$ мс
8	5	$2,0^{01}$	$K_y = 1$ $N_{av} = 20$	2	1,0	$f_0 = 2,0$ кГц $\tau_y = 2,0$ мс

Примечания: 1. «Расшифровка» типов СП приведена выше в подразделе 3.2
 2. Пометки «\1, \2» в колонке « $\sigma_{ш}$ » указывают номер модуля, рекомендуемый для формирования данного сигнала.

5.3.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте АЧХ фильтра, минимизирующего среднеквадратическую погрешность фильтрации полезного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного шума $n(t)$, а также соответствующую оптимальной обработке среднюю мощность ошибки фильтрации по формулам (5.1) и (5.12).

5.3.3. Осуществите приближенную кусочно-линейную аппроксимацию рассчитанной выше АЧХ фильтра (к точности аппроксимации здесь особенных требований не предъявляется) и сохраните её в текстовом файле с расширением «*ini*», следующего формата:

Строка заголовка: «[DataList]»
 Строки данных: $f1=value1$
 $f2=value2$
 ...

Имя файла должно состоять из одной цифры, совпадающей с номером Вашей бригады. Частоты $f1, f2$ (в килогерцах) задают координаты точек излома АЧХ, а $value1, value2$ – значения АЧХ в соответствующих точках.

Пример:

Для формирования приближенной копии АЧХ, представленной на рис. 5.1, текстовый «*ini*»-файл может содержать строки:

```
[DataList]
0.0 = 1.0
2.0 = 1.0
5.0 = 0.1
7.0 = 0.0
```

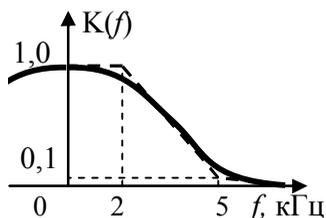


Рис. 5.1. Возможная АЧХ фильтра

5.4. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Исследование погрешности фильтрации сигналов при точной реализации фильтра Колмогорова-Винера

Рекомендации по выполнению:

5.4.1. Установить частоту дискретизации $F_s = 48$ кГц, а объем формируемой выборки не менее $N = 4096$ отсчетов.

5.4.2. Для бригад № 3-8 установить тип и параметры модулей № 1, 4 (бригады № 1, 2 используют в данном пункте модуль № 2) в соответствии с требованиями к полезному сигналу из табл. 5.1. Левый анализатор подключить к контрольной точке №4 (для бригад № 1,2 - к контрольной точке № 2) и по осциллографу и спектроанализатору убедиться в формировании сигнала нужной формы.

5.4.3. Установить для бригад № 3-8 тип и параметры модуля № 2 (бригады № 1,2 используют в данном пункте модули № 1, 4) в соответствии с требованиями к аддитивному шуму из табл. 5.1. Правый анализатор подключить к выходу модуля, формирующего шум, и с помощью осциллографа (спектроанализатора), что наблюдаемый процесс соответствует требованиям индивидуального задания.

5.4.4. Переключить правый анализатор на контрольную точку № 7, зафиксировать в отчете к лабораторной работе вид осциллограммы и спектральной плотности мощности аддитивной смеси сигнала и шума.

5.4.5. Переключить левый анализатор, подключенный к модулю, формирующему полезный сигнал, в состояние «Оценка с.к.ошибки»; в указанном состоянии анализатор рассчитывает среднеквадратическую погрешность между сигналами в точке, к которой он подключен, и выходом всей схемы моделирования – сигналом в контрольной точке № 5. Занести в отчет погрешность, соответствующую приёму полезного сигнала вместе с шумом без какой-либо обработки.

5.4.6. Установить модуль № 5 в состояние «Авто.фильтр Колмогорова-Винера» и в окне «Параметры модулей» указать для него источник полезного сигнала «1» для бригад № 3-8 и источник - «2» для бригад № 1,2.

5.4.7. Переключить правый анализатор на контрольную точку №5, зафиксировать в отчете к лабораторной работе вид осциллограммы и спектральной плотности мощности профильтрованной смеси сигнала и шума. Убедиться, что фильтрация приближает форму сигналов (в контрольной точке № 5) к форме исходного полезного сигнала.

5.4.8. По левому анализатору, подключенному к модулю формирования полезного сигнала, находящемуся в состоянии «Оценка с.к.ошибки» определить и занести в отчет среднеквадратическую погрешность фильтрации сигнала «автоматическим» фильтром Колмогорова-Винера. Сравнить полученное значение с результатами домашних расчетов из п. 5.3.2; в случае существенных расхождений проконтролировать правильность выполнения этапа 1 лабораторных исследований.

Этап 2. Исследование влияние неточности реализации фильтра Колмогорова-Винера на погрешность фильтрации

Рекомендации по выполнению:

5.4.9. Переключить модуль № 5 в состояние «Фильтр с загружаемой АЧХ». В окне «Параметры модулей» указать для него «Номер файла» равный номеру Вашей бригады (номеру файла, подготовленного при выполнении п. 5.3.3).

5.4.10. По правому анализатору убедитесь, что профильтрованный сигнал, наблюдаемый на выходе № 5 и отображаемый правым анализатором, близок по форме к исходному полезному сигналу.

При существенных искажениях формы сигнала проверьте правильность данных в файле, определяющем форму АЧХ

фильтра; для перепроверки может оказаться полезным сравнение спектральных характеристик сигналов, полученных при выполнении п. 5.4.7, со спектральными характеристиками, получаемыми при использовании фильтра с загружаемой АЧХ.

5.4.11. По данным левого анализатора, установленного в состоянии «Оценка с.к.ошибки», определить и занести в отчет среднеквадратическую погрешность фильтрации сигнала, подготовленным при выполнении домашнего задания фильтром Колмогорова-Винера. Сравнить полученное значение с результатами домашних расчетов из п. 5.3.2.

5.5. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Чем отличаются задачи оптимальной линейной фильтрации сигналов в цифровых и аналоговых системах передачи информации?

2. Каким комплексным коэффициентом передачи обладает фильтр Колмогорова-Винера? Для решения какой задачи этот фильтр предназначен?

3. Чем определяется среднеквадратическая погрешность фильтрации при использовании фильтра Колмогорова-Винера?

4. Какие особенности амплитудно-частотной характеристики фильтра Колмогорова-Винера обеспечивают его оптимальность?

5. Какие особенности фазо-частотной характеристики фильтра Колмогорова-Винера обеспечивают его оптимальность? Как изменения ФЧХ могут повлиять на среднеквадратическую погрешность фильтрации сигналов?

6. Можно ли обеспечить нулевую среднеквадратическую погрешность фильтрации полезных сигналов? При каких условиях?

6. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ ПОМЕХ

6.1. Теоретические основы

При обнаружении сигналов известной формы на фоне помех оптимальным является фильтр, обеспечивающий на выходе фильтра при приходе обнаруживаемого сигнала наибольшее соотношение сигнал-шум в заранее выбранный момент времени. Применительно к белому шуму подобным оптимальным устройством является согласованный фильтр, представляющий собой линейное аналоговое устройство с импульсной характеристикой

$$g_{\text{сф}}(t) = A \cdot s(t_0 - t), \quad (6.1)$$

где $s(t)$ - обнаруживаемый сигнал; t_0 - момент времени, в который обеспечивается максимум отношения сигнал-шум (должен совпадать с моментом окончания сигнала или выбираться позже него); A - произвольная константа (свойства фильтра не зависят от A , так как изменение этого коэффициента одинаково увеличивает как интенсивность полезного сигнала, так и среднеквадратическое значение шума на выходе фильтра).

Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра должен, очевидно, соответствовать (6.1) и может быть рассчитан по формуле

$$\dot{K}_{\text{сф}}(\omega) = A \cdot G_s^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (6.2)$$

где $G_s^*(\omega)$ - величина, комплексно-сопряженная спектральной плотности обнаруживаемого сигнала.

Обеспечиваемое согласованным фильтром отношение сигнал-шум не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, а определяется лишь его энергией и спектральной плотностью мощности помехи. Квадрат отношения сигнал/шум (отношение

сигнал/шум по мощности) на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 равен

$$q_{\text{сф}}^2 = \mathcal{E}_s / N_0, \quad (6.3)$$

где N_0 - спектральная плотность мощности шума, а \mathcal{E}_s - энергия полезного сигнала определяемая соотношением

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{G}_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.4)$$

Если шум, на фоне которого производится обнаружение, не является белым, то согласованный фильтр уже не обеспечивает максимально возможного отношения сигнал-шум. Оптимальным для обнаружения сигналов в подобной ситуации оказывается фильтр с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{K}_{onm}(\omega) = A \cdot \frac{G_s^*(\omega)}{S_\xi(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}, \quad (6.5)$$

где $S_\xi(\omega)$ – спектральная плотность мощности помехи, на фоне которой выполняется обнаружение полезного сигнала.

Обеспечиваемое им отношение сигнал-шум составляет

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\dot{G}_s(\omega)|^2}{S_\xi(\omega)} d\omega. \quad (6.6)$$

Лабораторная работа № 6. Обнаружение сигналов

Цель работы – экспериментальное исследование процедуры обработки смеси сигнала известной формы и шума согласованным фильтром.

В работе изучаются основные свойства согласованных фильтров, производится оценка числовых характеристик слу-

чайных процессов, наблюдаемых на выходе согласованного фильтра в ответ на приход «своего» сигнала, «чужого» сигнала и широкополосного шума.

6.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям

6.2.1. В рамках данной работы обнаружение сигналов производится лишь на фоне широкополосного нормального шума, являющегося эквивалентом белого шума. Оптимальным обработчиком смеси сигнала и такого шума может служить согласованный фильтр, поэтому изучите вопросы согласованной фильтрации сигналов по учебной литературе [1, с.196-202; 7, с.131-139].

6.2.2. Для оценки спектральной плотности мощности (СПМ) шума в обрабатываемой полосе частот следует учесть, что при цифровой обработке мощность шума распределяется на полосу частот, равную используемой частоте дискретизации F_s , поэтому значение СПМ шума может быть рассчитано как

$$N_0 = \frac{\sigma_\xi^2}{F_s}. \quad (6.7)$$

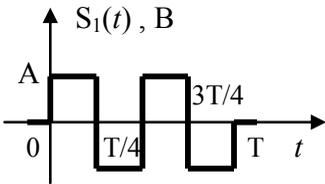
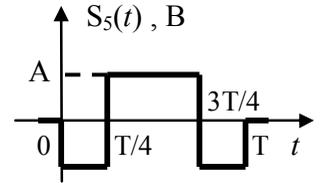
6.2.3. Совокупность используемых разными бригадами сигналов, подлежащих обнаружению, приведена в табл. 6.1. Все сигналы имеют конечную протяженность τ и подаются на вход устройства обработки в момент времени $t_{нач} = 2$ мс.

6.3. Домашнее задание к лабораторной работе

6.3.1. Согласуйте с преподавателем номер бригады, определяющий индивидуальный вариант исследований.

Таблица 6.1

Набор обнаруживаемых сигналов

Номер бригады	Аналитическое выражение или рисунок, определяющие сигнал на интервале [0; τ]
1	$s_1(t) = A \cdot t / \tau$
2	$s_2(t) = A \cdot (1 - t / \tau)$
3	$s_3(t) = A \cdot \sin^2(\pi t / \tau)$
4	
5	
6	$s_6(t) = A \cdot (t / \tau)^2$
7	$s_7(t) = A \cdot \{ 1 - (t / \tau)^2 \}$
8	$s_8(t) = A \cdot (1 - t / \tau)^2$

6.3.2. Для своего индивидуального варианта рассчитайте СПМ шума, на фоне которого будет производиться обнаружение сигналов, энергию полезного сигнала и ожидаемое отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра. Варианты индивидуальных заданий для бригад заданы в табл. 6.2.

6.3.3. Определите импульсную характеристику фильтра, согласованного с сигналом Вашего индивидуального варианта задания, и сохраните её в текстовом файле с расширением «ini», следующего формата:

Строка заголовка: «[DataList]»

Строки данных: $t1=value1$

$t2=value2$

...

Имя файла должно состоять из одной цифры, совпадающей с номером Вашей бригады. Моменты времени $t1, t2...$ задают координаты точек излома импульсной характеристики в миллисекундах, а $value1, value2$ – её значения в этих точках.

Пример:

Для формирования импульсной характеристики, представленной на рис. 6.1, текстовый «ini»-файл должен содержать строки:

```
[DataList]
0.0 = 0.0
0.00001 = 12.0
3.0 = 12.0
3.00001 = -8.0
4.0 = -8.0
4.00001 = 0.0
```

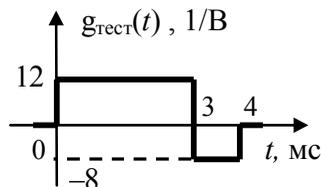


Рис. 6.1. Возможная импульсная характеристика фильтра

Таблица 6.2

Номер бригады	Амплитуда сигнала, В	Длительность сигнала τ , мс	Эффективное значение шума $\sigma_{ш}$, В	Частота дискретизации, кГц
1	0,6	1	0,8	20
2	0,4	2	1,2	48
3	0,6	1	0,8	20
4	0,3	2	1,6	48
5	0,3	5	1,2	20
6	0,4	2	0,8	48
7	1,0	1	1,0	20
8	0,2	5	1,2	48

6.3.4. Для какого-либо сигнала другой бригады, характеризуемого совпадающей с вашим сигналом по длительности, рассчитайте амплитуду A_3 , гарантирующего совпадение энергии «чужого» сигнала с энергией сигнала из Вашего индивидуального варианта задания. Эта амплитуда будет необходима для проведения завершающего, третьего этапа исследований.

6.4. Выполнение лабораторных исследований

Этап 1. Отклик согласованного фильтра на «свой» сигнал

Рекомендации по выполнению:

6.4.1. Установить частоту дискретизации в соответствии с требованиями табл. 6.2. Установить объем формируемой выборки $N = 4096$ отсчетов.

6.4.2. Установить тип и параметры модуля № 1 схемы моделирования случайных процессов в соответствии с требованиями табл. 6.2; остальные модули перевести (при необходимости) в выключенное состояние. В блоке анализаторов установить левый анализатор в состояние осциллографа, настроить его на контрольную точку № 6 и убедиться в формировании сигнала нужной формы.

Оба анализатора настроить на контрольную точку № 4, установить правый анализатор в состояние оценки числовых характеристик СП.

6.4.3. Установить модуль № 4 в состояние «Согласованный КИХ-фильтр» и в окне «Параметры модулей» выставить номер сигнала и протяженность импульсной характеристики фильтра из индивидуального варианта задания. Например, для бригады № 5 при необходимости использования фильтра с длительностью импульсной характеристики в 5 мс, настройки параметров фильтра показаны на рис. 6.2.

(При указанных настройках модуль № 4 будет автоматически настроен на согласованную обработку сигнала № 5)

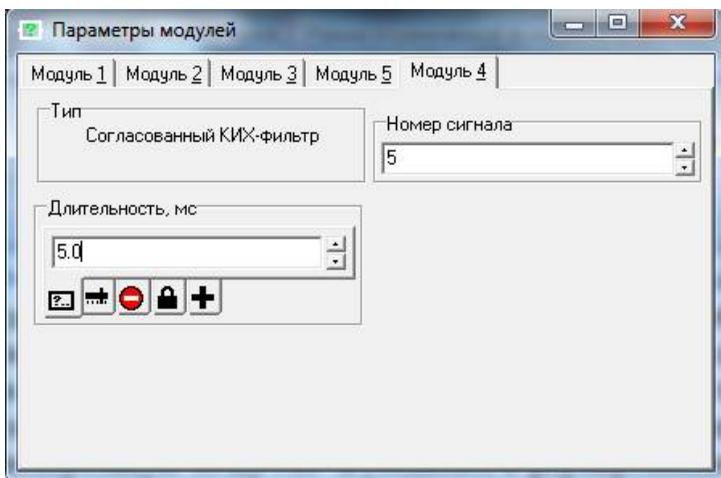


Рис. 6.2. Возможные настройки КИХ-фильтра, согласованного с сигналом № 5 длительностью 5 миллисекунд

Убедиться, что в момент окончания сигнала t_0 наблюдается максимум отклика фильтра на воздействие полезного сигнала. Зафиксировать величину максимума отклика согласованного фильтра $u_{\text{вых}}(t_0)$.

6.4.4. Установить нулевую амплитуду полезного сигнала на модуле № 1. Настроить модуль № 3 моделирующей программы на излучение широкополосного шума с эффективным значением из четвертого столбца табл. 6.2.

6.4.5. По правому анализатору зафиксировать эффективное значение $\sigma_{\text{ш вых}}$ шума, наблюдаемого на выходе согласованного фильтра в отсутствие сигнала.

6.4.6. Переключить правый анализатор в режим отображения гистограммы плотности вероятности наблюдаемого процесса $W_{\xi}^*(\tilde{x})$ и зафиксировать в отчет гистограмму шумового распределения.

6.4.7. Перерисовать в отчете гистограмму, полученную в п. 6.4.6, со смещением вправо на величину $u_{\text{вых}}(t_0)$ из п. 6.4.3. Визуально оценить степень перекрытия гистограмм и соответствующие ей вероятности ошибок при обнаружения сигнала.

Рассчитать реально наблюдаемое на выходе фильтра отношение сигнал-шум

$$q = \frac{u_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{ш вых}}} \quad (6.8)$$

и сравнить его с рассчитанным в п. 6.3.2.

6.4.8. Восстановить в модуле №1 амплитуду сигнала, соответствующую индивидуальному варианту задания из табл. 6.2. Провести 25...50 опытов (щелкая по кнопке «Обновить данные») и применительно к порогу, составляющему половину величины $u_{\text{вых}}(t_0)$ из п. 6.4.3, приближенно оценить частоту возникновения ошибок при обнаружении «своего» сигнала. Сопоставить частоту ошибок с значением, предсказанным в п. 6.4.7.

6.4.9. Если наблюдаемая частота возникновения ошибок пренебрежимо мала – оценить, сколь сильно можно уменьшить амплитуду сигнала в модуле № 1, чтобы повысить вероятность ошибок до 5..10%.

Если же ошибки исходно возникают довольно часто, то определить, при какой амплитуде сигнала вероятность ошибок снижается до пренебрежимо малых величин.

6.4.10. Проанализировать влияние на отношение сигнал-шум и на вероятность возникновения ошибок увеличения (уменьшения) длительности полезного сигнала, формируемого модулем № 1 (без корректировки параметров модуля № 4).

Этап 2. Оценка работоспособности фильтра с расчетной импульсной характеристикой

Рекомендации по выполнению:

6.4.11. Для модулей №1,3 восстановить настройки, соответствующие индивидуальному варианту задания.

6.4.12. Установить модуль № 4 в состояние «Загружаемый КИХ-фильтр» и настроить его на считывание импульсной характеристики из «*ini*»-файла, указав в окне «Параметры модулей» номер файла, подлежащего загрузке.

6.4.13. Повторно выполнить п.6.4.4-6.4.8 (см. этап 1). Убедиться, что использование фильтра с расчетной импульсной характеристикой обеспечивает соотношение сигнал-шум, близкое к наблюдавшемуся при выполнении этапа 1 (см. (6.8)).

Этап 3. Исследование способности согласованного фильтра обнаруживать присутствие «чужих» сигналов

Рекомендации по выполнению:

6.4.14. Настроить модуль № 1 на формирование «чужого» сигнала из п. 5.9.4 домашнего задания; установить его амплитуду равной расчётному значению A_{Σ} .

6.4.15. Вновь установить модуль № 4 в состояние «Согласованный КИХ-фильтр» и в окне «Параметры модулей» выставить номер сигнала и протяженность импульсной характеристики фильтра из своего индивидуального варианта задания.

6.4.16. Временно установив нулевое эффективное значение шума, определить отклик согласованного фильтра на «чужой» сигнал $s_{\text{вых}}(t_0)$, соответствующий моменту окончания сигнала. Рассчитать отношение сигнал-шум (6.8), возникающее при попытке обнаружения «чужого» сигнала.

6.4.17. За счет проведения 25...50 опытов оценить изменение частоты возникновения ошибок при попытках обнаруживать «чужой» сигнал в шуме.

6.5. Контрольные вопросы для защиты работы

1. Разъясните суть отличий при оптимальной линейной фильтрации сигналов в цифровых и аналоговых системах передачи информации.

2. Что такое отношение-сигнал шум на выходе устройства обработки. Чему это отношение равно для согласованного фильтра?

3. Может ли отклик на «чужой» сигнал на выходе согласованного фильтра превышать отклик на «свой» сигнал? Если «да», то при каких условиях?

4. Можно ли снизить вероятность ошибок при обнаружении сигналов за счет увеличения (или уменьшения) их длительности; за счет изменения интенсивности сигналов?

5. Какими характеристиками обладает согласованный фильтр? Разъясните физические причины оптимальности обработки, обеспечиваемой согласованным фильтром.

6. Всегда ли согласованный фильтр является оптимальным устройством для обнаружения сигналов известной формы?

7. Как можно (теоретически и экспериментально) оценить вероятность возникновения ошибок при обнаружении сигнала известной формы? Какие параметры сигнала и фильтра влияют на вероятность возникновения ошибок?

8. Как на вероятность возникновения ошибок влияет коэффициент усиления приёмного тракта? Почему?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии теоретические сведения, задания и методические указания по выполнению лабораторных работ составляют, по мнению автора, минимальный законченный объем материала, необходимый для практического ознакомления с курсом “Теория вероятностей и случайные процессы в радиотехнике”. Студентам, заинтересованным в углубленном изучении данной дисциплины, полезно рассмотреть и более сложные ситуации по сравнению с охватываемыми данным циклом лабораторных работ. Очень полезной для более глубокого понимания изучаемого материала может оказаться самостоятельная деятельность по разработке моделирующих программ для осуществления статистических экспериментов. Направление исследований и рекомендации для использования математический аппарат целесообразно обсудить с преподавателем.

Автор будет благодарен за любую информацию о найденных неточностях и опечатках, а также за идеи по расширению и дополнению данного учебного пособия.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стандартная нормальная случайная величина характеризуется

плотностью вероятности
$$W_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

при значениях параметров распределения $a = 0, \sigma = 1$

и функцией распределения
$$F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Распределение стандартной нормальной случайной величины

y	$F_{\text{ст}}(y)$	$W_{\text{ст}}(y)$
0,0	0,5000	0,3989
0,1	0,5398	0,3970
0,2	0,5793	0,3910
0,3	0,6179	0,3814
0,4	0,6554	0,3683
0,5	0,6915	0,3521
0,6	0,7258	0,3332
0,7	0,7580	0,3123
0,8	0,7881	0,2897
0,9	0,8159	0,2661
1,0	0,8413	0,2420
1,1	0,8643	0,2179
1,2	0,8849	0,1942
1,3	0,9032	0,1714
1,4	0,9192	0,1497
1,5	0,9331	0,1295
1,6	0,9452	0,1109
1,7	0,9554	0,0940
1,8	0,9641	0,0790
1,9	0,9713	0,0656

y	$F_{\text{ст}}(y)$	$W_{\text{ст}}(y)$
2,0	0,9773	0,0540
2,1	0,9821	0,0440
2,2	0,9861	0,0355
2,3	0,9893	0,0283
2,4	0,9918	0,0224
2,5	0,9938	0,0175
2,6	0,9953	0,0136
2,7	0,9965	0,0104
2,8	0,9974	0,0079
2,9	0,9981	0,0060
3,0	0,9987	0,0044
3,1	0,9990	0,0033
3,2	0,9993	0,0024
3,3	0,9995	0,0017
3,4	0,9997	0,0012
3,5	0,9998	0,0009
3,6	0,9998	0,0006
3,7	0,9999	0,0004
3,8	0,9999	0,0003
3,9	0,9999	0,0002

Для отрицательных аргументов x значения можно получить из соотношения $F_{\text{ст}}(x)_{|x<0} = 1 - F_{\text{ст}}(-x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Модифицированные функции Бесселя

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{П2.1})$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \cdot \left[1 + \frac{z^2/4}{(1!) \cdot (2!)} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!) \cdot (3!)} + \frac{(z^2/4)^3}{(3!) \cdot (4!)} + \dots \right] \quad (\text{П2.2})$$

x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$	x	$\exp(-x) \cdot I_0(x)$	$\exp(-x) \cdot I_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	2,0	0,3085	0,2153
0,2	0,8269	0,0823	2,2	0,2913	0,2121
0,4	0,6974	0,1367	2,4	0,2766	0,2085
0,6	0,5883	0,1722	2,6	0,2639	0,2047
0,8	0,5241	0,1945	2,8	0,2528	0,2007
1,0	0,4658	0,2079	3,0	0,2430	0,1968
1,2	0,4198	0,2153	3,2	0,2343	0,1930
1,4	0,3831	0,2185	3,4	0,2264	0,1892
1,6	0,3533	0,2190	3,6	0,2193	0,1856
1,8	0,3289	0,2177	3,8	0,2129	0,1821

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лебедько, Е.Г. Теоретические основы передачи информации [Электронный ресурс] / Е.Г. Лебедько. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 352 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/1543/>
2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский - М.: Дрофа, 2006. - 512 с.
3. Филиппский, Ю.К. Случайные сигналы в радиотехнике / Ю.К. Филиппский - Киев: Вища школа, 1986. - 126 с.
4. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов - М.: Радио и связь, 1982. - 678 с.
5. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и дополн. - М.: Радио и связь, 1989. - 656 с.
6. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков - М.: Сов. радио, 1971. - 328 с.
7. Зюко, А.Г. Теория передачи сигналов: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров, Л.М. Финк – М., Радио и связь, 1980. – 288 с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999. - 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	4
1.1. Теоретические основы	4
1.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	9
1.3. Домашнее задание к лабораторной работе	17
1.4. Возможности моделирующей программы и рекомендации по работе с ней.....	19
1.5. Выполнение лабораторных исследований	26
1.6. Рекомендации к написанию отчета	29
1.7. Контрольные вопросы для защиты работы	30
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	31
2.1. Теоретические основы	31
2.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	37
2.3. Домашнее задание к лабораторной работе	43
2.4. Выполнение лабораторных исследований	44
2.5. Контрольные вопросы для защиты работы	48
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ.....	50
3.1. Теоретические основы	50
3.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	52
3.3. Домашнее задание к лабораторной работе	57
3.4. Выполнение лабораторных исследований	58
3.5. Контрольные вопросы для защиты работы	62

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	63
4.1. Теоретические основы	63
4.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	67
4.3. Домашнее задание к лабораторной работе	69
4.4. Выполнение лабораторных исследований	69
4.5. Контрольные вопросы для защиты работы	71
5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ.....	73
5.1. Теоретические основы	73
5.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	74
5.3. Домашнее задание к лабораторной работе	76
5.4. Выполнение лабораторных исследований	79
5.5. Контрольные вопросы для защиты работы	81
6. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ ПОМЕХ	82
6.1. Теоретические основы	82
6.2. Рекомендации по подготовке к лабораторным исследованиям.....	84
6.3. Домашнее задание к лабораторной работе	84
6.4. Выполнение лабораторных исследований	87
6.5. Контрольные вопросы для защиты работы	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	93
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	94
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	95

Учебное издание

Токарев Антон Борисович

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАДИОТЕХНИКЕ:
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор А.Б. Токарева

Подписано к изданию 20.12.2017.

Объем данных 12,5 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14