

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Г. И. Липатов

**КОМПОНЕНТЫ МИКРОСИСТЕМНОЙ
ТЕХНИКИ**

Учебное пособие

Воронеж 2019

УДК 621.382.8(075.8)

ББК 32.85я7

Л61

Рецензенты:

*кафедра физики полупроводников и микроэлектроники
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Н. Бормонтов);
д-р техн. наук, проф. А. В. Строгонов*

Липатов, Г. И.

Компоненты микросистемной техники: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (4,2 Мб) / Г. И. Липатов. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-0799-6

В учебном пособии рассматриваются температурные напряжения и деформации в одно- и многослойных пластинах, напряженно-деформированное состояние несущих элементов МЭМС-устройств, электростатические взаимодействия в МЭМС с плоскопараллельными электродами.

Издание предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Компоненты микросистемной техники» и обучающихся по направлению подготовки 28.03.02 «Наноинженерия» (профиль «Инженерные нанотехнологии в приборостроении»).

Ил. 48. Табл. 6. Библиогр.: 4 назв.

УДК 621.382.8(075.8)

ББК 32.85я7

*Издается по решению учебно-методического совета
Воронежского государственного технического университета*

ISBN 978-5-7731-0799-6

© Липатов Г. И., 2019

© ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный технический
университет», 2019

ВВЕДЕНИЕ

Можно сказать, что микросистемная техника (МСТ) — это множество микроустройств самой разнообразной конструкции и назначения, в производстве которых используются модифицированные технологические приемы микроэлектроники. Например, микроэлектромеханические системы (МЭМС) получаются путем комбинирования механических элементов, датчиков и электроники на общем кремниевом подложке. Все элементы могут быть реализованы в виде единого изделия, причем сразу десятками или сотнями, как микросхемы на кремниевой пластине. В основе этого лежит апробированная традиционная технология производства полупроводниковых интегральных схем.

Указанные микроустройства могут использовать различные физические принципы работы и соответствующие компоненты, например механические, гидромеханические, оптические, электронные и т.д. Под ними подразумевают интеллектуальные миниатюризированные приборы, выполняющие функции восприятия, электронной обработки данных и/или приведения в действие, и комбинирующие электрические и механические компоненты.

Таким образом, МЭМС являются устройствами, содержащими механизмы и детали субмикронных размеров и предназначенные для измерения механических, электрических и тепловых величин в микроструктурах, а также преобразования различных видов энергии в механическую или электрическую. Также в них широко используются устройства выполнения кратковременных прецизионных перемещений и перемещений на большие расстояния, которые называются актюаторами.

Для создания интерфейса между электронной техникой и окружающей средой используют сенсоры, которые воспринимают информацию о состоянии всех систем и физических полей. Сенсоры являются первичными преобразователями сигнала одной физической природы в сигнал другой природы. Выделяют следующие основные типы и принципы действия сенсоров, преобразующих внешние воздействия в электрический сигнал: механические, электрические, магнитные, тепловые, оптические и химические. В данном учебном пособии рассматриваются только некоторые типы механических сенсоров.

1. ОСОБЕННОСТИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСОЛЬНОГО И МЕМБРАННОГО ТИПА

Во многих МЭМС-устройствах чувствительным элементом (сенсором) является консоль или мембрана, изменяющая свои параметры в результате внешнего воздействия. Изменения параметров этих устройств обусловлено явлениями электрострикции, пьезоэлектрического эффекта, термического расширения.

Рассмотрим простейшие примеры, позволяющие понять суть физических процессов при использовании такого сорта чувствительных элементов в МЭМС-устройствах.

По конструктивному признаку различают деформируемые и недеформируемые мембранные, струнные и консольно-балочные сенсоры. Деформируемые устройства могут работать в обращенном режиме — преобразовывать электрический сигнал в механическое движение. В этом случае они являются актюаторами. Основные требования к сенсорам:

- высокая чувствительность;
- широкий динамический диапазон входного сигнала;
- линейная функция преобразования;
- отсутствие гистерезиса, дрейфов и старения;
- высокое быстродействие;
- высокая надежность;
- малые массогабаритные характеристики;
- низкая стоимость.

Взаимоисключающие требования одновременно удовлетворить в одной конструкции невозможно, поэтому задачу решают на основе компромиссов. Рассмотрим конструктивные особенности основных типов механических микроустройств.

Мембранные сенсоры. Предназначены для измерения давления в диапазоне 10^{-1} — 10^8 Па. В качестве чувствительного элемента в сенсорах давления используют кремниевую мембрану. Толщина мембраны выбирается из условия прочности и в соответствии с диапазоном измеряемого давления. Применяют три типа мембранных сенсоров: пьезорезистивный; емкостный для измерения давления; емкостный для регистрации прикосновения.

Принцип действия пьезорезистивного сенсора давления основан на изменении сопротивления кремниевой мембраны при деформации. Недостатком этого типа сенсора является чувствительность к температуре и непрерывное потребление энергии.

Данных недостатков лишен емкостный датчик давления (рис. 1.1). В этой конструкции измеряют емкость между мембраной и подложкой, которая зависит от прогиба мембраны.



Рис. 1.1. Схема емкостного датчика давления. Возможна модификация этой конструкции, когда центр мембраны соприкасается с подложкой. Такой тактильный сенсор регистрирует прикосновение по изменению емкости. В результате локального деформирования мембраны меняется емкость. Чувствительность сенсора варьируется изменением геометрических параметров мембраны, поскольку прогиб w прямо пропорционален действующему давлению P , размеру полости l в четвертой степени и обратно пропорционален толщине мембраны h в третьей степени: $w=kPl^4/(Eh^3)$, где k — коэффициент, учитывающий конструктивные особенности сенсора; E — модуль упругости (Юнга) материала мембраны.

Нанопроволочные струнные сенсоры. Принцип действия струнных сенсоров основан на изменении собственной частоты колебаний, электропроводимости или электрического потенциала при взаимодействии с тестируемой субстанцией. Конструктивную основу струнных сенсоров могут составить монокристаллический ус (вискер), нанопроволока или нанотрубка, опирающаяся по краям на две опоры.

Нанопроволоки создают из металлов или полупроводников и бинарных полупроводниковых соединений. Используют синтез в наноканалах специальной подложки, выполненной из диэлектрического материала. Формируют одновременно большое число нанопроволок с плотностью наноканалов 10^9 — 10^{11} см⁻². Получают хорошо упорядоченные и сориентированные структуры, содержащие волокна, проволоки, трубки с диаметром от единиц нанометров до микрометра. В наносенсорах используют их уникальные механические, электрические и физико-химические свойства.

Например, сенсор в виде нанопроволочки, сформированный из пленки SiC методами нанолитографии и травлением в плазме NF_3/Ar и осажденный на поверхность кремниевой подложки, используют для распознавания различных молекул в растворе по изменению резонансной частоты при захвате соответствующих молекул и измене-

нию эквивалентной массы струны. По этой технологии создают систему струн с различной резонансной частотой и по-разному функционализированных. Основную собственную частоту нанопроволочного струнного сенсора, измеряемую в герцах, определяют по формуле

$$f_0 = \frac{3,56}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

где l — длина струны; I и A — соответственно осевой момент инерции струны и площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала струны.

Сдвиг собственной частоты f_0 из-за изменения массы оценивают по соотношению

$$\frac{f_0^2 - f_1^2}{f_0^2} = \frac{\Delta m}{m},$$

где f_1 — частота собственных колебаний после адсорбирования на струне массой m дополнительной массы молекулы Δm .

Консольно-балочные сенсоры. Эти сенсоры широко используются в атомно-силовых микроскопах для измерения малых сил. Консольно защемленная балка имеет следующие типичные размеры: толщина — десятки нанометров, ширина — сотни нанометров, длина — микрометры. Сенсор может реагировать на различные физические и химические стимулы. Первый консольно-балочный сенсор создан в середине 1990-х гг. и был предназначен для регистрации паров ртути. Кремниевая микробалка, покрытая с одной стороны золотом, в присутствии паров ртути (~ 30 мкг/м³) изгибалась и меняла собственную частоту. Сдвиг собственной частоты оценивали по вышеприведенной формуле.

В настоящее время созданы сборные наноприборы, состоящие из набора консольных балок с различными покрытиями (используют полистирол, полиуретан, сополимеры). Наносборки («искусственный нос») предназначены для анализа газовых смесей и определения наличия в них летучих органических компонентов, влажности и других параметров. Покрытие консольной балки с двух сторон разными материалами обеспечивает высокую чувствительность к изменению тепловой энергии (1 пДж и для температуры 10^{-5} К). Например, специальные наносборки способны обнаруживать в жидкостях ионы тяжелых металлов с концентрацией 10^{-9} %.

Актюаторы. Эти устройства предназначены для преобразования различных видов энергии в механическую работу. Механические актюаторы с кинематической точки зрения классифицируют на устройства с поступательным и вращательным движением. Схема актюатора с одной поступательной степенью свободы, которая обеспечивает большие перемещения при невысокой линейности, изображена на рис. 1.2. Подобные актюаторы широко применяются для управления микрозеркалами, зондами, резонаторами и др.

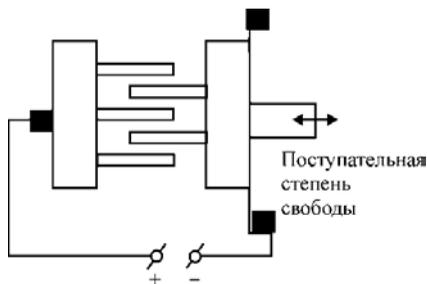


Рис. 1.2. Схема актюатора

Инерциальные микросенсоры. Эти устройства МСТ предназначены для определения параметров механической динамики объекта: перемещения, скорости, ускорения.

Датчики ускорения применяются в системах безопасности автомобилей, системах управления активными виброзащитными подвесами, биомедицинских средствах мониторинга. Принцип действия датчика ускорения заключается в подвешивании тела известной массы на плоских пружинах и измерении зазора между инерционной массой и обкладкой, которые вместе образуют емкостный датчик.

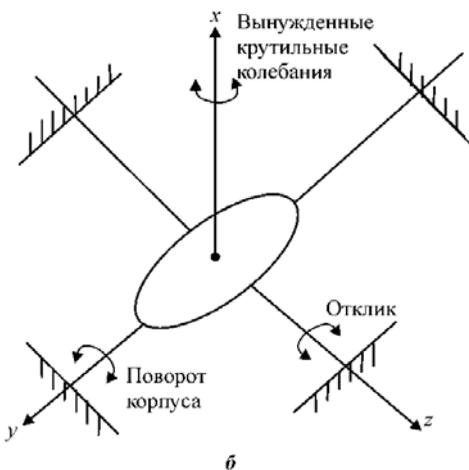
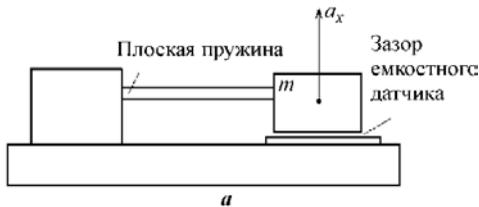


Рис. 1.3. Схемы инерциальных микросенсоров: а — акселерометр; б — гироскоп

ние с ускорением a_x вызывает деформацию плоской пружины и изменение емкости, которое регистрируется соответствующей электронной схемой. Ускорение по известному перемещению определяют по формуле $a_x = kx/m$, где k — жесткость подвеса для плоской пружины длиной l , шириной b , высотой h , $k = Ebh^3/(4l^3)$; x — величина перемещения чувствительного элемента; m — величина калиброванной массы чувствительного элемента.

Интегрирование зависимости ускорения позволяет получить зависимость изменения скорости объекта, а еще одно интегрирование — изменение его положения в пространстве. Все компоненты датчика ускорения могут быть выполнены методами нанотехнологии. Это позволяет существенно снизить массогабаритные характеристики и стоимость устройства.

МЭМС-гироскопы представляют собой более сложные устройства, предназначенные для регистрации поворота объекта вокруг пространственных осей. Они применяются в авиации, космонавтике, ракетной технике для целей навигации. В гироскопах с одной степенью свободы (рис. 1.4) используют электростатические вибромеханические актюаторы для обеспечения колебаний чувствительного элемента на резонансной частоте вдоль соответствующего направления. Сенсоры реагируют на передачу части колебательной энергии в результате эффекта Кориолиса в колебания вдоль другой ортогональной оси, когда объект поворачивается вокруг ортогональной им основной оси.

Микрогироскопы с двумя степенями свободы содержат диск, который совершает вынужденные резонансные крутильные колеба-

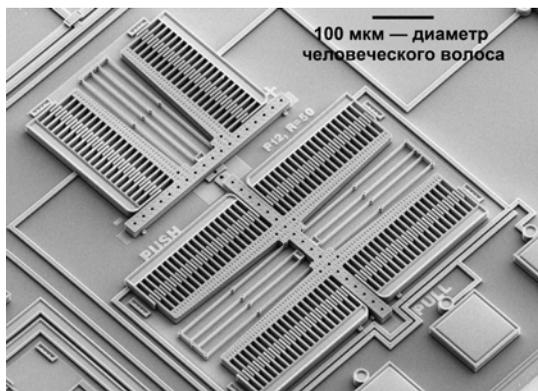


Рис. 1.4. Микрофотография МЭМС-гироскопа

ния вокруг оси x . Поворот корпуса гироскопа вокруг оси y вызывает отклик — вращение диска вокруг оси z под действием силы Кориолиса, а поворот вокруг оси z — вращение вокруг оси y . Сенсоры улавливают эти повороты и превращают их в полезные сигналы. Схема двух-

осного гироскопа изображена на рис. 1.3, б. Прибор для регистрации изменения положения объекта по всем шести степеням свободы содержит на одном кристалле гироскопы для регистрации поворотов вокруг всех трех осей и три датчика ускорения.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют ограничения на уменьшение размеров отдельных элементов микроприборов?
2. Назовите перечень основных требований к микросенсорам.
3. Перечислите конструктивные особенности основных типов механических микроприборов.
4. Поясните правила размещения пьезорезистивных преобразователей на балках, торсионах и упругих подвесах.
5. От величины каких параметров струнного сенсора зависит его собственная частота?
6. В чем состоит назначение актюатора?

2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ

Формирование температурных напряжений σ в конструктивных элементах приборов определяется градиентами температуры в теле, величиной коэффициентов термического расширения (КТР) α и их разностью в слоистых структурах.

Для большинства конструктивных материалов, используемых в технике, коэффициенты термического расширения известны. Их величину в инженерных расчетах принимают постоянной во всем рабочем диапазоне температуры материала в зависимости от состава материала.

Температурные напряжения в однослойной прямоугольной пластине. Одной из причин появления напряжений в пластинах является неравномерный нагрев. Расширение при нагревании происходит несвободно, т.е. появляются температурные напряжения.

Простые задачи легко свести к рассмотрению задач о действии усилий на границе тела. В качестве такой задачи рассмотрим прямоугольную пластину постоянного размера с температурой $T=f(y)$, не зависящей от других координат.

В пластине с жесткозакрепленными торцами продольное тер-

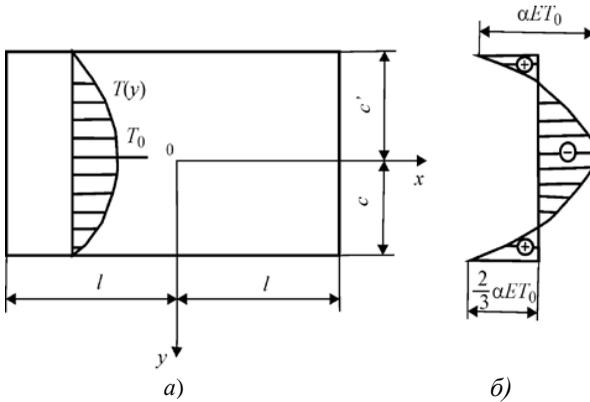


Рис. 2.1. Поле температуры (а) и эпюра напряжений (б) в однослойной прямоугольной пластине

мическое расширение αT отсутствует. Это значит, что продольное напряжение (сжимающее) определится как

$$\sigma'_x = -\alpha TE, \quad (2.1)$$

где E — модуль Юнга материала пластины.

В поперечном направлении расширение свободно, т.е. поперечные нормальные напряжения отсутствуют. Температурные напряжения в пластине со свободными концами определяются путем наложения на напряжения (2.1) таких напряжений, которые вызваны в пластине растягивающими напряжениями интенсивностью αTE , распределенными по концам. Результирующая сила от действия таких напряжений равна $\int_{+c}^{-c} \alpha TE dy$ и на достаточном удалении от концов вызывает равномерное распределение растягивающих напряжений интенсивностью $(1/2c) \int_{+c}^{-c} \alpha TE dy$.

Температурные напряжения в пластине со свободными концами определяются как

$$\sigma_x = \frac{1}{2c} \int_{+c}^{-c} \alpha TE dy - \alpha TE. \quad (2.2)$$

Таким образом, при одинаковой температуре по всей пластине $\sigma_x=0$.

В случае нелинейного распределения температуры, например параболического (рис. 2.1, а) $T(y)=T_0[1-(y/c)^2]$, из уравнения (2.2) получаем:

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \alpha T_0 E - \alpha T_0 E [1 - (y/c)^2]. \quad (2.3)$$

Эпюра напряжений при параболическом распределении температуры по оси y показана на рис. 2.1, б.

Температурные напряжения в однослойной пластине с осесимметричным распределением температур. При анализе напряженно-деформированного состояния в круглой пластине воспользуемся полярными координатами, где положение точки определится текущим радиусом r и углом между радиусом и фиксированной осью Ox (рис. 2.2, а).

В выделенном малом элементе $abcd$ единичной толщины (рис. 2.2, б) в радиальном направлении действует нормальное напряжение σ_r , в окружном (тангенциальном) направлении — σ_θ .

Уравнение равновесия сил, действующих по граням элемента $abcd$ на радиальное направление, запишется как

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0.$$

После упрощения уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (2.4)$$

Связь между напряжениями σ_r , σ_θ и деформациями ϵ_r и ϵ_θ для плоского напряженного состояния в полярных координатах представим законом Гука, т.е.

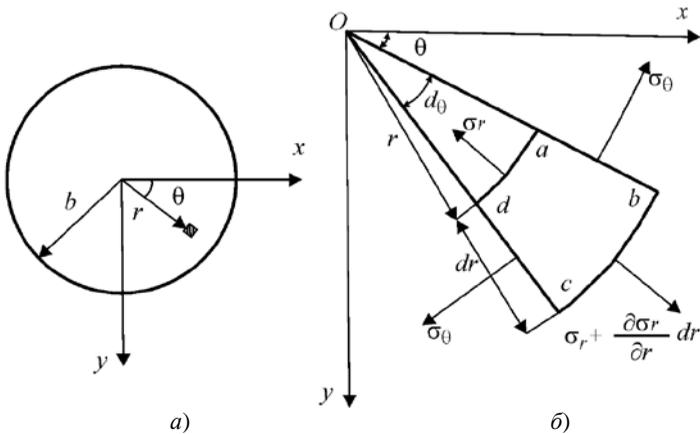


Рис. 2.2. Схема распределения напряжений в сегменте тонкой круглой пластины

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r),$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Последние зависимости требуют модификации, поскольку деформация определяется не только напряжениями, но и температурой. Радиальная и тангенциальная деформации, вызванные действием напряжений, определяются в виде

$$\varepsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \quad (2.5)$$

Разрешив (1.5) относительно σ_r и σ_θ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1-\mu^2}[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{1-\mu^2}[\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\alpha T]. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получаем следующее уравнение равновесия:

$$r \frac{d}{dr}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) + (1+\mu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - (1+\mu)\alpha r \frac{dT}{dr}. \quad (2.7)$$

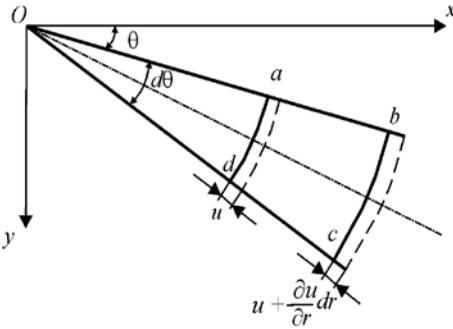


Рис. 2.3. Схема деформаций в сегменте тонкой круглой пластины

Обозначим через u радиальное перемещение (рис. 2.3). Тогда тангенциальная и радиальная деформации запишутся в виде:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - (1+\mu)\alpha \frac{dT}{dr}. \quad (2.9)$$

Преобразование (2.9) дает

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right] = (1 + \mu) \alpha \frac{dT}{dr}, \quad (2.10)$$

после интегрирования которого получаем:

$$u = (1 + \mu) \alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (2.11)$$

где a — радиус отверстия в пластине.

Для сплошной пластины ($a=0$), подставляя (2.11) в (2.8), а затем в (2.6), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1 - \mu^2} \left[C_1 (1 + \mu) + C_2 (1 - \mu) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= -\alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \alpha E T + \frac{E}{1 - \mu^2} \left[C_1 (1 + \mu) + C_2 (1 - \mu) \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Для сплошного диска, учитывая, что в (2.11)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r T r dr \right) = 0,$$

принимая $C_2=0$, так как при $r=0$ $u=0$. На краю пластины при $r=b$ имеем $\sigma_r=0$, откуда

$$C_1 = (1 - \mu) \frac{\alpha}{b^2} \int_a^r T r dr.$$

Подставляя C_1 и C_2 в (1.12), окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha E \frac{(r/b)^2 - 1}{r^2} \int_0^r T r dr; \\ \sigma_\theta &= \alpha E \left[\frac{(r/b)^2 + 1}{r^2} \int_0^r T r dr - T \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

В центре диска, поскольку система осесимметричная, $\sigma_r = \sigma_\theta$.

В тонкой пластине, разделяющей две области температур, можно считать в установившихся условиях распределение температуры по толщине линейным. По этому же закону будет меняться удлинение верхних и нижних слоев относительно срединной плоскости, что вызовет изгиб пластины по шаровой поверхности.

Деформация поверхностных слоев равна $+\alpha\Delta T/2$ и $-\alpha\Delta T/2$. Зависимость деформации от радиуса ρ шаровой поверхности имеет вид $+h/2\rho$ и $-h/2\rho$. Приравняв деформации, получим:

$$\frac{\alpha\Delta T}{2} = \frac{h}{2\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha\Delta T}{h}. \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что наибольшей кривизной обладают тонкие пластины. Поскольку края пластины свободные, искривление не вызовет никаких напряжений.

В практике часто необходимо оценить радиус кривизны по прогибу пластины. Из геометрических соображений для пластины,

изогнутой по цилиндру или сфере, эта связь имеет вид

$$\rho = \frac{l^2}{8\delta_{\max}}, \quad (2.15)$$

где l — длина прямоугольной пластины или диаметр круглой пластины.

Пример. Определить радиальные и тангенциальные напряжения в тонкой круглой однослойной пластине с линейным изменением температуры вдоль радиуса при одинаковой температуре по толщине.

Решение. Закон изменения температу-

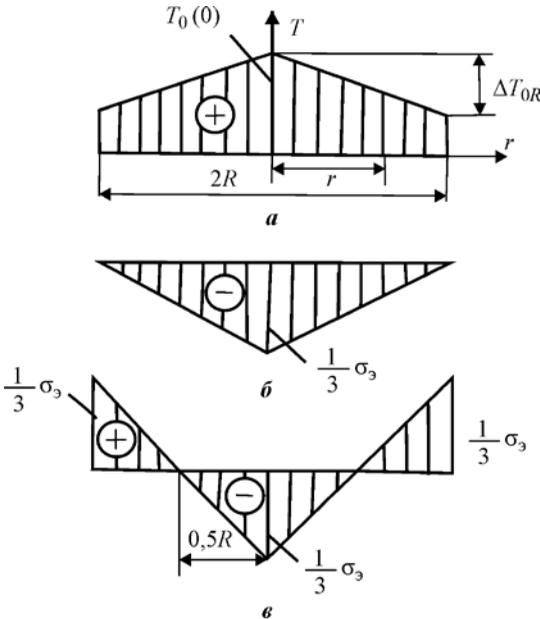


Рис. 2.4. Схема распределения температуры T (а), напряжений радиальных σ_r (б) и тангенциальных σ_θ (в)

ры (рис. 2.4, а) вдоль радиуса

$$T_0(r) = T_0(0) \left[1 - \frac{\Delta T_{0R}}{T_0(0)} \frac{r}{R} \right] = T_0(0) \left[1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right],$$

где $\overline{\Delta T}_{0R}$ — относительный перепад температуры по радиусу пластины. Подставляя линейный закон изменения температуры по радиусу, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \alpha E T_0(0) \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr \right]; \\ \sigma_\theta &= \alpha E T_0(0) \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr - \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \int_0^r \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr \right]. \end{aligned}$$

Интегралы в формулах равны:

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr &= \frac{R^2}{6} (3 - 2\overline{\Delta T}_{0R}); \\ \int_0^r \left(1 - \overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R} \right) r dr &= \frac{r^2}{6} (3 - 2\overline{\Delta T}_{0R} \frac{r}{R}). \end{aligned}$$

После преобразования выражений для σ_r и σ_θ имеем

$$\sigma_r = -\frac{1}{3} \alpha E \Delta T_{0R} \left(1 - \frac{r}{R} \right); \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{3} \alpha E \Delta T_{0R} \left(1 - 2 \frac{r}{R} \right).$$

Вводя обозначение $\sigma_e = \alpha E \Delta T_{0R}$, получаем:

$$\sigma_r = -\frac{1}{3} \sigma_e \left(1 - \frac{r}{R} \right); \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{3} \sigma_e \left(1 - 2 \frac{r}{R} \right).$$

Эпюры напряжений приведены на рис. 2.4, б и в.

Как видно, максимальные сжимающие радиальные напряжения σ_r возникают в центре пластины, а на краю пластины σ_r равно нулю. Максимальные растягивающие тангенциальные напряжения

σ_0 возникают на краю пластины, а в центре пластины будут действовать максимальные сжимающие тангенциальные напряжения.

Контрольные вопросы

1. Укажите причины возникновения температурных напряжений в структурных элементах.
2. Как определить температурные напряжения в прямоугольной пластине с жестко закрепленными торцами?
3. По какой формуле проводится расчет температурных напряжений в прямоугольной пластине со свободными торцами?
4. Какие напряжения действуют в однослойной пластине с осесимметричным распределением температур?
5. От чего зависит деформация пластины, изогнутой по шаровой поверхности?

3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ

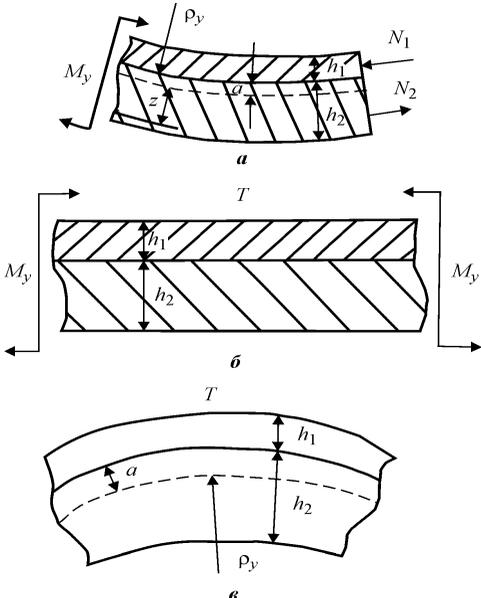


Рис. 3.1. Схема двухслойной пластины: *a* — с нагрузкой в виде изгибающего момента; *b* — с температурной нагрузкой и моментом; *v* — с температурной нагрузкой

Слои многослойной структуры могут быть сформированы из тонких и объемных материалов с кристаллической структурой. Примером двухслойной структуры является структура из металла с покрытием из материала, повышающего износостойкость.

Температурные напряжения в двухслойных структурах. Рассмотрим изгиб двухслойной пластины единичной ширины при действии изгибающего момента M_y в отсутствие нагрева (рис. 3.1). Будем считать, что напряженное со-

стояние в пластине одноосное. Радиус кривизны нейтрального слоя ρ_y , модули упругости материалов слоёв E_1 и E_2 .

На основе гипотезы нормалей деформация по толщине слоев z определится как $\varepsilon_x = z/\rho_y$, где координата z отсчитывается от нейтрального слоя (положительное направление оси z — вниз).

Напряжения в верхнем и нижнем слоях определяются по закону Гука

$$\sigma_{x1} = \varepsilon E_1 = \frac{zE_1}{\rho_y}, \quad \sigma_{x2} = \varepsilon E_2 = \frac{zE_2}{\rho_y}. \quad (3.1)$$

Положение нейтрального слоя определяется из условия равенства нулю осевой силы N , т.е. $N=N_1+N_2=0$. Это условие можно записать в виде суммы двух интегралов от σ_x по толщине слоев, т.е.

$$N = \int_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x1} dz + \int_{-a}^{h_2-a} \sigma_{x2} dz = \frac{E_1 h_1}{\rho_y} \left(\frac{h_1}{2} + a \right) + \frac{E_2 h_2}{\rho_y} \left(\frac{h_2}{2} - a \right) = 0.$$

После преобразований имеем для положения нейтральной плоскости:

$$a = \frac{1}{2} \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}. \quad (3.2)$$

Изгибающий момент, равный произведению силы, действующей в слое, на расстояние (плечо) до другой силы, можно представить в виде суммы интегралов

$$M_y = \int_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x1} z dz + \int_{-a}^{h_2-a} \sigma_{x2} z dz$$

или с учетом (3.2) получаем:

$$M_y = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{\rho_y}, \quad (3.3)$$

где I_1, I_2 — моменты инерции сечений слоев относительно нейтрального слоя

$$I_1 = \frac{(h_1 + a)^3 - a^3}{3}; \quad I_2 = \frac{(h_2 - a)^3 - a^3}{3}.$$

Отсюда кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \quad (3.4)$$

так что

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y E_1 z}{E_1 I_1 + E_2 I_2}; \quad \sigma_{x2} = \frac{M_y E_2 z}{E_1 I_1 + E_2 I_2}.$$

Полученные зависимости справедливы, когда изгибающий момент переменный по длине.

Уравнение прогиба упругой линии пластины (прогиба пластины) можно получить из (3.4), представив в виде:

$$\frac{d^2 \delta}{dy^2} = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}. \quad (3.5)$$

Приведенная выше зависимость значительно упрощается для двухслойной пластины, у которой $h_1 \ll h_2$. В этом случае имеем $E_1 I_1 \ll E_2 I_2$, $E_1 h_1 \ll E_2 h_2$, $E_1 h_1^2 \ll E_2 h_2^2$.

Положение нейтральной плоскости для такой структуры определится как

$$a \approx h_2/2. \quad (3.6)$$

Формулы для напряжений запишутся как

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y E_1 z}{E_2 I_2}; \quad \sigma_{x2} = \frac{M_y z}{I_2}. \quad (3.7)$$

Поскольку из (3.3) $M_y \approx E_2 I_2 / \rho_y$, уравнения (2.7) упрощаются

$$\sigma_{x1} = \frac{E_1 z}{\rho_y}; \quad \sigma_{x2} = \frac{E_2 z}{\rho_y}. \quad (3.8)$$

Прогиб пластины можно получить интегрированием следующего уравнения упругой линии

$$\frac{d^2 \delta}{dy^2} = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{E_2 I_2}. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8) и (3.9) можно использовать при анализе напряженно-деформированного состояния слоев по известной кривиз-

не пластин, определяемой экспериментально.

Рассмотрим двухслойную пластину, охлажденную от температуры формирования верхнего слоя T_ϕ до нормальной температуры и нагруженную фиксированным моментом M_y , величина которого такова, что после охлаждения пластины прогиб равен нулю.

В отсутствие прогиба деформация во всех точках пластины одинаковая:

– для верхнего слоя

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{x1}}{E_1} + \alpha_1 T;$$

– для нижнего слоя

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{x2}}{E_2} + \alpha_2 T;$$

где α_1, α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения материалов верхнего и нижнего слоев; $T = T_\phi - T_n$ — разница между температурой формирования слоя и нормальной температурой.

Приравняв правые части приведенных уравнений, получим:

$$\frac{\sigma_{x1}}{E_1} + \alpha_1 T = \frac{\sigma_{x2}}{E_2} + \alpha_2 T. \quad (3.10)$$

Для определения значений σ_{x1} и σ_{x2} добавим к уравнению (3.10) еще одно уравнение, составленное из условия равенства нулю нормальной силы в сечении пластины

$$N = \sigma_{x1} h_1 + \sigma_{x2} h_2 = 0. \quad (3.11)$$

Совместное решение системы двух уравнений дает

$$\sigma_{x1} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T}{h_1 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}; \quad \sigma_{x2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T}{h_2 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}. \quad (3.12)$$

Суммируя по толщине напряжения в слоях, получаем пару сил с расстоянием между ними $(h_1 + h_2)/2$, т.е. момент в сечении:

$$M_y = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T(h_1 + h_2)}{2 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}. \quad (3.13)$$

Зависимости (3.12) могут использоваться при анализе напряжений в слоях в условиях ряда технологических процессов.

Из зависимостей (3.12) нетрудно определить напряжения и радиус кривизны поверхности только при нагреве или охлаждении. Для этого к пластине, нагруженной термической нагрузкой и моментом, надо приложить обратный момент. При этом моменты взаимно уничтожаются, и остается только температурная нагрузка.

Зависимости для напряжений определяются как разность напряжений уравнений (3.12) и (3.7) при значении момента M_y , т.е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1}^{(t)} &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T}{\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{(h_1 + h_2)E_1 z}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right]; \\ \sigma_{x2}^{(t)} &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T}{\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}} \left[\frac{1}{h_2} - \frac{(h_1 + h_2)E_2 z}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Положение нейтрального слоя определится уравнением (3.2). Прогиб пластины определится интегрированием уравнения

$$\frac{d^2 \delta}{dy^2} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T(h_1 - h_2)}{2 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right) (E_1 I_1 + E_2 I_2)}. \quad (3.15)$$

В двухслойных пластинах с тонким верхним слоем при $h_1 \ll h_2$ уравнения (3.14) значительно упрощаются, поскольку $E_1 h_1 \ll E_2 h_1$, $E_1 I_1 \ll E_2 I_2$.

Положение нейтрального слоя определится как

$$a \approx \frac{E_2 h_2^2}{2E_2 h_2} = \frac{h_2}{2}. \quad (3.16)$$

Это означает, что нейтральный слой расположен в середине второго слоя. В этом случае момент инерции двухслойной пластины единичной толщины определится зависимостью

$$I_2 = h_2^3 / 12.$$

Уравнения для расчета напряжений в слоях принимают вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{x1}^{(t)} &= -(\alpha_1 - \alpha_2)TE_1 \left[1 + \frac{6E_1h_1z}{E_2h_2^2} \right]; \\ \sigma_{x2}^{(t)} &= -(\alpha_1 - \alpha_2)TE_1 \left[\frac{h_1}{h_2} + \frac{6h_1z}{h_2^2} \right].\end{aligned}\tag{3.17}$$

Второе слагаемое в скобках для $\sigma_{x1}^{(t)}$ намного меньше единицы. Так, при $E_1/E_2=2$, $h_1/h_2=500$ и $z=h_2/2$ имеем

$$\frac{6E_1h_1z}{E_2h_2^2} = 0,003 \ll 1.$$

Расчетная формула для $\sigma_{x1}^{(t)}$ упрощается и принимает вид

$$\sigma_{x1}^{(t)} = -(\alpha_1 - \alpha_2)TE_1.\tag{3.18}$$

Из уравнений (3.17) следует, что напряжения в тонком слое будут определяться, прежде всего, разницей коэффициентов термического расширения с нижним слоем. При $\alpha_1 \approx \alpha_2$ $\sigma_{x1}^{(t)}$ стремится к нулю, при $\alpha_1 > \alpha_2$ напряжение $\sigma_{x1}^{(t)}$ соответствует сжатию тонкого слоя, при $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем напряжения растяжения.

Сравнивая максимальные напряжения в первом и втором слоях (2.17), можно видеть, что $\sigma_{x2}^{(t)}$ мало по сравнению с $\sigma_{x1}^{(t)}$. Так, при $h_2=500h_1$ напряжение $\sigma_{x2}^{(t)}$ составит лишь $\sim 0,4\%$ от $\sigma_{x1}^{(t)}$. Поскольку такие напряжения фактически не приводят к изменению размера пластины, полная деформация пластины будет равна термической. Отсюда деформация тонкого слоя составит $(\alpha_1 - \alpha_2)T$, что подтверждает справедливость уравнения (3.18).

Кривизна пластины с тонким верхним слоем определится по формуле, полученной упрощением (3.15),

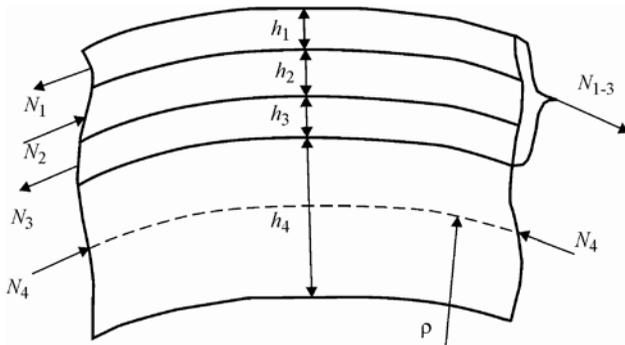


Рис. 3.2. Схема сил в сечении многослойной пластины

$$\frac{d^2\delta}{dy^2} = \frac{1}{\rho_y} - \frac{6(\alpha_1 - \alpha_2)TE_1h_1}{E_2h_2^2}. \quad (3.19)$$

Температурные напряжения в многослойной пластине. Напряженно-деформированное состояние в многослойной пластине с толщинами тонких слоев (h_1, h_2, h_3), намного меньших толщины базового слоя (h_4), в основном определяется термическим расширением или сжатием в базовом слое. Это значит, что деформация в любом тонком слое многослойной структуры (рис. 3.2), определяющая напряженное состояние, запишется в виде

$$\varepsilon_i = (\alpha_i - \alpha_n)T_i, \quad (3.20)$$

где α_n — температурный коэффициент линейного расширения в базовом слое; $T_i = T_{\phi_i} - T_n$; T_{ϕ_i} — температура формирования i -го слоя; T_n — нормальная температура.

В таком случае напряжения в слоях определяются зависимостью

$$\sigma_{xi} = -(\alpha_i - \alpha_n)E_iT_i. \quad (3.21)$$

Изгибающий момент в сечении многослойной пластины с числом слоев n равен

$$M = \sum_{i=1}^n \sigma_{xi} h_i \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2}, \quad (3.22)$$

где $\sum_{i=1}^n h_i / 2$ — расстояние между равнодействующей силой тонких

слоев и силой в сечении базового слоя.

Нейтральная плоскость расположена на середине базового слоя, поскольку $h_i \ll h_n$.

Кривизна многослойной пластины определяется из выражения

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n E_i I_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_n) E_i T_i \sum_{i=1}^n h_i / 2}{\sum_{i=1}^n E_i I_i}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние трехслойной пластины, где $h_1 \ll h_n$ и $h_2 \ll h_n$. Напряжение в слоях определяется выражениями, полученными из (3.18)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= -(\alpha_1 - \alpha_3) E_1 T_1; \\ \sigma_{x2} &= -(\alpha_2 - \alpha_3) E_2 T_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Напряжение в базовом слое σ_{x3} будет незначительным по сравнению с σ_{x1} и σ_{x2} .

Силы в сечении тонких слоев определяются произведением напряжения на толщину

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \sigma_{x1} h_1 = -(\alpha_1 - \alpha_3) E_1 T_1 h_1; \\ N_2 &= \sigma_{x2} h_2 = -(\alpha_2 - \alpha_3) E_2 T_2 h_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Напряжения в слоях в зависимости от соотношения α_i с α_n могут быть сжимающими и растягивающими. Это значит, что общая сила в тонких слоях будет равнодействующей, т.е. $N_{1-2} = N_1 + N_2$.

Примем, что равнодействующая приложена в середине общей толщины слоев. В этом случае плечо между силой N_{1-2} и силой в сечении базового слоя будет равно $(h_1 + h_2 + h_3)/2$. Отсюда кривизна трехслойной пластины определится формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\sigma_{x1} h_1 + \sigma_{x2} h_2)(h_1 + h_2 + h_3)}{2(E_1 I_1 + E_2 I_3 + E_3 I_3)}. \quad (3.26)$$

Учитывая, что $E_1 I_1 \ll E_3 I_3$, $E_2 I_2 \ll E_3 I_3$, $h_1 \ll h_3$, $h_2 \ll h_3$, формула (3.26) упростится и примет вид

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{(\sigma_{x1} h_1 + \sigma_{x2} h_2) h_3}{2 E_3 I_3}. \quad (3.27)$$

Пример. Определить напряжения в тонком слое двухслойной пластины при заданном максимальном прогибе $\delta_{\max}=30$ мкм. Модуль упругости материала $E_1=140$ ГПа. Длина пластины $l=50$ мм, толщина $h_2=400$ мкм.

Решение. Радиус кривизны пластины при цилиндрическом прогибе определяется по формуле (2.15)

$$\rho = l^2 / (8\delta_{\max}),$$

Используя уравнение (3.3), определяем величину изгибающего момента:

$$M_y \approx E_2 I_2 / \rho = 8E_2 I_2 \delta_{\max} / l^2.$$

Подставляя M_y в (3.8), получаем расчетную зависимость нормального напряжения в тонком слое:

$$\sigma_{x1} = \frac{8E_1 \delta_{\max} z}{l^2} = \frac{8 \cdot 140 \cdot 0,03 \cdot 0,2}{50^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ ГПа} = 2,7 \text{ МПа}.$$

Распределение напряжения по сечению слоя можно принять постоянным из-за несоразмерности толщин слоев.

Методика расчета температурных напряжений в двухслойной пластине с тонким верхним слоем приведена в описании лабораторной работы № 1.

Контрольные вопросы

1. Как определить положение нейтрального слоя в двухслойных структурах?
2. От чего зависит изгибающий момент, действующий в двухслойной структуре?
3. По какой формуле можно определить кривизну нейтрального слоя двухслойной структуры?
4. Какие уравнения позволяют провести расчет температурных напряжений в двухслойной структуре?
5. Как определить температурные напряжения в трехслойной структуре?

4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ МЭМС-УСТРОЙСТВ

Во всем многообразии элементов микромеханических систем можно выделить два основных несущих элемента, определяющих работу устройства, — упруго деформируемый сенсорный элемент и упруго деформируемые опоры. В первом случае тело сенсорного элемента с преобразователями перемещений упруго деформируется под действием внешней нагрузки (например, прямоугольная или круглая мембрана датчика давления), во втором случае упругие опоры несут сенсорный элемент или микроактюатор.

При разработке устройства важно определить размеры упругих элементов, обеспечивающих надежную работу в заданном диапазоне перемещений. Для этого необходимо установить связь перемещений упругого элемента с его размерами и свойствами материала.

4.1. Напряженно-деформированное состояние пластин

Напряженно-деформированное состояние круглой пластины. Рассмотрим круглую пластину с защемленными краями, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 3.1). Изгиб пластины представлен на рис. 4.2.

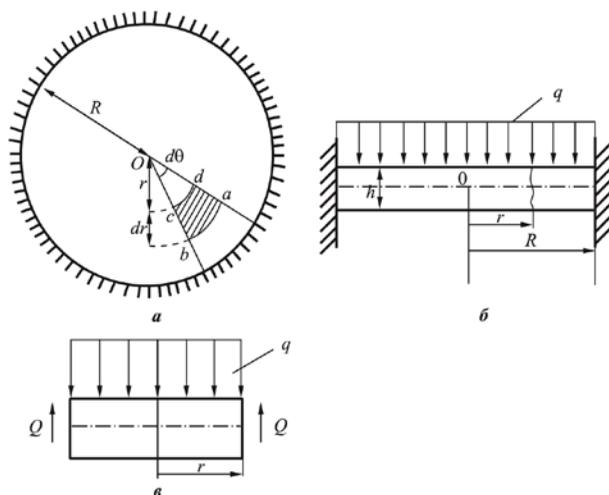


Рис. 4.1. Круглая пластина с защемленными краями, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q : а — вид сверху; б — диаметральное сечение; в — элемент сечения

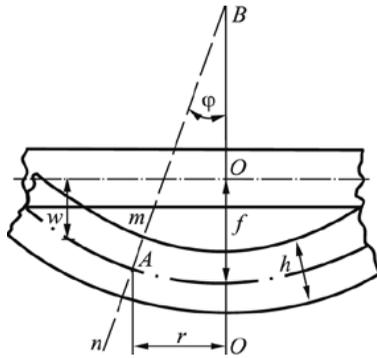


Рис. 4.2. Изгиб круглой пластины с равномерно распределенной нагрузкой

Начало координат поместим в центре срединной поверхности недеформированной пластины и рассмотрим меридиональное (радиальное) сечение. На основании гипотезы плоских сечений будем считать, что прямоугольные элементы, перпендикулярные срединной плоскости, после изгиба остаются прямыми и нормальными к искривленной поверхности пластины. Элементы, расположенные до деформации по цилиндрической поверхности радиуса r , образуют после деформации коническую поверхность с вершиной в точке B , причем сечение mn поворачивается относительно своей средней точки A на некоторый угол φ . Кривизна срединной поверхности пластины по меридиональному сечению определяется как

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (4.1)$$

где δ — прогиб пластины; R_1 — радиус первой главной кривизны.

Для любой точки A соответствующий радиус второй главной кривизны R_2 будет равен AB :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\varphi}{r}. \quad (4.2)$$

Изгибающий момент для нормального сечения, перпендикулярного к плоскости меридиана, определится зависимостью

$$M_1 = D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu \frac{\varphi}{r} \right). \quad (4.3)$$

где $D= Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины толщиной h .

Изгибающий момент, приходящийся на единицу длины меридионального сечения, равен

$$M_2 = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (4.4)$$

Исследуем условия равновесия элемента $abcd$ (рис. 4.3), вырезанного двумя бесконечно близкими меридиональными сечениями и двумя концентрическими поверхностями радиусов r и $r+dr$. По боковым граням элемента ad и bc будут действовать изгибающие моменты, равные $M_2 dr$. По грани cd , соответствующей цилиндрической поверхности радиуса r , будет действовать момент $M_1 r d\theta$. По грани ab будет действовать момент $(M_1 + \partial M_1 / \partial r \cdot dr)(r + dr) d\theta$. Суммарный момент относительно оси OO , действующий на элемент $abcd$, определится как

$$\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - M_1 r d\theta - M_2 dr d\theta = \left(M_1 + r \frac{\partial M_1}{\partial r} - M_2 \right) dr d\theta. \quad (4.5)$$

По граням ab и cd будут действовать касательные напряжения в вертикальном направлении.

Рассмотрим осесимметричный элемент пластины, вырезанный цилиндрической поверхностью радиуса r . Обозначим через Q сумму перерезывающих усилий, отнесенную к единице длины сечения цилиндра по срединной поверхности пластины. Тогда все перерезывающие усилия дадут вертикальную силу, равную $Q2\pi r$ (см. рис. 4.1, в). Эта сила равна по величине и противоположна по направлению вертикальной нагрузке, действующей на пластину радиуса r :

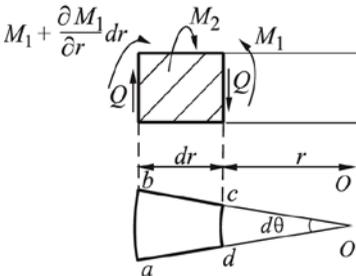


Рис. 4.3. Элемент $abcd$, вырезанный из круглой пластины двумя меридиональными сечениями и двумя концентрическими поверхностями радиусов r и $r+dr$

Тогда все перерезывающие усилия дадут вертикальную силу, равную $Q2\pi r$ (см. рис. 4.1, в). Эта сила равна по величине и противоположна по направлению вертикальной нагрузке, действующей на пластину радиуса r :

$$Q2\pi r = q\pi r^2,$$

откуда

$$Q = qr/2. \quad (4.6)$$

Касательные усилия, приложенные к грани cd выделенного эле-

мента, приводятся к равнодействующей

$$Qrd\theta = r \frac{qr}{2} d\theta.$$

Момент от касательных усилий, действующих по граням ab и cd выделенного элемента относительно оси, проходящей через центр элемента и параллельной OO , равен

$$Qrd\theta dr = r \frac{qr}{2} d\theta dr. \quad (4.7)$$

Условие равновесия элемента $abcd$ определится суммой моментов (4.5) и (4.7), равных по величине и противоположных по знаку:

$$M_1 + r \frac{\partial M_1}{\partial r} - M_2 + r \frac{qr}{2} = 0. \quad (4.8)$$

Заменив M_1 и M_2 их выражениями (3.3) и (3.4), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{qr}{2D}. \quad (4.9)$$

Упрощенная запись левой части уравнения (4.9) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) \right],$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) \right] = -\frac{qr}{2D}. \quad (4.10)$$

После двойного интегрирования (4.10) и преобразований получим

$$\varphi = -\frac{\partial \delta}{\partial r} = -\frac{qr^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (4.11)$$

Прогиб пластины определится интегрированием (4.11):

$$\delta = \frac{qr^4}{64D} + C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3. \quad (4.12)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 определим из граничных условий на контуре пластины.

Для круглой пластины радиусом R с защемленными краями имеем

$$\varphi = \frac{\partial \delta}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=R.$$

Из условия симметрии имеем второе граничное условие

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=0.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из уравнений

$$\left[\frac{qr^3}{16D} - C_1 \frac{r}{2} - \frac{C_2}{r} \right]_{r=R} = 0; \quad \left[\frac{qr^3}{16D} - C_1 \frac{r}{2} - \frac{C_2}{r} \right]_{r=0} = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{qR^3}{8D} \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Подставив C_1 и C_2 в (4.11), получим

$$\varphi = \frac{qr}{16D} (R^2 - r^2). \quad (4.13)$$

Интенсивность изгибающих моментов M_1 и M_2 запишется уравнениями

$$M_1 = D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) = \frac{q}{16} [R^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu)]; \quad (4.14)$$

$$M_2 = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{q}{16} [R^2(1 + \mu) - r^2(1 + 3\mu)].$$

Радиальное σ_r и тангенциальное σ_θ напряжения для произвольной точки поперечного сечения пластины определяются как

$$\sigma_r = \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_\theta = \frac{12M_2}{h^3} z, \quad (4.15)$$

где z — расстояние от срединной поверхности пластины до рассматриваемой точки.

Напряжение σ_r достигает наибольшего значения на периферии пластины при $r=R$ и $z=h/2$:

$$\sigma_{r \max} = \frac{3qR^2}{4h^3}. \quad (4.16)$$

Напряжение σ_θ будет равно

$$\sigma_\theta = \frac{3qR^2}{4h^3} \mu. \quad (4.17)$$

В центре пластины при $r=0$ и $z=h/2$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3qR^2}{8h^3} (1 + \mu). \quad (4.18)$$

Наиболее опасными являются точки на периферии пластины при $z=h/2$, условие прочности для которых имеет вид

$$\sigma_{r \max} = \frac{3qR^2}{4h^3} \leq [\sigma], \quad (4.19)$$

где $[\sigma]$ — допустимое напряжение для материала пластины.

Из (4.12) прогиб пластины определится как

$$\delta = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2r^2}{32D} + C_3.$$

Учитывая, что на контуре пластины прогиб равен нулю (при $r=R$ $\delta=0$), получаем

$$C_3 = \frac{qR^4}{64D}.$$

Расчетное уравнение прогиба имеет вид

$$\delta = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (4.20)$$

Максимальный прогиб в центре пластины при $r=0$

$$\delta_{\max} = \frac{qR^4}{64D}. \quad (4.21)$$

Общий вид эпюр изгибающих моментов, прогибов и напряжений приведен на рис. 4.4.

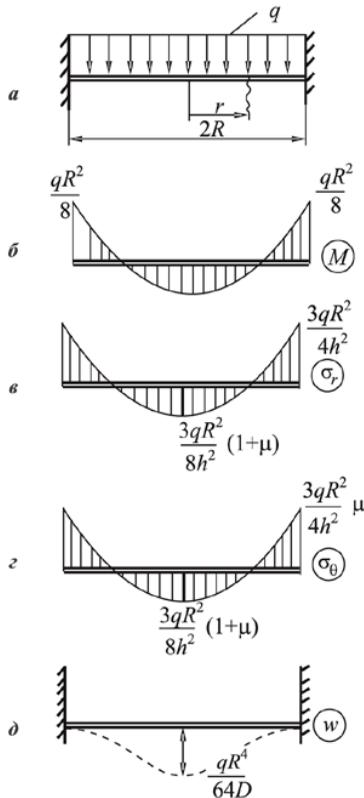


Рис. 4.4. Эпюры изгибающих моментов, напряжений и прогибов для круглой пластины с защемленными краями, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q : *a* — схема нагружения; *б* — эпюра изгибающих моментов M ; *в* — эпюра радиальных напряжений; *г* — эпюра тангенциальных напряжений; *д* — эпюра прогибов

Напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и защемленной по контуру, удобно проводить, исходя из рассмотрения потенциальной энергии, зависящей от прогиба пластины δ .

Схема нагружения приведена на рис. 4.5.

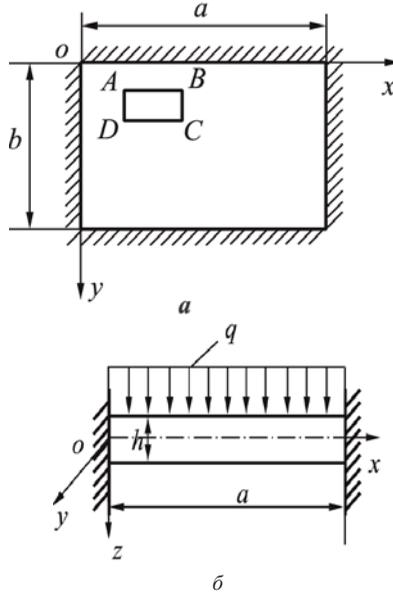


Рис. 4.5. Прямоугольная пластина с защемленными краями, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q : a — видсверху; b — сечение

Вырежем из пластины элемент с нормальными сечениями, параллельными плоскостям zx и zy (рис. 4.6, a). Соответствующие значения кривизны будут $\partial^2\delta/\partial x^2$ и $\partial^2\delta/\partial y^2$.

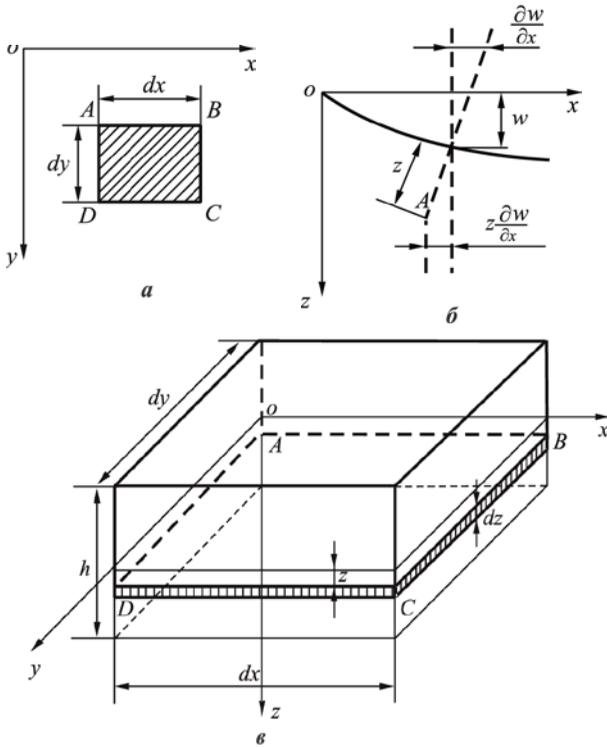


Рис. 4.6. Элемент $ABCD$, вырезанный из прямоугольной пластины нормальными сечениями, параллельными плоскостям zx и zy :
 а — общий вид; б — схема перемещения точки A по направлению оси x при изгибе пластины;
 в — пространственное изображение

Если бы эти сечения были главными нормальными сечениями, то энергию выделенного элемента $ABCD$ можно было бы представить в виде

$$dU_1 = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right] dx dy. \quad (4.22)$$

В общем случае выражение для энергии элемента сложнее, поскольку каждый бесконечно тонкий горизонтальный слой, расположенный на расстоянии z от срединной плоскости, кроме растяжения в направлении осей x и y , испытывает сдвиг.

Величину сдвига и соответствующее значение потенциальной энергии определим из геометрических соображений. Рассмотрим перемещения точек A, B, C, D — вершин тонкого элемента — по направлениям осей x и y при изгибе пластины. Эти перемещения обусловлены поворотом вертикальных ребер выделенного элемента. На рис. 4.6, б видно, что точка A совершает в направлении оси x перемещение

$$u = -z \frac{\partial \delta}{\partial x},$$

в направлении оси y перемещение

$$v = -z \frac{\partial \delta}{\partial y}.$$

Для точки B , отстоящей от A на величину dx , перемещение в направлении оси y определится по формуле

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx = -z \frac{\partial \delta}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} dx.$$

Для точки D перемещение в направлении оси x можно представить как

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -z \frac{\partial \delta}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} dy.$$

Вид слоя $ABCD$ до и после деформации приведен на рис. 4.7.

Сдвиг, который претерпевает рассматриваемый слой, определится выражением

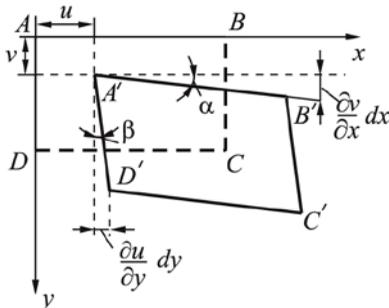


Рис. 4.7. Вид слоя $ABCD$ до и после деформации

$$\alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y}.$$

Соответствующее напряжение сдвига будет равно

$$\tau = -2z \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} G, \quad (4.23)$$

где G — модуль сдвига материала пластины.

Потенциальная энергия сдвига для бесконечно тонкого элемента запишется как

$$2z^2 \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 G dx dy dz. \quad (4.24)$$

Меняя z в пределах от $-h/2$ до $+h/2$ и суммируя энергию слоев, получим для выделенного элемента потенциальную энергию сдвига dU_2 :

$$\begin{aligned} dU_2 &= 2G \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 z^2 dx dy dz = 2G \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 z^2 dx dy \frac{h^3}{12} = \\ &= D \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 (1 - \mu) dx dy. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Полное выражение для потенциальной энергии элемента пластины получится сложением (4.22) и (4.25):

$$\begin{aligned} dU &= dU_1 + dU_2 = \left[\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\mu \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 (1 - \mu) \right] dx dy = \\ &= \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Потенциальная энергия всей пластины определяется путем интегрирования уравнения (4.26) по всей поверхности пластины.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины, жестко заземленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (см. рис. 4.5). Для криволинейной формы деформированной пластины нужно подобрать такое выражение, чтобы δ , $\partial \delta / \partial x$, $\partial \delta / \partial y$ обращались на контуре в нуль.

Этому условию удовлетворяет уравнение

$$\delta = \frac{\delta_{\max}}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right), \quad (4.27)$$

где δ_{\max} — максимальный прогиб в центре пластины.

При $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ прогиб δ и первые производные $\partial\delta/\partial x$, $\partial\delta/\partial y$ обращаются в нуль.

Составим уравнение для потенциальной энергии пластины, применив (4.26):

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a dx \int_0^b dy \left\{ \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy. \quad (4.28)$$

Подставив (3.27) в (3.28), получим

$$U = \frac{\pi^4}{8} D \delta_{\max}^2 ab \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right). \quad (4.29)$$

Задавшись выражением для прогиба (4.27), мы обратили пластину в систему с одной степенью свободы, т.е. потенциальная энергия зависит только от δ_{\max} . Величину δ_{\max} примем за обобщенную координату. Найдем соответствующее значение обобщенной силы. Если координате δ_{\max} дать бесконечно малое приращение $\delta(\delta_{\max})$, то при этом нагрузка q совершит работу

$$q \frac{\delta(\delta_{\max})}{4} \int_0^a dx \int_0^b dy \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dy.$$

Следовательно, $qab/4$ есть обобщенная сила, соответствующая координате δ_{\max} . Величину δ_{\max} определим из уравнения

$$\frac{dU}{d(\delta_{\max})} = \frac{\pi^4}{4} D \delta_{\max} ab \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) = \frac{qab}{4}.$$

Прогиб при $k_1=b/a$ будет равен

$$\delta_{\max} = \frac{qb^4}{D\pi^4} \frac{1}{3 + 2k_1^2 + 3k_1^4}. \quad (4.30)$$

Поскольку в датчиках давления используются в основном не прямоугольные, а квадратные пластины, где $k_1=1$, максимальный прогиб в центре пластины будет

$$\delta_{\max} = 0,00128 \frac{qb^4}{D}. \quad (4.31)$$

Максимальное напряжение, возникающее по контуру пластины,

$$\sigma_{\max} = 0,29 \frac{qb^2}{h^2}. \quad (4.32)$$

Общий вид эпюр изгибающих моментов, напряжений и прогибов приведен на рис. 4.8.

4.2. Напряженно-деформированное состояние опорных элементов микромеханических приборов

На рис. 4.9 приведены типовые опорные элементы микромеханических систем. Балочные опорные элементы (рис. 4.9, а—г) в основном используются в микроакселерометрах, торсионные опоры (рис. 4.9, д) — в микрогироскопах и микрозеркалах, балочные одноветвевые и двухветвевые опоры (рис. 4.9, е, ж) — в вибрационных микрогироскопах.

Все опорные элементы при работе прибора имеют сложное напряженно-деформированное состояние. Ниже дан анализ этого состояния в условиях внешнего нагружения.

Напряженно-деформированное состояние в системе с одноконсольной балочной опорой. Рассмотрим одноконсольную опору с массой на конце, нагруженную инерционной нагрузкой $F_{\text{ин}}=F$ (рис. 4.10, а). Расчетная схема опоры приведена на рис. 4.10, б. Действие силы F вызывает изгиб упругой опоры. Эпюра изгибающих момен-

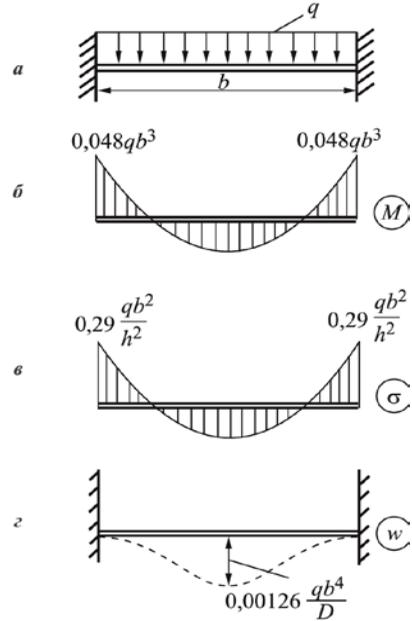


Рис. 4.8. Эпюры изгибающих моментов, напряжений и прогибов для квадратной пластины с защемленными краями, нагруженной распределенной нагрузкой q :

- а — схема нагружения;
- б — эпюра максимальных изгибающих моментов;
- в — эпюра напряжений;
- г — эпюра прогибов

тов показана на рис. 4.10, в. Максимальный изгибающий момент от действия инерционной силы возникает в защемлении (в точке С):

$$M_{\max} = F \left(l + \frac{d}{2} \right). \quad (4.33)$$

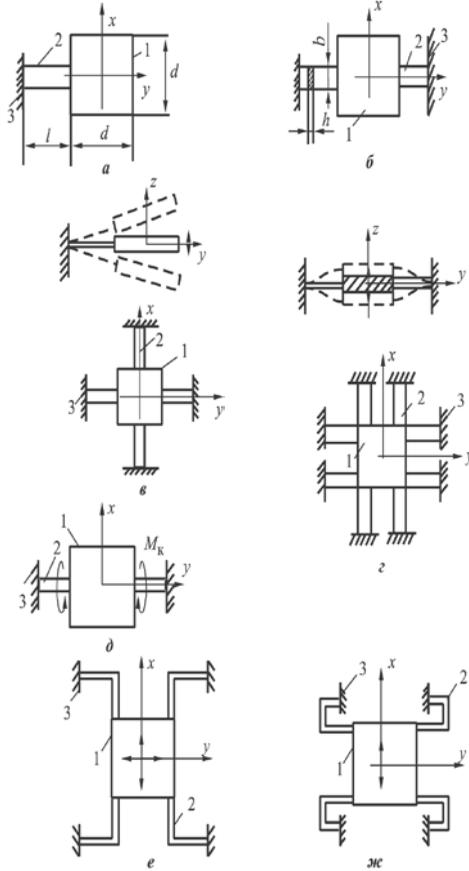


Рис. 4.9. Типовые опорные элементы микромеханических систем:

a — одноконсольная балочная опора; *б* — двухконсольная мостовая балочная опора; *в* — четырехконсольная двухосная мостовая балочная опора; *г* — четырехконсольная двухосная спаренная мостовая балочная опора; *д* — торсионная опора; *е* — четырехконсольная ломаная одноветвевая балочная опора; *ж* — четырехконсольная ломаная двухветвевая балочная опора; *1* — инерционная масса; *2* — упругая балка; *3* — корпус прибора

В точке A момент равен $M=Fd/2$.

Максимальное напряжение в опоре определится как

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = 6F \left(l + \frac{d}{2} \right) / bh^2, \quad (4.34)$$

где $W_x = bh^2/6$ — момент сопротивления сечения при изгибе.

Перемещение центра тяжести инерционной массы (точки B , рис. 4.11, a) определим аналитическим методом. Вначале установим перемещение и угол поворота сечения в точке A (δ_A и φ_A) от действия изгибающего момента $M=Fd/2$ и силы F (рис. 4.11, b).

В произвольном сечении опоры на расстоянии y от начала координат (рис. 4.11, b) будут действовать два изгибающих момента: $M_1=Fd/2$ и $M_2=F(l-y)$. Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе запишется в виде

$$z'' = \frac{M(y)}{EI_x}, \quad (4.35)$$

где $M(y)$ — изгибающий момент в сечении y ; EI_x — жесткость опоры при изгибе; I_x — осевой момент инерции поперечного сечения опоры при изгибе ($I_x = bh^3/12$).

Для определения перемещения опоры в сечении y необходимо дважды проинтегрировать уравнение (4.35).

С учетом принципа суперпозиции определим сначала перемещение и угол поворота опоры в сечении y от действия момента $M_1=Fd/2$. Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе запишется в виде

$$z_1'' = \frac{F \cdot d / 2}{EI_x}. \quad (4.36)$$

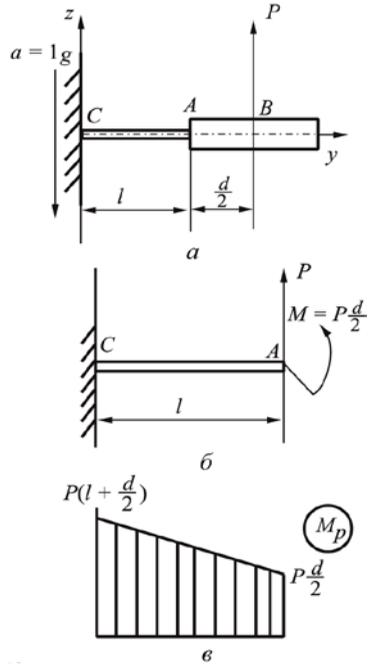


Рис. 4.10. Одноконсольная балочная опора: a — схема нагружения; b — расчетная схема; $в$ — эпюра изгибающих моментов

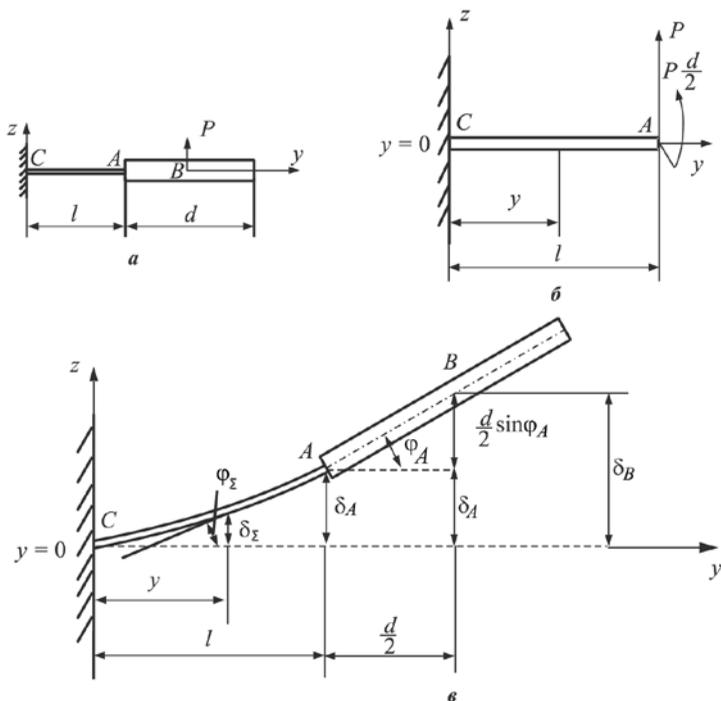


Рис. 4.11. Перемещение центра тяжести инерционной массы (точки B): a — схема нагружения; $б$ — расчетная схема для определения перемещения и угла поворота точки A ; $в$ — схема перемещения точки B

После двойного интегрирования уравнения (4.36) получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} z_1' = \varphi_1 &= \frac{F \cdot d / 2}{EI_x} y + C_1; \\ z_1 = \delta_1 &= \frac{F \cdot d / 2}{EI_x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где φ_1 — угол поворота опоры в сечении y от действия момента M_1 ; δ_1 — перемещение опоры в сечении y от действия момента M_1 .

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из следующих граничных условий. При $y=0$, $\varphi_1=0$ и $\delta_1=0$ имеем $C_1=0$, $C_2=0$. С учетом этих значений уравнения (4.37) принимают вид

$$\varphi_1 = \frac{F \cdot d / 2}{EI_x} y; \quad \delta_1 = \frac{F \cdot d / 2}{EI_x} \frac{y^2}{2}. \quad (4.38)$$

Далее определим перемещение и угол поворота опоры в сечении y от действия момента $M_2 = F(l-y)$. Дифференциальное уравнение упругой линии балки запишем в виде

$$z_2'' = \frac{F(l-y)}{EI_x}. \quad (4.39)$$

Двойное интегрирование уравнения (4.39) дает

$$z_2' = \varphi_2 = \frac{F}{EI_x} \left(ly - \frac{y^2}{2} \right) + C_1; \quad (4.40)$$

$$z_2 = \delta_2 = \frac{F}{EI_x} \left(l \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) + C_1 y + C_2,$$

где φ_2 — угол поворота опоры в сечении y от действия момента M_2 ; δ_2 — перемещение опоры в сечении y от действия момента M_2 ; C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

С учетом граничных условий (при $y=0$, $\varphi_2=0$ и $\delta_2=0$) уравнения (4.40) запишется в виде

$$\varphi_2 = \frac{F}{EI_x} \left(ly - \frac{y^2}{2} \right); \quad \delta_2 = \frac{F}{EI_x} \left(l \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right). \quad (4.41)$$

Суммарный угол поворота и перемещение опоры в сечении y определяются по формулам

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{F \frac{d}{2}}{EI_x} y + \frac{F}{EI_x} \left(ly - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{F}{EI_x} \left(ly + \frac{dy}{2} - \frac{y^2}{2} \right); \quad (4.42)$$

$$\delta_\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = \frac{F \frac{d}{2}}{EI_x} \frac{y^2}{2} + \frac{F}{EI_x} \left(l \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) = \frac{F}{EI_x} \left(\frac{ly^2}{2} + \frac{dy^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right). \quad (4.43)$$

Для точки A (см. рис. 4.11, в) перемещение и угол поворота определяются как

$$\delta_A = \frac{F}{EI_x} \left(\frac{l^3}{2} + \frac{dl^2}{4} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{F}{EI_x} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{dl^2}{4} \right); \quad (4.44)$$

$$\varphi_A = \frac{F}{EI_x} \left(l^2 + \frac{dl}{2} - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{F}{2EI_x} (l^2 + dl). \quad (4.45)$$

Перемещение точки B (центра тяжести инерционной массы) определится из геометрических соображений (см. рис. 4.11, в):

$$\delta_B = \delta_A + \frac{d}{2} \sin \varphi_A;$$

$$\delta_B = \frac{F}{EI_x} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{dl^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \sin \left[\frac{F}{2EI_x} (l^2 + dl) \right]. \quad (4.46)$$

Напряженно-деформированное состояние в системе с многоконсольной балочной опорой. Типичная конструкция акселерометра встречно-штыревого (гребенчатого) типа показана на рис. 4.12. Когда на акселерометр воздействует ускорение, внешняя сила передается на контрольную массу через балочный подвес. Контрольная масса вместе с подвижными электродами движется в обратном силовому воздействию направлении, в то время как фиксированные электроды остаются неподвижными. Это движение изменяет емкость между неподвижными

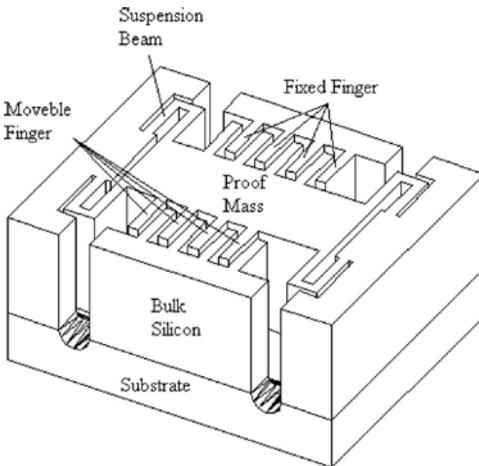


Рис. 4.12. Типичная конструкция акселерометра встречно-штыревого типа

и подвижными электродами. Емкость может быть измерена путем калибровки в соответствии с приложенным внешним усилием. Работа и отклик акселерометра определяются эффективной массой подвижной части (m_e), коэффициентом жесткости балочного подвеса (k), демпфированием (D) окружающим структуру воздухом, площадью взаимного перекрытия электродов (A), начальным

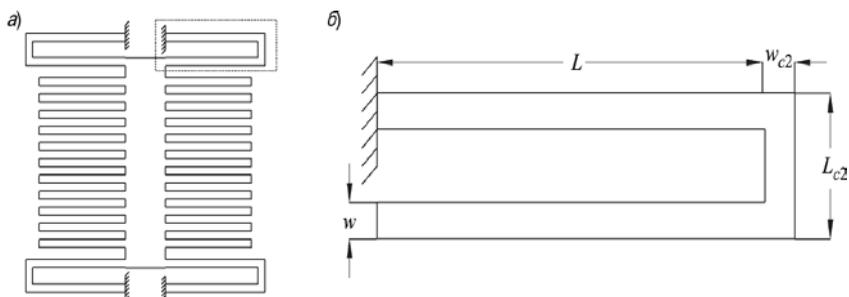


Рис. 4.13. Подвес из складчатых балок в акселерометре для анализа:
 а — устройство; б — складчатая балка

зазором между воспринимающими смещение электродами (d_0), начальной емкостью и ускорением. Из этих параметров k и m_e оказывают наиболее значительное влияние на отклик акселерометра.

Проанализируем одну из обычно используемых конструкций балочного подвеса акселерометра встречно-штыревого типа — из складчатых балок (рис. 4.13). Укрупненное изображение складчатой балки и обозначения показаны на рис. 4.13, б. Здесь L и w — длина и ширина балки, L_{c2} и w_{c2} — длина и ширина второстепенного балочного компонента (пластины жесткости, поперечины).

Согласно рис. 4.13, а, контрольная масса подвешена в равной степени на четырех балках по четырем углам. Эта контрольная масса может быть аппроксимирована центральной контрольной массой, подвешенной на четырех упругих элементах. Схема крепления свободно подвешенного тела в акселерометре может быть представлена массой и пружинной системой, как показано на рис. 4.14.

На рис. 4.14 m — масса контрольной массы; k_1, k_2, k_3 и k_4 — коэффициенты жесткости каждой балки подвеса; x — смещение. В этой системе масса—пружина, поскольку масса поддерживается в равной степени четырьмя пружинами, внешние силы равномерно

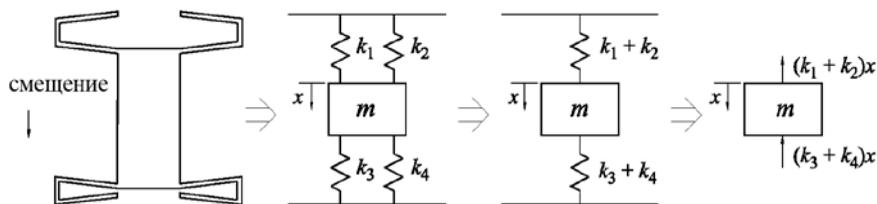


Рис. 4.14. Типичная схема крепления свободно подвешенного тела в акселерометре

уравновешиваются четырьмя пружинами и сохраняются как потенциальная энергия деформации. Эквивалентный коэффициент жесткости системы пружины—масса, изображенной на рис. 4.14, может быть определен из уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\ddot{x}, & (4.47) \\ -(k_1 + k_2)x - (k_3 + k_4)x &= m\ddot{x}, \\ m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_3 + k_4)x &= 0, \\ m\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x &= 0, \\ m\ddot{x} k_e x &= 0, & (4.48) \end{aligned}$$

где F_x — сила; x — ускорение. Следовательно, коэффициент равно-весной жесткости равен $k_e = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$. Поскольку четыре балочных подвеса имеют одинаковые размеры и материалы, то

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_{1/4}$$

и

$$k_e = k_{1/4}, \quad (4.49)$$

где $k_{1/4}$ — коэффициент жесткости квадранта системы.

Коэффициент жесткости

Составные компоненты складчатой балки показаны на рис. 4.15. Модель балочного подвеса вместе с граничным условием для него показана на рис. 4.15, а, а схема в виде свободного тела — на рис. 4.15, б. При анализе складчатая балка может быть разделена на три компонента, которые могут быть представлены моделью половины защемленной с обоих концов балки (рис. 4.15, в и г) и моделью соединительного элемента (поперечины) (рис. 4.15, д).

Эти три компонента расположены последовательно. Коэффициент жесткости квадранта модели подвеса может быть задан в дополнительной форме (форме коэффициентов податливости) как

$$1/k_{1/4} = 1/k_{c1} + 1/k_{c2} + 1/k_{c3}. \quad (4.50)$$

а) Коэффициент жесткости для первого и третьего компонентов.

Схема свободного тела для первого и третьего компонентов аналогична модели половины защемленной по обоим концам балки при поперечной нагрузке, как показано на рис. 4.16.

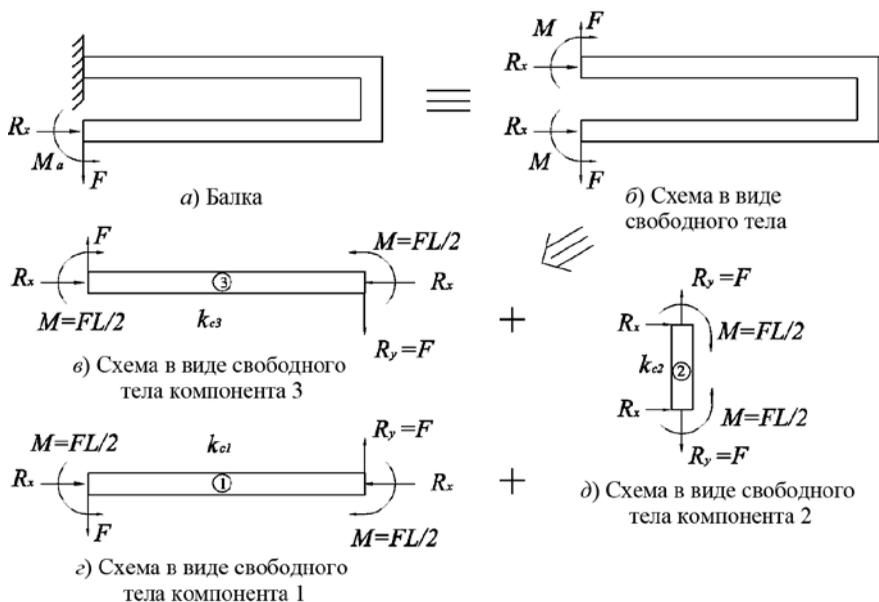


Рис. 4.15. Составные компоненты складчатой балки

На рис. 4.16, *a* показана защемленная по обоим концам балка длиной $2L$ при поперечной нагрузке F в середине пролета балки. Эта сила вызывает изгиб, что приводит к реакциям на обоих защемленных концах, состоящим из сил и моментов.

Максимальный прогиб δ_{\max} имеет место в середине пролета балки. Если эту модель разрезать посередине, каждая часть может быть смоделирована как половина защемленной по обоим концам балки. На рис. 4.16 показано, что реакции на обоих защемленных концах представляют изгибающий момент M_0 , реакцию в виде сдвиговой силы в направлении y R_y и реакцию в виде продольной силы в направлении x R_x . Поскольку нагрузка перпендикулярна к оси балки, осевая сила реакции R_x чрезвычайно мала по сравнению с изгибаю-

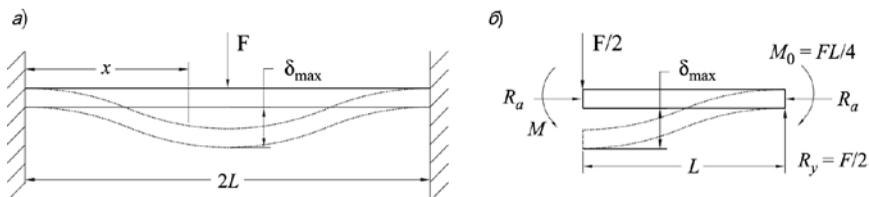


Рис. 4.16. Защемленная по обоим концам балка: *a* — схема приложения поперечного усилия F ; *б* — модель половины защемленной балки

щим моментом и сдвиговой силой. Поэтому R_a в расчете можно проигнорировать. Сдвиговая сила реакции R_y и изгибающий момент M_0 для модели половины защемленной по обоим концам балки есть $R_y=F/2$ и $M_0=FL/4$ соответственно.

В модели половины защемленной с обоих концов балки максимальный прогиб δ_{\max} создается прогибом как из-за изгибающего момента (δ_{bm}), так и сдвига (δ_s); для упрощения $\delta_{\max}=\delta_{\text{bm}}+\delta_s$. По закону Гука $F=k\delta$, поэтому коэффициент жесткости $k=F/\delta_{\max}$ и при единичном усилии $k=1/\delta_{\max}$. Коэффициент жесткости обычно задается в форме коэффициента податливости $1/k$, так что коэффициент жесткости для первого и третьего компонентов балки может быть определен из соотношения

$$1/k_{c1} = 1/k_{c3} = 1/k_{\text{bm}} + 1/k_s. \quad (4.51)$$

Схема свободного тела для первого и третьего компонентов похожа на модель половины защемленной по обоим концам балки.

1) Коэффициент жесткости из-за изгибающего момента. Для защемленной по обоим концам балки (рис. 4.16) максимальный прогиб из-за изгибающего момента происходит в середине балки и дается как

$$\delta_{\text{bm}} = \frac{F(2L)^3}{192EI} = \frac{FL^3}{24EI}, \quad (4.52)$$

где E — модуль Юнга; I — второй момент площади поперечного сечения.

Следовательно, коэффициент жесткости из-за изгибающего момента для модели целой защемленной по обоим концам балки может быть выражен как

$$k_{\text{full}} = \frac{F}{\delta_{\text{bm}}} = \frac{24EI}{L^3}. \quad (4.53)$$

Для модели половины защемленной по обоим концам балки коэффициент жесткости, обусловленный изгибающим моментом, составляет половину коэффициента жесткости, являющегося результатом изгибающего момента защемленной по обоим концам балки. Следовательно, коэффициент жесткости из-за изгибающего момента для модели половины защемленной по обоим концам балки может быть получен как

$$k_{\text{bm}} = \frac{1}{2}k_{\text{fixed}} = \frac{12EI}{L^3}, \quad (4.54 \text{ а})$$

или в форме коэффициента податливости

$$\frac{1}{k_{\text{bm}}} = \frac{L^3}{12EI}. \quad (4.54 \text{ б})$$

2) Коэффициент жесткости из-за сдвига. Коэффициент жесткости из-за сдвига для первого и третьего компонентов определяется с использованием принципа энергии деформации и уравнения для напряжения сдвига в точке в поперечном сечении балки. Для площадки прямоугольного поперечного сечения с заданными шириной b и высотой d , общей длиной балки L и приложенной поперечной нагрузкой $F/2$ максимальное отклонение (в средней точке) из-за сдвига дается как

$$\delta_s = \frac{3 F_s L}{5 bdG}, \quad (4.55)$$

где G — модуль сдвига, $G=E/2(1+\mu)$; μ — коэффициент Пуассона. Поскольку $F_s=F/2$ и подставив выражения для G и F_s в δ_s , максимальное отклонение (в средней точке) из-за сдвига может быть представлено как

$$\delta_s = \frac{6(1+\mu)FL}{5 bdG}. \quad (4.56)$$

Из $k_s \delta_s = F$ получаем для коэффициента жесткости из-за сдвига (k_s)

$$\frac{1}{k_s} = \frac{\delta_s}{F} = \frac{6(1+\mu)L}{5 bdG}. \quad (4.57)$$

б) Коэффициент жесткости для второго компонента.

Второй компонент аппроксимируется моделью соединительного элемента, на который воздействуют поперечная сила и изгибающий момент, передаваемые от первого и третьего компонентов соответственно, как показано на рис. 4.15, д. Этот компонент подвергается воздействию двух сил: поперечной силы R_y и изгибающего момента M . Коэффициент жесткости второго компонента k_{c2} представляет собой комбинацию коэффициента жесткости относительно поперечной силы k_t и коэффициента жесткости относительно изгибающего момента k_m .

1) Коэффициент жесткости относительно поперечной силы.
 Прогиб из-за поперечной силы выражается как

$$\delta_t = \frac{R_y L_{c2}}{EA_{c2}} = \frac{FL_{c2}}{EA_{c2}}. \quad (4.58)$$

Следовательно, коэффициент жесткости относительно поперечной силы может быть определен из

$$\frac{1}{k_t} = \frac{\delta_t}{F} = \frac{L_{c2}}{EA_{c2}}. \quad (4.59)$$

2) Коэффициент жесткости относительно изгибающего момента. Прогиб в направлении y

$$\delta_y = -\frac{ML_{c2}^2}{2EI_{c2}} = -\frac{FLL_{c2}^2}{4EI_{c2}}, \quad (4.60)$$

так как $M=FL/2$. Коэффициент жесткости относительно изгибающего момента может быть определен из уравнения

$$\frac{1}{k_{bm2}} = \frac{\delta_y}{F} = -\frac{LL_{c2}^2}{4EI_{c2}}. \quad (4.61)$$

в) Коэффициент равновесной жесткости складчатой балки

Коэффициент равновесной жесткости складчатой балки может быть определен из уравнения (4.49):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_c} &= \frac{1}{4k_{1/4}} = \frac{1}{4} \frac{1}{k_{1/4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{c2}} + \frac{1}{k_{c3}} \right) = \frac{1}{4k_{c1}} + \frac{1}{4k_{c2}} + \frac{1}{4k_{c3}} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_{bm}} + \frac{1}{k_s} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_{bm2}} + \frac{1}{k_t} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_{bm}} + \frac{1}{k_s} \right) = \\ &= \frac{1}{2k_{bm}} + \frac{1}{4k_t} + \frac{1}{4k_{bm2}}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Эффективный коэффициент жесткости складчатой балки может быть получен путем подстановки уравнений (4.54, б), (4.57), (4.59) и (4.61) в уравнение (4.62). Результирующее уравнение будет

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_e} &= \frac{1}{2} \left(\frac{L^3}{12EI} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{6(1+\mu)L}{5bdE} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{L_{c2}}{EA_{c2}} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{LL_{c2}^2}{4EI_{c2}} \right) = \\
&= \frac{L^3}{24EI} + \frac{3(1+\mu)L}{5bdE} + \frac{L_{c2}}{4EA_{c2}} - \frac{LL_{c2}^2}{16EI_{c2}} = \\
&= \frac{1}{Et} \left(\frac{L^3}{2w^3} + \frac{3(1+\mu)L}{5w} + \frac{L_{c2}}{4w_{c2}} - \frac{3LL_{c2}^2}{4w_{c2}^2} \right),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

где t — толщина балки.

В литературе также приводятся и другие выражения для определения коэффициента жесткости балочных подвесов.

Эффективная масса

Помимо эффективной жесткости для определения резонансной частоты и чувствительности — этих двух важных характеристик инерционных МЭМС — необходимо знать эффективную массу. Эффективную массу складчатой балки определяют исходя из принципа Рэля. Примем защемленную по обоим концам модель с площадью поперечного сечения A и длиной $2L$, смещением в точке x $\delta(x)$ и скоростью в точке x $d\delta(x)/dt$. Смещение в любой точке $\delta(x)$ и максимальное смещение δ_{\max} связаны некоторой функцией распределения $N(x)$ следующим образом:

$$\delta(x) = N(x)\delta_{\max} \tag{4.64}$$

и

$$\frac{\delta(x)}{dt} = N(x) \frac{\delta_{\max}}{dt}. \tag{4.65}$$

В связи с этим эффективная масса может быть определена как

$$m_e = \rho \int_0^L N^2(x) A(x) dx. \tag{4.66}$$

а) Эффективная масса для модели половины, защемленной по обоим концам балки.

Поскольку функция распределения не зависит от приложенной силы, функцию распределения можно определить, предполагая модель половины защемленной по обоим концам балки, прогибающейся под действием сосредоточенной силы F . Смещение в любой точке балки дается как

$$\delta(x) = \frac{F}{12EI}(3Lx^2 - 2x^3). \quad (4.67)$$

Максимальное смещение наблюдается в середине моста (т. е. при $x=L$). Таким образом,

$$\delta_{\max} = \frac{F}{12EI}. \quad (4.68)$$

Отсюда функция распределения

$$N(x) = \frac{\delta(x)}{\delta_{\max}} = \frac{3Lx^2 - 2x^3}{L^3}. \quad (4.69)$$

Эффективная масса для модели половины защемленной по обоим концам балки при изгибающем моменте может быть определена как

$$\begin{aligned} m_{b,e} &= \rho \int_0^L N^2(x) A(x) dx = \rho A \int_0^L \left(\frac{3Lx^2 - 2x^3}{L^3} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\rho A}{L^6} \left[\frac{9L^2 x^5}{5} - \frac{12Lx^6}{6} + \frac{4x^7}{7} \right]_0^L = \frac{\rho A}{L^6} \left[\frac{9}{5} - 2 + \frac{4}{7} \right] L^7 = \frac{13}{35} \rho AL. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Таким образом,

$$m_1 = m_3 = m_{b,e} = \frac{13}{35} \rho AL. \quad (4.71)$$

б) Эффективная масса второго компонента.

Для пластины жесткости смещение под действием поперечной силы (рис. 4.15, д) в каждой точке может быть записано как

$$\delta(x) = \frac{x}{L_{c2}} \delta_{\max}. \quad (4.72)$$

Функция распределения

$$N(x) = \frac{\delta(x)}{\delta_{\max}} = \frac{x}{L_{c2}}. \quad (4.73)$$

Таким образом, эффективная масса пластины жесткости в отношении поперечной силы

$$\begin{aligned}
 m_{t,e} &= \rho \int_0^L N^2(x) A(x) dx = \rho A_{c2} \int_0^{L_{c2}} \left(\frac{x}{L_{c2}} \right)^2 dx = \\
 &= \frac{\rho A_{c2}}{L_{c2}^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L_{c2}} = \frac{\rho A_{c2}}{L_{c2}^2} \left[\frac{L_{c2}^3}{3} \right] = \frac{1}{3} \rho A_{c2} L_{c2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

в) *Эффективная масса МЭМС-акселерометра.*

Эффективная инерционная масса МЭМС-акселерометра может быть определена как

$$m_e = 8m_{b,e} + 4m_{t,e} + m_{pm} + nm_f, \tag{4.75}$$

где m_{pm} — масса контрольной массы; m_f — масса электрода; n — количество электродов.

Резонансная частота f_r акселерометра с инерционной массой m задается известным уравнением

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}}.$$

Чувствительность, имеющая размерность $\text{нм}/(\text{м}/\text{с}^2)$, может быть определена как

$$\text{Чувствительность} = \frac{\text{смещение}}{\text{ускорение}} = \frac{\delta}{a} = \frac{m_e}{k}.$$

Контрольные вопросы

1. Как называется закон о зависимости между внешними силами и вызываемыми ими изменениями формы тела?
2. Какие существуют модули упругости материала и с какими типами деформации твердого тела они связаны?
3. Какой из модулей упругости характеризует упругие свойства материала?
4. Что характеризует коэффициента Пуассона?
5. Что характеризуют граничные условия при определении

прогиба пластины с заземленными краями?

6. Чему равен прогиб в центре заземленной по контуру круглой пластины при равномерно распределенной нагрузке?

7. Чему равен прогиб в центре заземленной по контуру прямоугольной пластины при равномерно распределенной нагрузке?

8. Где возникают максимальные напряжения в заземленной по контуру пластине?

9. От чего зависит жесткость балки при поперечном нагружении?

10. Что называют осевым моментом инерции сечения относительно данной оси?

11. Что называют полярным моментом инерции сечения относительно данной точки?

12. Какое уравнение существует для расчета максимального напряжения в балке при её поперечном нагружении?

13. Как определить максимальный прогиб балки при её поперечном нагружении?

14. По какой формуле можно определить изгибающий момент в сечении балки?

5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МЭМС С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

5.1. Расчет емкостей

При проектировании МЭМС возникает необходимость в оценке взаимного смещения элементов конструкции при различных внешних воздействиях. Решение этой задачи предполагает определение компонентов внешних сил и расчет смещений упругих элементов при действии некой обобщенной силы, эффективно отражающей одновременное действие сил различной природы. При этом в целом оценки должны проводиться самосогласованно.

Исторически оказалось, что наиболее проработанным в настоящее время оказался второй этап — расчет смещений упругих элементов при действии некой обобщенной силы. Что же касается определения компонентов внешних сил, то здесь ситуация не так однозначна. Особенно это касается электростатического взаимодействия.

Как правило, расчет электростатических сил осуществляют на основе соотношений между потенциальной энергией W и соответствующими компонентами электростатической силы:

$$F_x = -\frac{dW}{dx}; \quad F_y = -\frac{dW}{dy}. \quad (5.1)$$

Рассматривая элементы конструкции МЭМС как электроды соответствующего конденсатора, выражение для энергии электрического поля между этими элементами можно представить в виде:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}, \quad (5.2)$$

где Q — заряд на обкладках конденсатора; V — напряжение на конденсаторе; C — емкость конденсатора.

Согласно (5.1) и (5.2) при расчете значений компонентов электростатической силы необходима оценка электрической емкости между элементами конструкции МЭМС. В настоящее время в подавляющем большинстве случаев такие оценки проводят в рамках модели идеального плоского конденсатора (ИПК). Следует, однако, отметить, что модель ИПК не учитывает краевые эффекты (рис. 5.1).

Поэтому при её использовании остается открытым вопрос о пределах применимости данной модели, особенно при проектировании МЭМС с малыми отношениями линейных размеров электродов к межэлектродным зазорам.

Эта проблема еще больше обостряется при расчете компонентов электростатической силы, которые согласно (5.1) и (5.2) оказываются пропорциональными производным емкости по соответствующим координатам.

Расчет емкости плоского конденсатора с прямоугольными электродами при изменении межэлектродного зазора. В случае, когда длина электрода a много больше ширины электрода b , выраже-

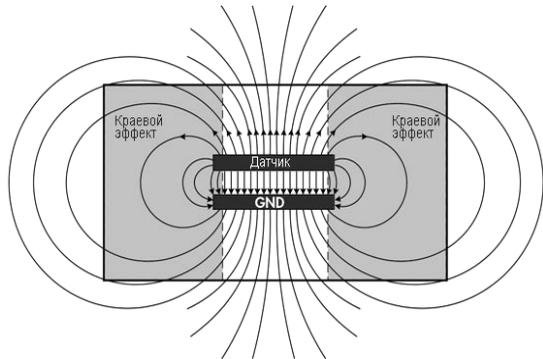


Рис. 5.1. Распределение силовых линий поля между пластинами плоского конденсатора

ние для расчета емкости конденсатора, содержащего два одинаковых плоских прямоугольных параллельных электрода, имеет вид

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 a \frac{K(k)}{K(k')}, \quad (5.3)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость; ε_0 — электрическая постоянная; $K(k)$ и $K(k')$ — связанные полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого рода; k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительные модули. Здесь k является корнем уравнения

$$\frac{2}{\pi} [K(k) E(\beta, k) - E(k) F(\beta, k)] - \frac{b}{d} = 0, \quad (5.4)$$

где $E(k)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода; $F(\beta, k)$ и $E(\beta, k)$ — нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода соответственно; d — межэлектродный зазор;

$$\beta = \arcsin \left(\frac{1}{k} \sqrt{1 - \frac{E(k)}{K(k)}} \right); \quad (5.5)$$

$$K \equiv K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; \quad E \equiv E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi;$$

$$F(\beta, k) = \int_0^{\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; \quad E(\beta, k) = \int_0^{\beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

При $k \ll 1$

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots \right];$$

при $k \approx 1$

$$K = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) k'^2 + \dots$$

Зависимость нормированной емкости $\hat{C}(b/d)=C(b/d)/(\epsilon\epsilon_0a)$, рассчитанная с использованием уравнений (5.3)—(5.5), приведена на рис. 5.2 (кружки).

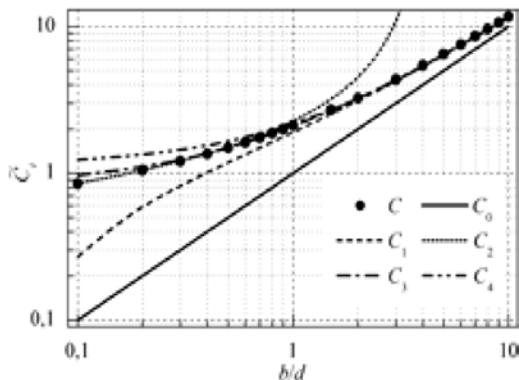


Рис. 5.2. Зависимость нормированной емкости \hat{C}_i от отношения ширины электрода b к межэлектродному зазору d

Расчет емкостей с использованием выражения (5.3) на этапе предварительного проектирования представляется излишне громоздким. Кроме того, при $b/d > 10$ появляются еще и чисто технические трудности. В результате оценки емкостей на этом этапе, как правило, проводят с использованием приближенных выражений. При этом наибольшее распространение получили расчеты, основанные на модели ИПК.

На рис. 5.2 приведена зависимость нормированной емкости $\hat{C}_0 = C_0/(\epsilon\epsilon_0a)$ от отношения ширины электрода b к межэлектродному зазору d , рассчитанная в рамках модели ИПК, где

$$C_0 = \epsilon\epsilon_0a \frac{b}{d}. \quad (5.6)$$

Видно, что оценки, сделанные с использованием уравнения (5.6), занижают значения емкости. При этом погрешность расчетов не превышает 10 %, только если значение $b/d > 16,5$, и 5 %, если $b/d \geq 40$.

Для расширения диапазона значений b/d , для которых оценки емкостей могут быть проведены с приемлемой погрешностью, Пальмером на основании конформного преобразования была пред-

ложена формула

$$C_1 = C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left[1 + \ln \left(2\pi \frac{b}{d} \right) \right] \right\}, \quad (5.7 \text{ а})$$

позволяющая рассчитывать емкости с погрешностью менее 10 % уже при $b/d \geq 1$ и менее 5 % — при $b/d > 1,6$. Здесь первое слагаемое в фигурных скобках соответствует емкости плоскопараллельного конденсатора, а второе — емкости за счет краевого поля из-за конечных размеров электродов.

На рис. 5.2 приведена соответствующая зависимость $\hat{C}_1 = C_1 / (\epsilon \epsilon_0 a)$. Видно, что уравнение (5.7а) также несколько занижает оценку емкости. Однако по сравнению с (5.6) точность расчета значительно увеличивается.

Модификация формулы Пальмера, позволяющая существенно расширить диапазон значений b/d , при которых ошибка в оценках емкости не превысит допустимых значений, имеет вид

$$C_1^* = C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left[1 + \ln \left(2\pi \frac{b}{d} \right) + \ln \left(1 + 2 \frac{w}{d} + 2 \sqrt{\frac{w}{d} + \frac{w^2}{d^2}} \right) \right] \right\}, \quad (5.7 \text{ б})$$

где w — толщина электрода.

Для расчета емкостей при $b/d < 1$ в литературе предлагается использовать выражение

$$C_2 = \epsilon \epsilon_0 a \frac{b}{d} / \ln \left(4 \frac{d}{b} \right). \quad (5.8)$$

Расчеты показывают (см. рис. 5.2), что при использовании формулы (4.8) погрешность в оценках емкостей при $b/d \leq 1,13$ будет менее 10 %, а при $b/d \leq 0,84$ — уже менее 5 %.

Ошибка в оценках емкости оказывается менее 1 % фактически во всем диапазоне актуальных для МЭМС значений отношения b/d при использовании формулы

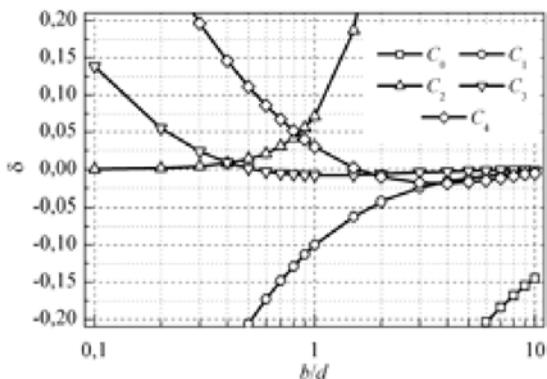


Рис. 5.3. Зависимость ошибки в оценке емкости при использовании в расчетах уравнений (5.6)—(5.10) от отношения ширины электрода к межэлектродному зазору

$$C_3 = C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left[1 + \theta_1 \ln(2\pi) + \ln \left(\frac{b}{d} + \theta_2 \right) \right] \right\}. \quad (5.9)$$

где θ_i — подбираемые коэффициенты. Как видно на рис. 5.2, при $\theta_1=1,03$ и $\theta_2=0,75$ ошибка в оценках емкости менее 1 % при $b/d \geq 0,4$.

При необходимости для оценки емкости можно воспользоваться и упрощенным выражением

$$C_4 = C_0 \left(1,05 + \theta_3 \frac{d}{b} \right). \quad (5.10)$$

Правда, при этом ошибка в оценке емкости несколько возрастет. Так, при $\theta_3=1,13$ ошибка в оценке емкости будет менее 10 % лишь при $b/d \geq 0,54$ (см. рис. 5.2). Варьируя θ_3 , диапазон значений b/d , для которых ошибка в оценке емкости не превысит заданных значений, можно изменять.

На рис. 5.3 приведены зависимости ошибки $\delta=C_i/C-1$ в оценках емкости плоского конденсатора, содержащего два одинаковых прямоугольных параллельных электрода, от отношения ширины электрода b к межэлектродному зазору d при расчетах с использованием выражений (5.6)—(5.10).

Расчет емкости плоского конденсатора с круглыми электродами. Выражение для расчета емкости конденсатора, содержащего

два одинаковых плоских круглых параллельных электрода, имеет вид

$$C_k = 4\epsilon\epsilon_0 r \int_0^1 f(x) dx. \tag{5.11}$$

Здесь $f(x)$ — решение неоднородного уравнения Фредгольма II рода

$$f(x) - \frac{1}{\pi} \frac{d}{r} \int_0^1 \frac{f(s)}{(x-s)^2 + (d/r)^2} ds = 1,$$

где d — межэлектродный зазор; r — радиус электрода. Зависимость нормированной емкости $\hat{C}_k(r/d) = C_k(r/d)/(\epsilon\epsilon_0 r)$, рассчитанная с использованием уравнения (5.11), приведена на рис. 5.4 (кружки).

На этом же рисунке приведена зависимость нормированной емкости $\hat{C}_{k0} = C_{k0}/(\epsilon\epsilon_0 r)$ от отношения радиуса электрода r к межэлектродному зазору d , рассчитанная в рамках модели ИПК,

$$C_{k0} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d}. \tag{5.12}$$

Видно, что оценки, сделанные с использованием уравнения (5.12), занижают значение емкости. При этом, как и в случае конденсатора с прямоугольными электродами, погрешность расчетов не превышает 10 %, только если значение $r/d > 16,5$, и 5 %, если $r/d \geq 40$.

Для расширения диапазона значений r/d , при которых оценки емкостей могут быть проведены с приемлемой погрешностью, были предложены следующие выражения:

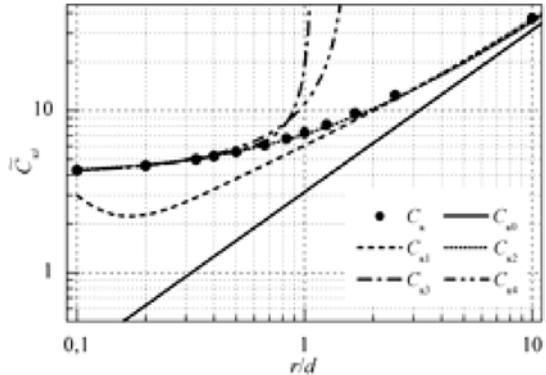


Рис. 5.4. Зависимость нормированной емкости \hat{C}_{ki} от отношения радиуса электрода r к межэлектродному зазору d

$$C_{к1} = \varepsilon\varepsilon_0 r \left\{ \pi \frac{r}{d} + \ln \left(16\pi \frac{r}{d} \right) - 1 + \frac{1}{4\pi} \frac{r}{d} \left[\ln \left(\frac{d}{2r} \right) \right]^2 \right\}; \quad (5.13)$$

$$C_{к2} = \varepsilon\varepsilon_0 r \left(\pi \frac{r}{d} + 4 \right); \quad (5.14)$$

$$C_{к3} = \varepsilon\varepsilon_0 r \frac{4}{1 - \frac{2r}{\pi d}}; \quad (5.15)$$

$$C_{к4} = \varepsilon\varepsilon_0 r \frac{4}{1 - \frac{2r}{\pi d} \left[1 - \frac{7}{12} \left(\frac{r}{d} \right)^2 + \frac{33}{40} \left(\frac{r}{d} \right)^4 \right]}. \quad (5.16)$$

Результаты расчета зависимостей нормированной емкости $\hat{C}_{ki} = C_{ki}/(\varepsilon\varepsilon_0 r)$, где $i=1, 2, 3, 4$, от отношения радиуса электродов r к межэлектродному зазору d по уравнениям (5.13)—(5.16), приведены на рис. 5.4. Видно, что уравнение (5.14) позволяет рассчитывать зависимости емкости конденсатора с круглыми электродами от отношения радиуса электродов к межэлектродному зазору с приемлемой точностью практически во всем (актуальном для МЭМС) диапазоне отношений r/d . В свою очередь, используя уравнения (5.13), (5.15) и (5.16), можно несколько увеличить точность расчетов, но в существенно более узких интервалах отношений r/d .

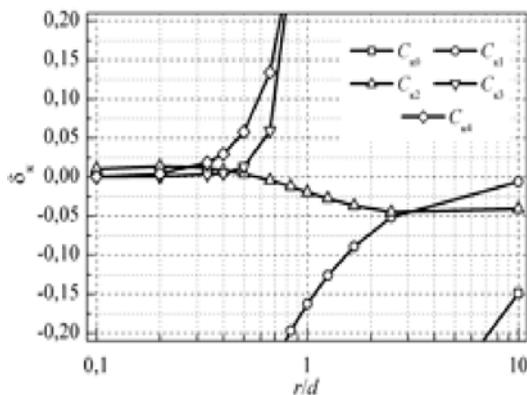


Рис. 5.5. Зависимости ошибки в оценке емкости при использовании в расчетах уравнений (5.12)—(5.16) от отношения радиуса электродов r к межэлектродному зазору d

Соответствующие зависимости ошибки $\delta = C_{ki}/C_k - 1$ в оценке емкости от отношения радиуса электродов r к межэлектродному зазору d при использовании в расчетах уравнений (5.12)—(5.16) показаны на рис. 5.5.

Расчет емкости плоского конденсатора с прямоугольными электродами при изменении

площади перекрытия электродов. При разработке МЭМС возникает необходимость в оценке емкостей и компонент электростатических сил между элементами конструкции системы, которые можно представить как плоский конденсатор со смещенными электродами (рис. 5.6).

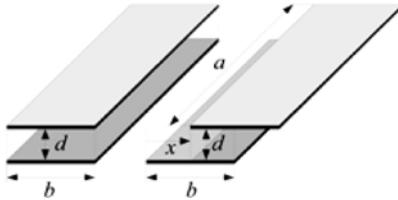


Рис. 5.6. Двухэлектродная плоскопараллельная конструкция с несмещенными и смещенными друг относительно друга электродами

В подавляющем большинстве случаев такие оценки проводят в рамках модели ИПК с использованием выражения

$$C_0^* = \epsilon\epsilon_0 a \frac{b - |x|}{d},$$

где $|x| \leq b$.

В этом приближении зависимость емкости от смещения электродов оказывается линейной, а значение емкости при $|x|/b \geq 1$ равно нулю. В результате отношение максимального значения емкости к минимальному (глубина модуляции емкости) при смещении электродов в рамках модели ИПК равно бесконечности.

Для оценки влияния краевых эффектов на емкость плоского конденсатора со смещенными электродами в литературе на основании результатов численных расчетов предложено аналитическое выражение

$$C_3^* = C_3 \left[1 - \theta \left\{ \frac{|x|}{b} - \frac{b}{d} \left[1 - \exp\left(-\frac{b|x|}{d b}\right) \right] \right\} \right], \quad (5.17)$$

где коэффициент $\theta = 1,0366 - 2,2275/[1 + 2,3467(b/d)^{0,5403}]$, аппроксимирующее зависимость емкости от относительного смещения электродов в диапазоне $0 \leq |x|/b \leq 1$ и $b/d \geq 1$ с погрешностью не более 10 %.

5.2. Расчет электростатических сил

В процессе проектирования МЭМС возникает необходимость в расчете компонент электростатической силы при неизменных напряжении V между электродами конденсатора и заряде Q на его электродах. В первом случае сила притяжения

$$F_z|_{V=\text{const}} = \frac{V^2}{2} \left| \frac{dC}{dz} \right|, \quad (5.18)$$

а во втором

$$F_z|_{Q=\text{const}} = \frac{Q^2}{2C^2} \left| \frac{dC}{dz} \right|. \quad (5.19)$$

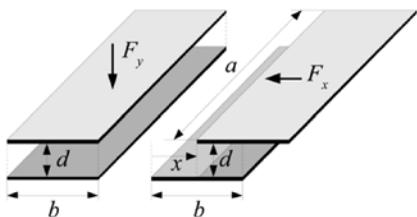


Рис. 5.7. Двухэлектродная плоскопараллельная конструкция с несмещенными и смещенными друг относительно друга электродами

Здесь $z=x$ или y в зависимости от того, какая компонента силы определяется — продольная F_x или

нормальная F_y (рис. 5.7).

Расчет нормальной компоненты силы при изменении зазора между прямоугольными электродами. При расчете силы F_y , с которой притягиваются друг к другу прямоугольные электроды плоского конденсатора, как и ранее, будем полагать, что длина электрода a много больше его ширины b (см. рис. 5.7).

Базовые зависимости нормированной нормальной компоненты электростатической силы $\tilde{F}_y(b/d)|_{V=\text{const}} = F_y(b/d)/F_y(100)|_{V=\text{const}}$ и $\tilde{F}_y(b/d)|_{Q=\text{const}} = F_y(b/d)/F_y(100)|_{Q=\text{const}}$ от отношения ширины электрода b к межэлектродному зазору d при постоянном напряжении V между электродами конденсатора и при постоянном заряде Q на электродах конденсатора, с использованием выражений (5.3)—(5.5), приведены на рис. 5.8 и 5.9 (кружки) соответственно.

Как и при расчете емкостей, расчет электростатических сил с использованием этих выражений на этапах предварительного проектирования представляется излишне громоздким. Поэтому рассмотрим более удобные в данном случае подходы, основанные на использовании выражений (5.18), (5.19) и формул (5.6)—(5.10).

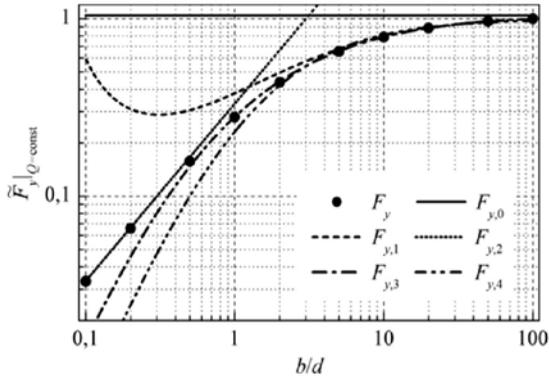


Рис. 5.8. Зависимости нормированной нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от отношения b/d

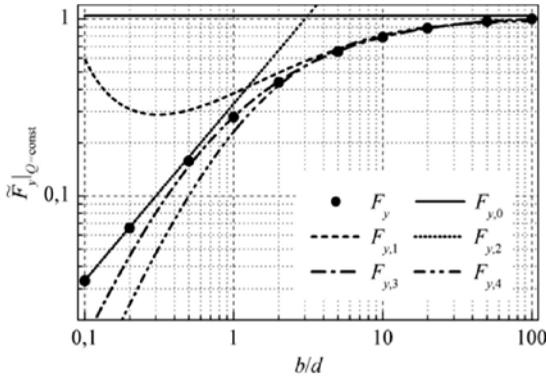


Рис. 5.9. Зависимости нормированной нормальной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от отношения b/d

В табл. 5.1 приведены выражения для расчета нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении $F_{y,i|V=\text{const}}$ между электродами плоского конденсатора и постоянном заряде $F_{y,i|Q=\text{const}}$ на его электродах, полученные с использованием формул (5.18), (5.19) и выражений (5.6)—(5.10) для емкости C_i .

Таблица 5.1

Расчетные формулы для нормальной компоненты электростатической силы при постоянных напряжении и заряде на прямоугольных электродах

i	$F_{y,i} _{V=\text{const}}$	$F_{y,i} _{Q=\text{const}}$
0	$\frac{V^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{ab}{d^2}$	$\frac{Q^2}{2} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 ab}$
1	$\frac{V^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{ab}{d^2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b}\right)$	$\frac{Q^2}{2} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 ab} \frac{1 + d/(\pi b)}{1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left[1 + \ln\left(2\pi \frac{b}{d}\right)\right]^2}$
2	$\frac{V^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{a}{d} \frac{1}{\ln^2(4d/b)}$	$\frac{Q^2}{2} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \pi ad}$
3	$\frac{V^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{ab}{d^2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b + \theta_2 d}\right)$	$\frac{Q^2}{2} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 ab} \frac{1 + d/[\pi(b + \theta_2 d)]}{1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left\{1 + \theta_1 \ln\left[2\pi + \ln \frac{b}{d} + \theta_2\right]\right\}^2}$
4	$1,05 \frac{V^2}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{ab}{d^2}$	$\frac{Q^2}{2} \frac{1,05}{\varepsilon \varepsilon_0 ab (1,05 + \theta_3 d/b)^2}$
$\theta_1 = 1,03; \theta_2 = 0,75; \theta_3 = 1,13$		

Соответствующие зависимости нормированной нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении $\tilde{F}_{y,i}(b/d)|_{V=\text{const}} = F_{y,i}(b/d) / F_{y,i}(100)|_{V=\text{const}}$ и постоянном заряде $\tilde{F}_{y,i}(b/d)|_{Q=\text{const}} = F_{y,i}(b/d) / F_{y,i}(100)|_{Q=\text{const}}$ от отношения b/d , рассчитанные с использованием выражений из табл. 5.1, приведены на рис. 5.8 и 5.9.

Видно, что данные аналитические выражения позволяют рассчитывать F_y с достаточной для практических применений точностью в широком диапазоне значений b/d , а при использовании выражений $F_{y,2}$ и $F_{y,3}$ расчет можно провести практически во всем, актуальном для создания МЭМС, диапазоне значений b/d .

На рис. 5.10 представлены зависимости ошибки $\delta_y(b/d)|_{V=\text{const}} = F_{y,i}(b/d) / F_{y,i}(b/d)|_{V=\text{const}} - 1$ в оценках $F_y|_{V=\text{const}}$ между двумя плоскими прямоугольными электродами от отношения b/d при расчетах с использованием выражений из табл. 5.1. Соответствующие зависимо-

сти ошибки $\delta_y(b/d)|_{Q=\text{const}} = F_{y,i}(b/d)/F_y(b/d)|_{Q=\text{const}} - 1$ в оценках $F_y|_{Q=\text{const}}$ приведены на рис. 5.11.

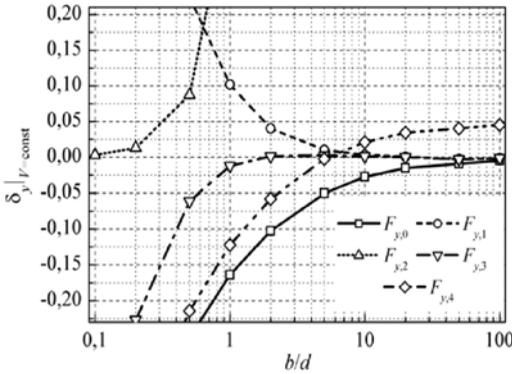


Рис. 5.10. Зависимости ошибки в оценке нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от отношения b/d

и $b/d \geq 2,2$ для $i=0, 1, 2, 3$ и 4 соответственно.

Согласно рис. 5.9 с использованием выражений для $F_{y,i}|_{Q=\text{const}}$ рассчитывать нормальную компоненту электростатической силы при постоянном заряде с погрешностью менее 10 % можно при $b/d \geq 40, b/d \geq 2,6, b/d \leq 0,65, b/d \geq 0,45$ и $b/d \geq 1,4$ для $i=0, 1, 2, 3$ и 4 соответственно, а с погрешностью менее 5 % при $b/d \geq 90, b/d \geq 4, b/d \leq 0,45, b/d \geq 0,55$ и $b/d \geq 1,8$ для $i=0, 1, 2, 3$ и 4 соответственно.

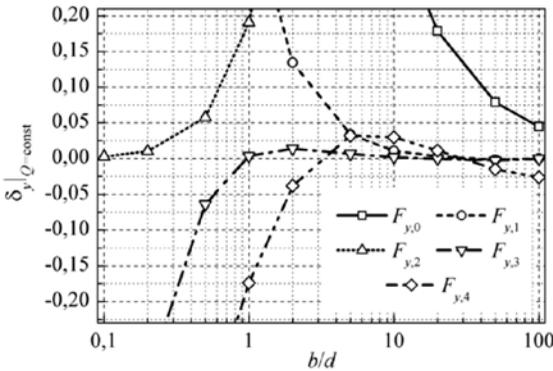


Рис. 5.11. Зависимости ошибки в оценке нормальной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от отношения b/d

Отметим, что значения нормальной компоненты электростатической силы при постоянном заряде, рассчитанные в рамках модели ИПК (см. рис. 5.9 — сплошная линия), в отличие от базовой зависимости, не зависят от отношения b/d , поэтому при уменьшении b/d погрешность таких оценок существенно возрастает. В результате, если при постоянном напряжении оценки значений нормальной компоненты электростатической силы, выполненные в рамках модели ИПК, с приемлемой точностью можно проводить при $b/d \geq 2$, то при постоянном заряде это возможно лишь при $b/d \geq 40$.

Расчет продольной компоненты силы при изменении площади перекрытия прямоугольных электродов. Рассчитаем силу F_x , с которой притягиваются друг к другу электроды плоского прямоугольного конденсатора при смещении их друг относительно друга. При этом также будем полагать, что $a \gg b$.

Базовые зависимости нормированной продольной компоненты электростатической силы $\tilde{F}_x(x/b)_{V=\text{const}} = F_x(x/b)/F_{x,\text{max}/V=\text{const}}$ при постоянном напряжении V между электродами конденсатора, рассчитанные численно при различных отношениях b/d , приведены на рис. 5.12. Характерной особенностью приведенных зависимостей является наличие пологой области при значениях x/b в интервале от 0 до 1. По мере увеличения отношения b/d пологая область расширяется, а её наклон уменьшается.

В случае постоянного напряжения продольная компонента электростатической силы пропорциональна первой производной от емкости по соответствующей координате (в данном случае по x). Поэтому пологую область на зависимостях $F_x(x/b)_{V=\text{const}}$ можно объяснить практически линейным изменением емкости.

Возрастание силы вблизи $x/b \rightarrow 0$ и спад в окрестности точки $x/b=1$ связаны

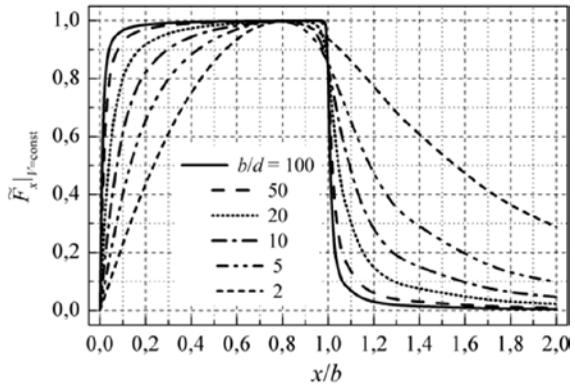


Рис. 5.12. Базовые зависимости нормированной продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от относительного смещения электродов

с проявлением краевых эффектов. Расширение пологой области при увеличении отношения b/d происходит вследствие уменьшения относительного вклада краевых эффектов, поскольку линейная область на зависимости емкости расширяется с ростом отношения b/d .

Базовые зависимости нормированной продольной компоненты электростатической силы $\tilde{F}_x(x/b)|_{Q=\text{const}} = F_x(x/b)/F_{x, \text{max}}|_{Q=\text{const}}$ при постоянном заряде Q на электродах конденсатора, рассчитанные численно при различных отношениях b/d , приведены на рис. 5.13.

Из представленных на рис. 5.13 зависимостей следует, что, в отличие от предыдущего случая, данные зависимости не имеют пологой области, причем с увеличением отношения b/d зависимость $F_x(x/b)|_{Q=\text{const}}$ в окрестности точки $x/b=1$ становится более узкой.

Такой характер зависимостей $F_x(x/b)|_{Q=\text{const}}$ объясняется тем, что в данном случае продольная компонента электростатической силы пропорциональна первой производной от емкости по соответствующей координате (в данном случае по x) и обратно пропорциональна квадрату емкости. При увеличении взаимного смещения электродов в интервале $0 < x/b < 1$ емкость уменьшается, а производная от емкости изменяется слабо, что и приводит к увеличению продольной составляющей электростатической силы при смещении электродов. При

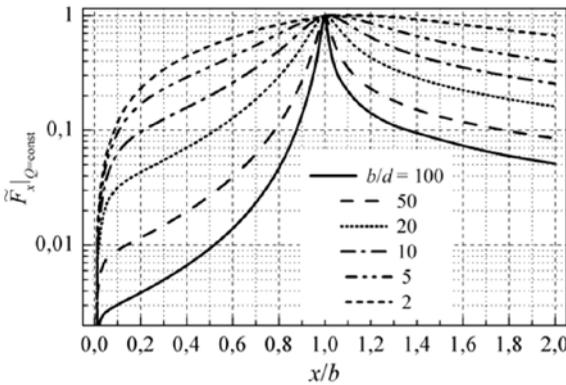


Рис. 5.13. Базовые зависимости нормированной продольной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от относительного смещения электродов

при $x/b > 1$ емкость системы изменяется слабо и производная от емкости стремится к нулю, что и приводит к уменьшению продольной составляющей электростатической силы.

Сужение зависимости $F_x(x/b)|_{Q=\text{const}}$ с ростом отношения b/d можно объяснить уменьшением влияния краевых эффектов.

Таблица 5.2

Расчетные формулы для продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении и заряде на прямоугольных электродах

i	$F_{x,i} _{V=\text{const}}$	$F_{x,i} _{Q=\text{const}}$
0	$\frac{V^2}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0\pi r^2}{d^2}$	$\frac{Q^2}{2} \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 ab^2(1- x /b)^2}$
3	$\frac{V^2}{2} \frac{C_3}{b} \theta \left[1 - \exp\left(1 - \frac{b x }{d} \frac{1}{b}\right) \right]$	$\frac{Q^2}{2} \frac{\frac{1}{bC_3} \theta \left[1 - \exp\left(1 - \frac{b x }{d} \frac{1}{b}\right) \right]}{\left[1 - \theta \left\{ \frac{ x }{b} - \frac{d}{b} \left[1 - \exp\left(1 - \frac{b x }{d} \frac{1}{b}\right) \right] \right\} \right]^2}$
$C_3 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ab}{d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{b}{d} \left[1 + \theta_1 \ln(2\pi) + \ln\left(\frac{b}{d} + \theta_2\right) \right] \right\};$ $\theta_1 = 1,03; \theta_2 = 0,75;$ $\theta = 1,0366 - 2,2275/[1 + 2,3467(b/d)^{0,5403}]$		

В табл. 5.2 приведены аналитические выражения для расчета продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении и заряде, полученные с использованием формул (5.18), (5.19) и выражений для оценки емкостей C_0^* и C_3^* .

На рис. 5.14 представлены зависимости продольной компоненты электростатической силы F_x от относительного смещения электродов x/b , рассчитанные при постоянном напряжении V на обкладках конденсатора для различных соотношений b/d . Расчет проводился при $a=1000$ мкм, $b=100$ мкм и $V=5$ В. Маркерами обозначены результаты расчетов методом площадок, сплошными линиями — расчет с использованием выражения $F_{x,3}|_{V=\text{const}}$, которое позволяет учитывать влияние краевых эффектов. В рамках модели ИПК соответствующее выражение для $0 < x/b < 1$ имеет вид $F_{x,3}|_{V=\text{const}}$ (см. табл. 5.2).

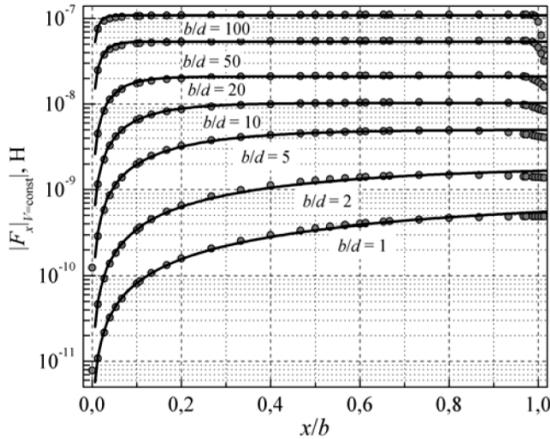


Рис. 5.14. Зависимости продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от относительного смещения электродов. Маркеры — численный расчет, линии — расчет с использованием $F_{x,3}|_{V=const}$

На рис. 5.15 и 5.16 приведены зависимости ошибки $\delta_x(x/b)|_{V=const} = F_{x,i}(x/b)/F_{x,i}(x/b)|_{V=const} - 1$ в оценках продольной компоненты электростатической силы между двумя прямоугольными электродами от отношения x/b при расчетах с использованием выражений $F_{x,3}|_{V=const}$ и $F_{x,0}|_{V=const}$ соответственно.

Согласно рис. 5.15 различие между оценками силы F_x при постоянном напряжении на обкладках конденсатора, полученными с использованием численных расчетов и по формуле $F_{x,3}|_{V=const}$, при b/d в интервале $0,02 < x/b < 0,9$ не превышает 10 %, что вполне приемлемо для практических применений.

Согласно рис. 5.16 аналогичные оценки в рамках модели ИПК $F_{x,0}|_{V=const}$ приводят к погрешности менее 10 % лишь при $x/d > 5$. Например, при $b/d \geq 20$ погрешность будет менее 10 % в интервале $0,2 < x/b < 0,98$. В то же время при $b/d = 2$ минимальная погрешность будет уже около 50 %, а при $b/d = 1$ — более 120 %, т. е. в данном случае модель ИПК оказывается неприемлемой.

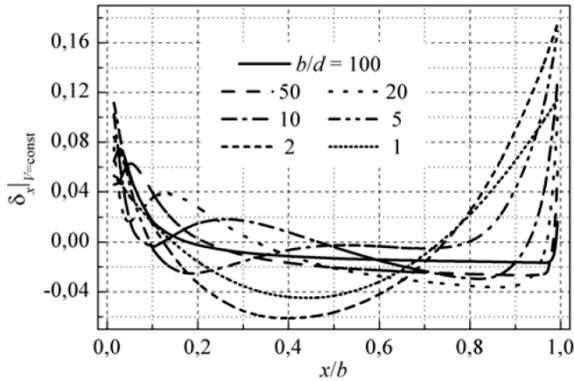


Рис. 5.15. Зависимости ошибки в оценке продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от относительного смещения электродов, рассчитанной с использованием $F_{x, 3}|_{Q=\text{const}}$

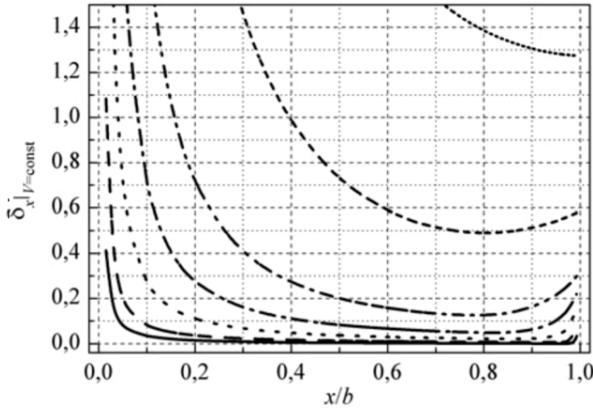


Рис. 5.16. Зависимости ошибки в оценке продольной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении от относительного смещения электродов, рассчитанной с использованием $F_{x, 3}|_{Q=\text{const}}$

На рис. 5.17 представлены зависимости продольной компоненты электростатической силы F_x от относительного смещения электродов x/b , рассчитанные при постоянном заряде Q на обкладках

конденсатора для различных соотношений b/d . Расчет проводился при $a=1000$ мкм, $b=100$ мкм и $Q=5 \cdot 10^{-14} b/d$ Кл. Маркерами обозначены результаты численных расчетов, сплошными линиями — расчет с использованием выражения $F_{x,3}|_{Q=\text{const}}$, учитывающего влияние краевых эффектов. В рамках модели ИПК соответствующее выражение имеет вид $F_{x,0}|_{Q=\text{const}}$ (см. табл. 5.2).

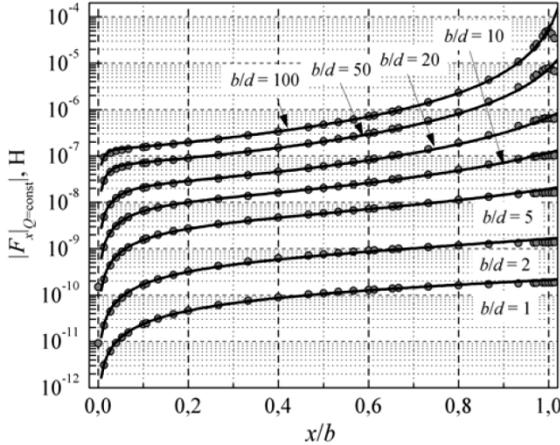


Рис. 5.17. Зависимости продольной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от относительного смещения электродов. Маркеры — численный расчет, линии — расчет с использованием $F_{x,3}|_{Q=\text{const}}$

На рис. 5.18 и 5.19 приведены зависимости ошибки $\delta_x(x/b)|_{Q=\text{const}} = F_{x,i}(x/b)/F_x(x/b)|_{Q=\text{const}} - 1$ в оценках продольной компоненты электростатической силы между двумя прямоугольными электродами от отношения x/b при расчетах с использованием выражений $F_{x,3}|_{Q=\text{const}}$ и $F_{x,0}|_{Q=\text{const}}$ соответственно.

Согласно рис. 5.18 различие между оценками силы F_x при постоянном заряде на обкладках конденсатора, сделанными с использованием численного метода и формулы $F_{x,3}|_{Q=\text{const}}$ при $b/d \geq 1$ в интервале $0,02 < x/b < 0,9$ не превышает 10 %, что вполне приемлемо для практических применений. Аналогичные оценки, выполненные с использованием $F_{x,0}|_{Q=\text{const}}$ в рамках модели ИПК, приводят к минимальной погрешности 12 % — при $b/d=100$ и 24 % — при $b/d=50$ (см. рис. 5.19). Таким образом, при постоянном заряде проводить оценки

F_x для $b/d \leq 50$ в рамках модели ИПК практически нельзя.

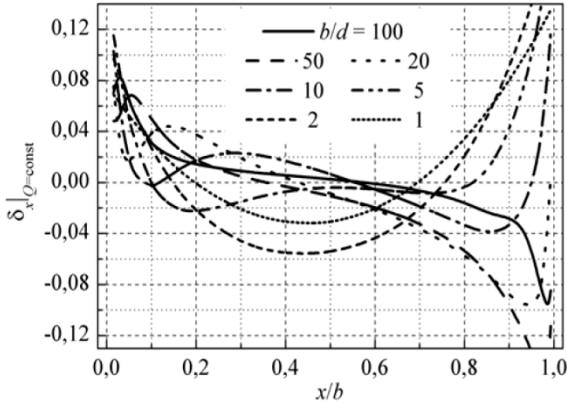


Рис. 5.18. Зависимости ошибки в оценке продольной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от относительного смещения электродов, рассчитанной с использованием $F_{x,3|Q=const}$

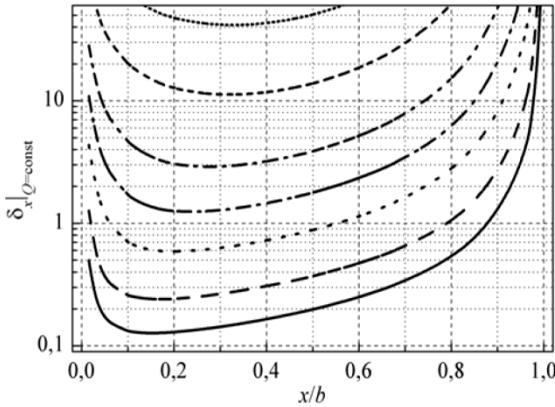


Рис. 5.19. Зависимости ошибки в оценке продольной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от относительного смещения электродов, рассчитанной с использованием $F_{x,3|Q=const}$, тип линий соответствует рис. 5.18

Контрольные вопросы

1. Как происходит формирование информации об измеряемом ускорении при использовании емкостной структуры?
2. В чем заключается сущность краевого эффекта?
3. Как объяснить зависимость емкости от толщины электрода?
4. Какое движение совершает подвижная система электродов при подаче напряжения на неподвижную систему гребенчатых электродов?
5. Как можно обеспечить нормальное перемещение электродов в встречно-штыревой гребенчатой структуре?
5. Почему зависимость продольной компоненты электростатической силы при постоянном заряде от относительного смещения электродов имеет максимум?
6. Почему электростатический привод получил наибольшее распространение в МЭМС?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

Цель: более глубокое освоение теоретического материала, изучение общих принципов и методов расчета и проектирования типовых элементов и устройств микросистемной техники по критериям прочности, жесткости и взаимозаменяемости.

Схема двухслойной пластины приведена на рис. 1.

Варианты заданий для расчета температурных напряжений в двухслойной пластине приведены в табл. 1.

Пример расчета. Исходные данные: $h_1=h_2=0,4$ мм; $E_1=160$ ГПа; $E_2=150$ ГПа; $\alpha_1=6 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; $\alpha_2=5,2 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; $T=200$ °С.

Для расчета напряжений в слоях при термическом нагружении используем уравнения (2.14).

Выполнение. Рассчитываем по уравнению (2.2) положение нейтрального слоя в сечении двухслойной пластины:

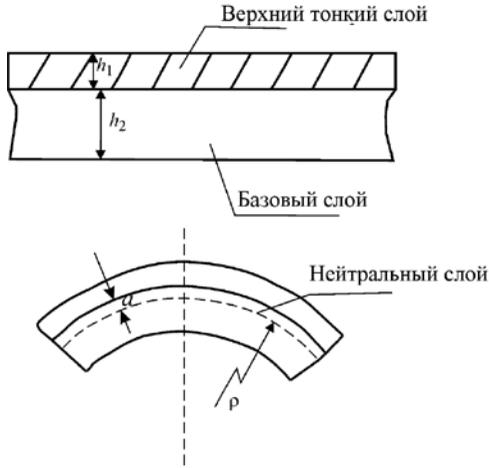


Рис. 1. Схема двухслойной структуры

$$a = \frac{1}{2} \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} = \frac{1}{2} \frac{150 \cdot 10^9 \cdot 0,4^2 - 160 \cdot 10^9 \cdot 0,4^2}{150 \cdot 10^9 \cdot 0,4 + 160 \cdot 10^9 \cdot 0,4} = -0,00645 \text{ мм.}$$

Моменты инерции слоев единичной ширины равны:

– для слоя 1

$$I_1 = \frac{(h_1 + a)^3 - a^3}{3} = \frac{(0,4 - 0,00645)^3 + 0,00645^3}{3} = 0,020318 \text{ мм}^4/\text{мм.}$$

– для базового слоя 2

$$I_2 = \frac{(h_1 - a)^3 - a^3}{3} = \frac{(0,4 + 0,00645)^3 + 0,00645^3}{3} = 0,022382 \text{ мм}^4/\text{мм.}$$

Варианты заданий

Номер варианта	Модуль упругости материала верхнего слоя E_1 , ГПа	Модуль упругости материала базового слоя E_2 , ГПа	ТКЛР материала верхнего слоя α_1 , 10^{-6} K^{-1}	ТКЛР материала базового слоя α_2 , 10^{-6} K^{-1}	Толщина верхнего слоя h_1 , мм	Толщина базового слоя h_2 , мм
1	170	145	5	4,8	0,1	0,30
2	160	150	7	5,2	0,2	0,35
3	150	145	5	4,8	0,3	0,40
4	190	150	5	5,2	0,4	0,45
5	200	145	7	4,8	0,5	0,50
6	250	150	5	5,2	0,6	0,55
7	210	145	5	4,8	0,1	0,30
8	240	150	7	5,2	0,2	0,35
9	220	145	5	4,8	0,3	0,40
10	180	150	5	5,2	0,4	0,45
11	230	145	7	4,8	0,5	0,50
12	170	150	5	5,2	0,6	0,55
13	160	145	5	4,8	0,2	0,45
14	210	150	7	5,2	0,3	0,50
15	180	145	5	4,8	0,4	0,55

Рассчитываем термические напряжения. Напряжения в слоях с координатой z определяются как:

– для слоя 1

$$\sigma_{x1} = - \frac{(6 \cdot 10^{-6} - 5,2 \cdot 10^{-6}) \cdot 200}{\frac{1}{160 \cdot 10^9 \cdot 0,4} + \frac{1}{150 \cdot 10^9 \cdot 0,4}} \times \left[\frac{1}{0,4} + \frac{(0,4 + 0,4) \cdot 160 \cdot 10^9 \cdot z}{2(160 \cdot 10^9 \cdot 0,020318 + 150 \cdot 10^9 \cdot 0,022382)} \right] = -4,955 \cdot 10^6 (2,5 + 9,673z);$$

– для базового слоя 2

$$\sigma_{x2} = \frac{(6 \cdot 10^{-6} - 5,2 \cdot 10^{-6}) \cdot 200}{\frac{1}{160 \cdot 10^9 \cdot 0,4} + \frac{1}{150 \cdot 10^9 \cdot 0,4}} \times \left[\frac{1}{0,4} - \frac{(0,4 + 0,4) \cdot 150 \cdot 10^9 \cdot z}{2(160 \cdot 10^9 \cdot 0,020318 + 150 \cdot 10^9 \cdot 0,022382)} \right] = 4,955 \cdot 10^6 (2,5 - 9,0687z).$$

Результаты расчета напряжений в слоях приведены в табл. 2.

Таблица 2

Расчетные значения напряжений в слоях

Координаты точки z , мм	Напряжения в слое 1 σ_{x1} , МПа	Напряжения в слое 2 σ_{x2} , МПа
-0,39355	6,475	—
0,00645	-12,697	12,098
0,40645	—	-5,877

Эпюра напряжений показана на рис. 2.

Рассчитываем радиус кривизны пластины. Для расчета радиуса кривизны ρ в двухслойной структуре используем формулу

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T(h_1 + h_2)}{2 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right) (E_1 I_1 + E_2 I_2)}.$$

Подставляя исходные данные и значения I_1 и I_2 , имеем:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{(6 \cdot 10^{-6} - 5,2 \cdot 10^{-6}) \cdot 200 \cdot (0,4 + 0,4)}{\frac{1}{1,6 \cdot 10^{11} \cdot 0,4} + \frac{1}{1,5 \cdot 10^{11} \cdot 0,4}} \times \frac{1}{1,6 \cdot 10^{11} \cdot 0,020318 + 1,5 \cdot 10^{11} \cdot 0,022382} = 5,998 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^{-1}.$$

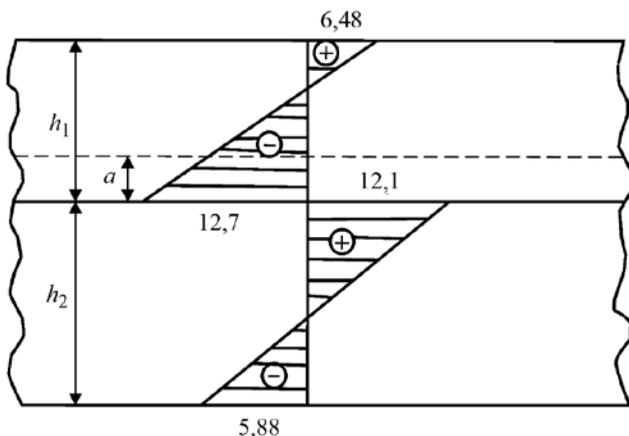


Рис. 2. Эпюра нормальных напряжений в слоях пластины

Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{1}{5,998 \cdot 10^{-4}} = 1,667 \cdot 10^3 \text{ мм} = 1,667 \text{ м.}$$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Основные положения теории температурных напряжений и деформаций в однослойных пластинах и многослойных структурах.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Методики расчета требуемых величин.
4. Результаты расчетов в виде таблиц и эпюр.
5. Выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ПОДВЕСА

Цель: более глубокое освоение теоретического материала, изучение общих принципов и методов расчета и проектирования типовых элементов и микросистемной техники.

На рисунке приведена структура гребенчатого электростатического актюатора. Под действием электростатической силы $F_{эл}$, действующей между встречно-штыревыми электродами статора и ротора, ротор отклоняется от первоначального положения.

По закону Гука, силе $F_{эл}$, действующей на ротор, будет противодействовать сила упругости $F_{упр}$ упругого подвеса, равная по модулю внешней силе и противоположная по направлению:

$$F_{эл} = F_{упр} = k\delta,$$

где k — коэффициент жесткости упругого подвеса; δ — перемещение, совершаемое упругим подвесом под действие силы $F_{эл}$.

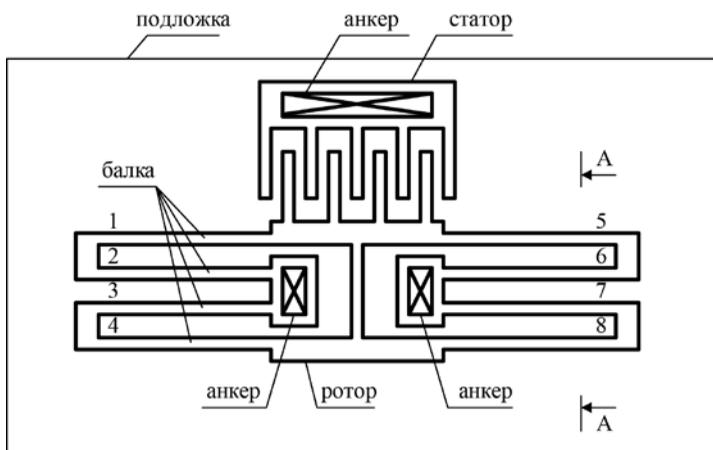
Как видно на рисунке, упругий подвес образован четырьмя последовательно соединенными парами балок: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, причем консольные балки в парах соединены параллельно.

Таким образом, жесткости пар последовательно соединенных консольных балок определяется выражениями:

$$k_{1-2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad k_{3-4} = \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}; \quad k_{5-6} = \frac{k_5 k_6}{k_5 + k_6}; \quad k_{7-8} = \frac{k_7 k_8}{k_7 + k_8},$$

где k_1 — k_8 — жесткости балок упругого подвеса.

Жесткости параллельно соединенных пар консольных балок определяется выражениями:



Структура гребенчатого электростатического актюатора

$$k_{1-2,3-4} = k_{1-2} + k_{3-4}; k_{5-6,7-8} = k_{5-6} + k_{7-8}.$$

Жесткость упругого подвеса гребенчатого электростатического актюатора определяется с помощью выражения:

$$k = k_{1-2,3-4} + k_{5-6,7-8}.$$

Варианты заданий для расчета коэффициента жесткости поликремниевых подвесов ($E=170$ ГПа) приведены в таблице ниже.

Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Размеры балки, мкм:															
длина L	200	225	250	275	300	200	225	250	275	300	200	225	250	275	300
ширина w	5	7,5	10	5	7,5	10	5	7,5	10	5	7,5	10	5	7,5	10
толщина t	10	15	20	10	15	20	10	15	20	10	15	20	10	15	20
Размеры элемента жесткости принять равными: $L_c=4w$, $w_c=2w$															

Построить зависимости коэффициента жесткости от длины $k(L)$ и ширины $k(w)$ балки, а также от отношения ширины балки w к её длине L .

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Основные положения теории напряженно-деформированного состояния несущих элементов МЭМС-устройств.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Методики расчета требуемых величин.
4. Результаты расчетов в виде таблиц и графиков.
5. Выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

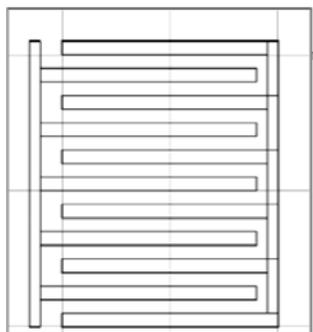
РАСЧЕТ ЗАВИСИМОСТЕЙ ЕМКОСТИ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА МЭМС ОТ МЕЖЭЛЕКТРОДНОГО ЗАЗОРА И ВЗАИМНОГО СМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОДОВ

Цель: более глубокое освоение теоретического материала, сравнение различных подходов к расчету зависимостей емкости плоского конденсатора, содержащего одинаковые прямоугольные или круглые плоскопараллельные электроды, от межэлектродного зазора и взаимного смещения электродов.

На рисунке приведен вариант топологии встречно-штыревой (гребенчатой) емкостной структуры МЭМС.

Рассчитать и построить зависимости нормированной емкости базовой \hat{C} и \hat{C}_i структур от отношения ширины b или радиуса r электрода к межэлектродному зазору d в соответствии с вариантом задания, приведенным в таблице, без учета и с учетом краевых эффектов.

Рассчитать и построить зависимости ошибки $\delta=C_i/C-1$ в оценках емкости плоского конденсатора, содержащего два одинаковых прямоугольных параллельных электрода, от отношения ширины электрода b к межэлектродному зазору d при расчетах с использованием уравнений (4.6)—(4.10).



Встречно-штыревая
5-электродная емкостная
структура МЭМС

Варианты заданий

Вариант	Число структур	Размеры электродов, мкм		
		длина	ширина	толщина
1	5	100	20	5
2	10	200	20	5
3	15	300	20	10
4	20	400	20	10
5	5	200	30	10
6	10	300	30	10
7	15	400	30	5
8	20	100	30	5
9	5	300	20	5
10	10	400	20	5
11	15	100	20	10
12	20	200	20	10
13	5	400	30	10
14	10	100	30	10
15	15	200	30	5
16	20	300	30	5

Зазор между электродами принять равным их толщине

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Основные положения теории плоскопараллельного конденсатора.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Методики расчета требуемых величин.
4. Результаты расчетов в виде таблиц и графиков.
5. Выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОДАМИ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Цель: более глубокое освоение теоретического материала, исследование пределов применимости различных подходов для оценки компонент электростатических сил, действующих между электродами плоского конденсатора, содержащего два одинаковых прямоугольных электрода, с изменяющимся межэлектродным зазором или площадью перекрытия электродов.

Рассчитать и построить зависимости нормированной нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении $\tilde{F}_{y,i}(b/d)/V_{\text{const}}=F_{y,i}(b/d)/F_y(100)/V_{\text{const}}$ между электродами плоского конденсатора и постоянном заряде $\tilde{F}_{y,i}(b/d)/Q_{\text{const}}=F_{y,i}(b/d)/F_y(100)/Q_{\text{const}}$ на его электродах от отношения b/d с использованием выражений из табл. 4.1, полученных с использованием выражений (4.18), (4.19) и уравнений (4.6)—(4.10) для емкости C_i .

Рассчитать и построить зависимости ошибки $\delta_y(b/d)/V_{\text{const}}=F_{y,i}(b/d)/F_y(b/d)/V_{\text{const}}-1$ в оценках нормальной компоненты электростатической силы при постоянном напряжении между двумя плоскими электродами F_y/V_{const} и $\delta_y(b/d)/Q_{\text{const}}=F_{y,i}(b/d)/F_y(b/d)/Q_{\text{const}}-1$ в оценках нормальной компоненты электростатической силы при постоянном заряде на электродах F_y/Q_{const} от отношения b/d .

В качестве вариантов заданий использовать варианты предыдущей лабораторной работы.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. Основные положения теории электростатического взаимодействия.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Методики расчета требуемых величин.
4. Результаты расчетов в виде таблиц и графиков.
5. Выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены особенности чувствительных элементов консольного и мембранного типа, температурные напряжения и деформации в одно- и многослойных структурах, электростатические взаимодействия в емкостных элементах МЭМС с плоскопараллельными электродами, лежащие в основе функционирования многих изделий микросистемной техники.

Тематика лабораторных работ подобрана для более глубокого освоения изложенного теоретического материала и включает расчет температурных напряжений в двухслойной пластине, расчет коэффициента жесткости подвеса, расчет зависимостей емкости плоского конденсатора МЭМС от межэлектродного зазора и взаимного смещения электродов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев, В.Н. Техническая механика микросистем [Текст] / В.Н. Тимофеев, А.И. Погалов, С.В. Угольников, А.М. Андрианов, О.В. Панкратов. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 176 с.
2. Тимофеев, В.Н. Учебное пособие по дисциплине «Введение в механику наноразмерных объектов» [Текст] / В.Н. Тимофеев, А.И. Погалов, С.В. Угольников, А.А. Дегтярев. — М.: МИЭТ, 2011. — 244 с.
3. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости [Текст] / С.П. Тимошенко. — Киев: Наукова думка, 1972. — 508 с.
4. Иоссель, Ю.Я. Расчет электрической емкости [Текст] / Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСОБЕННОСТИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСОЛЬНОГО И МЕМБРАННОГО ТИПА	4
2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ	9
3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ	16
4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ МЭМС-УСТРОЙСТВ	25
4.1. Напряженно-деформированное состояние пластин	25
4.2. Напряженно-деформированное состояние опорных элементов микромеханических приборов.....	37
5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МЭМС С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ	52
5.1. Расчет емкостей	52
5.2. Расчет электростатических сил	61
Лабораторная работа № 1. Расчет температурных напряжений в двухслойной пластине	72
Лабораторная работа № 2. Расчет коэффициента жесткости подвеса	76
Лабораторная работа № 3. Расчет зависимостей емкости плоского конденсатора МЭМС от межэлектродного зазора и взаимного смещения электродов	79
Лабораторная работа № 4. Расчет электростатических сил, действующих между электродами плоского конденсатора	80
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	81

Учебное издание

Липатов Геннадий Иванович

КОМПОНЕНТЫ МИКРОСИСТЕМНОЙ ТЕХНИКИ

Учебное пособие

Редактор Е. А. Кусаинова

Подписано к изданию 13.09.2019.

Объем данных 4,2 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14