ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

И.Н. Пантелеев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2010

УДК 681.3.06(075)

Пантелеев И.Н. Высшая математика. Дифференциальное исчисление: практикум: учеб. пособие / И.Н. Пантелеев. Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2010. – 230 с.

Учебное пособие включает материал, необходимый для подготовки к практическим занятиям по курсу высшей математики в первом семестре. Содержит краткий теоретический материал по методам вычисления пределов и производных функций одной переменной, общему исследованию функций с приложениями к задачам геометрии, механики и физики, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные методы решения.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 280100 «Безопасность жизнедеятельности», 280200 «Защита окружающей среды», специальностям 280103 «Защита в чрезвычайных ситуациях», 280101 «Безопасность жизнедеятельности в техносфере» и дисциплине «Высшая математика». Предназначено студентам очной формы обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе Microsoft Word 2003 и содержатся в файле Vmfmm_DifIsc1.pdf.

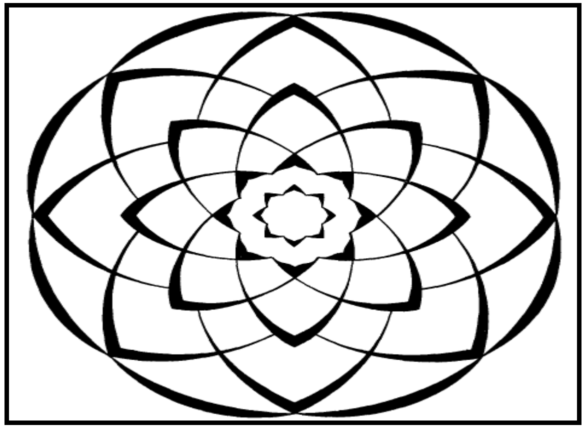
Ил. 94. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра физики Воронежской государственной технологической академии (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Безрядин); профессор Г.Е. Шунин

И.Н. Пантелеев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: ПРАКТИКУМ

Учебное пособие



Воронеж 2010

Учебное издание

Пантелеев Игорь Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ:
ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор И.Н. Пантелеева

Подписано к изданию 15.12.2010.
Уч.- изд. л. 12,4.

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математики развивает логическое мышление, приучает человека к точности, к умению выделять главное, сообщает необходимые сведения для понимания сложнейших задач, возникающих в различных областях деятельности. Цель пособия - помочь студентам научиться самостоятельно решать задачи по курсу высшей математики, при условии, что изучение теории должно выполняться по рекомендованному в программе учебнику и конспекту лекций.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, теоремы без доказательств, главнейшие формулы, методы и способы решения задач. Решение типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности.

Характерной особенностью является включение решений задач вычислительного характера, что позволяет развивать необходимые навыки и умение для студентов инженерных специальностей. Кроме того, значительное внимание уделено методам решения прикладных задач с физическим смыслом.

Часть задач была заимствована из сборников: Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, 1975; Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике, 1972; Задачи и упражнения по математическому анализу, под редакцией Б.П. Демидовича, 1968; Бугров Я.С., Никольский Я.С. Высшая математика. Задачник, 1982.

Пособие включает задания для типового расчета по дифференциальному исчислению по основным разделам, изучаемым в курсе высшей математики в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 280100 «Безопасность жизнедеятельности».

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Множества и операции над ними

1^0. Для описания совокупности элементов или предметов принято использовать понятие множества. Обычно множества элементов обозначаются прописными буквами $A,B,N,$ ... , а их элементы малыми буквами $a,b,n,...$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и обозначается знаком $\varnothing$. Множество A называется *счетным,* если имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества всех натуральных чисел N.

Если множество содержит конечное число элементов, то можно перечислить эти элементы в фигурных скобках {a,b,c}.

Выражение N = {1,2,3,...} обозначает *множество натуральных чисел,* а Z = {...,-2,-1,0,1,2,...} *множество всех целых чисел.*

Множество рациональных чисел обозначается отношением $\mathrm{Q} = \dfrac{m}{n}$, где $m,\ n \in Z,\ n \neq 0$, когда только дробь периодическая.

В противном случае числа *иррациональные.* Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных или вещественных чисел* и обозначается через R.

Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов $A = B$. Если множество B содержит множество A, то множество A называется *подмножеством* множества B и обозначается $B \supset A$ или $A \subset B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B и обозначается $A \cap B$.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B и обозначается $A \cup B$.

Пусть множество A принадлежит основному множеству E.

Тогда множество элементов основного множества E, не принадлежащих множеству A, называется *дополнением* множества A до множества E и обозначается $\bar{A}$, отсюда

$$A \cup \bar{A} = E, A \cap \bar{A} = \varnothing.$$

Для любых подмножеств A и B основного множества E справедливы соотношения: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2⁰. Пусть A — множество действительных чисел. Множество A называется *ограниченным сверху,* если существует такое действительное число a, что для всех чисел $x \in A$ выполняется $x \le a$. Наименьший элемент множества верхних граней ограниченного сверху множества A называется *точной верхней гранью и* обозначается $sup\, A$. Для множества A, ограниченного снизу, точная нижняя грань множества обозначается $inf\, A$. Множество A называется *ограниченным,* если оно ограничено сверху и снизу.

1.1. Описать перечислением элементов множество

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{N} \mid x^2 - 3x - 4 \le 0\}.$$

Решение. Найдем множество значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 3x - 4 \le 0$. Так как

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) \le 0,$$

то $x \in [-1,4]$. Поскольку A есть множество натуральных чисел, то $\mathrm{A} = \{1,2,3,4\}$.

1.2. Логическая символика

1^0. Логическую символику обычно используют при записи математических объяснений. Рассмотрим несколько наиболее простых символов.

Для обозначения высказываний или утверждений воспользуемся прописными буквами латинского алфавита A, B, C и т. д.

Операция отрицания утверждения A обозначается «не A» или $\bar{A}$.

Если высказывание составлено из двух высказываний при помощи союза «или», то оно является суммой этих высказываний *(дизъюнкцией)* и обозначается $A \vee B$ или $(A+B)$. Если же высказывание составлено из высказываний при помощи союза «и», то оно является произведением этих высказываний *(конъюнкцией)* и обозначается $A \wedge B$ или $(A \cdot B)$.

Если из высказывания A следует высказывание B, то имеет место *импликация* $A \Rightarrow B$. Если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует A, то имеет место *эквивалентность,* которую обозначают $A <=> B$.

Знак общности $\forall$ употребляется вместо слов любой, каждый. Так, $\forall a \in A$ означает: «для любого элемента $a \in A$».

Знак существования $\exists$ употребляется вместо слова существует. $\exists a \in A$ означает: «существует элемент $a \in A$».

2^0. Основные свойства:

1. Коммутативность (переместительность)

$A \wedge B = B \wedge A; \quad A \vee B = B \vee A.$

2. Ассоциативность (сочетательность)

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C; \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C.$

3. Дистрибутивность (распределительность)

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$

2.1. **Используя** логическую символику, **записать** утверждение: «число a есть точная верхняя грань множества X».

Решение. То, что число a есть точная верхняя грань множества X, записывается $a = sup\ X$ и означает $\forall x \in X\ (x \leq a)$, причем для сколь угодно малого ε справедливо условие

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X\ (x > a - \varepsilon).$$

1.3. Понятие о функции

1⁰. Если каждому значению одной переменной x по некоторому правилу ставится в соответствие определенное значение другой переменной y, то говорят, что между переменными существует функциональная зависимость $y=f(x)$.

Переменную x называют независимой переменной или *аргументом, а y — функцией.* Функция может задаваться аналитически, графически и таблично.

Если функция задана уравнением, неразрешенным относительно y, то говорят, что функция задана неявно, и записывают $f(x,y) = 0$.

Если соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную (например, t), называемую параметром, то говорят, что функция задана параметрически, и записывают

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Функция может быть задана также различными аналитическими выражениями на разных участках, например функция Дирихле

$$\begin{cases} \chi(x) = 1, & \textit{если } x \textit{ рационально}, \\ \chi(x) = 0, & \textit{если } x \textit{ иррационально}. \end{cases}$$

или «сигнум x»

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} x = 1, & \textit{если } x > 0; \\ \operatorname{sgn} x = -1, & \textit{если } x < 0; \\ \operatorname{sgn} 0 = 0. \end{cases}$$

2^0. Если каждому значению y ставится в соответствие одно или несколько значений x, то этим определяется однозначная или многозначная функция $x=\varphi(y)$, которая называется *обратной функцией* для функции $y = f(x)$. Так для функции $y = a^x$ обратной функцией будет $x = \log_a y$. В этом случае обратная функция является однозначной. Для функции $y = x^2$ обратная функция будет двухзначной $x = \pm\sqrt{y}$.

Для обратных функций справедливы соотношения:

$$\varphi(f(x))=x; \quad f(\varphi(y))=y.$$

Пусть каждому значению переменной x ставится в соответствие определенное значение переменной $u=\varphi(x)$, а каждому уже определенному значению u ставится в соответствие определенное значение $y = f(u)$, тогда соответствие между значениями x и y имеет вид $y = f(\varphi(x))$ и определяет y как *сложную функцию* от x, т. е. функцию от функции.

3^0. Функция $y = f(x)$ называется *четной,* если при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не меняется, т. е. $f(x) = f(-x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция называется *нечетной,* если при изменении знака аргумента на противоположный численное значение функции не меняется, а знак функции меняется на противоположный, т.е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется *периодической,* если существует такое число T, называемое периодом функции, что значение функции не меняется при прибавлении или вычитании этого числа к любому значению аргумента, т.е.

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\ldots=f(x+kT),$$

где k — любое целое положительное или отрицательное число. График периодической функции повторяется через равные интервалы.

4^0. *Областью определения* функции является совокупность всех значений аргумента, при которых данное аналитическое выражение имеет смысл.

5^0. Преобразование графиков при некоторых простейших изменениях функции $y = f(x)$:

а) график функции $y = f(x - a)$ получается из исходного переносом всех точек на a единиц по оси абсцисс вправо, если a положительно, и влево, если a отрицательно;

б) график функции $y = f(x)+b$ получается из исходного переносом всех точек на b единиц по оси ординат вверх, если b положительно, и вниз, если b отрицательно;

в) график функции $y=Af(x)$ $(A > 0)$ получается из исходного растяжением его вдоль оси ординат в A раз, если $A > 1$, при $A < 1$ сжатием в $\frac{1}{A}$ раз, если же $A < 0$, то ординаты меняют еще и знак;

г) график функции $y = f(kx)$ $(k > 0)$ получается из исходного при $k > 1$ уменьшением абсцисс в k раз, а при $k < 1$ увеличением абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз, если же $k < 0$, то абсциссы меняют знак и график функции симметричен относительно оси Oy.

Последовательно выполняя рассмотренные сдвиги и деформации графика исходной функции, можно получить график и функции более сложного вида

$$f(x) = A\,f\,[\,k(x - a)] + b.$$

3.1. **Дана** функция $f(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{x-1}{x+4} - 3$. **Найти** частное значение функции при $x = 1$.

Решение. Чтобы найти частное значение функции при $x = 1$, достаточно это значение аргумента подставить вместо x. Получим $f(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + \frac{1-1}{1+4} - 3 = -2$.

***3.2.* Дана** функция $f(x) = x^2 + log_a x + sin\ \dfrac{\pi x}{a}$.

Найти значение функции при $x = a.$

Решение. Подставляем вместо x ее частное значение

$f(a) = a^2 + log_a a + sin\ \dfrac{\pi a}{a} = a^2 + 1.$

3.3. Функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Требуется записать эту функцию в неявном виде.

Решение. Чтобы записать функцию в неявном виде, следует исключить параметр t. Возводя в квадрат

$$+\begin{cases} (x)^2 = (a\cos t)^2 \\ (y)^2 = (b\sin t)^2 \end{cases}$$

и преобразуя, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.4. Построить графики функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x \quad \text{при } x \le 0; \\ x^2 \quad \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } \quad x < 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 2; \\ -2x + 4 \text{ при } \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Решение.

а) Строим график функции для $x \le 0$ и для $x > 0$ (рис. 1.1).

б) Строим график функции последовательно для участков: $x < 0$; $0 \le x < 2$; $x > 2$ (рис. 1.2).

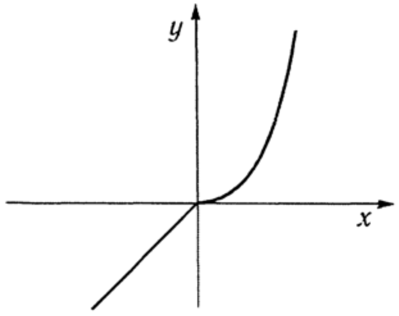


Рис. 1.1

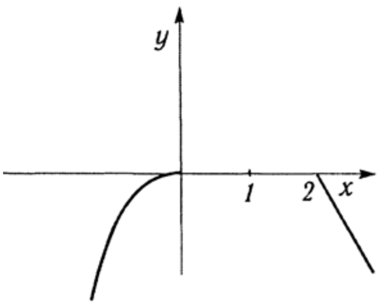


Рис. 1.2

3.5. Найти область определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$; *б)* $y = lg\,(2 - \sqrt{1-x})$; *в)* $y = arcsin\,\dfrac{1}{x-3}$;

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$; *д)* $y = \sqrt{\lg\sin x}$.

Решение. а) Выражения под знаком радикала должны быть неотрицательны, т.е. $1+x \ge 0$ и $1-\sqrt{1+x} \ge 0$. Отсюда $x \ge -1$ и $\sqrt{1+x} \le 1$; $1+x \le 1$; $x \le 0 \Rightarrow x \in [-1, 0]$.

б) Выражение под знаком логарифма должно быть больше нуля, т.е. $2 - \sqrt{1-x} > 0$; $\sqrt{1-x} < 2$; $1-x < 4$; $x > -3$ и выражение под знаком квадратного корня $1 - x \ge 0$; $x \le 1$. Поскольку неравенства должны выполняться одновременно, то $x \in (-3,1]$.

в) Выражение имеет смысл, когда $-1 \le \dfrac{1}{x-3} \le 1$ и $x \ne 3$.

Отсюда

$$\begin{cases} -x+3 \le 1; \\ 1 \le x-3; \end{cases} \Rightarrow x \ge 4.$$

г) Выражение имеет смысл при x - 1 > 0 и 5 - x > 0 . Решая эту систему неравенств, имеем x >1 и x < 5. Отсюда $x \in (1,5)$.

д) В силу свойств логарифмической и степенной функции имеем следующую систему неравенств: $\sin x > 0$ и $lg(\sin x) \ge 0$.

Решением первого неравенства на периоде 2π является множество: $0 \le x \le \pi$, которое с учетом периодичности можно записать в виде $2\pi k \le x \le \pi(1 + 2k)$, $\kappa \in z$. Так как $|\sin x| \le 1$, то второму неравенству удовлетворяет только равенство $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Таким образом, область определения функции: $x = \frac{\pi}{2}(1+4k)$, $k \in z$.

3.6. Путем деформации и сдвига графика исходной функции **построить** графики функций: а) $y = 2\sin(3x-2)$; б) $y = 1-2\sqrt{x+3}$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$; г) $y = \frac{6x-1}{2x+3}$.

Решение. а) За исходную функцию возьмем $y=\sin x$, а данную функцию представим в виде $y=2\sin 3(x - \frac{2}{3})$. В данном случае A=2; k =3; $a = \frac{2}{3}$.

1. Строим одну волну синусоиды (рис. 1.3).

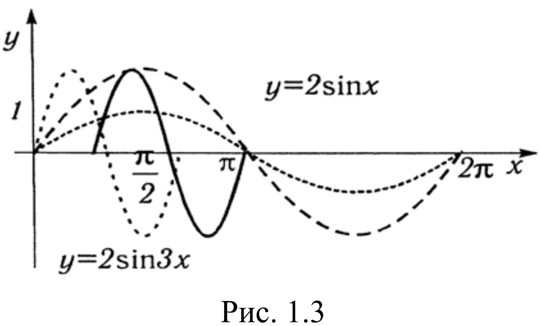


Рис. 1.3

2. Увеличиваем ординаты всех точек в два раза $y= 2\ sin\ x$.

3. Уменьшаем в три раза абсциссы точек графика и строим график функции $y = 2\ sin\ 3x$.

4. Переносим точки графика функции $y = 2sin3x$ на $\frac{2}{3}$ вправо по оси абсцисс, получаем график одной волны данной функции.

б) За исходную функцию возьмем $y = y\sqrt{x}$. В данном случае A=-2; a = -3; b = 1.

1. Строим график функции $y = y\sqrt{x}$ (рис. 1.4).

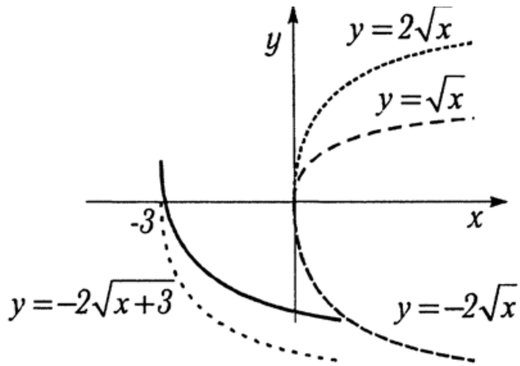


Рис. 1.4

2. Увеличивая ординаты в два раза, строим график функции y =2$\sqrt{x}$.

3. Меняем знак на противоположный y = -2$\sqrt{x}$. График этой функции симметричен графику y = 2$\sqrt{x}$ относительно оси абсцисс.

4. Переносим точки графика функции y = -2$\sqrt{x}$ на 3 единицы влево по оси абсцисс и строим график функции y = -2$\sqrt{x+3}$.

5. Поднимаем график функции y = -2$\sqrt{x+3}$ на 1 вверх и строим график данной функции.

в) Преобразуем данную функцию к виду

$$y = \frac{1}{2}(x^2-2x+1) - 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2.$$

За исходную функцию возьмем $y = x^2$. В данном случае

$$A = \frac{1}{2},\ a = 1,\ b = -2.$$

1. Строим график исходной функции $y = x^2$ (рис. 1.5).

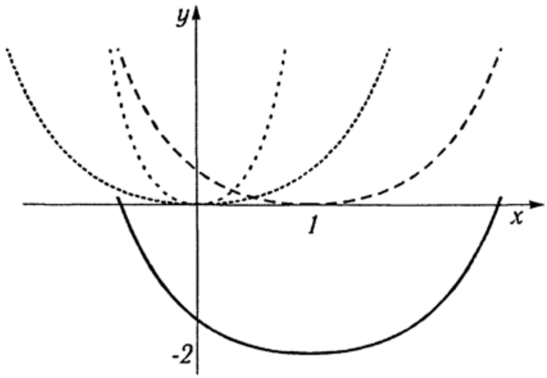


Рис. 1.5

2. Уменьшаем ординаты графика функции в два раза и строим график функции $y=\frac{1}{2}x^2$.

3.Сдвигаем по оси абсцисс на 1 единицу вправо точки графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ и строим график функции $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

4. Опускаем точки графика функции на 2 единицы вниз и строим график данной функции.

г) Преобразуем функцию к виду $y=3-\dfrac{10}{2x+3}=3-\dfrac{5}{x+\frac{3}{2}}$ и устанавливаем переход от функции $y=\dfrac{1}{x}$ к заданной: $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{5}{x}$,

$$-\frac{5}{x},\ -\frac{5}{x+\frac{3}{2}},\ 3-\frac{5}{x+\frac{3}{2}}.$$

Выполняем следующие последовательные преобразования (рис. 1.6): строим пока только одну ветвь гиперболы; растягиваем по оси Oy в пять раз; заменяем графиком, симметричным относительно оси Ox; строим вторую ветвь гиперболы; делаем горизонтальный сдвиг координатной системы на $\frac{3}{2}$ единицы вправо и вертикальный сдвиг на 3 единицы вниз.

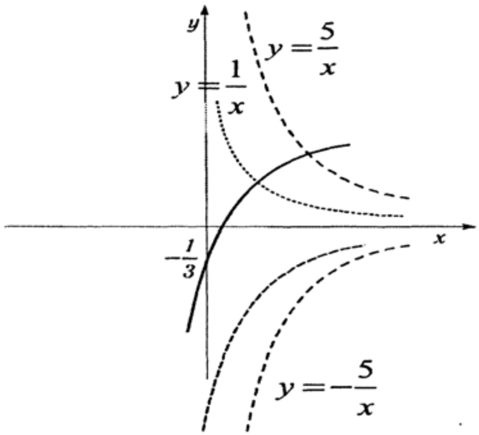


Рис. 1.6

3.7. **Показать,** что функции $y = \frac{4x-9}{2}$ и $x = \frac{9+2y}{4}$ являются взаимно обратными.

Решение. Подставим во вторую функцию вместо y его выражение через x, тогда получим $\varphi(f(x)) = \frac{9+2\frac{4x-9}{2}}{4} = x$, Аналогично, подставляя в первую функцию вместо x его выражение через y имеем $f(\varphi(y)) = \frac{-9+4\frac{9+2y}{4}}{2} = y$.

1.4. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей

1^0. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любого ε >0 найдется такое δ >0, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ как только $|x — a| < \delta$. Обозначают предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Предел функции $f(x)$, если он существует, при стремлении x к a справа обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Аналогично, предел функции при стремлении x к a слева обозначают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

2^0. *Теоремы о пределах.*

1. Предел постоянной равен самой постоянной.
2. $\lim (u + v) = \lim u + \lim v$.
3. $\lim (u v) = \lim u \cdot \lim v$.
4. $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, *если* $\lim v \neq 0$.

3^0. *Замечательные пределы.*

1. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
2. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}718....$$

4^{0}. Некоторые важные пределы:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a\,(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e\,;\quad \lim_{a\to 0}\frac{a^{\alpha}\;-1}{\alpha}=\ln a\,;$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}}{\alpha}=\mu\,;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log_a\;x}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^k\;\log_a x=0\;\;(a>1,\,\mathrm{k}>0).$$

5^{0}. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ раскрывается, как правило, делением числителя и знаменателя на множитель, стремящийся к нулю, или с помощью первого замечательного предела.

6^{0}. Неопределенность вида ($\infty-\infty$) раскрывается делением на x в старшей степени.

7^{0}. Неопределенность вида ($0\cdot\infty$) и ($\infty-\infty$) раскрывается путем преобразования функции к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или ($\infty-\infty$).

8^{0}. Неопределенность вида (1^{∞}) раскрывается посредством преобразования предела ко второму замечательному пределу.

9^{0}. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

При раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ можно пользоваться следующим правилом.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если их под знаком предела заменить на эквивалентные. Обозначая эквивалентность бесконечно малых следующим образом $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to 0$, запишем наиболее известные

$sin\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ \ln a$, $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}\alpha^2(x)$, $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$, $arcsin\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$,

$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

4.1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+6x-16}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{tgx-1}$.

Решение: а) Разложим на множители числитель и знаменатель

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+6x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+8)}.$$

Сокращая на $(x-2)$, будем иметь $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x+8}=\dfrac{4}{10}=0{,}4$.

б) Разлагаем числитель и знаменатель на множители

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{(2x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{2x-1}=-\frac{3}{3}=-1.$$

в) Поскольку при $x = 1$ многочлены в числителе и знаменателе обращаются в ноль, то их можно разложить на множители, причем одним из сомножителей будет $(x - 1)$. Тогда, деля многочлены на $(x - 1)$ получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+2x-3)}{(x-1)(x^2+5x-2)}=\frac{1+2-3}{1+5-2}=\frac{0}{4}=0.$$

г) Выполнив очевидные преобразования, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{tgx-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin 2x}$.

Решение: а) Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{3x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{6}.$$

б) Умножаем числитель и знаменатель на выражения сопряженные числителю и знаменателю

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2})}{x^2\,(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+1}=\sqrt{2}.$$

в) Делаем замену $t^6=x$, тогда при $x\to 1$, $t\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

г) Умножаем числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx})(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx})}{\sin 2x(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2tgx}{\sin 2x(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x(\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1-tgx})}=\frac{1}{2}.$$

4.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tg\frac{\pi}{2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{xtgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{8\sin^3\frac{\pi}{4}}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{6x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{tg^2 5x}$

Решение. а) Умножим и разделим знаменатель на 4 и подведем выражение под знаком предела к первому замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{4\cdot\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

б) Представим тангенс через синус и косинус и воспользуемся теоремами о пределах

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

в) По формулам половинных x углов имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{xtgx} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = 2.$$

г) Умножим и разделим числитель на 4 в кубе

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^3\left(\frac{x}{4}\right)^3}{8\sin^3\frac{x}{4}} = 8\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{\sin^3\frac{x}{4}} = 8.$$

д) Сделаем замену x-2 = t, при $x\to 2$, $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = 1.$$

е) На основании второй теоремы о пределах имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{6x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} + \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = \frac{7}{6}.$$

ж) Преобразуем числитель с помощью формул разности косинусов двух углов и синуса двойного угла $cosx - cos3x = 2sin2x\ sinx = 4sin^2x\ cosx$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x = 4\lim_{x\to 0}\cos x = 4.$$

4.4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{2+5x-2x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^5-5x+1}{6x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^3+4x^5}{4x^2+x^6}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{4n^4+3}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^n}{1+2^{n+1}}$; е) $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{10^n-1}{1+10^{n+1}}$.

Решение: а) Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^3}-2}=-\frac{3}{2},$$

т.к. величины $\dfrac{2}{x^4},\dfrac{1}{x^3},\dfrac{1}{x^2}$ есть величины при $x\to\infty$ бесконечно малые.

б) Здесь можно разделить числитель и знаменатель на x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{6}=\infty.$$

в) Деля числитель и знаменатель на x^6, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x}}{\dfrac{4}{x^4}+1}=\frac{0}{1}=0.$$

г) Здесь числитель есть сумма арифметической прогрессии.

Находя в числителе сумму арифметической прогрессии, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1+n}{2}n}{\sqrt{4n^4+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2\sqrt{4n^4+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+1}{2\sqrt{4+\dfrac{3}{n^4}}}=\frac{1}{4.}$$

д) Делим числитель и знаменатель на 2^{n+1}

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^{n+1}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

е) При $n\to-\infty$ 10^{n} и 10^{n+1} стремятся к нулю и неопределенности в пределе нет

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n}-1}{1+10^{n+1}}=\frac{0-1}{1+0}=-1.$$

4.5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg^2x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

Решение: а) Приведем к общему знаменателю

$$\lim_{x\to1}\frac{1-2(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{-2x-1}{x^2-1}.$$

При $x\to1$ знаменатель стремится к нулю, следовательно, дробь является бесконечно большой величиной и стремится к ∞.

б) Умножим и делим на сопряженное выражение

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x-1}}=0.$$

в) Раскрываем тангенс и приводим к общему знаменателю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\sin x-1)}{1-\sin^2 x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}=-\frac{1}{2}.$$

4.6. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{n}tg3^{-n}$.

Решение: а) Делаем замену $x = 1-\alpha$, тогда при $x\to1$, $\alpha\to0$

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha tg\frac{\pi}{2}(1-\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\alpha ctg\frac{\pi}{2}\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\lim_{\alpha\to 0}\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{2}{\pi}.$$

б) Полагая $3^n=\dfrac{1}{x}$, получим

$$\lim_{n\to\infty}3^n tg3^{-n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}tgx=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=1.$$

4.7. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+2}\right)^{2+3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{2x}\right)^{3-2x}$.

Решение. а) Разделим почленно числитель на x

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}.$$

Если сделать замену $x=4t$, то при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{20}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{20}=e^{20}.$$

б) Выделим целую часть и почленно разделим числитель на знаменатель

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^{1+3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{1+3x}.$$

Сделаем замену $x+1=t$. Тогда при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и предел примет вид $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{3t-2} = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-2} = e^{3}$,

т.к. второй предел неопределенности не представляет и равен единице.

в) Выделим в скобках целую часть

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+3}{x^2+2}\right)^{2+3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+2}\right)^{2+3x^2}.$$

Сделаем замену $x^2+2=3t$.

Тогда при $x\to\infty$, $t\to\infty$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{9t-4} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{9}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-4} = e^{9}.$$

г) Представим предел в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{2}\right]^{3-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3-2x}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}.$$

В первом пределе сделаем замену - $\dfrac{1}{x}=$ t. Тогда при $x\to\infty$,

$t\to 0$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}\left[\left(1+t\right)^{\frac{2}{t}+3}\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{2^3} = e^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2^{2x}}{8} = \infty.$$

4.8. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^2}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{3x}-1}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2tg^2x)^{ctg^2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln x-\ln(x+2))$.

Решение. а) Сделаем замену $5x = t$ при $x\to 0$, $t\to 0$ предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{10}{t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{10} = e^{10}$$

б) Сделаем преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^2}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = 2\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= 2\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2\ln e = 2\,.$$

в) Полагая $e^{-x} - 1 = t$, получим, что при $x\to 0$, $t\to 0$.

$$e^{x} = \frac{1}{t+1},\quad x = \ln\frac{1}{t+1}\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)^{-1}} = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = -\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}} = -1\,.$$

г) Полагая $a^{3x} - 1 = t$, получим, что при $x\to 0$, $t\to 0$. Преобразуем замену

$$a^{3x} = t+1;\ 3x\ln a = \ln(t+1);\ x = \frac{\ln(t+1)}{3\ln a}.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to 0}\frac{3t\ln a}{\ln(t+1)} = 3\ln a\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = 3\ln a\,.$$

Решение этого примера можно найти и более простым путем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}3\frac{a^{3x}-1}{3x} = 3\ln a\,.$$

д) Делаем замену $\operatorname{tg}^2 x = \mathrm{t}$. При $x \to 0$, $t \to 0$ и предел примет вид

$$\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right]^2 = e^2.$$

е) Делаем замену $\sin 2x = 1+t$. При $x \to \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{t} \to 0$.

Представим

$$\operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x} = \frac{(1+t)^2}{1-(1+t)^2} = -\frac{(1+t)^{\ 2}}{t(2+t)}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-\frac{(1+t)}{2+t}2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

ж) Сделаем следующие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\sin 2x-\sin x}-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\sin 2x-\sin x}-1)(\sin 2x-\sin x)}{x(\sin 2x-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2-1 = 1.$$

з) Воспользовавшись свойствами логарифмов, имеем

$$\lim_{x\to\infty} xx(\ln x - \ln(x+2)) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-x} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x} = \ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{-2} = \ln e^{-2} = -2.$$

4.9. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Неопределенность вида 0°. Обозначая функцию под знаком предела за y и логарифмируя, будем иметь

$$\ln y = \sin x \ln x = \frac{\sin x}{x} x \ln x$$

Отсюда, на основании пункта 4, имеем

$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0,$ следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = 1.$

б) Неопределеность вида ∞^0. Обозначая функцию под знаком предела за y и логарифмируя, будем иметь

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln\ln x.$$

Отсюда на основании пункта 4° имеем

$$\lim_{x\to +\infty} \ln y = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

4.10. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(e^{2x^3} - 1\right)\sin 3x}{\ln\left(1 - 3x^2\right)\left(1 - \cos 2x\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + \sin x} - 1\right) arctg 3x}{\left(e^{tgx} - 1\right) arctg 2x}$.

Решение. а) Так как при $x \to 0$, $2x^3 \to 0$, $3x \to 0$,

$-3x^2 \to 0$, и $2x \to 0$, имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Заменяя исходные бесконечно малые эквивалентными, получим

$$\frac{\lim}{x\to 0}\frac{\left(e^{2x^3}-1\right)\sin 3x}{\ln\left(1-3x^2\right)\left(1-\cos 2x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3 3x}{-3x^2\cdot\frac{1}{2}\left(2x\right)^2}=-1\,.$$

б) При $x\to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Заменяем исходные бесконечно малые эквивалентными и упрощаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-1)arctg3x}{\left(e^{tgx}-1\right)arctg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x\cdot 3x}{tgx\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\cos x=\frac{3}{4}.$$

1.5. Непрерывность и точки разрыва функции

1^0. Если аргумент функции получает приращение $\Delta x=x_2-x_1$, то значение функции при новом значении аргумента равно $f(x+\Delta x)=\text{y}+\Delta\text{y}$. Отсюда приращение функции $\Delta\text{y}=f(x+\Delta x)-f(x)$, т.е. приращение функции равно разности наращенного значения функции (при наращенном значении аргумента) и начального значения функции. Приращение аргумента может быть не только положительным, но и отрицательным числом.

2^0. Определение непрерывности функции:

1. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a,$ если пределы слева и справа равны и равны значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a).$$

2. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a,$ если она определена в этой точке и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ вблизи точки a. Сумма,

разность и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3^0. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает любое промежуточное значение между ее наименьшим m и наибольшим M значением, то есть $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a,b]$. Отсюда следует, что если в граничных точках отрезка $[a,b]$ функция имеет разные знаки, то внутри отрезка есть, по крайней мере, одно такое значение $x = c$, при котором функция обращается в ноль. Это свойство непрерывности функций позволяет находить приближенно корни многочленов.

4^0. Значения аргумента, которые не удовлетворяют условиям непрерывности, называются точками разрыва функции. При этом различают два рода точек разрыва функции.

Если при $x \to a$ слева функция имеет конечный предел k_1, а при $x \to a$ справа функция имеет конечный предел k_2 и $k_1 \neq k_2$, то говорят, что функция при $x \to a$ имеет *разрыв первого рода.* Разность $|k_1 - k_2|$ определяет скачок функции в точке $x = a$. Значение функции при $x = a$ при этом может быть равно какому угодно числу k_3.

Если значение функции при $x = a$ равно k_1, то говорят, что функция непрерывна слева; если же k_2, то говорят, что функция непрерывна справа.

Если $k_1 = k_2 \neq k_3$, то говорят, что функция имеет в точке a *устранимый разрыв.*

Если при $x \to a$ справа или слева, предел функции не существует или равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то говорят, что при $x = a$ функция имеет *разрыв второго рода.*

5.1. Найти приращение функции $y = 2x^3 - 3x + 1$, если аргумент x изменился от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$.

Решение. Найдем приращение аргумента

$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$. Вычислим исходное значение функции

$$y(x_1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1 + 1 = 0.$$

Вычислим новое значение функции

$$y(x_1 + \Delta x) = y(1+1) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 11.$$

Отсюда приращение функции

$$\Delta y = y(x_1 + \Delta x) - y(x_1) = 11.$$

5.2. Найти приращение функции $y=3x^2-2x+4$ и вычислить его при $x = 2$ и $\Delta x = -0{,}1$.

Решение. Новому значению аргумента $x+\Delta x$ соответствует новое значение функции

$$y(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 4.$$

Приращение функции равно $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) =$ $= 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 4 - 3x^2 - 2x - 4 = (3\Delta x + 6x - 2)\Delta x$. При $x = 2$ и $\Delta x = -0{,}1$ получим $\Delta y = (-0{,}3 + 12 - 2)(-0{,}1) = 0{,}97$.

5.3. Найти множество значений x, при которых функция $y = x^3 - 2x$ непрерывна.

Решение. Найдем приращение функции

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x) - (x^3 - 2x) = \Delta x(\Delta x^2 + 3x\Delta x + 3x^2 - 2).$$

При любых значениях x приращение $\Delta y \to 0$, если только $\Delta x \to 0$, поэтому функция непрерывна при всех действительных значениях x.

5.4. Доказать непрерывность функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ в точке $x = 3$.

Решение. Для доказательства найдем приращение функции y при переходе значения аргумента от $x = 3$ к $x = 3 + \Delta x$

$$\Delta y = \frac{1}{3+\Delta x - 1} - \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2+\Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 2 - \Delta x}{2(2+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}.$$

Найдем предел приращения функции при $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2(2+\Delta x)} = 0.$$

Так как предел приращения функции при $\Delta x \to 0$ равен нулю, то функция при $x = 3$ непрерывна.

5.5. Найти приближенно хотя бы один корень уравнения

$$3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0.$$

Решение. Найдем точку пресечения графика функции $y=3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ с осью *Ox,* то есть точку, в которой $y = 0$.

Подберем две произвольные точки, в которых функция имеет разные знаки. Пусть $x =0$, тогда $y = - 1$, $y < 0$. При $x = 1$, $y = 3 + 2 - 1 - 1 = 3$, $y > 0$. Значит, корень находится между $x= 0$ и $x = 1$ (в силу свойства непрерывности).

Определим знак функции в середине промежутка [0,1], т. е. при $x =0{,}5$.

Находим $y=3\cdot 0{,}5^3+2\cdot 0{,}5^2-0{,}5-1=-0{,}625$; $y < 0$. Значит, корень находится между $x = 0{,}5$ и $x = 1$.

Определим знак функции в середине этого промежутка, т.е. при $x = \dfrac{3}{4}$. Находим $y = 3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 + 2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{3}{4} - 1 = \dfrac{41}{64}$.

Следовательно, корень находится внутри промежутка $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$. Находим знак функции в середине этого промежутка, т.е. при $x = \dfrac{5}{8}$, $3\left(\dfrac{5}{8}\right)^3 + 2\cdot\left(\dfrac{5}{8}\right)^2 - \dfrac{5}{8} - 1 = \dfrac{213}{192} = \dfrac{71}{64} > 0$.

Значит, корень находится внутри промежутка $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$. Можно уже считать, что $x = \dfrac{9}{16}$. Если требуется большая точность, то указанный процесс приближений может быть продолжен дальше.

5.6. Определить характер разрыва функций: а) $y=\dfrac{1}{x-1}$ при $x = 1$; б) $y=\dfrac{x}{|x|}$ при $x = 0$; в) $y=\begin{cases} 2x, & при \quad x \neq 2, \\ 1, & при \quad x = 2. \end{cases}$

г) $y=a^{\frac{1}{x}}$ (a>1); д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ и построить графики.

Решение. а) При $x = 1$ функция не определена:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1} = +\infty .$$

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 1.7).

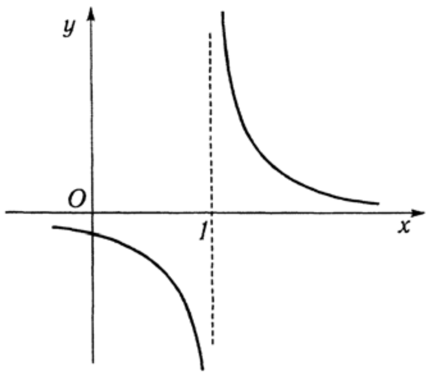


Рис. 1.7

б) При $x<0$ предел равен $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{|x|} = -1 = k_1$, при $x > 0$ предел равен $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{|x|}=1 = k_2$. Следовательно, при $x = 0$ функция имеет разрыв первого рода и скачок функции равен $|k_1 - k_2| = |-1-1| = 2$ (рис. 1.8).

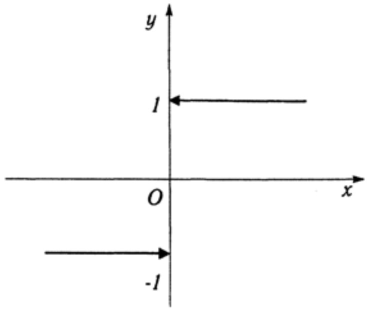


Рис. 1.8

в) Функция определена на всей числовой оси, неэлементарная, так как в точке $x = 2$ аналитическое выражение функции меняется.

Исследуем непрерывность функции в точке $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2-0} 2x = 4$, $\lim\limits_{x\to 2+0} 2x = 4$, y(2)=1, $k_1 = k_2 \neq k_3$.

Очевидно, что в точке $x = 2$ функция имеет устранимый разрыв (рис. 1.9).

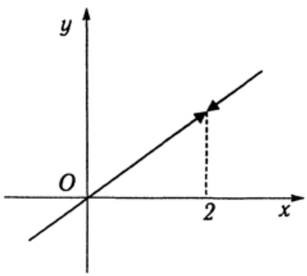


Рис. 1.9

г) Найдём пределы:

$$y(+0) = \lim_{x\to +0} a^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad y(-0) = \lim_{x\to -0} a^{\frac{1}{x}} = 0.$$

В точке x=0 справа функция имеет разрыв второго рода, а слева — непрерывность (рис. 1.10).

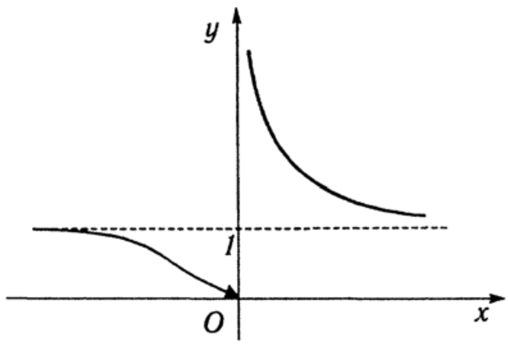


Рис. 1.10

д) Найдем пределы:

$y(+0) = \lim\limits_{x\to+0} arctg\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad y(-0) = \lim\limits_{x\to-0} arctg\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

В точке x=0 с обеих сторон скачки (рис. 1.11).

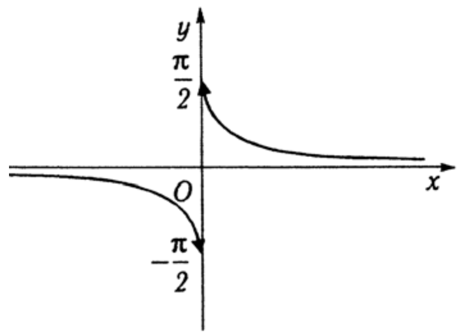


Рис. 1.11

5.7. Дана функция $y = \dfrac{1}{x^2+4x-5}$, и три значения аргумента $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Выяснить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x? Сделать чертеж.

Решение. Исследуем непрерывность функции в точке $x = -5$**:**

$$\lim_{x\to-5-0}\frac{1}{x^2+4x-5} = \infty, \quad \lim_{x\to-5+0}\frac{1}{x^2+4x-5} = -\infty.$$

Следовательно, при $x_1 = -5$ функция имеет разрыв второго рода (рис. 1.12).

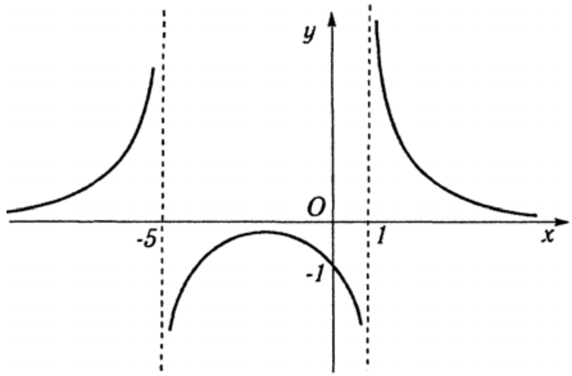


Рис. 1.12

При $x_2 = 0$ пределы слева и справа равны:

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2+4x-5} = -1/5, \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2+4x-5} = -1/5, \; y(0) = -1/5,$$

следовательно, функция в этой точке непрерывна.

Исследуем непрерывность функции в точке $x_3=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x^2+4x-5} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2+4x-5} = \infty.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция имеет разрыв второго. Точки $x = 1$ и $x = -5$ являются вертикальными асимптотами.

5.8. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и сделать чертеж:

а) $y=\begin{cases} x^2, x \le 1; \\ 1, 1 < x \le 3; \\ -x+5, x > 3; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 2^x, x \le -1; \\ x+1, -1 < x \le 0; \\ \cos x, x > 0. \end{cases}$

в) $y=\begin{cases} 3, x = 0 \text{ и } x = \pm 3; \\ 9-x^2, 0 < |x| \le 3; \\ 9, \quad |x| > 3. \end{cases}$ г) $y=\begin{cases} 2x-1, x < 0; \\ \dfrac{1}{x-1}, x \ge 0. \end{cases}$

Решение. а) Функция неэлементарная, так как задана тремя аналитическими выражениями на различных промежутках изменения аргумента, определена на всем множестве действительных чисел.

Исследуем непрерывность функции в точках $x = 1$ и 34
$x = 3$: $y(1) = \lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$; $y(3) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3+0} (-x + 5) = 2 = k$.

Таким образом, в точке x = 1 функция непрерывна, а в точке x = 3 терпит разрыв первого рода (рис. 1.13) и имеет скачок, равный $|y(3) - k| = |1 - 2| = 1$.

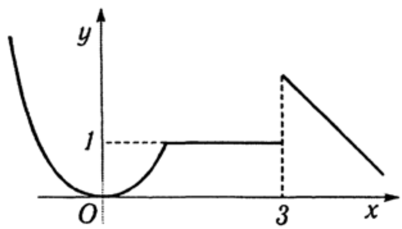


Рис. 1.13

б) Функция определена на всем множестве чисел и неэлементарная.

Исследуем непрерывность функции в точках x = -1 и x = 0:

$$y(-1) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to -1+0} (x + 1) = 0; \quad y(0) = 1; \quad \lim_{x \to +0} \cos x = 1.$$

Таким образом, функция в точке x = -1 имеет разрыв первого рода, а в точке x = 0 непрерывна (рис. 1.14).

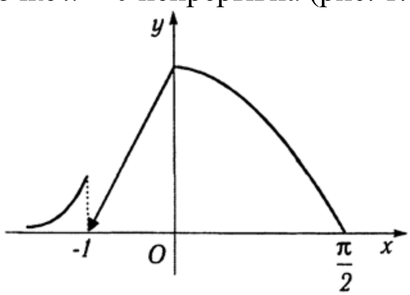


Рис. 1.14

в) Функция определена на всей числовой оси, неэлементарная.

Исследуем непрерывность функции в точках $x = -3$, $x=0$, $x= 3$:

$$y(-3)=3,\ \lim_{x\to -3+0}(9-x^2)=0;\ y(-3-0)=9;$$

$$y(0)=3,\ \lim_{x\to -0}(9-x^2)=9;\ \lim_{x\to +0} y(9-x^2)=9;$$

$$y(3)=3,\ \lim_{x\to 3-0}(9-x^2)=0;\ y(3+0)=9.$$

Таким образом, функция в точках $x = -3$ и $x = 3$ имеет разрывы первого рода, а в точке $x=0$ устранимый разрыв (рис. 1.15).

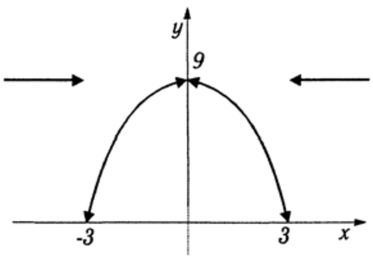


Рис.1.15

г) Функция неэлементарная и определена везде кроме точки $x = 1$. Исследуем непрерывность функции в точках $x = 0$ и $x = 1$:

$$\lim_{x\to -0}(2x-1)=-1,\ y(0)=-1,\ \lim_{x\to -0}\frac{1}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Таким образом, функция в точке $x = 0$ непрерывна, а в точке $x = 1$ имеет разрыв второго рода (рис. 1.16).

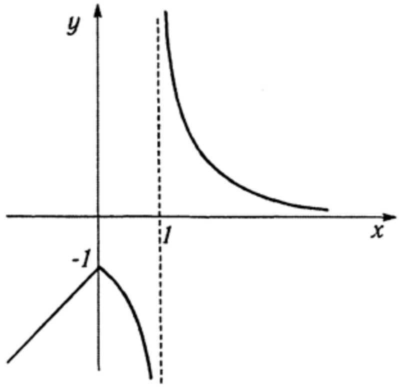


Рис. 1.16

5.9. Найти точки разрыва функции и построить график в окрестности точек разрыва: а) $f(x)=\frac{2|x+1|}{x^2-x-2}$; б) $f(x)=3^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Решение. а) Приравнивая знаменатель к нулю, находим корни и преобразуем выражение

$$f(x)=\frac{2|x+1|}{x^2-x-2}=\frac{2|x+1|}{(x+1)(x-2)}.$$

Функция не определена в точках $x=-1$ и $x=2$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы. Находим односторонние пределы для точки $x=-1$:

1. При $x \to -1-0$, $x+1<0$ и, следовательно, $|x+1|=-(x+1)$.

Отсюда $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)2}{(x+1)(x-2)}=-2\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{1}{x-2}=\frac{2}{3}$.

2. При $x \to -1+0$ $x+1>0$, $|x+1|=x+1$ и

$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=2\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{1}{x-2}=-\frac{2}{3}$.

Поскольку оба предела конечны и не равны, то точка $x=-1$ — точка разрыва первого рода.

Находим скачок функции (рис. 1.17)

$$\delta = f(-1+0) - f(-1-0) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$

В окрестности точки x=2 $x+1>0$, следовательно, $|x+1| = x+1$ и односторонние пределы будут

$$f(2\text{-}0) = \lim_{x \to 2-0} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = 2 \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

$$f(2\text{+}0) = \lim_{x \to 2+0} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = 2 \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = \infty.$$

Таким образом, точка x=2—точка разрыва второго рода.

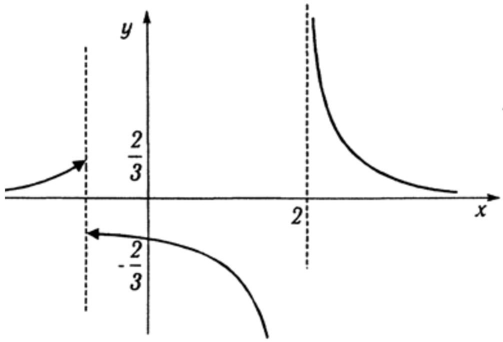


Рис. 1.17

б) Данная показательная функция не определена в точках x= -1 и x= 1 и, следовательно, имеет в этих точках разрывы.

Найдем односторонние пределы, учитывая, что $a > 1$, то есть $a^{'} \to +\infty$ при $t=+\infty$ и $a^{'} \to 0$ при $t \to -\infty$.

1. Для точки $x = -1$ при $x \to -1-0$, $x^2 - 1 > 0$, $\dfrac{x}{x^2-1} < 0$ и $\dfrac{x}{x^2-1} \to -\infty$. Отсюда $f(-1\text{-}0) = \lim\limits_{x \to -1-0} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = 0$.

При $x \to -1+0$, $x^2-1<0$, $\dfrac{x}{x^2-1} < 0$, $и$ $\dfrac{x}{x^2-1} \to \infty$.

Следовательно, $f(-1+0) = \lim\limits_{x \to -1+0} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty$.

Таким образом, точка $x = -1$ —точка разрыва второго рода.

2. Рассмотрим точку $x = 1$. Находим пределы

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = 0, \quad f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty,$$

функция в точке $x = 1$ имеет также разрыв второго рода.

Найдем теперь пределы при $x \to \pm\infty$.

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = 1, \quad f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} 3^{\frac{x}{x^2-1}} = 1.$$

График функции показан на рис. 1.18.

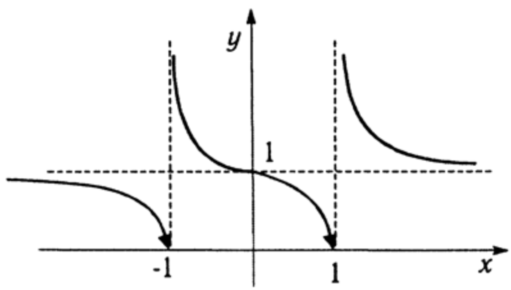


Рис. 1.18

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Вычисление производных

1^0. *Производной* от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция называется *дифференцируемой* в точке x_0.

Производная обычно обозначается y' или y'_x, или $f'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$. Нахождение производной называется *дифференцированием функции.*

Частное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'\big|_{x=a}$.

Геометрически производная $y'(x_0)$ функции $y = f(x)$ представляет угловой коэффициент $k = tg\alpha = y'(x_0)$ касательной к графику этой функции в точке x_0 (рис.2.1).

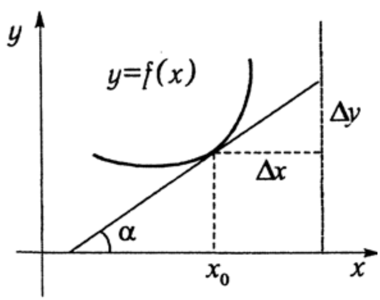


Рис. 2.1

Числа $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ называются соответственно *левой и правой производными* функции $y = f(x)$ в точке x_0. Для существования производной функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и были равны между собой: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Если существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = M$, то такова же будет и производная в точке x_0 справа (слева).

Если в точке x_0 производная не определена, но функция имеет различные односторонние пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, то в этой точке графика функции существуют две различные с соответствующими угловыми коэффициентами k_1, k_2 односторонние касательные, составляющие угол (рис. 2.2), а точка называется *угловой.*

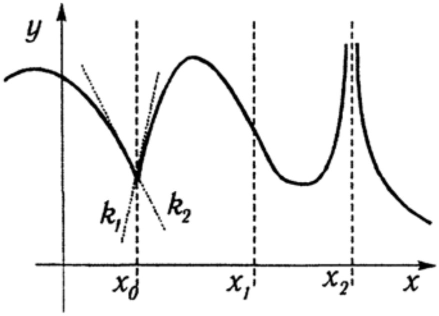


Рис. 2.2

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_1)}{\Delta x} = \pm\infty$, то есть функция имеет бесконечную производную, то она не дифференцируема в этой точке. В этом случае график функции имеет вертикальную касательную *(точка перегиба).*

Если в точке x_2 функция имеет бесконечные односторонние производные разных знаков, то график функции имеет две слившиеся вертикальные касательные (точка возврата с вертикальной касательной (рис. 2.2)).

2^0. Основные правила дифференцирования:

1. $(Cu)' = Cu'$; 2. $(u+v)' = u' + v'$;

3. $(uv)' = u'v + v'u$; 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

где u, v — некоторые функции от x, а C - постоянная величина.

3^0. Таблица производных основных функций:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2. $y = C$, $y' = 0$;
3. $(\sin x)' = \cos x$; 4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 6. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a>0$; 8. $(e^x)' = e^x$;
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a \neq 1$, $a>0$; 10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
15. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$; 16. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;
17. $(\mathrm{th})' = \frac{1}{ch^2 x}$; 18. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$;

4^0. Гиперболический синус, косинус, тангенс и котангенс определяются выражениями

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ th\ x = \frac{shx}{chx};\ cth\ x = \frac{chx}{shx}$$ и

обладают свойствами:

1. $ch^2 x - sh^2 x = 1$; 2. $ch^2 x - sh^2 x = ch2x$;
3. $sh2x = 2shxchx$; 4. $sh0 = 0$; $ch0 = 1$.

5^0. Производная от сложной функции *$y = f(u)$,* где *$u = u(x)$,* равна произведению производной от этой функции по промежуточному аргументу *u* на производную от промежуточного аргумента *u* по независимой переменной *x*, т. е. $y' = f'_u u'_x$.

1.1. Пользуясь только определением производной, ***найти*** производные от функций:

а) $y=x^2 - 3x + 5$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \mathrm{tg}2x$.

Решение. а) Находим приращение функции

$\Delta y = y(x+\Delta x) - y = (x + \Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 5 - x^2 +3x -5= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x -3\Delta x+5 - x^2 +3x -5 = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x$.

По определению производной имеем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x - 3 + \Delta x\right) = 2x - 3.$$

б) Приращение функции равно: $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$.

По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

в) Находим приращение функции

$$\Delta y = \mathrm{tg}(2x + 2\Delta x) - \mathrm{tg}2x =$$

$$= \frac{\sin(2x + 2\Delta x)\cos 2x - \sin 2x\cos(2x + 2\Delta x)}{\cos(2x + 2\Delta x)\cos 2x} =$$

$$= \frac{\sin(2\Delta x)}{\cos(2x + 2\Delta x)\cos 2x}.$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(2\Delta x)}{\Delta x \cos(2x + 2\Delta x)\cos 2x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\cos(2x + 2\Delta x)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}.$$

1.2. Найти производные функций:

а) $y = |x|$, $(x \neq 0)$; *б)* $y = |2x-3|$; *в)* $y = e^{2|x|}$;

г) $y = |x + 1| + |x - 1|$.

Решение. *а*) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} x, & x > 0; \\ -x, & x < 0; \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 1, \ x > 0; \\ -1, \ x < 0. \end{cases}$$

Следует заметить, что функция $y = |x|$ не имеет производной в точке x_0, так как $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, а $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

б) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} 2x - 3, & x > 0; \\ -2x + 3, & x < 0, \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 2, \ x > \dfrac{3}{2}; \\ -2, \ x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

в) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} e^{2x}, & x > 0; \\ e^{-2x}, & x < 0. \end{cases}$$

В этом случае производная будет

$$y' = \begin{cases} 2e^{2x}, & x > 0; \\ -2e^{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

г) Представим функцию в виде

$$y = \begin{cases} 2x, & x > 1; \\ 2, & -1 < x < 1; \\ -2x, & x < -1, \end{cases}$$

тогда

$$y' = \begin{cases} 2, & x > 1; \\ 0, & -1 < x < 1; \\ -2, & x < -1. \end{cases}$$

1.3. Найти производные $y'_-(x_0)$, $y'_+(x_0)$ для функций:

а) $y = \begin{cases} x, & x \le 1; \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases}$ $\quad x_0 = 1;$

б) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}, \quad x_0 = 0;$

в) $y = |2 - x| + |2 + x|, \quad x_0 = \pm 2.$

Решение. а) Находим производную

$$y' = \begin{cases} 1, & x \le 1; \\ -2x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

и вычислим пределы производной слева и справа в точке $x_0 = 1$:

$$y'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} 1 = 1, \quad y'_+ = \lim_{x \to 1+0} (-2x + 2) = 0.$$

б) Находим производную $y' = \dfrac{x}{e^{x^2}\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$ и вычислим пределы производной слева и справа в точке x_0:

$$y'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}\sqrt{e^{x^2} - 1}} = -1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}\sqrt{e^{x^2}-1}}=1.$$

Касательные к кривой в точке $x_0 = 0$ показаны на рис. 2.3.

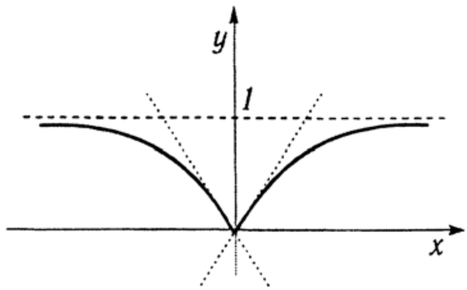


Рис. 2.3

в) Представим заданную функцию в виде

$$y=\begin{cases}-2x, & x\in\,]-\infty,-2];\\ 0, & x\in\,]-2,2];\\ 2x, & x\in\,]2,\infty[\end{cases}$$

и найдём производную

$$y'=\begin{cases}-2, & x\in\,]-\infty,-2];\\ 0, & x\in\,]-2,2];\\ 2, & x\in\,]2,\infty[.\end{cases}$$

1.4. Найти производные: а) $y=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{x^2}+4\sqrt{x}-5$;

б) $y = x^3 cos\, x$; в) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; г) $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$**,**

вычислить $f'(0),\ f'(1),\ \ f'(-1)$.

Решение. а) Преобразуем функцию к виду, удобному для дифференцирования. Пользуясь основными правилами дифференцирования и таблицей производных, имеем

$$y=\frac{1}{2}x^3-3x^{-2}+4x^{\frac{1}{2}}-5,$$

$$y'=\frac{3}{2}x^2+6x^{-3}+2x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}x^2+\frac{6}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

б) Здесь имеет место случай произведения двух функций, поэтому

$$y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'=3x^2\cos x-x^3\sin x.$$

в) Поскольку имеет место частное двух функций, то

$$y'=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

г) Находим производную $f'\{x) = x^2 - 2x$ и вычисляем ее значения в точках $x=0$, $x = 1$, $x = -1$, т. е. находим частные значения производной в этих точках:

$$f'(0)=0,\quad f'(1)=-1,\quad f'(-1)=3.$$

1.5. Найти производные: а) $y=\ln\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}$;

б) $y=\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; в) $y=\log_2\sqrt[3]{tg^2 2x}$;

г) $y=\ln^3\cos\frac{x}{3}$.

Решение. а) Упростим логарифмируемое выражение

$y=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2=2\ln\frac{x-2}{x+2}$. Полагая $y = 2\ln u$, $u=\frac{x-2}{x+2}$, применяем правило дифференцирования сложной функции

$$y'=2(\ln u)'_u\cdot u'_x=2\frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{(x-2)'(x+2)-(x-2)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{8}{x^2-4}.$$

б) Полагая $y = \ln u$, где $u=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$, имеем

$y'=2(\ln u)'_u\cdot u'_{\text{x}}=$

$$= \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1-x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{2}\frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

в) Упростим логарифмируемое выражение

$$y = \log_2 tg^{\frac{2}{3}} 2x = \frac{2}{3}\log_2 tg 2x.$$

Дифференцируем как сложную функцию

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{tg 2x \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sin 4x \ln 2}.$$

г) Дифференцируем как сложную функцию

$$y' = 3\ln^2 \cos\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{\cos\frac{x}{3}}(-\sin\frac{x}{3}) \cdot \frac{1}{3} = -tg\frac{x}{3}\ln^2 \cos\frac{x}{3}.$$

1.6. Найти производные: а) $z = xe^{\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}}$;

б) $y = e^{-3x}(\sin 3x + \cos 3x)$; в**)** $z = \ln\sqrt{\dfrac{1-2^x}{1+2^x}}$;

г) $y = e^{\sin^3 x} + 5^{\sqrt[5]{x}}$.

Решение. а) Дифференцируем как сумму сложных функций $z' = e^{\frac{x}{a}} + xe^{\frac{x}{a}} \cdot \dfrac{1}{a} + ae^{-\frac{x}{a}}\left(-\dfrac{1}{a}\right) = e^{\frac{x}{a}}\left(1+\dfrac{x}{a}\right) - e^{-\frac{x}{a}}$.

б) Дифференцируем как произведение сложных функций

$$y' = e^{-3x}(-3)(\sin 3x + \cos 3x) + e^{-3x}(\cos 3x \cdot 3 + (-\sin 3x) \cdot 3) =$$

$$= -6e^{-3x}\sin 3x.$$

в) Упростим функцию $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$.

Находим производную как от сложной функции

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2^x}{1-2^x} - \frac{2^x \ln 2(1+2^x) + (1-2^x)2^x \ln 2}{(1+2^x)^2} = \frac{2^x \ln 2}{2^{2x}-1}.$$

г) Дифференцируем как сумму сложных функций

$$y' = e^{\sin^3 x} \cdot 3\sin^2 x \cos x + 5^{\sqrt[3]{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} =$$

$$= 3e^{\sin^3 x} \cdot \sin^2 x \cos x + 5^{\sqrt[3]{x}-1} \cdot x^{-\frac{4}{5}} \cdot \ln 5.$$

1.7. Найти производные: а) $y = arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

б) $u = \arcsin\sqrt{1-4t}$; в) $r = arccos\ \frac{2-3\varphi}{4}$; г) $y = 3arctge^{-\frac{x}{3}}$.

Решение. а) Находим производную как от сложной функции $y' = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

б) Производная равна

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-4t)}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-4)}{\sqrt{1-4t}} = -\frac{1}{\sqrt{t(1-4t)}}.$$

в) Производная равна

$$r' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2-3\varphi}{4}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{4+4\varphi-3\varphi^2}}.$$

г) Производная равна

$$y' = 3\frac{(-1)}{1+e^{-\frac{2x}{3}}} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{1+e^{-\frac{2x}{3}}}.$$

1.8. Найти производные: а) $y = sh^2\frac{x}{2} + ch^2\frac{x}{2}$;

б) $y = thx+cthx$.

Решение. а) Дифференцируем как сумму

$$y' = 2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2ch\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = shx.$$

б) Дифференцируя как сумму и пользуясь свойствами гиперболических функций, имеем

$$y' = \frac{1}{ch^2x} - \frac{1}{sh^2x} = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2xch^2x} = -\frac{4}{sh^2 2x}.$$

1.9. Найти производные:

а) $y = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ \ln(1+x^2), & x \ge 0 \end{cases}$, **б)** $y = \begin{cases} xe^{-x}, & |x| \le 0; \\ \frac{1}{e}, & |x| > 0 \end{cases}$,

в) $y = \begin{cases} 2-x, & -1 < x < 2; \\ x^2 - 5x + 6, & 2 \le x \le 3; \\ x-3, & 3 < x < 4, \end{cases}$

построить график функции и производной.

Решение. а) Поскольку функция на разных участках имеет различный вид, то для этих участков

$$y' = \begin{cases} 2x, & x < 0; \\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x \ge 0. \end{cases}$$

б) Находим производную на разных участках

$$y' = \begin{cases} e^{-x}(1-x), & |x| \le 0; \\ 0, & |x| > 0. \end{cases}$$

в) Находим производную на разных участках

$$y' = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le 2; \\ 2x - 5, & 2 \le x \le 3; \\ 1, & 3 < x < 4. \end{cases}$$

Строим график функции и график производной (рис.2.4).

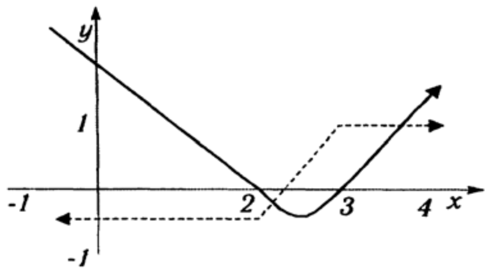


Рис. 2.4

1.10. Найти производные: а) y= |sinx|; б) y= |arctgx|.

Решение. а) График функции y = |sinx| показан на рис. 2.5.

Если $x \in (\pi k, \pi(k+1))$, то данную функцию можно записать в виде $y = sin(x - \pi k)$. Отсюда производная $y' = \cos(x - \pi k)$.

Если $x = \pi k$, то $y'_-(\pi k) = \lim\limits_{x \to \pi(k+1)-0} \cos(x - \pi k) = -1$,

$y'_+(\pi k) = \lim\limits_{x \to \pi k+0} \cos(x - \pi k) = 1$.

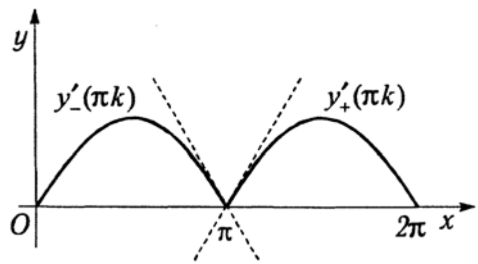


Рис. 2.5

б) Представим график функции $y = |arctgx|$ на рис. 2.6 и запишем функцию в виде $y = \begin{cases} arctgx, \ x \ge 0; \\ -arctgx, \ x < 0. \end{cases}$

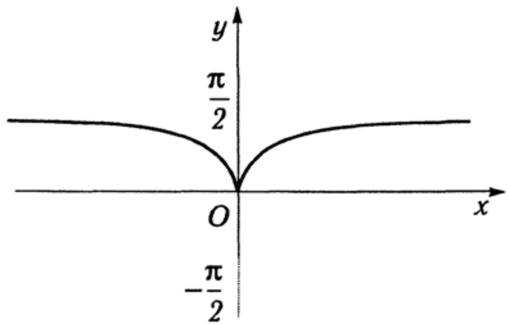


Рис. 2.6

Производная для различных участков будет

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \geq 0; \\ -\dfrac{1}{1+x^2}, \ x < 0, \end{cases}$$

производная слева $\quad y'_-(0) = \lim\limits_{x\to -0}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right) = -1$;

справа $\quad y'_+(0) = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{1+x^2} = 1.$

1.11. Найти производные функций, обратных к заданным:
а) $y = \mathrm{sh}\, x$; б) $y = \mathrm{ch}\, x$; в) $y = \mathrm{th}\, x$; г) $y = \mathrm{cth}\, x$.

Решение. а) По правилу дифференцирования обратной функции получим

$$(Arshy)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{chx} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2x}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

отсюда, переходя к обычным обозначениям, имеем

$$(Arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

б) По правилам дифференцирования обратной функции

имеем $(Archy)' = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{shx} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$, откуда $(Archx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (|x|>1).$

в) производная обратной функции равна $(Arthy)' = \dfrac{1}{y'_x} = ch^2 x = \dfrac{1}{1-tg^2 x} = \dfrac{1}{1-y^2},$

откуда $(Arthx)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad (|x|<1).$

г) производная обратной функции равна $(Arcthy)' = \dfrac{1}{y'_x} = -sh^2 x = -\dfrac{1}{ctg^2 x-1} = -\dfrac{1}{y^2-1},$

откуда $(Arcthx)' = -\dfrac{1}{x^2-1}, \quad (|x|>1).$

1.12. Пользуясь результатами предыдущего примера, ***найти*** производные: а) y = Archln x; б) $y = \mathrm{Arcth}\,\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Решение. а) По правилу дифференцирования сложных функций имеем $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\ln^2-1}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}.$

б) Функция сложная, поэтому

$$y' = -\frac{1}{\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}.$$

2.2. Производные функций, не являющихся явно заданными

1⁰. Пусть функция *y* задана уравнением *f(x,y) = 0*, не разрешенным относительно *y,* то есть *y* есть неявная функция от *x*.

Чтобы найти производную от неявной функции *y* аргумента *x* дифференцируем по *x* обе части этого равенства, считая *y* функцией *x.* Из полученного равенства определяем искомую производную y', которая, как правило, будет зависеть от x и y

$$y' = \varphi\ (x\ ,y).$$

2⁰. Если функциональная зависимость между переменными x и y задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то производная от y по x: равна $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, а от x по y: $x'_y = \dfrac{x'_t}{y'_t}$.

3⁰. ***Логарифмическое дифференцирование.*** Если $y = u^v$, то $y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$, т. е. производная показательно-степенной функции состоит из двух слагаемых: первое получается, если рассматривать функцию при дифференцировании как степенную, второе как показательную.

4⁰. Если основание логарифма $log_v\ u$ является некоторой функцией x, то при нахождении производной целесообразно перейти к натуральным логарифмам

$$y = \log_v u = \frac{\ln u}{\ln v},\ u=u(x),\ v=v(x).$$

2.1. Найти производные y'_x : а) $y = cos(x+y)$;

б) $e^y + 4xy - x^2 = 1$**;** и производные $\boldsymbol{x'_y}$**:** в) $x\ln y - y\ln x = 1$;

г) $x^2y^2 - 4\ln y = 2\ln x$.

Решение. а) Дифференцируем обе части по x, считая y сложной функцией, зависящей от x

$y' = -sin(x+y)(1+y') = -sin(x+y) - y' sin(x+y)$.

Откуда $y'\ (1 + sin(x + y)) = -\ sin(x+y)$

или $$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

б) Дифференцируя обе части равенства по x, получим

$$e^y y' + 4(y+xy') - 2x = 0.$$

Разрешая равенство относительно y', получим

$$y' = \frac{2(x-2y)}{e^y + 4x}.$$

в) Дифференцируем обе части равенства по *y,* считая *x* сложной функцией, зависящей от *y*

$$x'\ln y + \frac{x}{y} - (\ln x + y \cdot \frac{1}{x} \cdot x') = 0.$$

Разрешая равенство относительно *x*', получим

$$x' = \frac{\ln x - \frac{x}{y}}{\ln y - \frac{y}{x}}.$$

г) Дифференцируем обе части равенства по *y*

$$2xx'y^2 + 2x^2y - \frac{4}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x'.$$

Отсюда $\quad x' = \dfrac{\frac{2}{y} - x^2y}{xy^2 - \frac{1}{x}} = \dfrac{x(2-x^2y^2)}{y(x^2y^2-1)}.$

2.2. Найти производные y'_x:

а) $\begin{cases} x = \cos^{3/2} t; \\ y = \sin^{3/2} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{\cos 2t}; \\ y = \ln\sin t; \end{cases}$

и производные x'_y:

в) $\begin{cases} x = arctg\sqrt{t}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = tg\dfrac{\varphi}{2}; \\ y = \ln\cos\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$

Решение. а) Находим $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{3}{2}\cos^{1/2} t\sin t$ и $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{2}\sin^{1/2} t\cos t$.

Отсюда $y'_x = \dfrac{\dfrac{3}{2}\sin^{1/2} t \cos t}{-\dfrac{3}{2}\cos^{1/2} t \sin t} = -\sqrt{ctgt}$.

б) Находим $\dfrac{dx}{dt} = -2e^{\cos 2t}\sin 2t$ и $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\cos t}{\sin t} = ctgt$.

Отсюда $y'_x = -\dfrac{1}{4e^{\cos 2t}\sin^2 t}$.

в) Находим $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2} = \dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$ и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{1+t} = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}.$$

Отсюда $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{(1+t)^2}{2\sqrt{t}(1+t)t(t+2)} = \dfrac{1+t}{2t^{3/2}(t+2)}$.

г) Находим $\dfrac{dy}{d\varphi} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\dfrac{1}{2}tg\dfrac{\varphi}{2}$ и $\dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

Отсюда $x'_y = -\dfrac{2}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}tg\dfrac{\varphi}{2}} = -\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

2.3. Найти производные: а) $y = x^{x^2}$; б) $y = x^{\sin 2x}$;

в) $y = \dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{(x-3)^3}$; г) $y = x^2 e^{x^3}\sin 3x\, thx$.

Решение. а) Прологарифмируем правую и левую часть

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Найдем производные от правой и левой части по x, считая y сложной функцией, зависящей от x

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x}.$$

Отсюда $y' = (2\ln x + 1)x^{x^2+1}$.

б) Логарифмируя правую и левую часть, имеем

$$\ln y = \sin 2x \ln x.$$

Откуда $\dfrac{y'}{y} = 2\cos 2x \ln x + \dfrac{\sin 2x}{x}$ или

$$y' = x^{\sin 2x}(2\cos 2x\ln x + \frac{\sin 2x}{x)}.$$

в) Логарифмируя правую и левую часть, имеем

$$\ln y = 2\ln(x - 1) + \frac{1}{3}\ln(x+2) - 3\ln(x - 3).$$

Отсюда $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{3(x+2)} - \dfrac{3}{x-3}$ или

$$y' = \frac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{(x-3)^2}\left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{3(x+2)} - \frac{3}{x-3}\right).$$

г) Логарифмируем правую и левую часть

$$\ln y = 2\ln x + x^3 + \ln \sin 3x + \ln thx.$$

Берем производные $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x} + 3x^2 + \dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x} + \dfrac{1}{thx}\dfrac{1}{ch^2 x}$.

Откуда $y = x^2 e^{x^3}\sin 3x\, thx\left(\dfrac{2}{x} + 3x^2 3ctg3x + \dfrac{2}{sh2x}\right)$.

2.4. Найти производные функций: а) $y=\log_x e$;

б) $y=\log_{\cos x}\sin x$; в) $y = \log_{x^3} x^x$.

Решение. а) Перейдем к натуральному логарифму $y = \dfrac{1}{\ln x}$, тогда $y' = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

б) Представим функцию в виде $y = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$, тогда

$$y' = \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}\ln\cos x + \dfrac{\sin x}{\cos x}\ln\sin x}{\ln^2 \cos x} = \frac{ctg \ln\cos x + tgx \ln\sin x}{\ln^2 \cos x}.$$

в) Перейдем к натуральному логарифму

$$y = \frac{x \ln x}{3 \ln x} = \frac{x}{3},$$

отсюда $y' = \dfrac{1}{3}$.

2.3. Производные высших порядков

1^0. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную y', которая является некоторой функцией от x.

Производной второго порядка называется производная от первой производной и обозначается y'' или $f''(x)$, или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная от второй производной называется третьей производной от функции $f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$, или

$$\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Аналогично определяются производные четвертого, пятого и более старших порядков, так $y^{(n)}$ производная n-го порядка.

2^0. Вторая производная от неявной функции $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ находится дифференцированием функции $y' = \varphi(x, y)$ по переменной x, учитывая при этом, что y есть функция от x.

3^0. Вторая производная от функции y по x, заданной параметрически, равна

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^2}.$$

В последнем выражении точки означают дифференцирование по t.

Третья производная $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ и т. д.

4^0. Производную *n-го* порядка от произведения двух функций удобнее находить по формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + nu'v^{(n-1)} + nv^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k ,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ биномиальные коэффициенты,

$u^{(0)} = u, \quad v^{(0)} = v.$

5^0. Приведем некоторые общие формулы для производных любого порядка

1. $y = x^\alpha, \quad y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Если $\alpha = -1$, то $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. Если $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, то $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}}$.

2. $y = (a+bx)^{\alpha} \quad (a, b - const);$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}.$$

а) $\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}};$

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!! b^n}{2^m (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$

3. $y = \ln x; \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

4. $y = a^x; \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n; \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$

5. $y = \sin x; \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

6. $y = \cos x; \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

7. $y = \frac{1}{x^2 - a^2}; \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right].$

8. $y = e^{ax}\sin bx; \quad y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx + n\varphi),$ где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

9. $y = arctgx; \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n\, arctg\frac{1}{x}\right),$

где $arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y.$

3.1. Для данных функций ***найти*** производные указанного порядка:

а) $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \quad y''?;$ б) $y = arctg\frac{x}{a}, \ y'''?;$

в) $s=\sin^2\varphi,\ s^{(4)}$?; г) $y=\ln x,\quad y^{(n)}$?;

д) $y=e^{-x}\sin x, y^{(4)}$?

Решение. а) Находим первую производную

$$y'=\frac{\frac{1}{2}\frac{2xx}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{x^2}.$$

Вторую производную находим дифференцированием y' по x:

$$(y')'_x=y''=\frac{-2x\sqrt{x^2-1}-x^2\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^4(x^2-1)}=\frac{2-3x^2}{x^3(x^2-1)^{3/2}}.$$

б) Находим первую производную

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Дифференцируя y' по x, находим вторую производную $y''=\dfrac{-2ax}{(a^2+x^2)^2}$.

Дифференцируя еще раз по x, находим третью производную

$$y'''=-2a\frac{(a^2+x^2)^2-2x(a^2+x^2)2x}{(a^2+x^2)^4}=\frac{2a(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3}.$$

в) Для нахождения четвертой производной дифференцируем последовательно четыре раза по φ

$s'=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi;\quad s''=2\cos 2\varphi;$

$s'''=-4\sin 2\varphi;\quad s^{(4)}=-8\cos 2\varphi.$

г) Для нахождения n-й производной дифференцируем последовательно заданную функцию до тех пор, пока не выявим общую закономерность нахождения последующей производной

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}; \quad y'' = -1 \cdot x^{-2}; \quad y''' = 1 \cdot 2x^{-3}; \quad y^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$$

и т.д.

Отсюда $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ (См. 3. пункт 5°).

д) Поскольку функция y представляет произведение двух функций $u = e^{-x}; v = \sin x$, то применяя формулу Лейбница

$$y^{(4)} = (uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)} \quad (4),$$

получим

$$y^{(4)} = e^{-x}\sin x - 4e^{-x}\cos x - 6e^{-x}\sin x + 4e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x$$

3.2. Найти производные указанного порядка:

а) $e^y + xy = e,\ y''$?; б) $y = x + arctg\frac{y}{2},\ y''$?;

в) $y^3 = x^3 + 3xy,\ x''$?; г) $\cos(xy) = x^2,\ x''$?;

д) $x^3 + y^3 = 1,\quad y'''$?; е) $x = tg(x + y),\quad x'''$?

Решение. а) Дифференцируем правую и левую часть по x

$e^y y' + y + xy' = 0,$ откуда $y' = -\dfrac{y}{e^y + x}.$

Дифференцируем еще один раз по x

$$y'' = -\frac{y'(e^y + x) - y(e^y y' + 1)}{(e^y + x)^2}.$$

Подставляя в последнее выражение значение y', получим

$$y'' = \frac{\frac{y}{e^y + x}(e^y + x) + y(-e^y\frac{y}{e^y + x} + 1)}{(e^y + x)^2} = \frac{2y - \frac{y^2 e^y}{e^y + x}}{(e^y + x)^2} =$$

$$= \frac{2y(e^y + x) + y^2 e^y}{(e^y + x)^3}.$$

б) Дифференцируем обе части по x

$$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}}\frac{y'}{2}, \text{ откуда } y' = \frac{\sqrt{4+y^2}}{\sqrt{4+y^2}-1}.$$

Дифференцируем еще раз по x

$$y'' = \frac{\frac{2yy'}{2\sqrt{4+y^2}}(\sqrt{4+y^2}-1) - \sqrt{4+y^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2yy'}{\sqrt{4+y^2}}}{(\sqrt{4+y^2}-1)^2} =$$

$$= -\frac{y}{(\sqrt{4+y^2}-1)^3}.$$

в) Дифференцируем правую и левую часть по y

$$3y^2 = 3x^2x' + 3(x'y + x), \ x' = \frac{y^2 - x}{x^2 + y}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x'' = \frac{(2y - x')(x^2 + y) - (y^2 - x)(2xx' + 1)}{(x^2 + y^2)}.$$

Подставляя в последнее выражение x', получим

$$x'' = \frac{2y(x^2 + y) - (y^2 - x) - \frac{(y^2 - x)^2 2x}{x^2 + y} - (y^2 - x)}{(x^2 + y)^2} =$$

$$= \frac{2y(x^2 + y)^2 - 2(y^2 - x)(x^2 + y) - 2(y^2 - x)^2 x}{(x^2 + y)^3}.$$

г) Дифференцируем обе части по y

$$-\sin(xy)(x'y + x) = 2xx', \text{ откуда } x' = -\frac{x\sin(xy)}{2x + y\sin(xy)}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x' = (-((x'\sin(xy) + x\cos(xy)(x'y + x))(2x + y\sin(xy)) - x\sin(xy)\cdot$$
$$\cdot(2x' + \sin(xy) + y\cos(xy)(x'y + x))))/((2x + y\sin(xy))^2$$

д) Дифференцируем обе части по x

$$3x^2 + 3y^2y' = 0\text{, откуда } \quad y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Дифференцируем еще раз по x

$$y'' = -2\frac{x}{y}\frac{y - xy'}{y^2} = -2\frac{xy + x^2\dfrac{x^2}{y^2}}{y^3} = -2\frac{xy^3 + x^4}{y^5}.$$

Для нахождения y''' дифференцируем еще один раз по x

$$y''' = -2\frac{(y^3 + xy^2y' + 4x^3)y^5 - 5(xy^3 + x^4)y^4y'}{y^{10}} =$$

$$= -2\frac{(y^3 + 3x^3)y^3 + 5(y^3 + x^3)x^3}{y^8} = -2\frac{y^6 + 8x^3y^3 + 5x^6}{y^8}.$$

е) Дифференцируем обе части по y

$$x = \frac{x' + 1}{\cos^2(x + y)},\text{ откуда}$$

$$x' = \frac{1}{\cos^2(x + y)}\frac{\cos^2(x + y)}{\cos^2(x + y) - 1} = -\frac{1}{\sin^2(x + y)}.$$

Дифференцируем еще раз по y

$$x'' = 2\frac{\cos(x + y)(x' + 1)}{\sin^3(x + y)} = -2\frac{\cos^3(x + y)}{\sin^5(x + y)}.$$

Дифференцируя еще раз по y, окончательно получим

$$x''' = -2(-3\cos^2(x+y)\sin^6(x+y)(x'+1) -$$

$$-\cos^3(x+y)\cdot 5\sin^4(x+y)\cdot\cos(x+y)(x'+1))/(\sin^{10}(x+y)) =$$

$$= -2\frac{(3\sin^2(x+y)+5\cos^2(x+y)\cos^4(x+y)}{\sin^8(x+y)} =$$

$$= -2((3+2\cos^2(x+y)\cos^4(x+y))/\sin^8(x+y).$$

3.3. Найти производные указанных порядков:

а) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2+1, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$? б) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$?

в) $\begin{cases} x = \cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \\ y = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}, \end{cases}$ $\dfrac{d^2x}{dy^2}$? г) $\begin{cases} x = 2^{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{4}(t^2+1), \end{cases}$ $\dfrac{d^2x}{dy^2}$?

д) $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$? е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t, \end{cases}$ $\dfrac{d^3x}{dy^3}$?

Решение. а) Найдем первую производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{\ln t + 1}.$$

Вторую производную находим по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{2(\ln t+1) - 2t\frac{1}{t}}{(\ln t+1)^2}}{\ln t + 1} = \frac{2\ln t}{(\ln t+1)^3}.$$

б) Первая производная равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\cos 2t}{-2\sin t + 2\sin 2t} = \frac{\cos 2t}{\sin 2t - \sin t}.$$

Вторую производную находим по формуле

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=$$

$$=\frac{-4\sin 2t(-2\sin t+2\sin 2t)-(-2\cos t+4\cos 2t)2\cos 2t}{(-2\sin t+2\sin 2t)^3}$$

в) Находим первую производную

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x'_\varphi}{y'_\varphi}=\frac{-2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-1.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{(x'_y)'_\varphi}{y'_\varphi}=\frac{0}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}=0.$$

г) Первая производная

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2^{t-1}\ln 2}{\frac{1}{4}\cdot 2t}=\frac{2^t\ln 2}{t}.$$

Вторая производная будет

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{y'_t}=\frac{\dfrac{2^t\ln^2 2\cdot t-2^t\ln 2}{t^2}}{\dfrac{t}{2}}=2\frac{2^t\ln 2(t\ln 2-1)}{t^3}.$$

д) Находим первую производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{a\cos\varphi}{-a\sin\varphi}=-ctg\varphi.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\dfrac{1}{\sin^2\varphi}}{-a\sin\varphi}=-\frac{1}{a\sin^3\varphi}.$$

Третью производную находим по формуле

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_{xx})'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\dfrac{-3\sin^2\varphi\cos\varphi}{a\sin^6\varphi}}{-a\sin\varphi}=-\frac{3\cos\varphi}{a^2\sin^5\varphi}.$$

е) Находим первую производную

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Вторая производная равна

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{(x'_y)'_t}{y'_t}=\frac{\dfrac{\sqrt{1-t^2}-t\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}.$$

Третью производную находим по формуле

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{(x''_{xx})'_t}{y'_t}=\frac{\dfrac{(1-t^2)^{3/2}+t\cdot\dfrac{3}{2}(1-t^2)^{1/2}\cdot 2t}{(1-t^2)^3}}{\dfrac{1}{t}}=\frac{(1+2t^2)t}{(1-t^2)^{7/2}}.$$

3.4. Найти производные указанных порядков:

а) $y=x\cos x$, $y^{(50)}$? б) $y=(x^3-x^2+1)e^x$, $y^{(30)}$?

в) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $y^{(20)}$? г) $y=e^{3x}\sin 4x$, $y^{(10)}$?

д) $y=\ln(2x+1)$, $y^{(40)}$? е) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-x+6}$, $y^{(n)}(0)$?

Решение. а) Положим $u=x^2$, $v=\cos x$. Тогда $u'=2x,\ u''=2,\ u'''=u^{(4)}=...=0,\ v^{(n)}=\cos(x+n\dfrac{\pi}{2}).$

По формуле Лейбница все слагаемые, кроме трех последних, равны нулю, поэтому получаем

$$y^{(50)}=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 49\cos(x+48\frac{\pi}{2})+50\cdot 2x\cos(x+49\frac{\pi}{2})+$$

$$+x^2\cos(x+50\frac{\pi}{2})=(1225-x^2)\cos x-100x\sin x.$$

б) Положим $u=e^x,\quad v=x^3-x^2+1.$ Тогда

$$v'=3x^2-2x,\quad v''=6x-2,\; v'''=6,\, v^{(4)}=v^{(5)}=...=0,\; u^{(n)}=e^x.$$

По формуле Лейбница все слагаемые, кроме четырех первых, равны нулю. Таким образом,

$$y^{(30)}=e^x(x^3-x^2+1)+30e^x(3x^2-2x)+\frac{30\cdot 29}{2}\cdot e^x(6x-2)+$$

$$+\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3!}e^x\cdot 6=e^x(x^3+89x^2+2550x+23481).$$

в) Преобразуем выражение к виду

$$y=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Так как $\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}n!}{(x-3)^{n+1}}$ и $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}n!}{(x+1)^{n+1}}$, то

$$y^{(20)}=\frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^{20}\cdot 20!}{(x-3)^{21}}-\frac{(-1)^{20}\cdot 20!}{(x+1)^{21}}\right)=\frac{20!}{4}\left(\frac{1}{(x-3)^{21}}-\frac{1}{(x+1)^{21}}\right).$$

г) Полагая в формуле (8) $a=3,\ \mathrm{b}=4$, будем иметь

$$y^{(10)}=(3^2+4^2)^{\frac{10}{2}}e^{3x}\sin(4x+10\varphi),\text{ где }\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\text{ или}$$

$$y^{(10)}=5^{10}e^{3x}\sin(4x+10\arcsin\frac{4}{5}).$$

д) Находим первую производную $y'=\frac{2}{x+1}$. Рассматривая первую производную как функцию от x, находим *(n-1)* производную по формуле (2,а; пункт 5°)

$$\left(\frac{2}{1+2x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(1+2x)^n}.$$

Таким образом,

$$y^{(40)} = \frac{(-1)^{39}39!2^{39}}{(1+2x)^{39}} = -39!\left(\frac{2}{1+2x}\right)^{39}.$$

При $n \geq 2$ будем иметь

$$y^{(n)}(x^2 - x + 6) + ny^{(n-1)}(2x-1) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)} \cdot 2 = 0,$$

откуда при $x = 0$ получим

$$6y^{(n)}(0) - ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0$$

или $y^{(n)}(0) = \dfrac{n}{6}y^{(n-1)}(0) - \dfrac{n(n-1)}{6}y^{(n-2)}(0).$

Полученная рекуррентная формула, позволяет определить n-ю производную в точке $x = 0$ ($n \geq 2$). Значения $y(0)$ и $y'(0)$ находятся непосредственно

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \left.\frac{-2x^2 - 6x + 15}{(x^2 - x + 6)^2}\right|_{x=0} = \frac{15}{36}.$$

Полагая последовательно $n = 2,3,4,...,$ с помощью рекуррентной формулы находим значения искомых производных. Так

$$y''(0) = \frac{2}{6}y'(0) - \frac{2\cdot 1}{6}y(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{36} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{36},$$

$$y'''(0) = \frac{3}{6}y''(0) - \frac{3\cdot 2}{6}y'(0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{36} - \frac{2\cdot 15}{36}\right) = -\frac{31}{72}.$$

2.4. Дифференциал функции

1⁰. Из определения производной $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ и предела переменной следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ или $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. приращение функции можно разбить на две части.

Произведение $y'\Delta x$ есть бесконечно малая первого порядка относительно Δx. Произведение же $\alpha\Delta x$ есть величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, т.к. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Первое слагаемое приращения функции называется *главной частью приращения.* Произведение $y'\Delta x$ называется *дифференциалом функции* и обозначается *dy.* Дифференциал независимой переменной *x* равен ее приращению, т.е. $dx \approx \Delta x$.

Итак, если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке *x,* то дифференциал функции равен произведению производной $f'(x)$ на дифференциал независимой переменной, т. е.

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (1)$$

2⁰. *Правила дифференцирования*:

1. $d\{Cu) = Cdu$; 2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3. $d(uv) = udv + vdu$; 4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

3⁰. *Геометрический смысл дифференциала.* Дифференциал функции геометрически определяется разностью ординат касательной к кривой при переходе от точки с абсциссой x_0 к точке с абсциссой $x_0 + \Delta x$ (рис. 2.7).

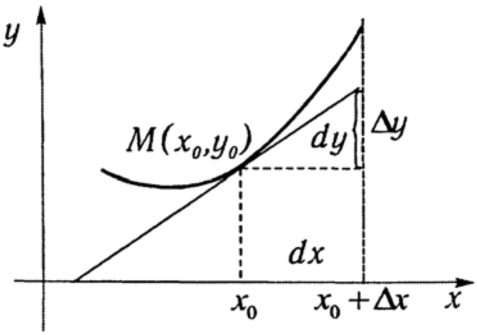


Рис. 2.7

4⁰. *Инвариантность формы дифференциала.* Форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Если $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, то

$$dy = f'_x dx = f'_x \varphi'_t dt. \qquad (2)$$

5⁰. Дифференциалом второго порядка функции $y = f\{x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее первого дифференциала и обозначается

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2. \qquad (3)$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков

$$d^3y=d(d^2y)= y''' dx^3;$$
$$d^ny=d(d^{n-1}y)=y^{(n)}dx^n \qquad (4)$$

6⁰. Если функция сложная $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, то дифференциал второго порядка $d^2y=d(f'_x dx)$ находится по формуле

$$d^2y = f''_{xx} dx^2 + f'_x dx, \qquad (5)$$

где $dx = x'_t dt$.

Дифференциал третьего порядка будет

$$d^3y= f'''(dx)^3 + 3f'' dx\, d^2x + f' d^3(x). \qquad (6)$$

и т. д. Здесь штрихами обозначено дифференцирование по *x.*

7^0. Для дифференцируемой функции $y=f(x)$ из приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ следует

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+ f'(x)\Delta x. \qquad (7)$$

Эту формулу используют при приближенных вычислениях.

8^0. Абсолютная величина разности между истинным значением какой-либо величины a_0 и ее приближенным значением a называется *абсолютной погрешностью* и обозначается $\Delta = |a_0 - a|$.

Абсолютная величина отношения абсолютной погрешности к истинному значению называется *относительной погрешностью* и обозначается $\delta = \dfrac{\Delta}{|a_0|}$.

Относительная погрешность обычно выражается в процентах $\delta = \dfrac{\Delta}{|a_0|}100\,\%$.

Если приращение функции заменить ее дифференциалом, то получим приближенное значение приращения $\Delta y \approx dy$. В этом случае абсолютная погрешность равна $\Delta = |\Delta y - dy|$, а относительная погрешность будет $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$.

4.1. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x^3 - x + \sqrt{x}$; б) $y = 3^{\ln tgx}$; в) $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$;

г) $x = a\sin^3 t$.

Решение. а) Находим производную данной функции

$y' = 3x^2 - 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отсюда дифференциал равен

$$dy = y'dx = \left(3x^2 - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

б) Находим производную

$$y' = 3^{\ln tgx} \ln 3 \frac{1}{tgx} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot 3^{\ln tgx} \ln 3}{\sin 2x}.$$

Отсюда дифференциал

$$dy = \frac{2 \cdot 3^{\ln tgx} \ln 3}{\sin 2x} dx.$$

в) Находим производную

$$y' = \frac{3x^2(x^3+1) - (x^3-1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Отсюда дифференциал будет

$$dy = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} dx .$$

г) Производная по t равна $x' = 3a \sin^2 t \cos t$. Отсюда дифференциал $dx = 3a \sin^2 t \cos t \, dt.$

4.2. Найти дифференциалы указанных порядков от функции:

а) $y = 3^{\ln tgx}, \quad d^2 y ?;$ б) $\rho = \dfrac{\sin 2\varphi}{1-\varphi^2}, \quad d^2 \rho ?$

в) $y = (x^2 - x + 1)^3, \quad d^3 y ?$ г) $x^{1/3} + y^{1/3} = a^{1/3}, \quad d^2 y ?$

Решение. а) Находим дифференциал 1-го порядка

$$dy = 3^{\ln tgx} \ln 3 \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \ln 3 \frac{3^{\ln tgx}}{\sin 2x} dx.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$d^2 y = 2 \ln 3 \frac{2 \ln 3 \dfrac{3^{\ln tgx} \sin 2x}{\sin 2x} - 2 \cdot 3^{\ln tgx} \cos 2x}{\sin^2 2x} dx^2 =$$

$$= 4 \ln 3 \cdot 3^{\ln tgx} \frac{\ln 3 - \cos 2x}{\sin^2 2x} dx^2.$$

б) Дифференцируя последовательно дважды, имеем

$$d\rho = 2\frac{\cos 2\varphi(1-\varphi^2)+\varphi\sin 2\varphi}{(1-\varphi^2)^2}d\varphi.$$

$$d^2\rho = 2((-\sin 2\varphi\cdot 2(1-\varphi^2)-\cos 2\varphi\cdot 2\varphi+\sin 2\varphi+$$
$$+2\varphi\cos 2\varphi)(1-\varphi^2)^2+2(\cos 2\varphi(1-\varphi^2)+\varphi\sin 2\varphi)(1-\varphi^2)^4 =$$
$$= 2(\sin 2\varphi(5\varphi^2-1-2\varphi^4)+2\varphi\cos 2\varphi(1-\varphi^2))d\varphi^2.$$

в) Дифференцируя последовательно три раза, имеем

$$dy = 3(x^2-x+1)^2(2x-1)dx,$$
$$d^2y = 3(2(x^2-x+1)(2x-1)^2+(x^2-x+1)^2\cdot 2)dx^2 =$$
$$= 6(x^2-x+1)(5x^2-5x+2)dx^2,$$
$$d^3y = 6((2x-1)(5x^2-5x+2)+(x^2-x+1)(10x-5))dx^3 =$$
$$= 6(2x-1)(10x^2-10x+7)dx^3.$$

г) Функция задана неявно. Находим первую производную

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}, \text{ тогда } dy = -\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}dx.$$

Вычисляем вторую производную

$$y'' = -\frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{ay}{x^5}},$$

отсюда $d^2y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{ay}{x^5}}dx^2.$

4.3. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

а) $y=\sqrt{x^2-3x}, \quad x=t^2+1$; б) $z=\ln y, \quad y=tgx, \quad x=2t^2+t$;

в) $y=e^x, \quad x=tgt$, представить d^2y через: 1) x и dx; *2) t и dt.*

Решение. а) Дифференциал сложной функции равен

$dy = y'_x x'_t dt.$ Находим производные $y''_x = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}};$

$x'_t = 2t.$

Подставляя значение x в y'_x, окончательно получим

$$dy = \frac{(2t^2-1)tdt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2-2)}}.$$

б) Дифференциал сложной функции в этом случае имеет вид $dz = z'_y y'_x x'_t dt.$

Находя производные $z'_y = \frac{1}{y}$, $y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x'_t = 4t+1$ и подставляя их значения в выражение дифференциала, окончательно получим $dz = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}(4t+1)dt = \frac{2(4t+1)dt}{\sin(2(2t^2+t))}.$

в) Находим дифференциал первого порядка $dy = y'_x dx = e^x dx.$ Дифференциал второго порядка через x и dx равен $d^2 y = y''_{xx} dx^2 = e^x dx^2.$

Выразим теперь дифференциал через t и dt. Дифференциал первого порядка будет $dy = y'_x x'_t dt = e^x \frac{1}{\cos^2 x} dt = e^{tgt} \frac{dt}{\cos^2 t}.$

Дифференцируя по t, получим

$$d^2 y = \frac{e^{tgt}\dfrac{1}{\cos^2 t}\cos^2 t + e^{tgt} \cdot 2\sin t\cos t}{\cos^4 t} dt^2 = e^{tgt}\frac{1+\sin 2t}{\cos^4 t} dt^2.$$

Если воспользоваться формулой (5), где $f'_x = e^x$, $f''_{xx} = e^x$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, то придем к такому же результату

$$d^2 y = e^x \frac{dt^2}{\cos^4 t} + e^x d\left(\frac{dt}{\cos^2 t}\right) = e^{tgt}\frac{1+\sin 2t}{\cos^4 t} dt^2.$$

4.4. Вычислить приближенно: а) arctg 1,05; б) lg 9; в) $\sqrt[5]{0{,}98}$.

Решение. а) Полагаем $f(x) = arctgx$, тогда $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Отсюда по формуле (7) имеем

$$arctg(x+\Delta x) = arctgx + \frac{1}{1+x^2}\Delta x.$$

Пусть $x = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}05$. Таким образом

$$arctg(1+0{,}05) = arctg1 + \frac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}05 = \frac{\pi}{4} + 0{,}025.$$

б) Положим $f(x) = lgx$, тогда $f'(x) = \frac{1}{x\ln 10}$. Отсюда по формуле (7) имеем $\lg(x+\Delta x) = \lg x + \frac{\Delta x}{x\ln 10}$.

Пусть $x =10$, тогда Δx = -1 и $\lg(10-1) = \lg + \frac{-1}{10\ln 10}$.

Отсюда $\lg 9 = 1 - \frac{0{,}1}{\ln 10} = 0{,}956.$

в) Полагаем $f(x) = \sqrt[5]{x}$, тогда $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Отсюда $\sqrt[5]{x+\Delta x} = \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\Delta x}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Пусть $x = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}02$ и $\sqrt[5]{1-0{,}02} = \sqrt[5]{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{-0{,}02}{\sqrt[5]{14}}$ или $\sqrt[5]{0{,}98} = 1 - 0{,}0004 = 0{,}996$.

4.5. Для функции $y = x^2 + 3x + 1$ ***найти*** приращение ординаты касательной и приращение функции при переходе аргумента x от значения x=2 к x=2,1.

Решение. Согласно геометрическому смыслу дифференциала, приращению ординаты касательной соответствует дифференциал функции $dy = (2x+3)dx$.

При $x = 2$ и $dx = \Delta x = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$ получим $dy = (2\cdot 2+3)\cdot 0{,}1 = 0{,}7$.

Приращение функции находим по формуле

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (2{,}1^2 + 3\cdot 2{,}1 + 1) - (2^2 + 3\cdot 2 + 1) =$$
$$= 11{,}71 - 11 = 0{,}71.$$

Следовательно, приращение ординаты касательной равно 0,7, а приращение функции 0,71. Так как $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$, то $\alpha\,\Delta x = 0{,}71 - 0{,}7 = 0{,}01$.

4.6. Найти дифференциал и приращение функции $y = x^3 - 2x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$. ***Найти*** абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции её дифференциалом.

Решение. Имеем: $dy = (3x^2 - 2)dx$,

$$\Delta y = ((x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)) - (x^3 - 2x) = (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 2)\Delta x$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим: $dy = (3\cdot 2^2 - 2)\cdot 0{,}1 = 1;$

$$\Delta y = (3\cdot 2^2 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 - 2)\cdot 0{,}1 = 1{,}061.$$

Абсолютная погрешность $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}061$, а относительная погрешность $\delta = \dfrac{\Delta}{|\Delta y|}\cdot 100\% = \dfrac{0{,}061}{1{,}061}\cdot 100\% \approx 6\%$.

4.7. При измерении сторона куба x оказалась равной 4см, причём максимально возможная при этом погрешность измерения Δx находится в пределах ± 0,01см. ***Определить*** абсолютную и относительную погрешности при вычислении объёма куба.

Решение. Объём куба равен $V = x^3 = 64$ см^3. Возможная неточность измерения $|\Delta x| = 0{,}01$. Отсюда абсолютная погрешность $|\Delta V| \approx |dV| = 3x^2dx = 3\cdot 4^2\cdot 0{,}01 = 0{,}48$. Относительная погрешность $\left|\dfrac{dV}{V}\right| = \dfrac{0{,}48}{64}\cdot 100\% = 0{,}75\%$.

2.5. Приложения производной к задачам геометрии и физики

1⁰. Уравнение касательной и нормали к кривой. Значение производной $f'(x)$ в некоторой точке $x = x_0$ геометрически представляет угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

Из геометрического смысла производной следует, что угловой коэффициент касательной к кривой y = f (x) (рис. 2.8) в точке $M(x_0, y_0)$ $M \in y$ равен значению производной в этой точке, т. е. $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Поэтому, если в уравнение пучка прямых, проходящих через точку M, подставить угловой коэффициент касательной, то уравнение касательной к кривой в данной точке примет вид $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$.

Нормалью к кривой в точке $M(x_0, y_0)$ называется прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной и кривой в этой точке. В силу условия перпендикулярности двух прямых $\left(k_1 = -\dfrac{1}{k_2}\right)$, уравнение нормали имеет вид

$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, если $f'(x_0) \neq 0$.

Отрезки $AM = y_0 ctg\alpha$, $BN = y_0 tg\alpha$ называются, соответственно подкасательной и поднормалью, а длины отрезков AM и BM – длинами касательной и нормали.

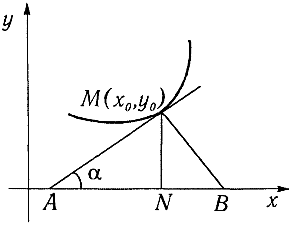


Рис. 2.8

2^0. Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по известной формуле аналитической геометрии

$$tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$$

3^0. Отрезки, связанные с касательной и нормалью, в полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 2.9), тогда угол, образованный касательной *MK* и полярным радиусом ρ = *OM*, определяется по формуле $tg\alpha = \dfrac{\rho}{\rho'_\varphi}$.

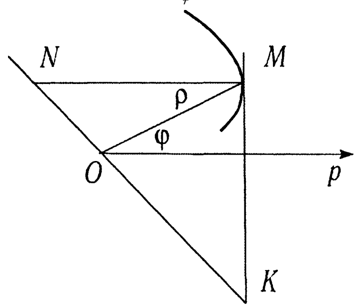


Рис. 2.9

Касательная *MK* и нормаль *MN* в точке *M* вместе с полярным радиусом *OM* точки касания и перпендикуляром к полярному радиусу, проведённому через полюс *O*, определяют следующие четыре отрезка: $MK = \dfrac{\rho}{|\rho|}\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ - отрезок касательной; $MN = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$ - отрезок нормали; $OK = \dfrac{\rho^2}{|\rho'|}$ - полярная подкасательная; $ON = |\rho'|$ -полярная поднормаль.

4^0. Средняя скорость движения точки за промежуток времени Δt определяется отношением приращения пути ΔS ко времени. Чем меньше Δt, тем точнее выражается скорость через среднюю скорость. Скорость движения точки в момент времени t определяется пределом, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$, т. е. $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt}$.

При движении точки по окружности угловой скоростью вращения ω в момент времени t называют предел отношения $\dfrac{\Delta \varphi}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю, т. е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, угловая скорость в данный момент равна производной от угла поворота φ по времени.

Ускорение точки ω, движущейся по прямой, есть первая производная от скорости по времени $\omega = \dfrac{dv}{dt}$ или вторая производная от пути S по времени $\omega = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$.

Угловое ускорение точки есть первая производная от угловой скорости $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ или вторая производная от угла поворота по времени $\varepsilon = \dfrac{d^2 \varphi}{dt^2}$.

5^0. Сила тока определяется как предел отношения $\dfrac{dq}{dt}$ при $\Delta t \to 0$, где Δq положительный электрический заряд, переносимый через сечение цепи за время Δt, т.е.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

Таким образом, сила тока в данный момент времени равна производной от количества протёкшего электричества по времени.

6^{0}. Химическое истолкование производной. Пусть $Q(t)$ - концентрация вещества, получаемого в ходе химической реакции в момент времени t. Тогда $C'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q(t_0)}{\Delta t}$ - скорость реакции в момент t_0.

5.1. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ в точке $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Находим производную $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ и вычисляем частное значение производной при $x=1$: $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, уравнение касательной будет $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2(x-1)}$ или $x+2y-2=0$.

Уравнение нормали к кривой в точке $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ имеет вид

$y-\dfrac{1}{2}=2(x-1)$ или $4x-2y-3=0$.

5.2. Написать уравнение касательной и нормали к эллипсу $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ в точке $M\left(\dfrac{9}{5},4\right)$.

Решение. Находим производную $\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2yy'}{25}=0,\ y'=-\dfrac{25x}{9y}$.

Вычисляем частное значение производной в точке M $y'\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{-25}{9}\frac{9}{5}\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$. Отсюда уравнение касательной $y-4=-\frac{5}{4}(x-\frac{9}{5})$ или $5x+4y-25=0$.

Уравнение нормали имеет вид $y-4=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{9}{5}\right)$ или $20x-25y+64=0$.

5.3. На кривой $y=3x^2-4x+1$ ***найти*** точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

Решение. Пусть искомая точка касания есть $M(x_0,y_0)$. Находим угловой коэффициент касательной в точке касания $k=y'(x_0)=6x_0-4$.

Поскольку касательная и прямая параллельны, то их угловые коэффициенты равны $6x_0-4=2$, откуда $x_0=1$.

Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, находим её ординату $y_0=3\cdot1^2-4\cdot1+1=0$.

Итак, точка M имеет координаты (1,0).

5.4. Найти точку линии $y = x^2-2x-5$, в которой касательная перпендикулярна прямой $3x + 6y -1 = 0$, составить уравнение этой касательной. Сделать чертёж.

Решение. Пусть искомая точка есть $M(x_0 , y_0)$. Находим угловой коэффициент касательной $y'(x_0)=2x_0-2$. Угловой коэффициент прямой $k_1=-\frac{1}{2}$.

Из условия перпендикулярности прямых $k_1=-\frac{1}{k_2}$, где k_2 - угловой коэффициент касательной, находим абсциссу искомой точки $-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2x_0-2}$, $x_0 = 2$. Ординату точки M находим из уравнения линии $y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 5 = 5$. Уравнение касательной будет $y - 5 = 2(x-2)$ или $2x - y + 1 = 0$.

Чтобы построить график параболы, преобразуем её уравнение $y = x^2 - 2x+5=(x-1)^2+4$, т. е. вершина параболы сдвинута на единицу вправо и на четыре единицы поднята вверх (рис.2.10). Уравнения касательной и прямой, перпендикулярной касательной, показаны на рисунке.

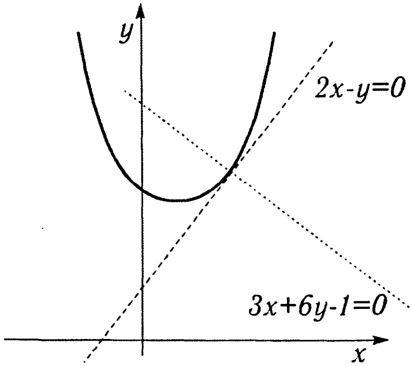


Рис. 2.10

5.5. Найти длину подкасательной, поднормали и нормали кривой $y^2=x^3$ в точке $x_0=1$.

Решение. Данная кривая представляет полукубическую параболу.

Поскольку касательная и нормаль проходят через точку $x_0=1$, $y_0=1$,то рассмотрим только одну ветвь кривой (рис. 2.11) .AN-подкасательная; BN-поднормаль.

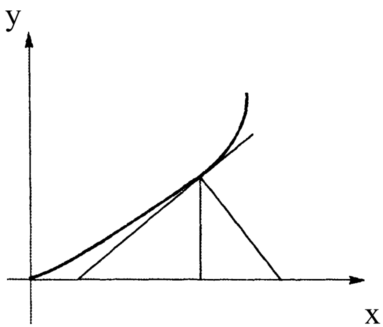


Рис. 2.11

Найдём угловой коэффициент касательной в точке *M:* $2yy' = 3x^2$, $y' = \frac{3}{2}\frac{x^2}{y}$; $y'(1) = k_1 = \frac{3}{2}$.

Угловой коэффициент нормали в точке *M(1,1)* будет $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{2}{3}$. Уравнение касательной $y\text{-}1 = \frac{3}{2}(x\text{-}1)$*;* нормали $y\text{-}1 = -\frac{2}{3}(x\text{-}1)$.

Найдём координаты точек *A* и *B*. Поскольку точки лежат на оси *Ox,* то *y = 0* и из уравнений касательной и нормали имеем $A\left(\frac{1}{3},0\right)$, $B\left(\frac{5}{2},0\right)$. Длина подкасательной $|AN| = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$*;* поднормали $|BN| = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

Длина касательной $|AM| = \sqrt{(1-\frac{1}{3})^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$; длина нормали $|BM| = \sqrt{(\frac{5}{2}-1)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

5.6. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$.

Решение. Совместно решив уравнения кривых (рис. 2.12), находим абсциссу точки их пересечения: $\sin x - \cos x = 0$, $tgx = 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Продифференцируем уравнения кривых $y' = \cos x$ и $y = -\sin x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения т. е.

значения производных при $x_0 = \frac{\pi}{4}$: $f_1' = (x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_2'(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда по формуле (4) пункта 3.4 имеем:

$$tg\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}, \quad \varphi = -arctg 2\sqrt{2}$$

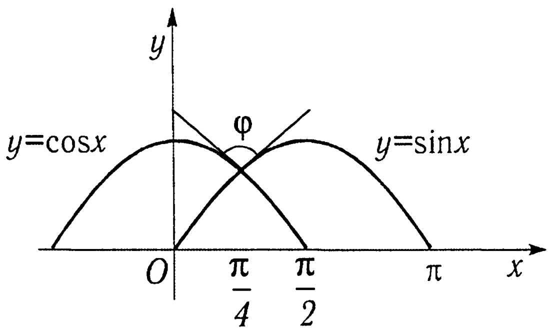


Рис. 2.12

5.7. Под каким углом кривая $y = \ln(\sqrt{3}x - 1)$ пересекает ось x?

Решение. Находим точку пересечения кривой с осью *Ox*.

Полагая *y=0,* получим: $\ln(\sqrt{3}x - 1) = 0$, $\sqrt{3}x - 1 = 1$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Находим производную $y' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x - 1}$ и угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Поскольку угловой коэффициент оси Ox равен нулю, то по формуле (4) пункта 3.4: $tg\varphi = \sqrt{3}$. Следовательно, искомый угол $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

5.8. Найти длины отрезков полярных касательной, нормали, подкасательной и поднормали, а также угол между касательной и полярным радиусом точки касания у спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ в точке с полярным углом $\varphi = 2\pi$.

Решение. Представим график спирали Архимеда (рис.2.13).

Находим производную $\rho' = a$, тогда длина полярной касательной равна

$$|MK| = \frac{\rho}{|\rho'|}\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{2\pi a}{a}\sqrt{4\pi^2 a^2 + a^2} = 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2};$$

длина полярной нормали

$$|MK| = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{(2\pi a)^2 + a^2} = a\sqrt{1+4\pi^2};$$

длина подкасательной $OK = \dfrac{\rho^2}{|\rho'|} = \dfrac{a^2 4\pi^2}{a} = 4a\pi^2$;

длина поднормали $ON = |\rho'| = a$.

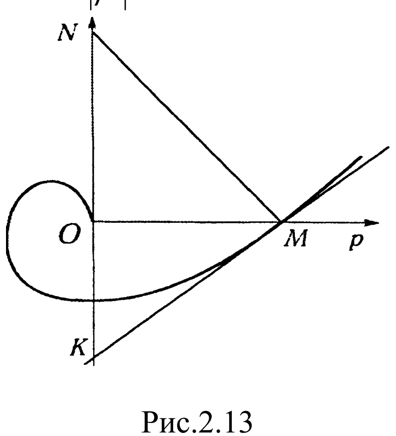


Рис.2.13

Угол, образованный касательной *MK* полярным радиусом точки касания, находим по формуле $tg\alpha = \frac{\rho}{\rho'_{\varphi}} = \frac{a2\pi}{a} = 2\pi$, откуда $\alpha = arstg 2\pi$.

5.9. Точка движется вдоль прямой по закону $s=2t^3-3t+4$. ***Найти*** скорость и ускорение точки в момент времени $t = 3$ *с*.

Решение. Скорость точки определяется первой производной по времени $v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 3$. При $t=3$ скорость равна $v(t=3) = 6 \cdot 3^2 - 3 = 51\, c^{-1}$.

Ускорение точки определяется второй производной

$$w = \frac{d^2 s}{dt^2} = 12t .$$

При t=3 ускорение равно $w(t=3) = 12 \cdot 3 = 36c^{-2}$.

5.10. Угол поворота шкива в зависимости от времени задан формулой $\varphi = t^2+2t+4$. ***Найти*** угловую скорость и ускорение при $t = 4$ *с*.

Решение. Угловая скорость определяется первой производной от угла поворота по времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t + 2$, а угловое ускорение определяется второй: $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2$.

При $t = 4$ угловая скорость равна $\omega = 2 \cdot 4 + 2 = 10\frac{1}{c}$, а угловое ускорение постоянно, от времени не зависит, и равно $2\frac{1}{c^2}$.

5.11. Снаряд выпущен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 $\frac{м}{c}$. ***Определить*** скорость и ускорение движения снаряда. На каком расстоянии от земли и через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки? (Сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх, имеет вид $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ где x - высота подъема тела за время t, g - ускорение свободного падения.

Первая производная от пути определяет скорость движения снаряда $v{=}v{-}gt,$ вторая производная - ускорение $w = -g.$

Когда снаряд достигнет наивысшей точки подъема, его скорость будет равна нулю, т. е. $0 = v - gt$,откуда время подъема $t{=}\frac{v_0}{g}c.$

Чтобы найти расстояние снаряда от земли до наивысшей точки подъема, необходимо в уравнение движения подставить время подъема $x = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g}\right).$

5.12. Движение точки М определяется уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos kt \\ y = b\sin kt \end{cases}$$

Определить направление скорости в момент времени $t = \frac{\pi}{4k}$.

Решение. Скорость направлена по касательной к траектории.

Тангенс угла наклона касательной в момент $t = t_0$ равен $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0} = \left.\frac{bk\cos kt}{-ak\sin kt}\right|_{t=\frac{\pi}{4k}} = -\frac{b}{a}$ в момент $t = \frac{\pi}{4k}$ скорость направлена к положительному направлению оси Ox под углом

$$\varphi = arctg\left(-\frac{b}{a}\right) = -arctg\left(\frac{b}{a}\right).$$

5.13. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, определяется по закону $q = 3t^2-2$. ***Найти*** силу тока в конце второй секунды.

Решение. Сила тока равна первой производной от количества электричества по времени $I = \frac{dq}{dt} = 6t$. При $t = 2$ сила тока равна $I(I = 2) = 6\cdot 2 = 12$а.

5.14. Зависимость между количеством q вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $q = A(1-e^{-at})$.

Определить скорость реакции.

Решение. Скорость реакции есть производная

$$\frac{dq}{dt} = Aae^{-at} \quad \textit{или} \quad \dot{q} = a(A-q).$$

2.6. Теоремы о среднем

1⁰. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка и удовлетворяет условию $f(a) = f(b) = 0$, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $f'(\xi) = 0$. Геометрически это означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны нулю, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси Оx (рис.2.14). Теорема также верна, если $f(a) = f(b) \neq 0$.

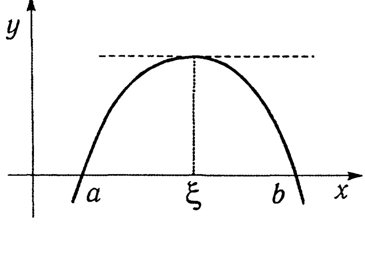


Рис. 2.14

2⁰. Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $f(b)-f(a)=(b-a)\, f'(\xi)$. Эта формула называется формулой конечных приращений.

Геометрически это означает следующее: на дуге АВ (рис. 2.15) всегда найдется по крайней мере одна точка М, в которой касательная параллельна хорде АВ.

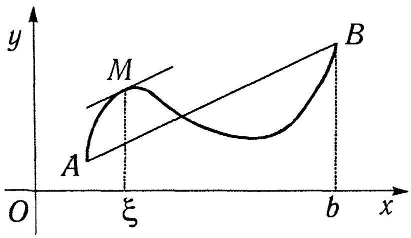


Рис.2.15

3⁰. Теорема Коши, Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные в каждой внутренней точке этого отрезка. Если эти производные не обращаются в нуль одновременно и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то между a и b найдется такая точка $\xi \in]a,b[$, что $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, если $\varphi'(x) \neq 0$ в промежутке $[a, b]$.

6.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: а) $y = x^2-2x-3$ на отрезке [-1,3]; б) $y = 1 - \sqrt[5]{x^2}$ на отрезке [-1,1].

Решение. а) Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех значениях x. Значения функции на границах отрезка равны между собой $y(-1) = y(3) = 0$ и функция имеет конечную производную $y' = 2x - 2$ в каждой точке этого отрезка, следовательно, условия теоремы Ролля выполняются.

Значение ξ определяем из выражения $y' = 0$, $2x - 2 = 0$, т. е. $\xi = 1$.

б) Функция непрерывна на отрезке [-1,1] и на концах этого отрезка принимает равные значения $y(-1)=y(1)=0$. Находим производную $y' = -\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ в точке $x = 0 \in [-1,1]$ производная не существует. Поскольку условия теоремы Ролля не выполнены, то теорема Ролля к данной функции неприменима.

6.2. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функций: а) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 1$ на [0,1]; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ на $[-1,1]$. Если теорема применима, то найти точку ξ.

Решение. а) Даная функция на отрезке [0,1] непрерывна и имеет конечную производную $f'(x) = x^2 - 1$. Следовательно, условия теоремы Лагранжа выполняются. Точку ξ найдем из формулы конечных приращений $f(1) - f(0) = (1-0)f'(\xi)$, $\dfrac{1}{3} - 1 = \xi^2 - 1$, $\xi_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $\xi = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ не принадлежит отрезку [0,1], то искомое значение $\xi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Функция непрерывна на отрезке [-1,1] и имеет производную $f'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Поскольку производная в точке $x=0 \in$ [-1,1] не существует, то теорема Лагранжа к данной функции не применима.

6.3. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 2x$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2,0)$ и $B(1,3)$? Пояснить графически.

Решение. Наклон хорды AB (рис. 2.16) определяется угловым коэффициентом $k = \dfrac{y_2 - y_1}{y_2 - x_1} = \dfrac{3-0}{1+2} = 1$. По теореме Лагранжа $f(1) - f(-2) = (1+2)f'(\xi)$, $3 = 3(2\xi + 2)$, $\xi = -\dfrac{1}{2}$. Угловой коэффициент касательной к данной кривой

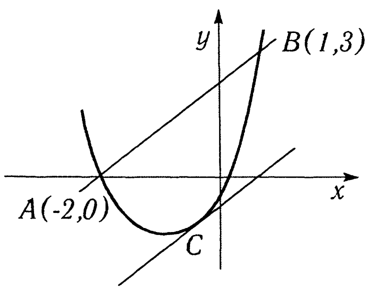


Рис. 2.16

Следовательно, в точке $C\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ касательная к параболе параллельна хорде AB.

6.4. Для функций $\varphi(x) = \sin x$ и $\psi(x) = \cos x$ ***проверить*** выполнение условий теоремы Коши в интервале $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ и найти t.

Решение. Найдем производные $\varphi'(x) = \cos x$; $\psi'(x) = -\sin x$. Поскольку производные существуют во всех точках этого интервала и

$\varphi(a) \neq \varphi(b)$; $\sin 0 \neq \sin\frac{\pi}{2}$, то условия теоремы Коши выполняются.

По формуле Коши имеем

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0} = \frac{-\sin\xi}{\cos\xi}, \text{ откуда } tg\xi = 1, \quad \xi = \frac{\pi}{4}.$$

6.5. Доказать, что уравнение e^x-x-1=0, имеющее корень x=0, не имеет других действительных корней.

Решение. Пусть данное уравнение имеет еще один действительный корень x_2, тогда между корнями x=0 и x_2 найдется такая точка ξ, в которой $f(\xi) = 0$. Обозначим левую часть уравнения за $f(x) = e^x - x - 1$ и найдем производную $f'(x) = e^x - 1$. Приравнивая ее нулю, получим e^x=0, x=0.

Поскольку это значение x совпадает с корнем уравнения, а другой точки ξ, где бы $f(\xi) = 0$ нет, то данное уравнение не имеет других действительных корней.

6.6. Многочлен $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корни $x=0$ и $x = 1$. ***Доказать,*** что $\frac{df}{dx}$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу [0,1].

Решение. Находим производную $\frac{df}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Поскольку функция $f(x)$ удовлетворяет на интервале [0,1] условиям теоремы Ролля, то приравниваем производную нулю $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Данное уравнение третьей степени, следовательно, имеет, по крайней мере, один действительный корень. Поскольку многочлен $\frac{df}{dx}$ на концах интервала [0,1] имеет разные знаки, а производная от него

$\dfrac{d^2 f}{dx^2} = 12x^2 - 6x + 2$ не имеет корней, то $\dfrac{df}{dx}$ на данном интервале имеет один действительный корень.

2.7. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Если при $x \to a$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одновременно стремятся к нулю или ∞, то предел их отношения равен пределу отношения их производных, т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

При этом предполагается, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ существуют и конечны.

Если же отношение производных также будет представлять случай $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, можно снова и снова применять правило Лопиталя. Если неопределенности типа $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$, то сначала приводят эти функции к виду дроби, которая представляет неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем уже пользуются правилом Лопиталя.

Нахождение предела функции в случае неопределенностей типа 1^∞, ∞^0, 0^0 с помощью логарифмирования также сводится сначала к случаям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем уже используется правило Лопиталя.

7.1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - x^2 - 1}{\sin^4 2x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x}$.

Решение. а) При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{3\cos 3x} = \frac{1}{3}.$$

б) При $x \to 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{3\sin 3x}.$$

При $x \to 0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{3\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos 2x}{9\cos 3x} = \frac{4}{9}.$$

в) При $x \to 0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{\sin^4 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x - 2x}{4\sin^3 2x \cos 2x \cdot 2} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^{x^2} - x}{2\sin^3 2x \sin 2x}.$$

Выделим первый замечательный предел и воспользуемся теоремами о пределах и правилом Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2\sin 2x \cos 2x \cdot 2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{8\sin^2 2x \cos 2x \cdot 2} = \frac{1}{8} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2\sin 2x \cos 2x \cdot 2} = \frac{1}{32}$$

г) При $x \to 0$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

7.2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x}{x\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\,\dfrac{x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

Решение. а) При $x\to 1$ имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приводим к общему знаменателю и получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}$$

б) При $x\to 0$ имеем неопределенность ($\infty-\infty$). приводим к общему знаменателю и получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+4(\cos x-x\sin x)-2x\sin x-x^2\cos x}=-\frac{1}{6}.$$

в) При $x\to\pi$ имеем неопределенность вида ($0\cdot\infty$). Приводим неопределенность к виду $\dfrac{0}{0}$ и пользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)tg\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{ctg\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{-\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}=-2$$

г) При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Приводим эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и пользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1.$$

7.3. Найти пределы: а) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$; б) $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim_{x\to 0}x^x$; г) $\lim_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{ctg5x}$.

Решение. а) При $x\to\frac{\pi}{4}$ имеем неопределенность 1^∞.

Прологарифмируем данную функцию $y=(tgx)^{tg2x}$;

$\ln y=tg2x\ln tgx$, тогда $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x\ln tgx$, т. е. получим неопределенность вида $\infty\cdot 0$.

Представим эту неопределенность в виде неопределенности $\frac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\frac{1}{tg2x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x}=-1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln y = -1$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ или $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x} = \frac{1}{e}$.

б) Неопределенность вида ∞^0. Прологарифмируем данную функцию $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ $\ln y = \frac{1}{x}\ln\ln x$ и сведем неопределенность к виду $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$.

Применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$ или $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

в) Неопределенность вида 0^0. Прологарифмируем функцию $y=x^x$

. Представим неопределенность в виде $\frac{\infty}{\infty}$:

$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Применим правило $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$. Итак $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

г) Неопределенность вида ∞^0. Положим $y = (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ и прологарифмируем: $\ln y = \frac{1}{x}\ln(x + 2^x)$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2}=\ln 2,$$

откуда $\lim\limits_{x\to\infty} y=2$.

д) Неопределенность вида 1^{∞}. Прологарифмируем функцию $y=(1+\sin 2x)^{ctg 5x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0} ctg 5x\ln(1+\sin 2x)$ и приведем неопределенность к виду $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cos 5x\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 5x}.$$

Пользуясь теоремами о пределах и правилом Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cos 5x\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{5\cos 5x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin 2x}=\frac{2}{5}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{ctg 5x}=e^{\frac{2}{5}}$.

2.8. Возрастание и убывание функций

При исследовании поведения функции $y=f(x)$ в зависимости от изменения независимой переменной x обычно предполагается, что во всей области определения функции независимая переменная изменяется монотонно возрастая, т. е. каждое следующее ее значение больше предыдущего $x_2>x_1$.

Если при этом последовательные значения функции также возрастают $f(x_2)>f(x_1)$, то функция называется *возрастаю-*

щей, а если они убывают $f(x_2)<f(x_1)$, то функция называется *убывающей.*

Возрастание и убывание функции характеризуется знаком ее производной: если внутри некоторого промежутка $y' > 0$, то функция возрастает, а если $y' < 0$, то в этом промежутке функция убывает.

При практическом исследовании функции на возрастание и убывание находят производную и приравнивают ее к нулю. Находят корни получившегося уравнения, а также точки, в которых производная не существует. Все эти точки, вместе с возможными точками разрыва функции, разбивают область существования функции на ряд промежутков, на каждом из которых вопрос о возрастании или убывании функции определяется знаком производной.

8.1. Определить промежутки монотонности функций:

а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = \log_a(x-1)$; $a < 1$; в) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

г) $y = (x+1)^3(x-3)$; д) $y = x^2|x|$.

Решение. а) Функция определена для всех значений x, т. е. область ее существования $(-\infty;+\infty)$. Находим производную $y = 3x^2$. Очевидно, что при любом x $y' > 0$, следовательно, функция возрастает на всем промежутке (рис. 2.17).

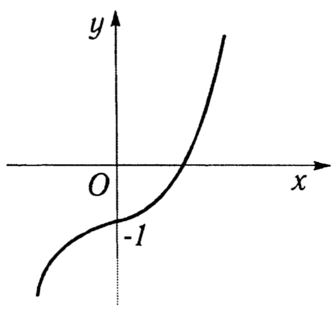


Рис. 2.17

б) Функция существует для всех $x>1$, т. е. область ее существования $(1,\infty)$. Находим производную $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln a}$. Поскольку $a<1$, то $\ln a < 0$ и y' для всех $x>1$ меньше нуля.

Следовательно, данная функция на промежутке $(1,\infty)$ убывает (рис. 2.18).

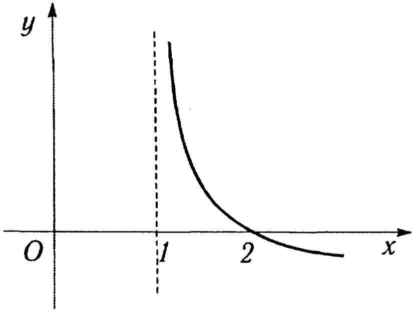


Рис. 2.18

в) Функция определена для всех x кроме $x=1$, где она терпит разрыв. Находим производную $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ и приравниваем ее к нулю $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=2$.

Учитывая точку разрыва $x=1$, разбиваем числовую ось на промежутки (рис. 2.19) и определяем знак производной на каждом из них. Следовательно, функция возрастает на промежутках $(-\infty,0)$ и $(2,\infty)$ и убывает - $(0,1)$ и $(1,2)$. На рис. 2.20 показан график функции.

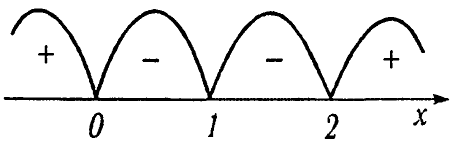


Рис. 2.19

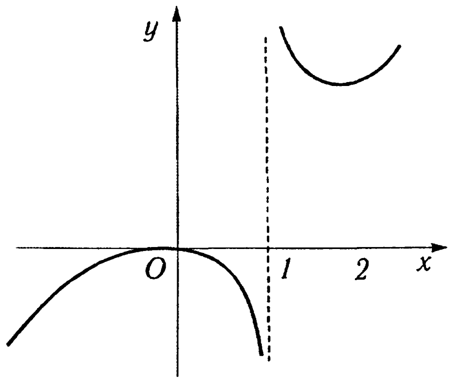


Рис. 2.20

г) Функция определена на всей числовой оси x. Находим производную $y' = 3(x+1)^2(x-3) + (x+1)^3 = 4(x+1)^2(x-2)$. Из уравнения $(x + 1)^2(x - 2) = 0$ определяем корни производной $x_{1,2} = -1$ и $x_3 = 2$. Корни уравнения определяют три промежутка $]-\infty, -1]$; $]-1, 2]$ и $]2, \infty[$. Из выражения производной видно, что при переходе через корень $x_{1,2} = -1$ производная не меняет знака. При $x < -1$ и при $-1 < x < 2$ имеем: $y' < 0$, следовательно, функция убывает. При $x > 2$ производная $y' > 0$, следовательно функция возрастает.

д) Функция y определена на всей числовой оси. Находим ее производную

$$y' = \begin{cases} 3x^2 & \textit{при} \quad x > 0; \\ -3x^2 & \textit{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что функция при $x < 0$ убывает, так как $y' < 0$ при любом значении x, а при $x > 0$ возрастает, так как $y' > 0$.

График этой четной функции показан на рис. 2.21.

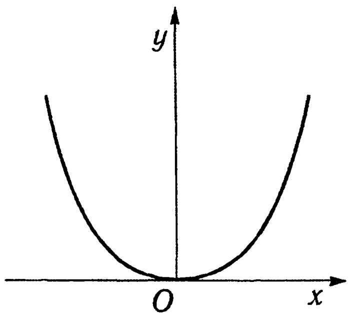


Рис.2.21.

8.2. Доказать справедливость неравенств: а) $tgx > \frac{x^3}{3} + x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$; б) $x > \ln(1+x)$ при $x > 0$; в) $x - \frac{x^3}{3} < \sin x < x$ при $x > 0$.

Решение. а) Найдем производную функции $y = tgx - \frac{x^3}{3} + x$ для указанных значений x: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - x^2 - 1 = tg^2 x - x^2$.

Поскольку $tg^2x - x^2 > 0$, так как $tg^2x > x^2$, $tgx > x$, то $y' > 0$ и функция возрастает, откуда $tgx - \frac{x^3}{3} - x > 0$ или $tgx > \frac{x^3}{3} + x$.

б) Найдем производную функции $y = x - \ln(1+x)$: $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$. При x=0 функция имеет минимум, а при

$x > 0,\ \ y' > 0$ и функция возрастает. Следовательно, $x - \ln(1+x) > 0$, откуда $x > \ln(1+x)$.

в) Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} < \sin x, \\ \sin x < x. \end{cases}$$

Введем функции $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} - \sin x,\ \varphi(x) = \sin x - x$ и найдем их производные $f'(x) = 1 - x^2 - \cos x,\ \varphi'(x) = \cos x - 1$. При $x > 0,\ f'(x) < 0$, так как $1 - x^2 < \cos x$, и $\varphi'(x) < 0$ или равна нулю для значений $x = 2\pi\kappa\ \ (\kappa = 0,1,2...)$, так как $cosx$<1.

Функции убывающие, следовательно $x - \dfrac{x^3}{3} - \sin x < 0,$ и $\sin x - x < 0$, откуда $x - \dfrac{x^3}{3} < \sin x < x$.

2.9. Максимум и минимум функции

1⁰. Значение функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется *максимальным (минимальным),* если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0.

Максимум и минимум функции называется *экстремумом* функции. Значения аргумента, при которых функция имеет экстремум, называются *критическими значениями или критическими точками.*

Чтобы найти экстремальные значения функции, надо найти ее производную $f'(x)$ и, приравняв ее к нулю, решить уравнение $f'(x) = 0$. Корни этого уравнения, а также точки, производная в которых не существует, являются критическими точками, т. е. значениями аргумента, при которых может быть экстремум.

Если знак производной при переходе через точку x_0 меняется с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если знак производной меняется с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума; если знак не меняется, то в точке x_0 экстремума нет.

Иногда проще исследовать критическую точку по знаку второй производной.

Если в критической точке, где первая производная равна нулю, $f''(x)<0$, x_0 есть точка минимума; если $f''(x)<0$, то x_0 есть точка максимума; если $f''(x_0)=0$, то такую точку исследуют по первой производной.

2⁰. Если функция задана неявно $F(x,y)=0$, то для того чтобы $y'=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=0$, должно выполняться равенство $F'_x(x,y)=0$. Здесь F'_x и F'_y производные от функции F по x и y, найденные в предположении, что y и x не зависят от x и y, соответственно.

Решая совместно $F(x,y)=0$ и $F'(x,y)=0$, находим критические точки. Экстремум функции в критических точках находят по знаку второй производной $y''_{xx}=-\dfrac{F''_{xx}}{F'_x}$. Если в критической точке $y''_{xx}<0$, то это точка максимума; если $y''_{xx}>0$, то это точка минимума.

9.1. Исследовать на экстремум функции:

а) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$; *б*) $y=x(x-2)^3$.

Решение. а) Находим производную $y'=x^2-x-2$. Приравниваем ее к нулю $x^2-x-2=0$. Корни этого уравнения $x_1=-1$; $x_2=2$ являются критическими точками.

Представим производную в следующем виде $y' = (x+1)(x-2)$ и рассмотрим методом интервалов, как меняется знак при переходе через критические точки (рис. 2.22).

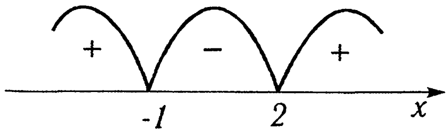


Рис. 2.22

При переходе через точку x_1 = -1 производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через x_2 = 2 с минуса на плюс. Значит, при x_1= -1 функция имеет максимум, а при x_2 = 2 функция имеет минимум.

Находим экстремальные значения функции: $f(-1) = \frac{7}{6}$ - максимум функции; $f(2) = -\frac{10}{3}$ минимум функции. График функции показан на рис. 2.23.

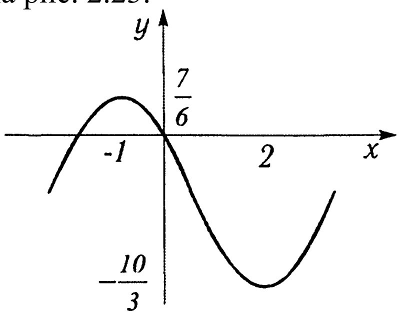


Рис. 2.23

б) Находим производную $y' = 2(x-2)^2(2x-1)$ и приравниваем ее к нулю $(x-2)^2(2x-1) = 0$. Корни этого уравнения x_1= 2, $x_2 = \frac{1}{2}$ являются критическими точками.

При переходе через точку x_1 =2 производная знака не меняет, поскольку данный множитель в квадрате, а при переходе через точку меняет знак с минуса на плюс. Значит, при $x_2 = \frac{1}{2}$ функция имеет минимум.

Находим экстремальные значения функции, а именно минимум функции $f(\frac{1}{2}) = -\frac{27}{16}$. График функции показан на рис. 2.24.

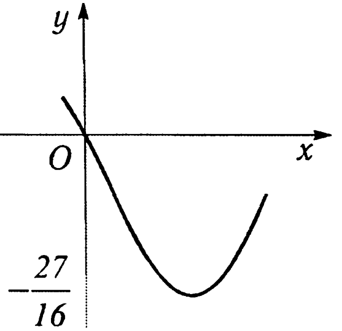


Рис.2.24

9.2. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$; *б)* $y = x^3 - \frac{x^4}{4}$; *в)* $y = 4x - 5\sqrt[5]{x^4}$.

Решение. а) Находим первую производную $y' = x^3 - 4x$ и приравниваем ее к нулю $x(x^2 - 4) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$ являются критическими точками.

Находим вторую производную $y'' = 3x^2 - 4$ и выясним знак второй производной в критических точках: $y''(0) < 0$ - функция имеет максимум; $y''(2) > 0$ - функция имеет минимум; $y''(-2) > 0$ - функция имеет минимум. Определяем экстремальные значения функции: $f(0) = 0$ - максимум функции; $f(2) = -3$ - минимум функции; $f(-2) = -3$ - минимум функции. График функции показан на рис. 2.25.

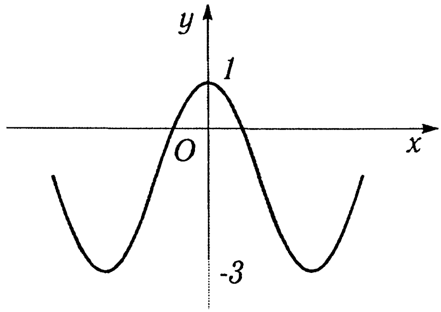


Рис. 2.25

б) Находим первую производную $y' = 3x^2 - x^3$ и приравниваем ее к нулю $x_2(3\text{-}x) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ являются критическими точками.

Находим вторую производную $y'' = 3x(2 - x)$ и выясним знак в критических точках.

При $x_2 = 3$ вторая производная $y''(3) < 0$ - функция имеет максимум. При $x_1 = 0$ вторая производная $y''(0) = 0$, следовательно, судить об экстремуме нельзя. Проверим наличие экстремума по первой производной. Поскольку при переходе через точку $x_1 = 0$ первая производная знака не меняет, то в точке $x_1 = 0$ экстремума нет.

Определяем в точке $x_2 = 3$ максимальное значение функции $f(3) = \dfrac{27}{4}$. График функции показан на рис. 2.26.

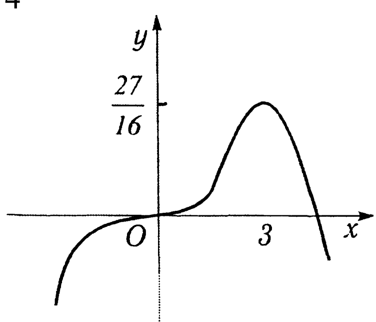


Рис. 2.26

в) Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = 4 - 4\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}\left(\sqrt[5]{x} - 1\right)$. Приравниваем производную к нулю $\left(\sqrt[5]{x} - 1\right) = 0$ и находим критическую точку x_1=1. При переходе через точку x_1 = 1 производная y' меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке x_1 = 1 функция имеет минимум $y(1) = -1$.

Приравнивая к нулю знаменатель производной, получаем $\sqrt[5]{x}$ =0. Отсюда находим критическую точку функции x_2 = 0, в которой производная не существует. Очевидно, что в точке $x - 0$ производная $y' > 0$, а в точке $x + 0$ производная $y' < 0$. Следовательно, x_2 = 0 есть точка максимума функции $y(0) = 0$ (рис. 2.27).

9.3. Найти экстремальные значения функций:

а) $xy^2 - x^2y = 2a^3$; *б)* $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. а) Функция задана неявно. Находим $F'_x = y^2 - 2xy$.

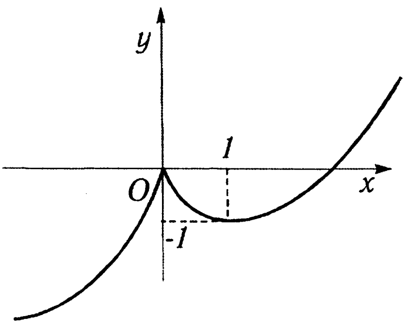


Рис. 2.27

Производная y' = 0 тогда, когда $F'_x = 0$, т. е. $y^2 - 2xy = 0$.

Решая совместно систему

$$\begin{cases} xy^2 - x^2y = 2a^3, \\ y^2 - 2xy = 0, \end{cases}$$

находим критическую точку $x = a,\ y = 2a$.

Вычисляем вторую производную $y''_{xx} = \dfrac{2y}{2xy - x^2}$. В критической точке $y''_{xx} = \dfrac{4}{3a}$ и $y''_{xx} > 0$, если $a > 0$, и $y''_{xx} < 0$, если $a<0$.

Таким образом, функция y при $a > 0$ имеет минимум, а при $a < 0$ имеет максимум.

б) Находим $F'_x = 4x^3 - 4y$, $F'_y = 4y^3 - 4x$ и приравниваем к нулю $F'_x = 0$, $x^3 - y = 0$.

Из решения системы

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 4xy = 0, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

находим критические точки $x = 0$, $y = 0$; $x = \sqrt[8]{3}$, $y = \sqrt[8]{27}$ и $x = -\sqrt[8]{3}$, $y = -\sqrt[8]{27}$.

Вычисляем вторую производную $y''_{xx} = \dfrac{3x^2}{y^3 - x}$ и определяем ее знак в критических точках. Поскольку при $x = 0$, $y = 0$ и $F'_y = 0$, то в окрестности этой точки уравнение может определять y как неоднозначную функцию от x, поэтому точку (0,0) оставляем в стороне.

При $x = \sqrt[8]{3}$ вторая производная $y''_{xx} = -\dfrac{3\sqrt[8]{9}}{3\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{3}} = -\dfrac{3\sqrt[8]{3}}{2} < 0$, т. е. при $x = \sqrt[8]{3}$ функция имеет максимум, равный $y_{\max} = \sqrt[8]{27}$. При $x = -\sqrt[8]{3}$ вторая производная $y''_{xx} = -\dfrac{3\sqrt[8]{9}}{-3\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{3}} = \dfrac{3\sqrt[8]{3}}{4} > 0$, т. е. функция имеет минимум, равный $y_{\min} = -\sqrt[8]{27}$.

2.10 Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшим значением функции $y = f(x)$ на некотором отрезке [a,b] называется самое большое, а наименьшим значением - самое меньшее из всех ее значений.

Если функция непрерывна в некотором интервале и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале (конечном или бесконечном).

При определении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [a,b] приравнивают первую производную к нулю $y' = 0$ и находят критические точки, лежащие внутри отрезка [a,b]. Далее вычисляют значения функции в этих точках и на концах отрезка [a, b], т. е. находят $f(a)$ и $f(b)$. Из сравнения значений функции в этих точках определяют наибольшее и наименьшее значение функции.

10.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: а) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $[-2;2]$;

б) $y = x + \cos 2x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$; в) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 20$, [-6,2].

Решение. а) Находим производную функции

$y' = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ и приравниваем ее к нулю $x^2 - 1 = 0$.

Отсюда критические точки будут $x = 1$, $x = -1$. Поскольку критические точки лежат внутри интервала, то находим значения функции в этих точках $y(1) = \dfrac{1}{2}$; $y(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Вычисляем значения функции на концах отрезка $[-2{,}2]$: $y(-2) = -\frac{2}{5}$; $y(2) = \frac{2}{5}$.

Теперь сравниваем значения функции в критических точках и в точках на концах отрезка. Из сравнения видно, что наибольшее значение функции будет $y(1) = \frac{1}{2}$, а наименьшее $y(-1) = -\frac{1}{2}$. График функции на отрезке [-2;2] показан на рис. 2.28.

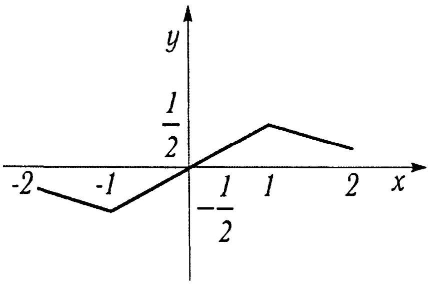


Рис. 2.28

б) Вычислим производную $y' = 1 - 2\sin 2x$, приравняем ее к нулю $1 - 2\sin 2x = 0$ и находим критические точки, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

В данном случае имеем только одну критическую точку $x = \frac{\pi}{12}$.

Вычисляем значение функции в критической точке и на концах отрезка

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} + \pi}{12}, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi - 3}{6}.$$

Сравнение найденных значений функции показывает, что наибольшее значение в точке экстремума $y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$, наименьшее на конце отрезка $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi-3}{6}$. График функции на отрезке $[0;\dfrac{\pi}{3}]$ показан на рис. 2.29.

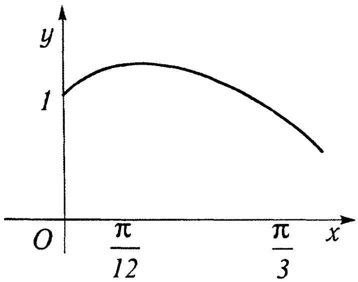


Рис. 2.29

в) Вычисляем производную $y'=3x^2+6x-9$ и, приравнивая ее к нулю, находим критические точки $x^2+2x-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$. Поскольку критические точки лежат внутри отрезка $[-6,2]$, вычисляем значения функции в критических точках $y(1)=15$, $y(-3)=47$. Находим значение функции на концах отрезка $y(-6)=-34$, $y(2)=22$.

Сравнивая вычисленные значения функции в критических точках и на границе отрезка, заключаем, что наибольшее значение находится в критической точке $x=-3$ и равно $y(-3)=47$, а наименьшее в граничной точке $x=-6$ и равно $y\{-6)$ = -34 (рис. 2.30).

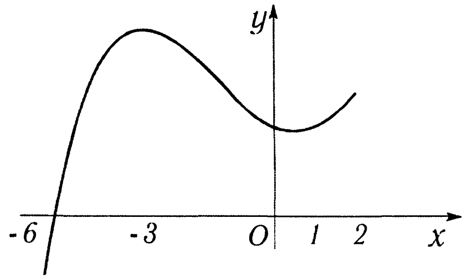


Рис. 2.30

10.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$; б) $\varphi(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; *в)* $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

а) Функция определена на всей числовой оси, а изменение аргумента *x* не ограничено каким-либо отрезком, поэтому следует исследовать значения функции при $x \in \left]-\infty; \infty\right[$.

Вычисляем производную $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и, приравнивая ее к нулю, находим критическую точку *x = 0*. При переходе через эту точку производная функции меняет знак с + на -, следовательно, *x=0* точка максимума *f*(0) = 1. При $x \to \pm\infty$ функция бесконечно убывает, но наименьшего значения не имеет (рис. 2.31).

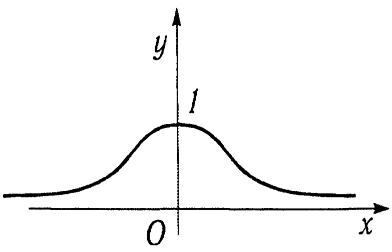


Рис.2.31

б) Функция определена на всей числовой оси. Изменение аргумента не ограничено отрезком, поэтому рассмотрим значения функции при $x \in]-\infty;\infty[$.

Находим производную $\varphi'(x) = 4\sin^3 x\cos^3 x - 4\cos^3 x\sin x$ и приравниваем ее к нулю $2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$, откуда $\sin 2x\cos 2x = 0$, $\sin 2x = 0$, $\cos 2x = 0$, $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Подставляя найденные критические точки в функцию находим, что при $x = \frac{\pi n}{2}$ (n = 0, ± 1, ± 2,...) функция имеет наибольшие значения равные единице, а при $x = \frac{\pi}{4}(1 + 2n)$ (n = 0, ± 1, ± 2,...) - наименьшие значения равные $\frac{1}{2}$.

в) Функция задана и определена на всей числовой оси. Исследуем значения функции при $x \in]-\infty;\infty[$. Найдем производную $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. В точке $x = 0$ производная не существует. Значение функции при $x = 0$ равно -1. При $x \to \pm\infty$ функция неограниченно возрастает.

Следовательно, наименьшее значение функции будет $f(0) = -1$, а наибольшего значения функция не имеет (рис. 2.32).

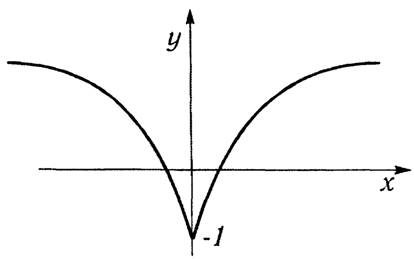


Рис.2.32

2.11. Решение задач на максимум и минимум

При решении задач на максимум и минимум по условиям задачи следует составить функцию, приняв одну из переменных за основную и выразив все остальные переменные через нее.

Далее следует исследовать эту функцию на экстремум по искомой переменной, т. е. найти наибольшее или наименьшее значение полученной функции. Интервал изменения независимой переменной определяется из условий задачи.

11.1. Объем цилиндра V. ***Найти*** радиус основания, при котором цилиндр имеет наименьшую полную поверхность.

Решение. Полную поверхность цилиндра принимаем за функцию.

$S = S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi(R^2 + RH)$, где Н - высота цилиндра, R - радиус основания. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, отсюда $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$. Исключая H из выражения полной поверхности цилиндра, получим $S = 2\pi\left(R^2 + \dfrac{V}{\pi R}\right)$.

Вычисляя производную по R: $S' = 2\pi\left(2R - \dfrac{V}{\pi R^2}\right)$ и приравнивая ее к нулю $2R - \dfrac{V}{\pi R^2} = 0$, находим, что минимум наименьшей полной поверхности будет при радиусе $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Действительно, вторая производная при $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ равна $S' = 2\pi\left(2 + \dfrac{2V}{\pi R^3}\right) = 12\pi > 0$.

То есть найденное значение радиуса определяет наименьшую полную поверхность.

11.2. В данный шар **вписать** конус с наибольшим объемом.

Решение. Объем конуса, вписанного в шар (рис. 2.33), равен $V = \frac{1}{3}\pi H r^2$, где H - высота конуса, r - радиус основания.

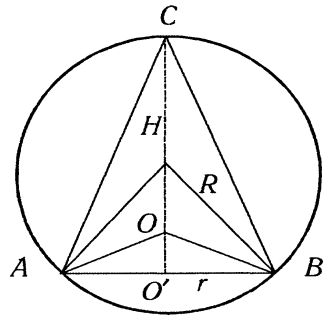


Рис. 2.33

Обозначим за R - радиус шара, тогда из $\Delta OO'B$ имеем:

$(OB)^2 = (OO')^2 + (O'B)^2, \quad R^2 = (H - R)^2 + r^2; \quad r^2 = 2HR - H^2$.

Отсюда $V = \frac{1}{3}\pi(2H^2R - H^3)$. Принимая объем конуса за функцию, наибольшую его величину находим, исследуя эту функцию на экстремум:

$$V'_H = \frac{\pi}{3}(4HR - 3H^2),\ 4HR - 3H^2 = 0,\ H = 0,\ H = \frac{4}{3}R.$$

При $H = 0$ функция, естественно, не может иметь наибольшего объема. При $H = \frac{4}{3}R$ производная V'_H меняет знак с плюса на минус, т. е. функция имеет максимум. Следовательно, наибольший объем конуса, вписанного в шар, при высоте конуса $H = \frac{4}{3}R$ где радиус шара $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

11.3. На эллипсе $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$ даны две точки $A(\sqrt{3};-2)$ и $B(-2\sqrt{3};1)$. ***Найти*** на данном эллипсе третью точку С такую, чтобы площадь треугольника *ABC* была бы наибольшей.

Решение. Обозначим координаты искомой точки С за *x, y,* тогда площадь треугольника по формуле

$S=\frac{1}{2}\left|\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]\right|$ будет иметь

вид $S=\frac{1}{2}(\sqrt{3}(1-y)-2\sqrt{3}(y+2)+x(-2-1))=$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-3\sqrt{3}y-4\sqrt{3}-3x)$$

Из уравнения эллипса, как уравнения связи, находим $x=\pm\sqrt{15-3y^2}$

Рассматривая площадь треугольника как функцию, исследуем ее на экстремум, беря производную по *y:* $S'_y=\frac{1}{2}(-3\sqrt{3}-3x'y),$

$$\frac{2xx'_y}{15}+\frac{2y}{5}=0,\quad x'_y=-\frac{3y}{x},\ S'_y=\frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3}+\frac{9y}{\pm\sqrt{15-3y^2}}\right),$$

$$\sqrt{3}\sqrt{15-3y^2}-3y=0,\quad y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\quad x=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

При отрицательном значении *y* производная знака не меняет. При переходе через точку

$y=\sqrt{\frac{5}{2}},\quad x=\sqrt{\frac{15}{2}}$ производная S'_y меняет знак с плюса на минус, следовательно, если координаты точки $C\left(\sqrt{\frac{15}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$,то площадь треугольника *ABC* наибольшая.

11.4. Число 64 ***разложить*** на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение. Обозначим множители за x и y тогда $xy = 64$.

Сумму квадратов обозначим за $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + \frac{64^2}{x^2}$.

Найдем минимум функции:

$$z' = 2x - 2\frac{64^2}{x^3},\ x^4 - 64^2 = 0,\ (x^2 - 8^2)(x^2 + 64) = 0.$$

Производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = 8$ (рис. 2.34), т. е. функция имеет минимум, следовательно, при $x = 8$, $y = 8$ сумма квадратов наименьшая.

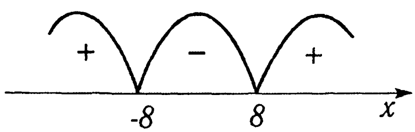


Рис. 2.34

11.5. Из углов квадратного листа железа со стороной a нужно ***вырезать*** одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 2.35), получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата?

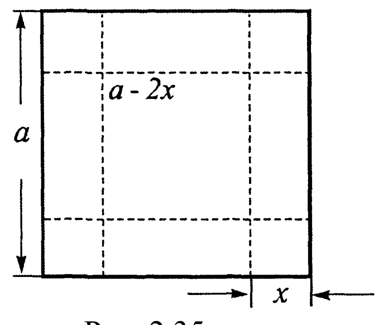


Рис. 2.35

Решение. Если обозначить сторону вырезаемого квадрата через x, то сторона основания коробки будет равна $a - 2x$, а высота - x. Объем коробки выразится функцией $V = x(a-2x)^2$, причем $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Находим максимум этой функции:

$V' = (a-2x)(a-6x)$, $(a-2x)(a-6x) = 0$. Производная меняет знак с плюса на минус при переходе через $x = \frac{a}{6}$ (рис. 2.36). Следовательно, наибольшая вместимость коробки будет при стороне вырезаемых квадратов равной $\frac{a}{6}$.

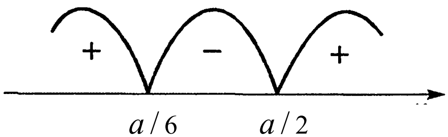


Рис.7.36

11.6. Кусок угля массы m, лежащий на горизонтальной конвейерной ленте, должен быть сдвинут приложенной к нему силой (рис. 2.37). Под каким углом φ к горизонту следует приложить эту силу, чтобы величина ее была бы ***наименьшей***, если коэффициент трения угля по резине $\mu = 0{,}6$?

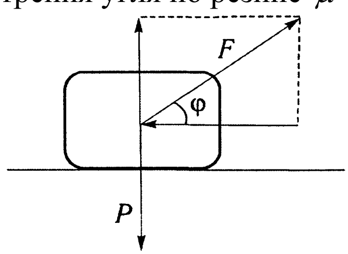


Рис.2.37

Решение. Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие: $F\cos\varphi$ и $F\sin\varphi$. $F\cos\varphi$ -сдвигающая сила. Прижимающую силу находим, как разность силы веса куска и вертикальной составляющей $mg - F\sin\varphi$, где g-

ускорение свободного падения. Согласно закону Кулона сдвигающая сила равна прижимающей, умноженной на коэффициент трения, т. е. $F\cos\varphi = \mu(mg - F\sin\varphi)$. Отсюда

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi}.$$

Наименьшее значение силы будет при наибольшем значении знаменателя $y = \cos\varphi + \mu\sin\varphi$. Для отыскания наибольшего значения y приравниваем y' к нулю, получим $-\sin\varphi + \mu\cos\varphi = 0$, откуда $tg\varphi = \mu$, $\varphi = arctg\mu$, при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $y'' = -\cos\varphi - \mu\sin\varphi < 0$, при $\varphi = arctg\mu$, то знаменатель y принимает наибольшее значение, а соответственно, сила - наименьшее, т. е. прилагать силу под углом φ наиболее выгодно.

Угол φ - называется углом трения и в нашем случае равен φ = arctg 0,6.

11.7. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.

Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром *d,* чтобы ее сопротивление на изгиб было ***наибольшим***?

Решение. Обозначим высоту балки через *h,* ширину через *b* (рис. 2. 38).

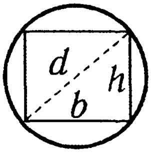


Рис. 2.38

Сопротивление на изгиб определяется функцией $y = bh^2$. Так как $h^2 = d^2 - b^2$, то $y = b(d^2 - b^2)$. Исследуем эту функцию на экстремум: $y = d^2 - 3b^2$, $d^2 - 3b^2 = 0$, $b = \frac{\sqrt{3}d}{3}$. Найдем вторую производную $y'' = -6b$, при $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, $y'' = -2\sqrt{3}d < 0$. Поскольку $y''<0$, то сопротивление балки на изгиб при $b=\frac{\sqrt{3}}{3}d$ будет наибольшим, высота балки при этом будет $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$.

11.8. Тело движется по закону $S = 21t + 3t^2 - t^3$. ***Найти*** его максимальную скорость.

Решение. Обозначим скорость $v = \frac{dS}{dt}$ за функцию, которую необходимо исследовать: $v = 21t + 3t^2 - t^3$.

Исследуем функцию: $v' = 6\text{-}6t$, при $t = 1$ производная $v' = 0$.

Так как $v'' = -6$ для любого t, то при $t = 1$ функция v имеет максимум, т. е. $v_{max} = 24$ ед.скорости.

11.9. Уравнение движения снаряда, вылетающего из ствола орудия с начальной скоростью v_0 имеют вид

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t, \\ y = v_0 \sin \alpha t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где t - время, g - ускорение свободного падения, α - угол между горизонтом и направлением вылета.

Определить, под каким углом следует произвести выстрел, чтобы получить наибольшую дальность полета, если орудие стоит у подножья возвышенности, поверхность которой наклонена под углом β к горизонту (рис. 2.39).

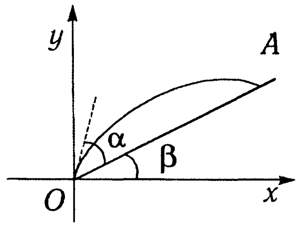


Рис. 2.39

Решение. Поскольку требуется найти наибольшую дальность полета в зависимости от α, то дальность полета x примем за функцию, а α - за независимую переменную. Для этого, исключая из уравнений движения t, запишем уравнение траектории $y = xtg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Из условия равенства ординат в точке A прямой OA (рис.2.39) $y = xtg\beta$ и уравнения траектории находим, что $xtg\beta = xtg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ или $x = \dfrac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha tg\beta)$.

Находим производную от дальности по α $\dfrac{dx}{d\alpha} = 2\dfrac{v_0^2}{g}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha tg\beta)$ и приравниваем ее к нулю $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha tg\beta = 0$, откуда $ctg 2\alpha = -tg\beta$, $2\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$ или $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$. Находим вторую производную

$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = 4\frac{v_0^2}{g}(-\sin 2\alpha + \cos 2\alpha tg\beta)$. При $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ вторая производная $\frac{d^2x}{d\alpha^2} < 0$, следовательно, найденный угол α обеспечивает наибольшую дальность полета.

11.10. Два источника света расположены друг от друга на расстоянии 25м. На прямой, соединяющей эти точки, ***найти*** наименее освещенную точку, если силы света источников относятся, как 27:8.

Решение. Пусть источники находятся в точках *А и В,* причем в точке *А* находится наиболее сильный источник. Считаем, что точка *С* наименее освещена и отстоит от точки *А* на расстоянии *x* (рис. 2.40), тогда $CB = 25 - x$. Если силу света более сильного источника принять за *I*, то сила света другого источника будет $\frac{8}{27}I$

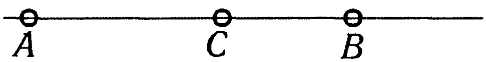


Рис. 2.40

Поскольку освещенность точки прямо пропорциональна силе света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до источника света, то, учитывая, что выбранная точка освещается обоими источниками света, функция освещенности в зависимости от расстояния примет вид

$$E = \frac{I}{x^2} + \frac{8}{27}\frac{I}{(25-x)^2}$$

Находим производную $E' = -2\frac{I}{x^3} + \frac{16}{27}\frac{I}{(25-x)^3}$ и приравниваем ее к нулю, откуда $(25-x)^3 - \frac{8}{27}x^3 = 0$ или $25 - x = \frac{2}{3}x$.

Таким образом, наименее освещенная точка отстоит от источника A на расстоянии $x = 15$м.

Докажем это. Возьмем вторую производную от освещенности $E'' = 6\frac{I}{x^4} + \frac{48}{27}\frac{I}{(25-x)^4}$. Нетрудно заметить, что E'' > О при x = 15, следовательно, точка C есть точка минимума функции.

11.11. Электрическая лампа висит над центром круглого стола радиуса r. ***На какой высоте*** над столом должна находится лампа, чтобы книга, лежащая у края стола, была лучше всего освещена?

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 2.41). Зная, что освещенность E прямо пропорциональна косинусу угла падения и обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света, составим функцию: $E = k\frac{\cos\alpha}{R^2}$, где $к$ = *const*. Из треугольника *SAO* находим: $R = \sqrt{x^2 + r^2}$, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$. Тогда $E = k\frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$.

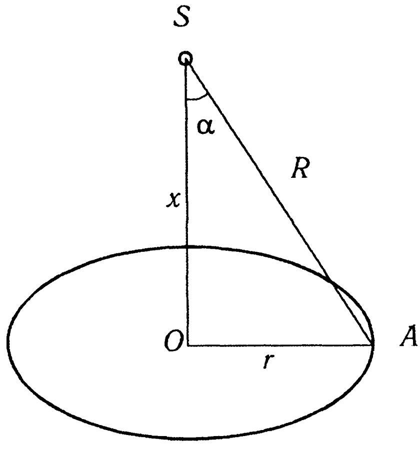


Рис. 2.41

Находим производную $E' = k\dfrac{r^2 - 2x^2}{(x^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$ и приравниваем ее к нулю $r^2 - 2x^2$ =0, откуда $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Чтобы выяснить, имеет ли функция при данном значении x максимум, находим знак второй производной при $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$: $E'' = k\dfrac{3x(2x^2 - 3r^2)}{(x^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}$,

$E''\left(\dfrac{r\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ - следовательно, функция имеет максимум и при высоте лампочки $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ книга лучше всего освещена.

11.12. Заводе A отстоит от железной дороги, проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. ***Под каким углом*** α к железной дороге надо провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов A и B была наиболее дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже, чем по железной дороге?

Решение. Обозначим стоимость перевоза груза на расстояние 1км по железной дороге за m руб., тогда стоимость перевоза по шоссе будет $2m$ руб. За b км обозначим расстояние от B до C (рис. 2.42). Из треугольника ACD длина шоссе $AD = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ км. Длина железной дороги $DB = b\text{-}a\operatorname{ctg}\alpha$, *км.*

Отсюда стоимость z перевозки груза с завода A в город B равна $z = \dfrac{2ma}{\sin\alpha} + m(b - ctg\alpha)$.

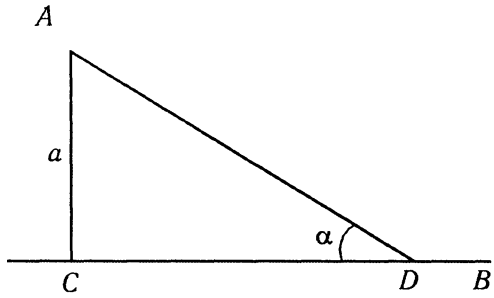


Рис. 2.42

Находим производную $\frac{dz}{d\alpha} = \frac{ma(1-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$ и приравниваем ее к нулю $1-2\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Исследуем функцию на экстремум при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ по знаку второй производной:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{2am(1-\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}, \quad z''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

Следовательно, функция имеет минимум и, чтобы доставка груза была наиболее дешевой, то шоссе следует проводить под углом $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

11.13. Два самолета летят с одинаковой скоростью v км/ч, в одной плоскости, прямолинейно и под углом 60° друг к другу, в некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до нее на a км.

Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему оно равно?

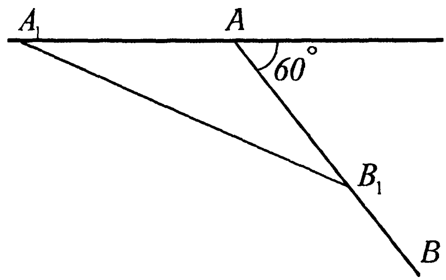


Рис. 2.43

Решение. По условию, когда один самолет был в точке A, другой был в точке B, отсюда $AB = a$ (рис. 2.43). За время t самолеты пройдут путь, соответственно: $AA_1 = vt$, $BB_1 = vt$. Отсюда $AB_1 = AB - BB_1 = a - vt$. Пусть расстояние между самолетами $A_1B_1 = S$, тогда по теореме косинусов получим

$$S = ((vt)^2 + (a - vt)^2 - 2vt(a - vt)\cos 120^\circ)^{\frac{1}{2}}$$ или

$$S = (v^2t^2 - 2vt + a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Найдем производную $\dot{S} = \dfrac{2v^2t - av}{2(v^2t^2 - avt + a^2)^{\frac{1}{2}}}$ и приравняем ее к нулю: $2v^2t - av = 0$, $t = \dfrac{a}{2v}$. Вторая производная

$$\ddot{S} = \frac{2v^2(v^2t^2 - avt + a^2) - \frac{1}{2}(2v^2t - av)^2}{2(v^2t^2 - avt + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$ при $t = \dfrac{a}{2v}$ больше нуля, следовательно, функция имеет минимум.

Наименьшее расстояние между самолетами через $t = \dfrac{a}{2v}$ будет равно $S = \left(v^2\dfrac{a^2}{4v^2} - av\dfrac{a}{2v} + a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

11.14. Стоимость топлива для судна пропорциональна кубу его скорости. ***При какой скорости*** судна общая сумма расходов на 1км пути будет наименьшей, если при скорости 20 км/ч расходы на топливо составляют 40 руб.в час, а остальные расходы 270 руб. в час?

Решение. Обозначим стоимость топлива через q, тогда $q = kv^3$, где $к$ - коэффициент пропорциональности найдем из условия $40 = k \cdot 20^3$, $к = 0{,}005$.

Общая стоимость плавания судна в течение часа в рублях находится по формуле $Q = a + q = a + kv^3$, где a = 270руб. остальные расходы. Затраты на 1км пути выразятся в виде функции $u(v) = \dfrac{Q}{v} = \dfrac{a}{v} + kv^2$.

Для нахождения общей наименьшей суммы расходов на 1км пути вычисляем производную $u' = -\dfrac{a}{v^2} + 2kv$ и приравниваем ее к нулю $2kv^3 - a = 0$. Подставляя числовые значения, получим v = 30 км/ч. Вторая производная

$$u'' = \frac{2a}{v^3} + 2k = \frac{540}{27000} + 0{,}01 = 0{,}03 > 0$$

следовательно, при скорости судна v = 30 км/ч общая стоимость расходов на 1км пути будет наименьшей и составит

$$u = \frac{270}{30} + 0{,}005 \cdot 30^2 = 13{,}5 \text{ руб.}$$

2.12. Направление выпуклости кривой. Точки перегиба

Если кривая расположена в некотором интервале ниже любой своей касательной, то она называется *выпуклой вверх,* а если кривая расположена выше любой своей касательной, то она называется *выпуклой вниз.*

Функция $y = f(x)$ выпукла вверх, если $f''(x) < 0$ и выпукла вниз, если $f''(x) > 0$. Если $f''(x_0) = 0$ в некоторой точке x_0, бесконечна или вовсе не существует и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то график функции в точке x_0 имеет перегиб. Если же $f''(x)$ сохраняет знак, то перегиба нет.

Чтобы исследовать кривую $y = f(x)$ на направление выпуклости, надо найти вторую производную и приравнять ее к нулю $f''(x) = 0$. Корни этого уравнения, а также возможные точки разрыва функции и второй производной разбивают область определения функции на ряд интервалов. Выпуклость на каждом из интервалов определяется знаком второй производной.

12.1. Исследовать на направление выпуклости и найти точки перегиба кривой: а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; *б)* $y = x^4 - x + 1$.

Решение. а) Функция определена для любого значения *x*.

Находим производные:

$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x$; $y'' = 36x^2 - 48x + 12$ и приравниваем вторую производную к нулю $(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$.

Корни этого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{3}$ разбивают область определения функции на три интервала. Определяем методом интервалов (рис.2.44) знак y'' на каждом промежутке.

Поскольку y'' при переходе через эти точки меняет знак, то в точках $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ функция имеет перегибы. На интервалах $]-\infty; \frac{1}{3}[$ и $]1;\infty[$ кривая выпукла вниз, а на интервале $]\frac{1}{3}, 1[$ выпукла вверх.

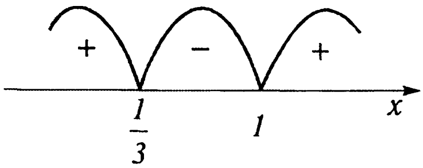


Рис. 7.44

б) Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю: $y' = 4x^3 - 1$; $y'' = 12x^2$; $12x^2 = 0$; $x = 0$.

При $x = 0$ вторая производная $y'' = 0$. Поскольку вторая производная при переходе через точку $x = 0$ знака не меняет и при любом значении x положительна, то кривая на всей числовой оси направлена выпуклостью вниз.

12.2. Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба кривой: а) $y = 1 + (x-3)^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{\frac{2}{3}}$; в) $y = 1 - \left|x^3 - 1\right|$

Решение. а) Находим: $y' = \frac{5}{3}(x-3)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-3}}$. Вторая производная не существует в точке $x = 3$ и не обращается в нуль ни при каких значениях x. При переходе через точку $x = 3$ вторая производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, точка (3,1) является точкой перегиба. Поскольку при $x \in]-\infty, 3[$ $y'' < 0$, то в этом интервале кривая выпукла вверх. При $x \in]3, \infty[$ $y'' > 0$, следовательно, кривая выпукла вниз.

б) Найдем вторую производную: $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$,

$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Производная y'' нигде в нуль не обращается. При $x = 0$ вторая производная не существует. При переходе через точку $x = 0$ вторая производная знака не меняет: $y''(0-\varepsilon)$, $y''(0+\varepsilon)>0$, $\varepsilon>0$. При $x\in]-\infty,\infty[$ $y''<0$, следовательно, кривая выпукла вверх на всей числовой оси.

в) Находим точки x, в которых $y''=0$ или не существует:

$y'=\pm 3x^2$, $y''=\pm 6x$, где знак плюс соответствует значениям $x\in]-\infty,1[$ $(x^3-1<0)$, а минус - $x\in]1,\infty[$ $(x^3-1>0)$.

Поскольку при x = 0 вторая производная $y''=0$, а при x = 1 не существует, то эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба. Знак y'' слева и справа от точек x = 0 и x = 1 показан на рис. 2.45. Так как y'' при переходе через точки $x=0$ и $x=1$

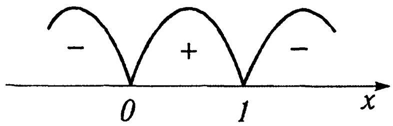


Рис. 2.45

меняет знаки, то x = 0 и x = 1 - абсциссы точек перегиба. При $x\in]-\infty,0]$ $y''<0$ - кривая выпукла вверх, при $x\in]0,1]$ $y''>0$ - кривая выпукла вниз, при $x\in]1,\infty]$ $y''<0$ - кривая выпукла вверх. Определяя ординаты точек перегиба $y(0)$ = 0, $y(0)$ = 1, строим кривую (рис. 2.46).

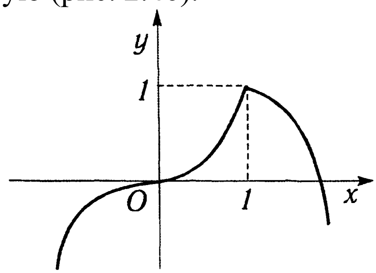


Рис. 2.46

2.13. Асимптоты кривой

1⁰. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* для кривой $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$, т. е. если расстояние от точки кривой до прямой стремится к нулю. Параметры k и b находятся с помощью пределов $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$.Если хотя бы один предел бесконечен, то асимптот нет.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.

Если $\lim\limits_{x\to a} = \infty$, то кривая $y = f(x)$ при приближении x к a будет безгранично приближаться, уходя в бесконечность, к вертикальной прямой $x = a$. Прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой.* Как правило, это точки разрыва.

2⁰. Если кривая задана параметрически $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, то исследуют, нет ли таких значений параметра t, при которых функции $\varphi(t), \psi(t)$ или одна из них обращается в бесконечность.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx+b$, где $k = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}$, $b = \lim\limits_{t\to t_0}(\varphi(t) - k\psi(t))$, причем $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \infty$.

Если при $\psi(t_0) = \infty, \varphi(t_0) = c$, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x=C$. Если при $\varphi(t_0) = \infty, \psi(t_0) = C$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = C$.

3⁰. Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат, то, преобразовав уравнение кривой к параметрическому виду по формулам $x = \rho\cos\varphi = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = \rho(\varphi)\sin\varphi$, ее асимптоты находят по предыдущему правилу.

4⁰. Если кривая задана уравнением $F\{x,y) = 0$ (т. е. неявно), то для отыскания асимптот в ряде случаев удобнее представить ее в полярных координатах или перейти к параметрическому виду.

Для алгебраической кривой $\sum\limits_{k,i} a_{ki}x^k y^i = 0$ суммирование идет по всем целым k и i; $(0 \le k \le n;\ \ 0 \le i \le n)$, наклонная асимптота $y = \kappa x + b$ находится подстановкой ее в уравнение кривой и приравниванием к нулю, в получившемся многочлене относительно x, коэффициентов при двух старших степенях x.

Из решения этой системы относительно κ и b находим параметры наклонной асимптоты.

Вертикальная асимптота алгебраической кривой находится из приравнивания к нулю коэффициента при старшей степени y.

13.1. Найти асимптоты кривых: а) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x - 1}$;

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. а) При $x = 1$ функция терпит разрыв, причем $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x - 1} = -\infty$, а $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x - 1} = \infty$. То есть прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

Находим параметры κ и b наклонной асимптоты

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 6}{x(x - 1)} = 1;\ b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 6}{x - 1} - x \right) = 4.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x + 4$. График кривой и асимптоты показаны на рис. 2.47.

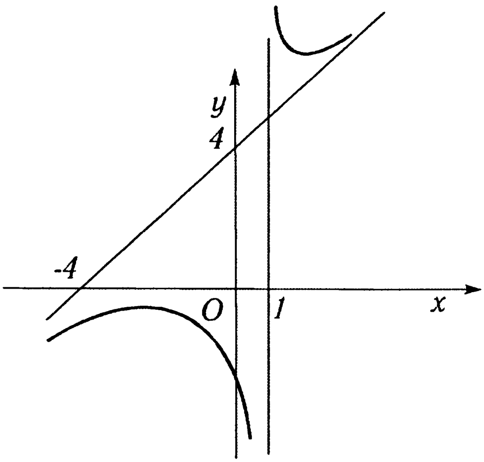


Рис. 2.47

б) Так как $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x}{x^2-1}=\infty$, то прямые x=1 и x=-1 будут вертикальными асимптотами.

Так как при $x\to\infty$ предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$, то прямая $y=0$ будет горизонтальной асимптотой.

Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x(x^2-1)}=0$ и b=0, то наклонных асимптот нет. График функции и асимптоты показаны на рис. 2.48.

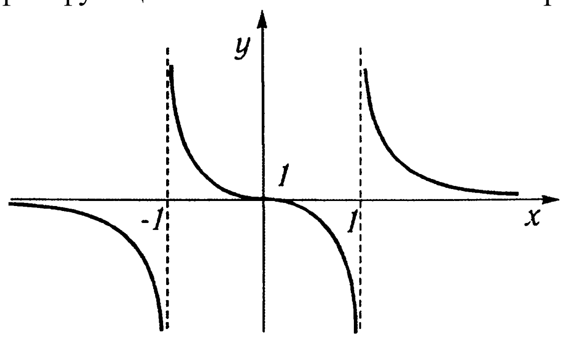


Рис. 2.48

в) Функция определена на всей числовой оси x, бесконечных разрывов не имеет, поэтому не имеет и вертикальных асимптот Определяем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0,\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = 0,$$

следовательно, $y = 0$ будет ее горизонтальной асимптотой.

Данная кривая бесчисленное множество раз пересекает свою асимптоту y=0, переходя с одной ее стороны на другую в точках $x = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$ и неограниченно приближаясь к ней (рис. 2.49).

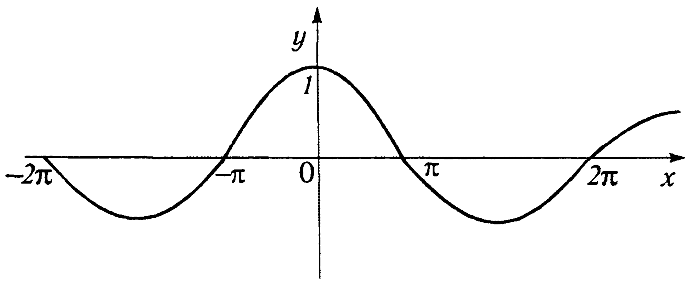


Рис. 2.49

13.2. Найти асимптоты кривых: а) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$;

Решение. а) Найдем горизонтальную асимптоту

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

следовательно, горизонтальная асимптота имеет вид y =1.

Найдем теперь вертикальную асимптоту:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,\ \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота (рис. 2.50).

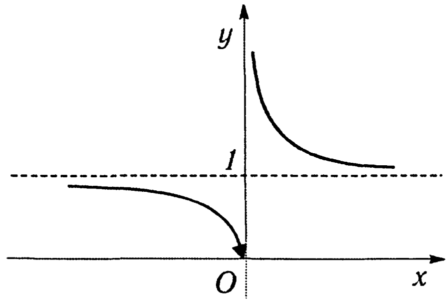


Рис. 2.50

б) Функция определена при $x \in]-\infty, 0]$ и $]1, +\infty[$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой кривой. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = \infty$, то горизонтальных асимптот кривая не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

1) $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x - x + 1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2}$$

следовательно, наклонная асимптота имеет вид $y = x + \dfrac{1}{2}$.

2) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x}, \quad b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)$

Сделаем замену: $x = -t,\ x\to-\infty,\quad t\to\infty$, тогда:

$$k=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{t^3}{t+1}}}{-t}=-\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t}{t+1}}=-\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{t}}}=-1,$$

$$b=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{t^3}{t+1}}-t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{t(\sqrt{t}-\sqrt{t+1})}{\sqrt{t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t(t-t-1)}{\sqrt{t+1}(\sqrt{t}+\sqrt{t+1})}=$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)}=-\frac{1}{2},$$

следовательно, наклонная асимптота имеет вид $y=-x-\frac{1}{2}$. График функции и асимптоты показаны на рис. 2.51.

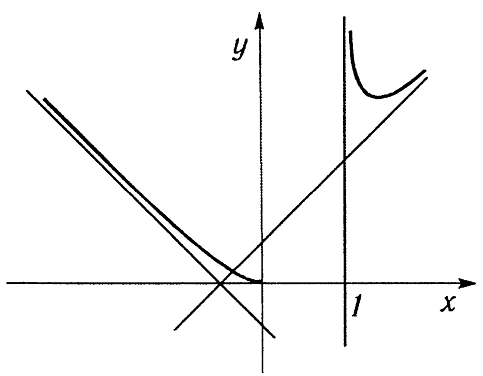


Рис. 2.51

13.3. Найти асимптоты кривых: а) $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{t}{t-1}$;

б) $x = \frac{e^t}{1-t^2}$, $y = \frac{te^t}{1-t^2}$; в) $\rho = \frac{a}{\varphi}$.

Решение. а) При $t \to 0$ $x \to \infty$; $y = \frac{0}{0-1} = 0$, следовательно, кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. При $t \to 1$: $x \to 1$; $y \to \infty$ следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

б) При $t \to \pm 1$ функция обращается в бесконечность. Ищем уравнения наклонных асимптот:

$$k = \lim_{t \to \pm 1} \frac{\frac{te^t}{1-t^2}}{\frac{e^t}{1-t^2}} = \pm 1,$$

$$b_1 = \lim_{t \to 1}\left(\frac{te^t}{1-t^2} - \frac{e^t}{1-t^2} \right) = \lim_{t \to 1} \frac{e^t(t-1)}{(1-t)(1+t)} = -\lim_{t \to 1} \frac{e^t}{1+t} = -\frac{e}{2},$$

$$b_2 = \lim_{t \to -1}\left(\frac{te^t}{1-t^2} + \frac{e^t}{1-t^2} \right) = \lim_{t \to -1} \frac{e^t(t+1)}{(1-t)(1+t)} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e},$$

следовательно, наклонные асимптоты имеют вид

$$y = x - \frac{e}{2}, \quad y = -x + \frac{1}{2e}.$$

в) Приведем уравнение заданное в полярных координатах к параметрическому виду: $x = \frac{a\cos\varphi}{\varphi}$, $y = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}$, где φ - параметр. При $\varphi \to 0$ $x \to \infty$,$y = a$, т. к. $\lim_{\varphi \to 0} \frac{a\sin\varphi}{\varphi} = a$. Следовательно, кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = a$ (рис. 2.52).

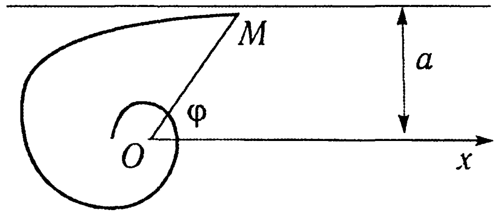


Рис. 2.52

13.4. Найти асимптоты кривых: а) $y^3 = 6x^2 + x^3$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$.

Решение. а) Поскольку коэффициент при старшей степени y (т.е. при y^3) равен 1, то вертикальных асимптот нет. Для нахождения наклонных асимптот подставим в данное уравнение $y = kx + b$, тогда получим

$$k^3x^3 + 3k^2x^2b + 3kxb^2 + b^3 - 6x^2 - x^3 = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при старших степенях x (т. е. при x^3 и x^2), получим систему

$$\begin{cases} k^3 - 1 = 0; \\ 3k^2b - 6 = 0. \end{cases}$$

Из решения системы имеем $k = 1$, $b = 2$. Таким образом, кривая имеет одну наклонную асимптоту $y = x+2$.

б) Так как функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой кривой. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x^2} = 0, \quad b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x} - 0\cdot x\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x} - 0\cdot x\right).$$

Сделаем замену: $x = -t,\ x \to -\infty,\ t \to \infty$, тогда

$$b = \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{|t^2 - 1|}}{-t} = -1.$$

Если найти вторую производную $f''(x) = -\dfrac{3x^2 - 2}{x^3 (x^2 - 1)^{3/2}}$ и учесть выпуклость, вогнутость и точки перегиба $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, то можно построить асимптоты и график функции (рис. 2.53).

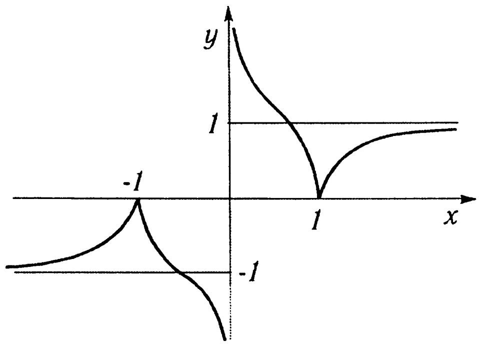


Рис. 2.53

2.14. Исследование функции и построение графиков

При исследовании функции и построении ее графика рекомендуется примерная схема:

1. Определить область существования функции. Найти точки разрыва функции и односторонние пределы в точках разрыва.

2. Выяснить, не является ли функция периодической, четной или нечетной, т. е. не симметричен ли график относительно оси ординат или начала координат.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

4. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции. Определить значения функции в точках экстремума, если такие существуют.

5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Определить значения функции в точках перегиба.

6. Определить асимптоты функции.

7. Построить график функции, используя все полученные данные.

По мере построения графика бывает очевидным, какие вопросы исследования целесообразно опустить, а какие добавить.

Если данных для построения недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения. Результаты исследования функции целесообразно заносить сразу же на рисунок, тогда к концу проведения исследования график будет практически построен.

14.1. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^4 - 8x^2 - 9$; б) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; в) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$;

г) $y = x^2 e^{-x}$; д) $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

Решение. а) Областью существования функции является вся числовая ось. Функция четная, следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

Полагая $x = 0$, находим точку пресечения графика с осью ординат y = -9.

Приведем функцию к виду $y = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$, тогда, решая уравнение $(x^2 + 1)(x^2 - 9)$=0, точки пересечения с осью абсцисс будут $x = \pm 3$.

Находим производную $y' = 4x^3 - 16x$ и приравниваем ее к нулю $4x^3 - 16x = 0$. Из решения уравнения $x(x^2 - 4) = 0$ находим критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Находим вторую производную $y'' = -12x^2 - 16$. Так как $y''(\pm 2) > 0$, то точки $x_2=2$ и $x_3 = -2$ есть точки минимума функции, а так как $y''(0) = 0$, то точка $x = 0$ есть точка максимума. Значения функции в экстремальных точках равны: $y(0) = -9$; $y(\pm 2) = -25$.

Чтобы отыскать возможные точки перегиба, решаем уравнение: $y'' = 0$; $12x^2 - 16 = 0$, откуда $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Так как y'' меняет свой знак при переходе через эти точки, то при этих значениях x график функции имеет перегиб. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{161}{9}$.

При неограниченном возрастании x по абсолютной величине функция стремится к бесконечности $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2 - 8x^2 - 9) = \infty$.

График функции показан на рис. 2.54.

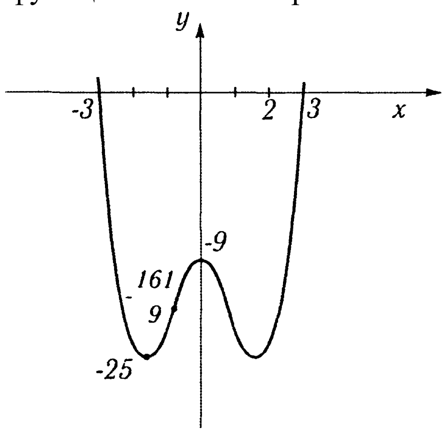


Рис. 2.54

б) Функция существует всюду, кроме точек $x = \pm\sqrt{3}$. Прямые $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами функции. Найдем односторонние пределы в точках разрыва

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = \infty; \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = \infty; \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Функция нечетна, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. При $x = 0$ имеем $y = 0$, следовательно, график функции проходит через начало координат.

Находим производную $y' = \dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$ и приравниваем ее к нулю $x^2(3-x)(3+x) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$.

Рассмотрим методом интервалов изменение знака y' при переходе через эти точки (рис. 2.55). Следовательно, в точке $x = -3$ функция имеет минимум $y(-3) = 4{,}5$, а в точке $x = 3$ имеет максимум $y(3) = 4{,}5$. При переходе через $x = 0$ производная знака не меняет, следовательно, в точке $x = 0$ экстремума нет.

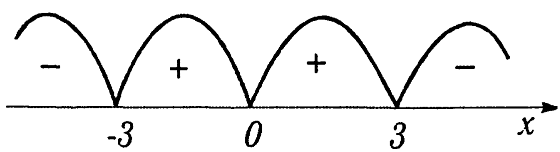


Рис. 2.55

Находим вторую производную $y'' = \dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^2}$. Вторая производная $y''=0$ при $x = 0$ и меняет знак с минуса на плюс при переходе через эту точку, следовательно, и точка $x = 0$ есть точка перегиба.

Находим асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)} = -1; \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0,$$

следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту $y = -x$. График функции показан на рис.2.56.

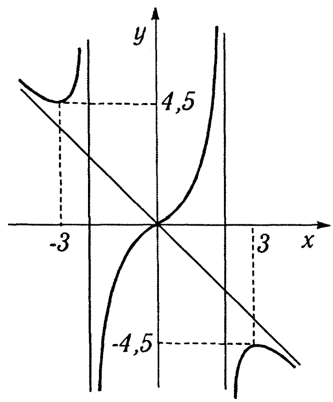


Рис. 2.56

в) Находим область существования функции. Функция существует при $\dfrac{x-2}{x+1}>0$, т. е. при $x\in]-\infty,-1[$ и $x\in]2,\infty[$ (рис. 2.57).

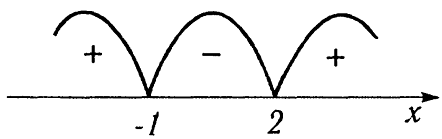


Рис. 2.57

Находим односторонние пределы

$$\lim_{x\to-1-0}\ln\frac{x-2}{x+1} = \infty, \quad \lim_{x\to2+0}\ln\frac{x-2}{x+1} = -\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-1, x=2$ являются вертикальными асимптотами.

Находим производную $y' = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$. Производная не обращается в нуль ни при каком значении x, значит экстремумов нет.

Найдем вторую производную $y'' = \dfrac{3(1-2x)}{(x+1)^2(x-2)^2}$ приравняем ее к нулю $1-2x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, но точка $x=\dfrac{1}{2}$ не входит в область существования функции. При $x < -1$ имеем $y'' > 0$ - кривая выпукла вниз; при $x > 2$ имеем $y'' < 0$ - кривая выпукла вверх.

Находим при $x \to \pm\infty$ предельное значение функции $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\dfrac{x-2}{x+1} = 0$, следовательно, прямая $y = 0$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 2.58.

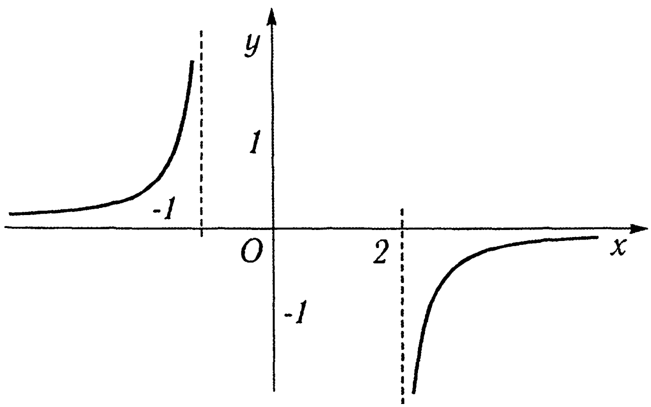


Рис. 2.58

г) Областью существования функции является вся числовая ось. При x = 0 функция равна нулю. Так как $x^2 \geq 0$, и $e^{-x} > 0$, то $y \geq 0$ при любом x.

Находим производную $y' = xe^{-x}(2-x)$ и приравниваем ее к нулю $xe^{-x}(2-x)=0$.

Решая это уравнение, находим критические точки x_1=0 и x_2 = 2. Поскольку производная меняет знак согласно схеме (рис. 2.59), то в точке x = 0 функция имеет максимум, равный нулю, а в точке x = 2 минимум, равный $y(2)=\frac{4}{e^2}$,

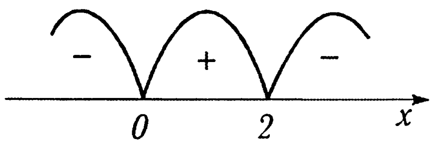


Рис. 2.59

Находим вторую производную $y'' = e^{-x}(2-4x+x^2)$ и приравниваем ее к нулю $e^{-x}(2-4x+x^2)$=0, откуда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Поскольку вторая производная меняет знак согласно схеме (рис. 2.60), то в точках $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ функция имеет перегиб и при $x < 2-\sqrt{2}$ кривая выпукла вниз, при $x \in]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$ кривая выпукла вверх, при $x \in]2+\sqrt{2}, \infty[$ кривая выпукла вниз.

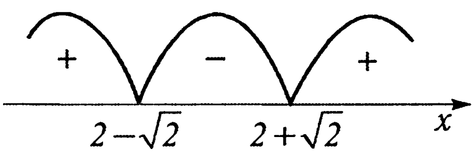


Рис. 2.60

Находим пределы:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0,$$

т. е. прямая $y = 0$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 2.61.

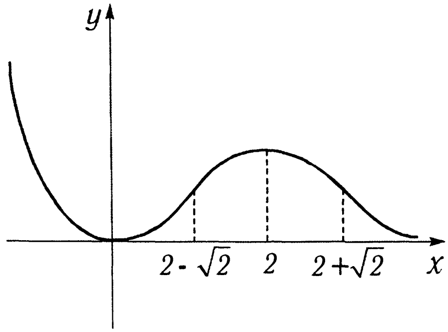


Рис. 2.61

д) Функция существует для всех значений x, кроме $x = 1$.

При $x = 1$ функция терпит разрыв. При $x = 0$ функция равна нулю. При $x \neq 0$ имеем $y > 0$, т. е. функция не отрицательна. Находим производную $y' = -\dfrac{2x}{(x-1)^3}$ и приравниваем ее к нулю: $x = 0$. Находим вторую производную $y'' = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ и определяем ее знак при $x = 0$. Поскольку $y''(0) > 0$, то при $x = 0$ функция имеет минимум, равный $y(0) = 0$.

Вторая производная $y'' = 0$ при $x = -\dfrac{1}{2}$ и меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через эту точку, следовательно, при $x = -\dfrac{1}{2}$ кривая имеет перегиб, ордината которого равна $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{9}$.

Находим предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=\infty$, т. е. прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота. При $x\to\pm\infty$ предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$, т. е. прямая $y = 1$ есть горизонтальная асимптота. График функции показан на рис. 2.62.

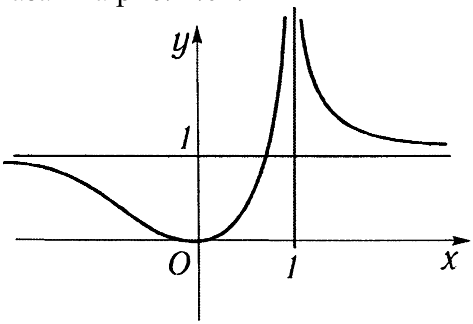


Рис. 2.62

14.2. Исследовать функции и построить их графики:

а) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ t\in[0,2\pi[;;$

б) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ t\in[0,2\pi]$;

в) $x=\dfrac{3at}{1+t^3},\ \ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

Решение. а) Функции определены для любого значения t. Поскольку функция x четная, а y нечетная, то график функции симметричен относительно оси ординат и начала координат, т.е. относительно координатных осей.

Полагая $x = 0$, находим, что $\cos t=0$ и $t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$.

При этих значениях t из выражения $y=a\sin^3 t$ находим, что $y=\pm a$.

Полагая $y = 0$, находим, что $\sin t=0$ и $t=0,\pi$. При этих значениях t из выражения $y=a\cos^3 t$ находим, что $x = \pm a$. Таким образом, график функции пересекает координатные оси в точках (a,0); (0,a); (-a,0); (0, -a).

Найдем производные

$$x_t' = -3a\cos^2 t\sin t,\ \ y_t' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$y_t' = \dfrac{y_y'}{x_t'} = -tgt,\ \ y_{xx}'' = \dfrac{(y_x')_t'}{x'_t} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$. Из выражения для производной y' определяем критические точки. При $t = 0,\ \ t = \pi$ производная равна нулю, а при $t = \dfrac{\pi}{2},\ \ t = \dfrac{3\pi}{2}$ - не существует.

Таким образом, область изменения параметра t разбивается на четыре интервала $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$; $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $и$ $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

При $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, производная $y_x' < 0$, а $y_x'' > 0$, т. е. функция убывает и график функции направлен выпуклостью вниз. При $t\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ $y_x' > 0$ и $y_{xx}'' > 0$, т. е. функция возрастает и график направлен выпуклостью вниз.

При $t\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $y' < 0$ и $y_{xx}'' < 0$, т. е. функция убывает и график направлен выпуклостью вверх. При $t\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ $y_x' > 0$, а $y_{xx}'' < 0$, т. е. функция возрастает и график направлен выпуклостью вверх. Кстати, пользуясь симметрией графика функции, этот анализ можно было ограничить изменением параметра только одним интервалом, например, $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

При $t = \{0,\pi\}$ производная $y_x' = 0,\ y = 0$ и касательные совпадают с осью x, т. е. точки (a,0) и (-a,0) будут точками возврата. При $t = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ производная y'_x не существует, а при $x = 0$, касательные совпадают с осью y и точки$(0,a)$, $(0,-a)$ будут также точками возврата. Учитывая все это, представим график функции (рис. 2.63). Полученная кривая представляет траекторию движения точки подвижного круга, катящегося изнутри по неподвижному кругу радиуса a, и называется астроидой.

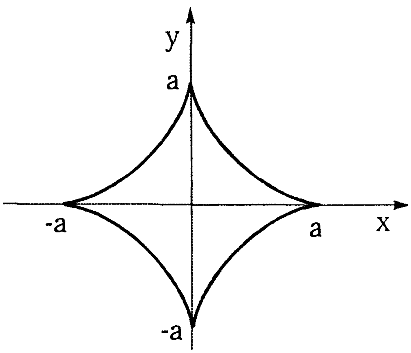


Рис. 7.63

б) Функция определена при любом значении параметра t из интервала $t \in [0,2\pi]$. Найдем точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0,\ \sin t = t,\ t = 0$. При $y = 0, \cos t = 1, t = 0, t = 2\pi$. Отсюда следует, что кривая при t=0 проходит через начало координат, а при $t = 2\pi$ пересекает ось Оx в точке $x = 2\pi a$.

Найдем производные

$$x'_t = a(1 - \cos t),\ \ y'_t = a\sin t,\ y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$y''_{xx} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{a(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

Приравнивая y'_x к нулю, из уравнения $\sin t = 0$ находим значения параметра в критических точках $t = \{0; \pi; 2\pi\}$. Первая производная не существует при $1 - \cos t = 0$, т. е. при значениях параметра $t = \{0;2\pi\}$. При переходе параметра через критические значения $t = \{0;2\pi\}$, т.е. в окрестности $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$, $(2\pi-\varepsilon,\ 2\pi+\varepsilon)$, где $|\varepsilon| > 0$, производная y'_x меняет знак с минуса на плюс. Отсюда следует, что касательная к графику функции в точках $x = \{0;2\pi a\}$ параллельна оси Оy, При $t = \pi$ вторая производная $y''_{xx} < 0$, т.е. точка $x = \pi a$ точка максимума функции $y = 2a$. Более того, поскольку $y''_{xx} < 0$ на всем интервале $t \in [0,2\pi]$, то кривая на этом интервале выпукла вверх.

При изменении t от 0 до π производная $y'_x > 0$, следовательно, кривая возрастает. При изменении t от π до 2π производная $y'_x < 0$, следовательно, кривая убывает. Все сказанное позволяет представить график в виде (рис. 2.64). Полученная кривая представляет траекторию точки круга радиуса a катящегося без скольжения по прямой Оx за время одного оборота круга и называется циклоидой.

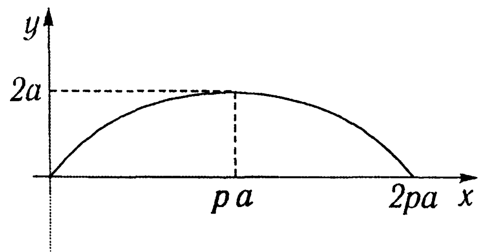


Рис. 2.64

в) Функция определена при всех значениях t, кроме t = -1.

При t = 0 координаты x = 0, y = 0 и при $t \to \pm\infty$ координаты $x, y \to 0$, т. е. начало координат служит особой точкой и в нем кривая сама себя пересекает.

Найдем наклонную асимптоту. Угловой коэффициент равен $k = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{3at^2}{1+t^3} \dfrac{1+t^3}{3at} \right) = -1.$

Параметр

$$b = \lim_{x \to -1} (y(t) - kx(t)) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a$$

Отсюда уравнение асимптоты $x + y + a = 0$.

При изменении t от $-\infty$ до -1 , точка (x,y) из начала координат удаляется в бесконечность, причем значения x - положительны, а y - отрицательны, т. е. ограничены асимптотой, расположенной в четвертом квадранте.

При изменении t от -1 до 0 точка (x,y) из бесконечности возвращается к началу координат, причем значения x - отрицательны, а y - положительны, т. е. ограничены асимптотой, расположенной во втором квадранте. При изменении t от 0 до $-\infty$ точка описывает против часовой стрелки петлю, расположенную, судя по значениям x,y, в первом квадранте.

Обозначая $t = \dfrac{y}{x}$, нетрудно перейти к уравнению функции в неявном виде $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Находим производные

$$f'_x = 3(x^2 - ay),\ F'_y = 3(y^2 - ax),\ y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Приравнивая $y'_x = 0$ и решая это уравнение совместно с уравнением $F(x,y) = 0$, находим критические точки $x = 0$, $y = 0$ и $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$. Вычислим y''_{xx} при $x = a\sqrt[3]{2}$ по формуле

$y''_{xx} = -\frac{F''_{xx}}{F'_y} = -\frac{6x}{3(y^2 - ax)}$. Так как в исследуемой точке $y''_{xx} < 0$, то это точка максимума $y_{\max} = a\sqrt[3]{4},\ x = a\sqrt[3]{2}$.

В точке (0,0) $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$, поэтому можно утверждать, что касательными в этой точке служат оси координат. Учитывая все это, представим график функции (рис. 2.65). Полученная кривая называется декартовым листом.

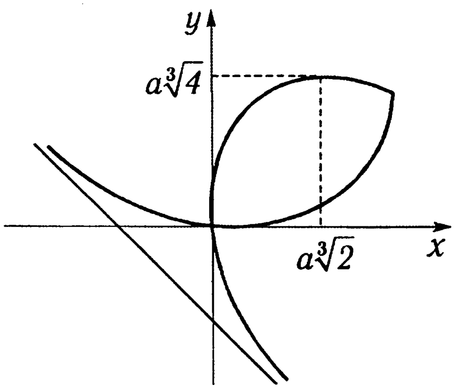


Рис. 7.65.

2.15. Формула Тейлора и Маклорена

1⁰. Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x_0 = a$, то она может быть представлена в виде суммы многочлена *n*-ой степени и остаточного члена R_n (формула Тейлора)

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \\ + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \end{aligned} \qquad (1)$$

где $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$; $c = a + \theta(x-a)$; $0 < \theta < 1$ – остаточный член в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (n-го порядка) позволяет представить функцию $f(x)$ в виде многочлена n-ой степени и оценить с помощью остаточного члена R_n возникающую при этом погрешность, которая может быть сделана сколь угодно малой.

2^0. При $a = 0$ формула (1) принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n, \qquad (2)$$

где $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$; $0 < \theta < 1$, и называется формулой Маклорена. К этому частному случаю формулу Тейлора можно свести с помощью перехода к новой независимой переменной $\xi = x - a$.

Остаточный член в формуле Тейлора иногда записывают в форме Пеано $R_n = O((x-a)^n)$, которая в ряде случаев бывает более удобна (вычисление пределов). Остаточный член в форме Пеано для формулы Маклорена имеет вид $R_n = O(x)^n$.

15.1. Для функций а) e^x; б) sin x; в) cos x; г) $(1 + x)^n$; д) 1n(1 + x), ***написать*** формулу Маклорена n-го порядка и оценить погрешность.

Решение. а) Если $f(x) = e^x$, то $f^{(n)}(x) = e^x$ при любом n=1,2,3, ...

Так как $f(0) = 1$ и $f^{(n)}(0) = 1$, то по формуле (2)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n.$$

Точность разложения определяется остаточным членом $R_n = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Оценим погрешность.

Так как $\left|R_n\right| < \dfrac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$, то, например, при $x = 1$, $\left|R_n(1)\right| < \dfrac{3}{(n+1)!}$; при $x = 2$, $\left|R_n(2)\right| < \dfrac{10 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$ и т. д. При любом значении x при $n \to \infty$ остаточный член стремится к нулю и чем больше n, тем точнее разложение. При $x = 1$ можно получить формулу для приближенного вычисления числа e

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

б) Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f(0) = 0$;

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = \cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0) = -1;$$

……………………..

$$f^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Разложение примет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_n.$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{x^{2m-1}}{(2m+1)!}\sin(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}) \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

т. к. $|\sin\alpha| \le 1$ и при $n \to \infty$ стремится к нулю независимо от значения x.

в) Если $f(x) = \cos x$, то $f(0) = 1$;

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0) = 0;$$

……………………..

$$f^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}.$$

Разложение примет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_n.$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\theta x + (2m+2)\frac{\pi}{2}) \le \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

т. к. $|\cos\alpha| \le 1$ и при $n \to \infty$ стремится к нулю независимо от значения x.

г) Рассмотрим степенную функцию $(1+x)^m$, где m – любое вещественное число.

Разложим $(1+x)^m$ по степеням *x*, т. е. в окрестности точки $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1+x)^m,\ f(1) = 1;$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f'(1) = m;$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},\quad f''(1) = m(m-1);$$

……………………..

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)...(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

$$f^{(k)}(1) = m(m-1)...(m-k+1).$$

Разложение примет вид

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{m(m-1)...(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$, $0 < \theta < 1$.

Здесь $R_n \to 0$ с возрастанием n только при $x \in]-1{,}1[$ т. е. погрешность может быть сколь угодно малой величиной только для значений из указанного интервала.

д) Находим производные и их значения в точке $x = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 1\cdot 2;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -1\cdot 2\cdot 3;$$

……………………..

Подставляя в формулу Маклорена, получим

$$\ln(1+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{n}{1+\theta x}\right)^{n+1}$.

Погрешность вычисления логарифма $R_n \to 0$ с возрастанием n только при $x \in]-1{,}1[$, т. е. в полуоткрытом интервале.

15.2. Разложить многочлен $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5$ по степеням двучлена $x+2$.

Решение. Введем обозначение

$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 5$ и найдем производные:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 3, \quad f''(x) = 12x^2 - 12x + 2,$$

$$f'''(x) = 24x - 12, \quad f^{(4)}(x) = 24, \quad f^{(n)}(x) = 0 \text{ для } n \geq 5.$$

При $x = -2$ имеем:

$$f(-2)=25,\ f'(-2)=-57,\ f''(-2)=74,\ f'''(-2)=36,$$
$$f^{(4)}(-2)=24.$$

Отсюда

$$x^4-2x^3+x^2+3x-5=$$
$$=25-57(x+2)+37(x+2)^2-10(x+2)^3+(x+2)^4.$$

15.3. Пользуясь формулой Тейлора, ***разложить*** функцию $f(x)=(x^3+2x-1)^2$ по степеням x.

Решение. Находим производные и их значения при $x=0$

$$f'(x)=2(x^3+2x-1)(3x^2+2),\ f'(0)=-4;$$
$$f''(x)=2((3x^2+2)^2+6x^4+12x^2-6x),\ f''(0)=8;$$
$$f'''(x)=12(2(3x^2+2)x+4x^3+4x-1),\ f'''(0)=12;$$
$$f^{(4)}(x)=12(30x^2+8),\ f^{(4)}(0)=96;$$
$$f^{(5)}(x)=720x,\ f^{(5)}(0)=0;$$
$$f^{(6)}(x)=720,\ f^{(6)}(0)=720.$$

Подставляя значение $f(0)=1$ и значения производных в формулу Тейлора при $x=0$, получим

$$(x^3+2x-1)^2=1-4x+4x^2-2x^3+4x^4+x^6$$

15.4. Представить функцию $\sqrt[4]{x}$ в виде многочлена четверной степени относительно $x-1$.

Решение. Находим значения функции и ее производных в точке $a=1$:

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}};\ f(1)=1;\ f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{4}{3}};\ f'(1)=\frac{1}{4};$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}};\ f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4};$$
$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}};\ f'''(x)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4};$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}x^{-\frac{15}{4}};f^{(4)}(x)=-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}.$$

По формуле (1) имеем

$$\sqrt[4]{x}=1+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3}\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4}\frac{(x-1)^4}{4!}+R_n$$

где $R_n=\dfrac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$; $c=1+\theta(x-1)$; $0<\theta<1$.

15.5. Написать разложение функции: а) $e^{\cos x}$ до члена с x^4; б) $\ln\cos x$ до x^6.

Решение. а) Пользуясь уже известным разложением (15.1. а) и принимая $\cos x$ за новую переменную, запишем

$$e^{\cos x}=1+\cos x+\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{\cos^3 x}{6}+\frac{\cos^4 x}{24}+O(\cos^4 x).$$

Так как по формуле (15.1. в) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+O(x^5)$, то окончательно имеем

$$e^{\cos x}=1+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\frac{x^4}{24}+$$

$$+\frac{1}{6}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2\frac{x^4}{24}+$$

$$+\frac{1}{24}\left(\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^4+4\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3\frac{x^4}{24}\right)+O(x^5)=$$

$$=\frac{1}{24}\left(65-32x^2+\frac{61}{6}x^4\right)+O(x^5).$$

б) Представим логарифм в виде $\ln\cos x=\ln(1+(\cos x-1))$ и воспользуемся разложением (15.1. д), принимая $\cos x-1$ за новую переменную

$$\ln\cos x=\cos x-1-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+\frac{1}{2}(\cos x-1)^3+O(x^6).$$

Здесь остаточный член $R_n = O(x^6)$, так как бесконечно малые x и $\sin x$ эквивалентны и, следовательно, $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ одного порядка с x^2.

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^7).$$

Отсюда

$$\ln\cos x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right) + O(x^6) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^6).$$

15.6. Вычислить с точностью 0,001 приближенные значения следующих чисел: а) $\sin 20°$; б) $\cos 45°$.

Решение. а) Воспользуемся формулой разложения $\sin x$ по степеням x (15.1,б), подставляя в нее радианную меру

$$x = \frac{\pi}{180}20 = \frac{\pi}{9}$$

$$\sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{3!9^3} + \frac{\pi^5}{5!9^5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!9^{2m-1}} + R_n.$$

При определении числа первых членов в данном разложении, необходимых для обеспечения требуемой точности вычислений, оценим величины последовательных остаточных членов

$$|R_1| \le \frac{\pi^3}{3!9^3} \le 0,006, \qquad |R_2| \le \frac{\pi^5}{5!9^5} \le 0,00003.$$

Поскольку $|R_2| < 10^{-3}$, то для получения требуемой точности достаточно взять первые два члена разложения, предшествующих R_2

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{3!9^3} = 0,3491 - 0,0071 = 0,342.$$

Здесь значение числа $\pi \approx 3{,}14159$ и результатов промежуточных вычислений взяты с одним лишним знаком, т. е. с точностью до 10^{-4}.

б) Представим функцию $\cos x$ по формуле Тейлора в виде

$$\cos x = \cos a + \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x-a}{1!} + \cos\left(a + 2\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^2}{2!} +$$

$$+ \ldots . + \cos\left(a + n\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n ,$$

$$R_n = \cos\left(a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1 .$$

Поскольку $\left|\cos a\right| \le 1$, то $\left|R_n\right| \le \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ и по мере увеличения числа членов погрешность неограниченно убывает, стремясь к нулю. Причем чем меньше по абсолютной величине разность $x-a$, тем меньше потребуется первых членов разложения для обеспечения требуемой точности вычислений.

Пусть $a = 60°$ или в радианной мере $a = \dfrac{\pi}{180}60$, тогда

$x - a = \dfrac{\pi}{180}(65-60) = \dfrac{\pi}{36}$, отсюда

$$\cos 65° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{1!36} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi^3}{3!36^2} + \ldots + R_n .$$

Поскольку $\left|R_4\right| < 10^{-4}$, то для получения требуемой точности достаточно взять первые три члена разложения, тогда $\cos 65° = 0.4221$.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. Найти производную функции:

1.1 $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.

1.2 $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$.

1.3 $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}$.

1.4 $y = 7\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^5} - 3x^3 + \dfrac{4}{x}$.

1.5 $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \dfrac{6}{x}$**.**

1.6 $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{5}{x}$**.**

1.7 $y = 3x^5 - \dfrac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$**.**

1.8 $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{3}{x} - 4x^6 + \dfrac{4}{x^5}$**.**

1.9 $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^3}$**.**

1.10 $y = 4x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{7}{x^4}$**.**

1.11 $y = 2\sqrt{x^3} - \dfrac{7}{x} + 3x^2 - \dfrac{2}{x^5}$**.**

1.12 $y = 4x^3 - \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^2}$**.**

1.13 $y = 5x^5 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$**.**

1.14 $y = \dfrac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{2}{x} + 5x^4$**.**

1.15 $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$.

1.16 $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$

1.17 $y=5x^2+\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$.

1.18 $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$.

1.19 $y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}-3x^3$.

1.20 $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$.

1.21 $y=3\sqrt{x}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}$.

1.22 $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$.

1.23 $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$.

1.24 $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$.

1.25 $y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$.

1.26 $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x$.

1.27 $y=4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^4}$.

1.28 $y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$.

1.29 $y=\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$.

1.30 $y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$.

Задача 2. Найти производную функции:

2.1 $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$.

2.2 $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$.

2.3 $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$.

2.4 $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$.

2.5 $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$.

2.6 $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$.

2.7 $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$.

2.8 $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$.

2.9 $y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$.

2.10 $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$.

2.11 $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$.

2.12 $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$.

2.13 $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$.

2.14 $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$.

2.15 $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$.

2.16 $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$.

2.17 $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$.

2.18 $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$.

2.19 $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$.

2.20 $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$.

2.21 $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$.

2.22 $y=\sqrt{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$.

2.23 $y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$.

2.24 $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$.

2.25 $y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$.

2.26 $y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$.

2.27 $y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$.

2.28 $y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{(3x^2-5x+1)}$.

2.29 $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$.

2.30 $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$.

Задача 3. Найти производную функции:

3.1 $y=\sin^3 2x*\cos 8x^5$. **3.2** $y=\cos^5 3x*tg(4x+1)^3$.

3.3 $y=tg^4 x*\arcsin 4x^5$. **3.4** $y=\arcsin^3 2x*ctg 7x^4$

3.5 $y=ctg 3x*\arccos 3x^2$. **3.6** $y=\arccos^2 4x*\ln(x-3)$.

3.7 $y=\ln^5 x*arctg 7x^4$. **3.8** $y=arctg^3 4x*3^{\sin x}$.

3.9 $y=2^{\cos x}*arcctg 5x^3$. **3.10** $y=4^{-x}*\ln^5(x+2)$.

3.11 $y=3^{tgx}*\arcsin 7x^4$. **3.12** $y=5^{x^2}*\arccos 2x^5$.

3.13 $y=\sin^4 3x*arctg 2x^3$. **3.14** $y=\cos^3 4x*arcctg\sqrt{x}$

3.15 $y=tg^3 2x*\arcsin x^5$. **3.16** $y=ctg^7 x*\arccos 2x^3$.

3.17 $y=e^{-\sin x}*tg 7x^6$. **3.18** $y=e^{\cos x} ctg 8x^3$.

3.19 $y=\cos^5 x*\arccos 4x$. **3.20** $y=\sin^3 7x*arcctg 5x^2$.

3.21 $y=\sin^2 3x*arcctg 3x^5$.**3.22** $y=\cos\sqrt[5]{x}*arctg x^4$.

3.23 $y=tg^6 2x*\cos 7x^2$. **3.24** $y=ctg^3 4x*\arcsin\sqrt{x}$.

3.25 $y=ctg\dfrac{1}{x}*\arccos x^4$. **3.26** $y=tg\sqrt{x}*arcctg 3x^5$.

3.27 $y=tg^3 2x*\arccos 2x^3$. **3.28** $y=2^{tgx} arctg^5 3x$.

3.29 $y=\sin^5 3x*arctg\sqrt{x}$. **3.30** $y=\cos^4 3x*\arcsin 3x^2$.

Задача 4. Найти производную функции:

4.1 $y=arcctg^2 5x*\ln(x-4)$.

4.2 $y=arctg^3 2x*\ln(x+5)$.

4.3 $y=\arccos^4 x*\ln(x^2+x-1)$.

4.4 $y=\sqrt{\arccos 2x}*3^{-x}$.

4.5 $y=tg^4 3x*arctg 7x^2$.

4.6 $y=5^{-x}\arcsin 3x^3$.

4.7 $y=arctg^5 x*\log_2(x-3)$.

4.8 $y=\log_3(x+5)*\arccos 3x$.

4.9 $y=e^{-x}*\arcsin^2 5x$

4.10 $y=\log_4(x-1)*\arcsin^4 x$.

4.11 $y=(x-4)^5 * arcctg3x^2$.

4.12 $y=ctg^3 4x * arctg2x^3$.

4.13 $y=e^{-\cos x} arctg7x^5$.

4.14 $y=(x+1)\arccos 3x^4$.

4.15 $y=2^{\sin x} arcctgx^4$.

4.16 $y=3^{-x} arctg2x^5$.

4.17 $y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$.

4.18 $y=\ln(x-10) * \arccos^2 4x$.

4.19 $y=\lg(x-2) * \arcsin^5 x$.

4.20 $y=\log_3(x+1) * arctg^5 7x$.

4.21 $y=\ln(x+9) * arcctg^3 2x$.

4.22 $y=\lg(x+2) * \arcsin^2 3x.$

4.23 $y=4^{-\sin x} arctg3x.$

4.24 $y=2^{\cos x} arcctg^3 x.$

4.25 $y=\lg(x-3) * \arcsin^2 5x.$

4.26 $y=\log_2(x+3) * \arccos^2 x.$

4.27 $y=2^{-x} arctg^3 4x.$

4.28 $y=\ln(x-4) * arcctg^4 3x.$

4.29 $y=\lg(x+3) * arcctg^2 5x.$

4.30 $y=\log_5(x+1) * arctg^2 x^3.$

Задача 5. Найти производную функции:

5.1 $y=(cth3x)^{\arcsin(x)}$

5.2 $y=((\cos(x+2))^{\ln(x)}$

5.3 $y=(\sin 3x)^{\arccos(x)}$

5.4 $y=(th5x)^{\arcsin(x+1)}$

5.5 $y=(sh(x+2))^{\arcsin 2x}$

5.6 $y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$

5.7 $y=(\sqrt{3x+2})^{arcctg(3x)}$

5.8 $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$

5.9 $y=(\log_2(x+4))^{ctg(7x)}$

5.10 $y=(sh3x)^{arctg(x+2)}$

5.11 $y=(ch3x)^{cg(1/x)}$

5.12 $y=(\arcsin 5x)^{tg\sqrt{x}}$

5.13 $y = (\arccos 5x)^{\ln(x)}$ **5.14** $y = (arctg 2x)^{\sin x}$

5.15 $y = (\ln(x+7))^{ctg 2x}$ **5.16** $y = (ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$

5.17 $y = (th\sqrt{x+1})^{arctg(2x)}$ **5.18** $y = (cth(1/x))^{\arcsin 7x}$

5.19 $y = (\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$ **5.20** $y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$

5.21 $y = (\sin 4x)^{arctg(1/x)}$ **5.22** $y = (tg 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$

5.23 $y = (ctg 2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$ **5.24** $y = (tg 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$

5.25 $y = (\arccos(x))^{\sqrt{\cos(x)}}$ **5.26** $y = (ctg 7x)^{sh(3x+1)}$

5.27 $y = (sh 5x)^{arctg(x+2)}$ **5.28** $y = (arctg(x))^{th(3x+1)}$

5.29 $y = (cth\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$ **5.30** $y = (sh 3x)^{arcctg 2x}$

Задача 6. Найти производную функции (логарифмированием):

6.1 $y = (\arccos(x+2))^{tg 3x}$ **6.2** $y = (\arcsin 2x)^{ctg(x+1)}$

6.3 $y = (arctg(x+7))^{\cos 2x}$ **6.4** $y = (arcctg(x-3))^{\sin 4x}$

6.5 $y = (ctg(3x-2))^{\arcsin 3x}$ **6.6** $y = (tg(4x-3))^{\arccos 2x}$

6.7 $y = (\cos(2x-5))^{arctg 5x}$ **6.8** $y = (\sin(7x+4))^{arcctg(x)}$

6.9 $y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$ **6.10** $y = (\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$

6.11 $y = (arctg 5x)^{\log_2(x+4)}$ **6.12** $y = (arctg 7x)^{tg(x+1)}$

6.13 $y = (\log_4(2x+3))^{\arcsin(x)}$ **6.14** $y = (\log_5(3x+2))^{\arccos(x)}$

6.15 $y = (\lg(7x-5))^{arctg 2x}$ **6.16** $y = (\ln(5x-4))^{arcctg(x)}$

6.17 $y = (\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$ **6.18** $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$

6.19 $y = (\ln(7x-3))^{arctg 5x}$ **6.20** $y = (\log_5(3x+5))^{arctg(x)}$

6.21 $y = (\sin(8x-7))^{ctg(x+3)}$ **6.22** $y = (\cos(3x+8))^{th(x-7)}$

6.23 $y = (tg(9x+2))^{ch(2x-1)}$ **6.24** $y = (ctg(7x+5))^{sh(3x)}$

6.25 $y = (sh(3x-7))^{\cos(x+4)}$ **6.26** $y = (ch(2x-3))^{tg(x+5)}$

6.27 $y = (th(7x-5))^{\sin(x+2)}$ **6.28** $y = (ch(3x+2))^{\cos(x+4)}$

6.29 $y = (\ln(7x+4))^{tg(x)}$ **6.30** $y = (\lg(8x+3))^{tg 5x}$

Задача 7. Найти производную функции (логарифмированием):

7.1 $y = \dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$

7.2 $y = \dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$

7.3 $y = \dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x-3)^5}}{(x+2)^5}$.

7.4 $y = \dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.

7.5 $y = \dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

7.6 $y = \dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

7.7 $y = \dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$.

7.8 $y = \dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.

7.9 $y = \dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$

7.10 $y = \dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

7.11 $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

7.12 $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$

7.13 $y = \dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$

7.14 $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$

7.15 $y = \dfrac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$

7.16 $y = \dfrac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$

7.17 $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$

7.18 $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x+1)2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$

7.19 $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$

7.20 $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$

7.21 $y = \dfrac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$

7.22 $y = \dfrac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$

7.23 $y = \dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$

7.24 $y = \dfrac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

7.25 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$ **7.26** $y=\dfrac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$

7.27 $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3}(x-1)}{(x+3)^4}$ **7.28** $y=\dfrac{\sqrt[4]{(x=1)^3}(x-2)^5}{(x-3)^2}$

7.29 $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$. **7.30** $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.

Задача 8. Найти y' *и* y'' для функции в неявном виде:

8.1 $y^2=8x^2+\sqrt[3]{x^4}$ **8.2** $x^2/5+y^2/7=1$

8.3 $y=x+arctg(y)$ **8.4** $x^2/5+y^2/3=1$

8.5 $y^2=25x-4$ **8.6** $arcctg(y)=4x+5y$

8.7 $y^2-x=\cos(y)$ **8.8** $3x+\sin(y)=5y$

8.9 $tg(y)=3x+5y$ **8.10** $xy=ctg(y)$

8.11 $y=e^y+4x$ **8.12** $\ln y-y/x=7$

8.13 $y^2+x^2=\sin(y)$ **8.14** $e^y=4x-7y$

8.15 $4\sin^2(x+y)=x$ **8.16** $\sin y=7x+3y$

8.17 $tg(y)=4y-5x$ **8.18** $y=7x-ctg(y)$

8.19 $xy-6=\cos y$ **8.20** $3y=7+xy^3$

8.21 $y^2=x+\ln(y/x)$ **8.22** $xy^2-y^3=4x-5$

8.23 $x^2y^2+x=5y$ **8.24** $x^4+x^2y^2+y=4$

8.25 $\sin y=xy^2+5$ **8.26** $x^3+y^3=5x$

8.27 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7}$ **8.28** $y^2=(x-y)/(x+y)$

8.29 $\sin^2(3x+y^2=5$ **8.30** $ctg^2(x+y)=5x$

Задача 9. Найти y'_x *и* y''_{xx} для параметрической функции:

9.1 $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t, \\ y=3t^3. \end{cases}$ **9.2** $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

9.3 $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$ **9.4** $\begin{cases} x=1/(t+2), \\ y=(t/(t+2))^2 \end{cases}$

9.5 $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$ **9.6** $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

9.7 $\begin{cases} x = 3t/(1+t^3), \\ y = t^2/(1+t^2). \end{cases}$ **9.8** $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$

9.9 $\begin{cases} x = 4t + 2t^3, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$ **9.10** $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t\ln t. \end{cases}$

9.11 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ **9.12** $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

9.13 $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$ **9.14** $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

9.15 $\begin{cases} x = arctg(t), \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$ **9.16** $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

9.17 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1-\cos t). \end{cases}$ **9.18** $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

9.19 $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ **9.20** $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

9.21 $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$ **9.22** $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

9.23 $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$ **9.24** $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$

9.25 $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$ **9.26** $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

9.27 $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$ **9.28** $\begin{cases} x = te^t, \\ y = t/e^t. \end{cases}$

9.29 $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$ **9.30** $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Задача 10. Найти $y'''(x_0)$ для данного аргумента x_0:

10.1 $y=\sin^2 x, x_0=\pi/2.$ **10.2** $y=arctg(x), x_0=1.$

10.3 $y=\ln(2+x^2), x_0=0.$ **10.4** $y=e^x\cos x, x_0=0.$

10.5 $y=e^x\sin 2x, x_0=0.$ **10.6** $y=e^{-x}\cos x, x_0=0.$

10.7 $y=\sin 2x, x_0=\pi.$ **10.8** $y=(2x+1)^5, x_0=1.$

10.9 $y=\ln(1+x), x_0=2.$ **10.10** $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x, x_0=0.$

10.11 $y=\arcsin x, x_0=0.$ **10.12** $y=(5x-4)^5, x_0=2.$

10.13 $y=x\sin x, x_0=\pi/2.$ **10.14** $y=x^2\ln x, x_0=1/3.$

10.15 $y=x\sin 2x, x_0=-\pi/4.$ **10.16** $y=x\cos 2x, x_0=\pi/12.$

10.17 $y=x^4\ln x, x_0=1.$ **10.18** $y=x+arctg, x_0=1.$

10.19 $y=\cos^2 x, x_0=\pi/4.$ **10.20** $y=\ln(x^2-4), x_0=3.$

10.21 $y=x^2\cos x, x_0=\pi/2.$ **10.22** $y=x\arccos x, x_0=\sqrt{3}/2.$

10.23 $y=(x+1)\ln(x+1), x_0=-1/2.$ **10.24** $y=\ln^3 x, x_0=1.$

10.25 $y=2^{x^2}, x_0=1.$ **10.26** $y=(4x-3)^5, x_0=1.$

10.27 $y=x*arcctg(x), x_0=2.$ **10.28** $y=(7x-4)^6, x_0=1.$

10.29 $x*\sin 2x, x_0=\pi/4.$ **10.30** $y=\sin(x^3+\pi), x_0=\sqrt[3]{\pi}.$

Задача 11. Вычислить пределы функций:

11.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}.$ **11.2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}.$

11.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x*3x^2-8}{3x^2-8x+4}.$ **11.4** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}.$

11.5 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}.$ **11.6** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}.$

11.7 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}.$ **11.8** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4-3x^2-x}.$

11.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-16x+1}{3x^2+5x-2}.$ **11.10** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}.$

11.11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+x+2}$. 11.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

11.13 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+10x+5}{x^2-2x-3}$. 11.14 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2+6x+5}$.

11.15 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+5x+6}$. 11.16 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.

11.17 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2-6x-7}$. 11.18 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-7}$.

11.19 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-3}$. 11.20 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-18}$.

11.21 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$. 11.22 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

11.23 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+16}$. 11.24 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x+4}{2x^2+x-3}$.

11.25 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-3x+2}{4x-3x^2-1}$. 11.26 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x+3}$.

11.27 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-14}{3x^2-7x+2}$. 11.28 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$.

11.29 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$. 11.30 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}$.

Задача 12. Вычислить пределы функций:

12.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$. 12.2 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$.

12.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$. 12.4 $\lim\limits_{z\to -2}\dfrac{\sqrt{z+6}-2}{z^2-4}$.

12.5 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$. 12.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

12.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$. 12.8 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$.

12.9 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{n^2+9}-3}{\sqrt{4-n^2}-2}$.

12.10 $\lim\limits_{m\to 4}\dfrac{5-\sqrt{m^2+9}}{\sqrt{2m+1}-3}$.

12.11 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$.

12.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

12.13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-2x}$.

12.14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$.

12.15 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$.

12.16 $\lim\limits_{b\to 5}\dfrac{\sqrt{b-1}-2}{\sqrt{2b-1}-3}$.

12.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+3}$.

12.18 $\lim\limits_{a\to 2}\dfrac{\sqrt{3a+10}-4}{a^2-4}$.

12.19 $\lim\limits_{m\to 3}\dfrac{9-m^2}{\sqrt{4m-3}-3}$.

12.20 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$.

12.21 $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3z^2}-2}{z^2-z}$.

12.22 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$.

12.23 $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3t}-\sqrt{2t+6}}{t^2-5t}$.

12.24 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{2x}-2}$.

12.25 $\lim\limits_{m\to 4}\dfrac{\sqrt{6m+1}-5}{\sqrt{m}-2}$.

12.26 $\lim\limits_{z\to 3}\dfrac{\sqrt{z-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2z+3}-3}$.

12.27 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$.

12.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

12.29 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{3-n}-\sqrt{3+n}}{5n}$.

12.30 $\lim\limits_{a\to 4}\dfrac{a-4}{\sqrt{5a+5}-5}$.

Задача 13. Вычислить пределы функций:

13.1 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2a^3-a+1}{a^2+2a-5}$.

13.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x-4}$.

13.3 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^3+3z-1}{2z^3+z^2-4}$.

13.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+2n-3}$.

13.5 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m^3+2m-5}{m^4+5m^2-1}$.

13.6 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^2+z-3}{z^2+3z+1}$.

13.7 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3a^2-4a+1}{a^2+3a-4}$.

13.8 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m^3-8m+1}{3m^3-m+4}$.

13.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+1}{2n^2+n-3}$.

13.10 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2-3z-z^2}{2z^3+z-1}$.

13.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n^5+1}{2n^5+3n^3-n}$.

13.12 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{4a^3+3a^2-1}{2a^3-3a+1}$.

13.13 $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{y^6-3y^2-2}{2y^6+4y+5}$.

13.14 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{6z^5-3z^2+1}{3z^5-2z+3}$.

13.15 $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^4+2x^2-x}$.

13.16 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a^4-3a^2+2}{5a^4-3a-2}$.

13.17 $\lim\limits_{b\to-\infty}\dfrac{9b^5-4b^3+2}{3b^4-2b+3}$.

13.18 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2-1}$.

13.19 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5-3n^2+1}{2n^5-2n+3}$.

13.20 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{9z^3-4z^2+1}{6z^3+3z+2}$.

13.21 $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^4+2x+5}$.

13.22 $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{6n^3-2n+7}{3n^3-5n+2}$.

13.23 $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{7n^4-2n^3+2}{n^4+2n}$.

13.24 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{3a^7+6a-5}{4a^7+2a^3-3}$.

13.25 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$.

13.26 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n+2}{2n^4+3n^2-n}$.

13.27 $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{6x^4-4x^3+8}{2x^3-3x^2+1}$.

13.28 $\lim\limits_{a\to-\infty}\dfrac{3a^4-4a^2+5}{6a^4+2a^3-1}$.

13.29 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6x^4-4x^3+8}{2x^3-3x^2+1}$.

13.30 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^3+7z-4}{6z^3-3z^2+2}$.

Задача 14. Вычислить пределы функций:

14.1 $\lim\limits_{\alpha\to0}\sin3\alpha\cdot ctg2\alpha$.

14.2 $\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{1-\cos4\varphi}{\sin^2 3\varphi}$.

14.3 $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\arcsin 6\beta}{2\beta}$.

14.4 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi\sin 2\varphi}{tg^2 3\varphi}$.

14.5 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg 5\alpha}{3\alpha}$.

14.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin^2 3x}$.

14.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{tg 2x}$.

14.8 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 5y}{\arcsin 2y}$.

14.9 $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{tg^2 3\beta}{1-\cos 4\beta}$.

14.10 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\arcsin^2\varphi}{3\varphi\sin\varphi}$.

14.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x}{\sin^2 3x}$.

14.12 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\alpha\sin 3\alpha}$.

14.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 5x}$.

14.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{4x}$.

14.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$.

14.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$.

14.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{xtg 2x}$.

14.18 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot ctg 3x$.

14.19 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{5z^2}{\sin 3z\cdot tg 2z}$.

14.20 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sin 8\alpha\cdot ctg\alpha$.

14.21 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{5x}{arctg 3x}$.

14.22 $\lim\limits_{z\to 0}tg^2 3x\cdot ctg^2 2x$.

14.23 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos 8\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

14.24 $\lim\limits_{x\to 0}3xctg 7x$.

14.25 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$.

14.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$.

14.27 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3\alpha}{2\alpha\sin 5\alpha}$.

14.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg 2x}{1-\cos 3x}$.

14.29 $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\cdot ctg^2 5x$.

14.30 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\sin^2 3\varphi}{arctg^2 2\varphi}$.

Задача 15. Вычислить пределы функций:

15.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{2x+1}$.

15.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{3x-4}$.

15.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x-2}{2x+1}\right)^{x+2}$.

15.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x+3}$.

15.5 $\lim\limits_{y\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{3y-1}\right)^{y+2}$.

15.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

15.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$.

15.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

15.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

15.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$.

15.11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{3x+1}$.

15.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}$.

15.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$.

15.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}$.

15.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x}$.

15.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{x}$.

15.17 $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{x^2/(x-2)}$.

15.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{x+3}$.

15.19 $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{5x/(x-1)}$.

15.20 $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{(x+1)/(x-3)}$.

15.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

15.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$.

15.23 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$.

15.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-4}\right)^{x-3}$.

15.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{x-4}$.

15.26 $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{x/(x^2-1)}$.

15.27 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{4+3t}{1+3t}\right)^{t-2}$.

15.28 $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{x^2/(x-2)}$.

15.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{x}$.

15.30 $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x(3x-3)}$.

Задача 16. Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

16.1. $f(x)=tg2x, \varphi(x)=\arcsin x.$

16.2. $f(x)=1-\cos x, \varphi(x)=3x^2.$

16.3. $f(x)=arctg^2 3x, \varphi(x)=4x^2.$

16.4. $f(x)=\sin 3x-\sin x, \varphi(x)=5x.$

16.5. $f(x)=\cos 3x-\cos x, \varphi(x)=7x^2.$

16.6. $f(x)=x^2-\cos 2x, \varphi(x)=6x^2.$

16.7. $f(x)=\sqrt{1+x}-1, \varphi(x)=2x.$

16.8. $f(x)=\sin x+\sin 5x, \varphi(x)=2x.$

16.9. $f(x)=3x/(1-x), \varphi(x)=x/(4+x).$

16.10. $f(x)=3x^2/(2+x), \varphi(x)=7x^2.$

16.11. $f(x)=2x^3, \varphi(x)=5x^3/(4-x).$

16.12. $f(x)=x^2/(5+x), \varphi(x)=4x^2/(x-1).$

16.13. $f(x)=\sin 8x, \varphi(x)=\arcsin 5x.$

16.14. $f(x)=\sin 3x+\sin x, \varphi(x)=10x.$

16.15. $f(x)=\cos 7x-\cos x, \varphi(x)=2x^2.$

16.16. $f(x)=1-\cos 2x, \varphi(x)=8x^2.$

16.17. $f(x)=3\sin^2 4x, \varphi(x)=x^2-x^4.$

16.18. $f(x)=tg\left(x^2+2x\right), \varphi(x)=x^2+2x.$

16.19. $f(x)=\arcsin\left(x^2-x\right),\varphi\left(x\right)=x^3-x.$

16.20. $f(x)=\sin 7x+\sin x,\varphi\left(x\right)=4x.$

16.21. $f(x)=\sqrt{4+x}+2,\varphi\left(x\right)=3x.$

16.22. $f(x)=\sin\left(x^2-2x\right),\varphi\left(x\right)=x^4-8x.$

16.23. $f(x)=2x\big/\left(3-x\right),\varphi\left(x\right)=2x-x^2.$

16.24. $f(x)=x^2\big/\left(7+x\right),\varphi\left(x\right)=3x^3-x^2.$

16.25. $f\left(x\right)=\sin\left(x^2+5x\right),\varphi\left(x\right)=x^3-25x.$

16.26. $f(x)=\cos x-\cos^3 x,\varphi\left(x\right)=6x^2.$

16.27. $f(x)=\arcsin 2x,\varphi\left(x\right)=8x.$

16.28. $f(x)=1-\cos 4x,\varphi\left(x\right)=x\sin 2x.$

16.29. $f(x)=\sqrt{9-x}-3,\varphi\left(x\right)=2x.$

16.30. $f(x)=\cos 3x-\cos 5x,\varphi\left(x\right)=x^2.$

Задача 17. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

17.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^3-5x^2}.$

17.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg3x}.$

17.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg2x}.$

17.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}.$

17.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{2x^2-3x}.$

17.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}.$

17.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}.$

17.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x\right)}{\sin 2x}.$

17.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg3x}.$

17.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(x-3\right)}{x^2-5x+6}.$

17.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$.

17.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 3x}{\ln(1+2x)}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{tg 5x}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$.

17.16. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg(x+2)}{x^2-4}$.

17.17. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^3+8}$.

17.18. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin 2x}{tg 4x}$.

17.19. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{tg(x-4)}$.

17.20. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

17.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$.

17.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 5x}{tg 2x}$.

17.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

17.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{tg 4x}$.

17.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{tg 2x}$.

17.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

17.27. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-27}$.

17.28. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{tg(x+5)}{x^2-25}$.

17.29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

17.30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

Задача 18. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

18.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.

18.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\ln x}-x}{x-1}$.

18.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{tg(x)-x}{x-\sin x}$.

18.4 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2(\pi x/6)}{1-x^2}$.

18.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot ctg(x-a)$.

18.6 $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctg(x))\cdot\ln x$.

18.7 $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x.$

18.8 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}).$

18.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-co(x)^2}{x^2-\sin(x)^2}.$

18.10 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{2\sin x+x}.$

18.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{2arctg(x)^2-\pi}.$

18.12 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}.$

18.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}.$

18.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}.$

18.15 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}.$

18.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$

18.17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ch(x)-1}{1-\cos x}.$

18.18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}.$

18.19 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1/\cos^2 x-2tg(x)}{1+\cos 4x}.$

18.20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}.$

18.21 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{tg(x)}{tg(5x)}.$

18.22 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctg(x).$

18.23 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg(\pi x/2).$

18.24 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin(3/x).$

18.25 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}.$

18.26 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}.$

18.27 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}.$

18.28 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg(x)-\sin x}{4x-\sin x}.$

18.29 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{tg3x}{tg5x}.$

18.30 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sec^2 x-2tg(x)}{1+\cos 4x}.$

Задача 19. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

19.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 2x}.$

19.2 $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\sin(a/x).$

19.3 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1).$

19.4 $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}).$

19.5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

19.6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$.

19.7 $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{ctg(x)}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

19.8 $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)tg(x/2)$.

19.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg(x)}{x^3}$.

19.10 $\lim\limits_{x\to \pi/(2a)}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$.

19.11 $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

19.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

19.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{c^x-1}$.

19.14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

19.15 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{ctg(x)}$.

19.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

19.17 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$.

19.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$.

19.19 $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$.

19.20 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

19.21 $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})ctg(x)$.

19.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

19.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^2 2x}$.

19.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}.$

19.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

19.26 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

19.27 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x+3}}$.

19.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{ctg(5x/2)}$.

19.29 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)ctg 4x$.

19.30 $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2\sin b/x)$.

Задача 20. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

20.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

20.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

20.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

20.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x^2/2-x-1}{\cos x-x^2/2-1}$.

20.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg(x)}-1}{tg(x)-x}$.

20.6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+tg(\pi x/2)}{ctg(\pi x)}$.

20.7 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x*\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

20.8 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos(\pi x/2)*\ln(1-x)}$.

20.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(e^x-1)}{\cos x-1}$.

20.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

20.11 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

20.12 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{6x}$.

20.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg4x-12tg(x)}{3\sin 4x-12\sin x}$.

20.14 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{tg(x)}-1}{2\sin^2 x-1}$.

20.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

20.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

20.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

20.18 $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tg(x))^{tg2x}$.

20.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

20.20 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$.

20.21 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$.

20.22 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-0,01x}$.

20.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

20.24 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}$.

20.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4/x^2}-1}{2arctg(x^2)-\pi}$.

20.26 $\lim\limits_{x\to 1/2}\ln 2x\ln(2x-1)$.

20.27 $\lim\limits_{x\to 1/2}(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x})$

20.28 $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\,tg(x)$.

20.29 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3e^{-x})$

20.30 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$.

Задача 21. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

21.1 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctg(x)}$.

21.2 $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1/x))^{x}$.

21.3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$.

21.4 $\lim\limits_{x\to 0}x^{x}$.

21.5 $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$.

21.6 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/tg^2 x}$.

21.7 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

21.8 $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$.

21.9 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg(x)}$.

21.10 $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x}$.

21.11 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

21.12 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

21.13 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$.

21.14 $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(x-1)}$.

21.15 $\lim\limits_{x\to 1}(tg\dfrac{\pi x}{4})^{tg(\pi x/2)}$.

21.16 $\lim\limits_{x\to 1}(ctg\dfrac{\pi x}{4})^{tg(\pi x/2)}$.

21.17 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x})^{tg(x)}$.

21.18 $\lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{x-4}{x+3})$

21.19 $\lim\limits_{x\to 0}(ctg(x))^{\sin x}$.

21.20 $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x)^{1/x}$.

21.21 $\lim\limits_{x\to \infty}x^{6/(1+2\ln x)}$.

21.22 $\lim\limits_{x\to \infty}(1-e^{x})^{1/x}$.

21.23 $\lim\limits_{x\to \infty}(x-1)^{1/\ln(2(x-1))}$.

21.24 $\lim\limits_{x\to \infty}(\cos\dfrac{m}{x})^{x}$.

21.25 $\lim\limits_{x\to 0}(ctg 2x)^{1/\ln x}$.

21.26 $\lim\limits_{x\to 5}(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20})$.

4.27 $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\sin\dfrac{a}{x}$.

21.28 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x}})$.

21.29 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$.

21.30 $\lim\limits_{x\to 0}(ctg(x))^{\sin x}$.

Задача 22. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

22.1 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln(x+1))$.

22.2 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{m}{x}+\lambda\sin\frac{m}{x})^x$.

22.3 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$.

22.4 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2x)^{ctg^2x}$

22.5 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos(m/\sqrt{x}))^x$.

22.6 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

22.7 $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctg(x))^{tg(x)}$.

22.8 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-x/a)^{tg(\pi x/(2a))}$.

22.9 $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

22.10 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}})^{1/\sin x}$.

22.11 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$.

22.12 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

22.13 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg(x))^{2x-\pi}$.

22.14 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{\pi}arctg(x))^x$.

22.15 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cos 2x})^{1/x^3}$.

22.16 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+tg(x)}{1+\sin x})$.

22.17 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos(1/x)+\sin(1/x))^x$.

22.18 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{e^{1/(x-1)}}$.

22.19 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right)^{1/x^2}$.

22.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

22.21 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

22.22 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{2}{x})^x$.

22.23 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

22.24 $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}$.

22.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

22.26 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

22.27 $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}$.

22.28 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

22.29 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}$.

22.30 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Задача 23. Решить следующие задачи на экстремум.

23.1. Полотняный шатёр объёмом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатёр пошло наименьшее количество полотна?

23.2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длину сторон параллелограмма.

23.3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме V наименьшую полную поверхность.

23.4. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой длины должна быть высота воронки, чтобы её объём был наименьшим?

23.5. Периметр равнобедренного треугольника равен 2р. Каково должно быть его основание, чтобы объём тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

23.6. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

23.7. Проволокой, длина которой L м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

23.8. Определить наибольшую площадь треугольника, вписанного в полукруг радиусом ф.

23.9. Бревно длиной 20 м имеет форму усечённого конуса, диаметры оснований которых равны 2м и 1м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

23.10. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенного в 15 км от ближайшей к кораблю точке берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ч, а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

23.11. Полоса жести шириной а, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело вид сегмента. Каким должен быть центральный угол φ опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

23.12. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковыми должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наибольший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины поперечного сечения и куба высоты).

23.13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км (АВ) равна $к_1$ руб., а автомобильной (РС) – $к^2$ руб.($к_1 < к_2$). В каком месте Р нужно начать строительство, чтобы возможно дешевле доставлять груз из пункта А в С? Известно, что $|AB| = a,\ |BC| = b$ (рис.3.1).

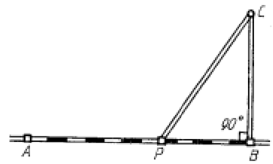


Рис. 3.1

23.14. Человеку нужно добраться из пункта А, находящегося на одном берегу реки, в пункт В на другом её берегу. Зная, что скорость движения по берегу в к раз больше скорости движения по вод, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта в кратчайшее время. Ширина реки h, расстояние между пунктами А и В (вдоль берега) равно a.

6.15. На прямолинейном отрезке АВ, соединяющим два источника света: А (силой p) и В (силой q), найти точку М, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

23.16. Лампа висит над центром круглого стола радиуса r. При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещённость прямо пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

23.17. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R.

23.18. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объём воронки был наибольшим?

23.19. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объём наибольший.

23.20. Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A по ближайшей к пункту B точке C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту B, чтобы затрачивать меньшее время придвижении между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе – 20 км/ч.

23.21. Канал, ширина которого ***a*** м., под прямым углом впадает в другой канал шириной ***b*** м. Определить наибольшую длину брёвен, которые можно справлять по этой системе каналов.

23.22. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиусом R.

23.23. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь её будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание равно a.

23.24. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми x=4, y=0, вырезать прямоугольник наибольшей площадью.

23.25. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какой должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объём?

23.26. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость 1м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет Р1 р., а стоимость 1м^2 материала, идущего на стенки бака,- Р2 р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными?

23.27. Сосуд с вертикальными стенками высотой Н, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположения отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x - расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g – ускорение свободного падения.

23.28. Окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

23.29. На странице печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого – b. При как4ом отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

23.30. Из круглого бревна, диаметр которого d, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть высота и ширина этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? Сопротивление балки на изгиб Q пропорционально произведению ширины x её поперечного сечения и квадрата его высоты y, т.е. Q=$kxy^2, k = const$.

Задача 24. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

24.1 $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

24.2 $y = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$.

24.3 $y = e^{1/(5+x)}$.

24.4 $y = x/(9 - x)$.

24.5 $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$.

24.6 $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$.

24.7 $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

24.8 $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

24.9 $y = x - \ln(1 + x^2)$.

24.10 $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

24.11 $y = x^2 - 2\ln x$.

24.12 $y = x^3 e^{-x^2/2}$.

24.13 $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$.

24.14 $y = \dfrac{(x - 2)^2}{x + 1}$.

24.15 $y = -\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

24.16 $y = \ln(x^2 + 1)$.

24.17 $y = \dfrac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$.

24.18 $y = x\ln x$.

24.19 $y = (x - 1)e^{3x+1}$.

24.20 $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

24.21 $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

24.22 $y = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$.

24.23 $y = (x^3 + 4)/x^2$.

24.24 $y = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

24.25 $y = x^3/(x^4 - 1)$.

24.26 $y = (e^{2x} + 1)/e^x$.

24.27 $y = x^2 + 1/x^2$.

24.28 $y = (5x^4 + 3)/x$.

24.29 $y = \dfrac{4 - 2x}{1 - x^2}$.

24.30 $y = \dfrac{5x}{4 - x^2}$.

Задача 25. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

25.1 $y = e^{2x-x^3}$.

25.2 $y = x + \ln(x^2 - 4)$.

25.3 $y = \dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$.

25.4 $y = x\ln^2 x$.

25.5 $y = (4e^x - 1)/e^{x^2}$.

25.6 $y = x^2 e^{-x^2/2}$.

25.7 $y = xe^{1/x}$.

25.8 $y = \dfrac{2+x}{(x+1)^2}$.

25.9 $y = \dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

25.10 $y = xe^x$.

25.11 $y = x^2 e^{1/x}$.

25.12 $y = x^2/(x+2)^2$.

25.13 $y = (x+2)e^{1-x}$.

25.14 $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

25.15 $y = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

25.16 $y = \dfrac{x^3}{9-x^3}$.

25.17 $y = (x+1)e^{2x}$.

25.18 $y = 4x/(4+x^2)$.

25.19 $y = x^4/(x^3-1)$.

25.20 $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$.

25.21 $y = \ln(1 - 1/x^2)$.

25.22 $y = x^3 e^{x+1}$.

25.23 $y = x - \ln(1+x^2)$.

25.24 $y = 1 - \ln^3 x$.

25.25 $y = (x-1)e^{4x+2}$.

25.26 $y = \dfrac{2x^2 + 2 + 4x}{2-x}$.

25.27 $y = -x\ln^2 x$.

25.28 $y = x^2 - 2\ln x$.

25.29 $y = e^{1/(2-x)}$.

25.30 $y = \ln(4 - x^2)$.

Задача 26. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке [a,b].

26.1 $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0;3].$

26.2 $y = 3x/(x^2 + 1), [0;5].$

26.3 $y = (2x-1)/(x-1)^2, [-1/2; 0].$

26.4 $y = (x+2)e^{1-x}, [-2;2].$

26.5 $y = \ln(x^2 - 2x + 4), [-1;3/2].$

26.6 $y = x^3/(x^2 - x + 1), [-1;1].$

26.7 $y = ((x+1)/x)^3, [1;2].$

26.8 $y = \sqrt{x - x^3}, [-2,2].$

26.9 $y = 4 - e^{-x^2}, [0;1].$

26.10 $y = (x^3 + 4)/x^2, [1;2].$

26.11 $y = xe^x, [-2;0].$

26.12 $y = (x-2)e^x, [-2;1].$

26.13 $y = (x-1)e^{-x}, [0;3].$

26.14 $y = x/(9 - x^2), [-2,2].$

26.15 $y = (1 + \ln x)/x, [1/e; e].$

26.16 $y = e^{4x - x^2}, [1;3].$

26.17 $y = (x^5 - 8)/x^4, [-3;-1].$

26.18 $y = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}, [-1;2].$

26.19 $y = x \ln x, [1/e^2; 1].$

26.20 $y = x^3 e^{x+1}, [-4;0].$

26.21 $y = x^2 - 2x + 2/(x-1), [-1;3].$

26.22 $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}, [-4/5; 3].$

26.23 $y = e^{6x - x^2}, [-3;3].$

26.24 $y = (\ln x)/x, [1;4].$

26.25 $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3;1].$

26.26 $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1;2].$

26.27 $y = (3-x)e^{-x}, [0;5].$

26.28 $y = \sqrt{3}/2 + \cos x, [o; \pi/2].$

26.29 $y = 108x - x^4, [-1;4].$

26.30 $y = x^4/4 - 6x^3 + 7, [16;20].$

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Типовое индивидуальное задание содержит 21 задачу.

№1-4 – Вычисление пределов функций;

№5-10 – Найти производные функций;

№11 – Найти первую производную;

№12 – Вычислить $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной в параметрическом виде;

№13 – Найти d^2y;

№14 – Найти $y^{(n)}$;

№15 – Составить уравнение нормали и касательной к кривой в точке x_0;

№16 – Вычислить значение функции приближенно с помощью дифференциала;

№17 – Найти y''_{xx};

№18 – Найти y''';

№19 – Найти y';

№20-21 – Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

Вариант 1

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-arctg\,3x}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{11+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.

№5. $y=\dfrac{tg^2 x}{x^3}$. *№6.* $y=\log_3(\ln^4 x)$.

№7. $y=(\cos x)^{e^4}$. *№8.* $y=arctg(\sqrt[4]{x+2})$.

№9. $y=x\cdot 3^{3\cos^2 x}$. *№10.* $y=\dfrac{2+\arcsin x\cdot x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

№11. $3^x+3^y=3\cdot(x-y)$. *№12.* $\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=tgt\end{cases}$.

№13. $y=x^3-3arctgx$. *№14.* $y=(x+1)\cdot e^x$.

№15. $y=\dfrac{(4x-x^2)}{4}, x_0=2$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=7{,}51$.

№17. $\begin{cases}x=arctgt\\ y=\dfrac{t^2}{2}\end{cases}$, $y''_{xx}=?$

№18. $y=(2x^2-7)\ln(x-1)$, $y^{v}=?$

№19. $y=x^{e^{arctgx}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3tgx)^{ctgx}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

Вариант 2

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. №2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. №4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

№5. $y=ctg^3 x\cdot arctg^3 x$. №6. $y=\dfrac{\cos 2x+x}{3x}$.

№7. $y=(\ln 3x)^{\arcsin x}$. №8. $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x^5+1}}$.

№9. $y=4^{-5\sin^3 x}$. №10. $y=tg5x\cdot(1+\arcsin x)$.

№11. $e^{\frac{x}{y}}+x=y$. №12. $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. №14. $y=\ln g$.

№15. $y=2x^2+3x-1, x_0=-2$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}, x=1{,}015$.

№17. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right), y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=x\cdot\cos x^2, y'''=?$

№19. $y=x^{e^{\cos x}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos x\pi)^{tg(x-2)}$.

Вариант 3

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$. №2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{six\pi}-e^{-\sin 3x\pi}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$. №4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

№5. $y=\log_4(\sin^3 x)$. №6. $y=(\arg\cos x)^{\frac{1}{x^3}}$.

№7. $y=\sqrt{2-a\cdot tg3x}$. №8. $y=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^2-1}}}$.

№9. $y=\dfrac{tg6x-4x^3}{x^4}$. №10. $y=3^{\sin^3 x}$.

№11. $(x+2y)^4=tg(xy)$. №12. $\begin{cases} x=e^{2t}\cos 3t,\\ y=e^{2t}\sin 3t.\end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{\ln x}$. №14. $y=\dfrac{1}{kx+1}$.

№15. $y=x-x^3, x_0=-1$. №16. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}, x=0{,}98$.

№17. $\begin{cases} x=cht\\ y=\sqrt[3]{sh^2 t}\end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=(3-x^2)\ln^2 x, y'''=?$

№19. $y=x^{2^x}\cdot 5^x, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\arcsin x+\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 4

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

№5. $y=\dfrac{6x-2tgx}{5x^2}$. *№6.* $y=\log_6(arcctgx)$.

№7. $y=\dfrac{5}{\sqrt{\arcsin x}}$. *№8.* $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

№9. $y=x\cdot 4^{2\cos^2 x-\sin x}$. *№10.* $y=\arccos x+\sqrt{1-x^3}$.

№11. $\sin(xy)=x+y$. *№12.* $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t,\\ y=\sin t-t\cos t.\end{cases}$

№13. $y=e^{-x^2}$. *№14.* $y=\cos x$.

№15. $y=x^2+8\sqrt{x}-3{,}2, x_0=4$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=27{,}54$.

№17. $\begin{cases} x=e^t\\ y=\arcsin t\end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, y'''=?$

№19. $y=x^{e^{ctgx}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{tg\left(\frac{x\pi}{6}\right)}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1}$.

Вариант 5

№1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x+3x}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(x\pi)}{tg^2(x\pi)}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\arccos x+x^3}$.

№5. $y=3arcctg\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$. *№6.* $y=\dfrac{\cos^5 x+x^4}{ctg^2}$.

№7. $y=4\cos^6 x\cdot\left(\sqrt{x}-4^{x^2}\right)$. *№8.* $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

№9. $y=\ln(tg4x)$. *№10.* $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+5}}}$.

№11. $y^4+x^4=\ln\dfrac{x}{y}$. *№12.* $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt{x+1}$. *№14.* $y=(1-x)\cdot e^x$.

№15. $y=x+\sqrt{x^2}, x_0=1$.

№16. $y=\arcsin x, x=0{,}08$.

№17. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3}, y'''=?$

№19. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x+1)^{\sin x}$.

Вариант 6

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(7x\pi)}{\sin(8x\pi)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

№5. $y=arctg\sqrt[3]{x+1}$.

№6. $y=\sin^2(\ln 2x)$.

№7. $y=\dfrac{tg^3x+1}{x-1}$.

№8. $y=(\arccos x)^x$.

№9. $y=x\cdot 4^{3\sin^3 x}$.

№10. $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

№11. $x\cos y=y\cos x$.

№12. $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$.

№13. $y=e^{-3t}$.

№14. $y=\dfrac{1}{x+1}$.

№15. $y=\sqrt[3]{x^2}-20, x_0=-8$.

№16. $y=\sqrt{x^2+x+3}, x=1{,}97$.

№17. $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=tg^2 t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln x}{x^3}, y^{iv}=?$

№19. $y=(x-5)^{chx}$.

№20. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{ctg 2x}{\sin 3x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin\left(\frac{x\pi}{4}\right)}$.

Вариант 7

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

№5. $y=\dfrac{ctgx}{x^3-x}$.

№6. $y=5\ln(6\sin x)$.

№7. $y=\dfrac{1}{5^{x^2}}$.

№8. $y=(\arccos x)^{2\sin x}$.

№9. $y=\sqrt{x+arctg^2 x}$.

№10. $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

№11. $\sin(x+y)=y^2$.

№12. $\begin{cases} x=tgx, \\ y=\cos^2 x. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt[3]{x^2}$.

№14. $y=x\cdot e^x$.

№15. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0=4$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=26{,}46$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3} \\ y=\ln(t-3) \end{cases}$

№18. $y=\left(1+x^2\right)\cdot arctgx, y'''=?$

№19. $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin x}}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

Вариант 8

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+4x^2+5x+2}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg(x\pi)}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctgx+x^3}$.

№5. $y=\sin^3(4x^2+1)$. *№6.* $y=\dfrac{5tg^2x-8^{x^3}}{x^4}$.

№7. $y=\sqrt[4]{arctg(2x+3)}$. *№8.* $y=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\ln x}$.

№9. $y=x^4\arccos\left(\sqrt{x}\right)$. *№10.* $y=\sqrt[5]{1+3\sqrt[3]{x}}$.

№11. $y=x^{3y^2}$. *№12.* $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$

№13. $y=\lg(a+bx)$. *№14.* $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

№15. $y=8\sqrt[4]{x}-70, x_0=16$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}, x=0{,}97$.

№17. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}, y^{iv}=?$

№19. $y=(x^2+1)^{\cos x}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Вариант 9

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}.$ *№2.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}.$

№3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}.$ *№4* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-2x}}{2\arcsin x-x}.$

№5. $y=\arcsin(\log_3 x).$ *№6.* $y=x^6\,2^{-\sin^4 x}.$

№7. $y=\dfrac{e^{3x}-3tg4x}{\sqrt{x}}.$ *№8.* $y=\sqrt[3]{\ln x-\ln 5}.$

№9. $y=(arcctgx)^{\sin x}.$ *№10.* $y=tg^2(2x+1).$

№11. $\dfrac{y}{x}=\arccos(x-y).$ *№12.* $\begin{cases}x=2t\cos t,\\ y=2t\sin t.\end{cases}$

№13. $y=ctgx.$

№14. $y=\ln(ax+b).$

№15. $y=2x^2-3x+1, x_0=1.$

№16. $y=x^{11}, x=1{,}021.$

№17. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\ln\cos t, y''_{xx}=?\end{cases}$

№18. $y=(2x+3)\cdot\ln^2 x, y'''=?$

№19. $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x.$

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{\pi}{arctgx1}}.$

Вариант 10

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

№5. $y=x\cdot 3^{4\sin+\cos^2 x}$.

№6. $y=5tg\left(x^2+1\right)$.

№7. $y=\frac{1}{\sqrt{arctg^2 x-1}}$.

№8. $y=(\arcsin x)^{\ln x}$.

№9. $y=\frac{tgx+4}{x^4}$.

№10. $y=\lg_3\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

№11. $e^y\sin x=\sin(x+y)$.

№12. $\begin{cases} x=a^t-1, \\ y=1-6t^2. \end{cases}$

№13. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

№14. $y=xe^{-kx}$.

№15. $y=\frac{\left(x^2-3x+6\right)}{x^2}, x_0=1$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^2}, x=1{,}03$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\frac{1}{\sqrt{t}}, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=(4x+3)2^x, y^{(5)}=?$

№19. $y=\left(x^2-1\right)^{shx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3tgx)^{ctgx}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

Вариант 11

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin 4x}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg3x-x}$.

№5. $y=\sqrt[4]{arcctg3x}$.

№6. $y=tg^2x\cdot\log_3 x$.

№7. $y=\dfrac{\arccos 3x}{1-x^3}$.

№8. $y=(tgx)^{e^x}$.

№9. $y=\dfrac{x}{5^{\sin^2 x}}$.

№10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

№11. $arcctg(xy)=x^3y^2$.

№12. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

№13. $y=x\cdot a^x$.

№14. $y=\sin ax$.

№15. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\ x_0=64$.

№16. $y=x^{21},\ x=0{,}998$.

№17. $\begin{cases} x=sht, \\ y=th^2t,\ y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=e^{1-2x}\cdot\sin(2+3x),\ y^{(4)}=?$

№19. $y=x^{\sin x^3},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$.

№21. $\lim\limits_{t\to\infty}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

Вариант 12

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{tg^2 x-\sin x}$.

№5. $y=\sin^x\left(x^3+5x\right)$. *№6.* $y=x\cdot 3^{2tg^4 x}$.

№7. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x+1}}$. *№8.* $y=\left(ctg\right)^{e^x}$.

№9. $y=\left(\ln x\right)^{x^4}$. *№10.* $y=\dfrac{\log_3 x}{\arcsin^2 x}$.

№11. $\dfrac{y}{x}=\arccos(x-y)$. *№12.* $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a\cos t. \end{cases}$

№13. $y=arctgx.$ *№14.* $y=xe^{\frac{x}{a}}$.

№15. $y=\dfrac{\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-2\right)}, x_0=2.$

№16. $y=\sqrt[3]{x^2}, x=1{,}03.$

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x}, y'''=?$

№19. $y=\left(x^3+4\right)^{tgx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{tg\pi x}$.

Вариант 13

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$. *№4* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\pi x-arctgx}$.

№5. $y=x^2\ln^2\cos x.$ *№6.* $y=(\cos x)^{tgx}$.

№7. $y=\sqrt[3]{\arcsin^2 x-3}.$ *№8.* $y=\dfrac{x^4}{ctg^2 x}$.

№9. $y=\dfrac{1}{5^{x^3}}$. *№10.* $y=\sqrt{1-2x-x^2+\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}}.$

№11. $y\ln y=x^2+3.$ *№12.* $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=1-4t^2.\end{cases}$

№13. $y=\sin(a+bx).$

№14. $y=\ln(x+1).$

№15. $y=2x^2-3, x_0=-1.$

№16. $y=x^4, x=2{,}01.$

№17. $y''_{xx}-?, \begin{cases}x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}\\ y=\dfrac{\sin t}{1+2\cos t}.\end{cases}$

№18. $y=(2x^3+1), y^{(5)}=?$

№19. $y=(x-5)^{chx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos ecx}.$

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(tg2x)^{\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}.$

Вариант 14

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$. №2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos x}$. №4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$.

№5. $y=(\arcsin x)^{\lg_2 x}$. №6. $y=3^{arctgx}$.

№7. $y=\dfrac{x^5-3\sin x}{tg^2x}$. №8. $y=\ln^3\sqrt{1-x^2}$.

№9. $y=x^5\cdot tg5x.$ №10. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

№11. $xy^3+\cos(x-y)=0.$ №12. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$. №14. $y=(ax+b)e^x$.

№15. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},x_0=1.$ №16. $y=\sqrt[3]{x},x=8{,}24.$

№17. $y''_{xx}-?,\begin{cases}x=\sqrt{t-1}\\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}.\end{cases}$ №18. $y=(1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}},y^{(4)}=?$

№19. $y=(\cos 5x)^{e^x},y'=?$ №20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{tgx}}$.

Вариант 15

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$. №2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$. №4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x-\sin 5x}$.

№5. $y=\sqrt[4]{2+arcctg^2 x}$. №6. $y=(5e)^{-\sin^2 x}$.

№7. $y=\dfrac{5ctgx-5}{x}$. №8. $y=\arcsin x\cdot \ln^3 3x$.

№9. $y=(\ln x)^{\cos x}$. №10. $y=\sqrt{x^2+1}-\log\sqrt{x^2+1}$.

№11. $y=\arcsin xy$. №12. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t+t^3. \end{cases}$

№13. $y=\sin^2 x$.

№14. $y=\dfrac{1}{ax+b}$.

№15. $y=2x+\dfrac{1}{x}, x_0=1$.

№16. $y=x^7, x=1{,}996$.

№17. $y''_{xx}-?, \begin{cases} x=\sqrt{6}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

№18. $y=(x^2+3)\ln(x-3), y^{(4)}-?$

№19. $y'-?, y=(x\sin x)^{\sin(x\sin x)}$.

№20. $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 16

№1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right).$

№2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x ctg 5x.$

№3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - arctgx}{x^3}.$

№4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}.$

№5. $y = \arccos 5x + \ln 3x.$

№6. $y = x^2 arctg \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

№7. $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{ctgx}.$

№8. $y = 3^{\sin x + \cos^2 x}.$

№9. $y = \dfrac{4tg 2x - 1}{x}.$

№10. $y = \ln \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{1-x^2}}}.$

№11. $y = (1+x)^y.$

№12. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

№13. $y = \sqrt{x}.$

№14. $y = x \cdot e^{kx}.$

№15. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right), x_0 = 1.$

№16. $y''_{xx} - ?, \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

№17. $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}; y^{(4)} - ?$

№18. $y' - ?, y = x^{e^{arctgx}}$

№19. $y = \left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{tg 3x}\right)^{e^{\sin x}}.$

№20. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + a \sin bx)^{\frac{1}{x}}.$

№21. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}\right)^{\frac{x^2}{a^2}}.$

Вариант 17

№1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.   *№2.* $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos ec2x - ctgx.$

№3. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\arccos t}{t-1}$.   *№4* $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0} \left(\sqrt{tg^2\alpha+\sec\alpha}-tg\alpha\right)$.

№5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{arctg^2 x-1}}$.   *№6.* $y=(2e)^{2^{\cos^7 x}}$.

№7. $y=\dfrac{x-\lg x}{x}$.   *№8.* $y=x^5\ \ln 5x.$

№9. $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.   *№10.* $y=\ln\sqrt{1+\sqrt{x+1}}.$

№11. $y^3=\arccos(x-y)$.   *№12.* $\begin{cases} x=2\cos t^2, \\ y=\sin t. \end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.   *№14.* $y=\sin\alpha x.$

№15. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, x_0=1.$ *№16.* $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}, x=1{,}016.$

№17. $y''_{xx}-?, \begin{cases} x=\sin t-t\cos t, \\ y=\cos t+t\sin t. \end{cases}$

№18. $y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x), y^{(4)}-?$

№19. $y=x^{e^x}, y'-?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctg\dfrac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$.

Вариант 18

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\dfrac{x}{2}}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}+arctgx\right)$. *№4* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

№5. $y=\log^2 x(\sin x)$. *№6.* $y=10^{\log x}$.

№7. $y=\dfrac{x^2+5tgx}{x^3}$. *№8.* $y=\arccos\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)$.

№9. $y=(ctgx)^{arcctgx}$. *№10.* $y=\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$.

№11. $x-y=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$. *№12.* $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=e^{3t}. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt{x}$. *№14.* $y=\ln(1+x)$.

№15. $y=\dfrac{-2\left(x^2+2\right)}{3\left(x^4+1\right)}, x_0=1$. *№16.* $y=\sqrt[3]{x}, x=7{,}64$.

№17. $y''_{xx}-?, \begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

№18. $y=(5x-1)\ln^2 x; y^{(3)}-?$

№19. $y'-?, y=x^{29^x}\cdot 29^x$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(arctg\dfrac{x-\dfrac{3}{4}}{(x-1)^2}\right)^{\sin(x-\pi)}$.

Вариант 19

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ *№2.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-2^{3x}}{arctg2x-7x}$.

№5. $y=arctg(\ln^{\frac{1}{3}}x)$. *№6.* $\sqrt[3]{1+3\arcsin x}$.

№7. $y=\dfrac{2+5tg3x}{1-x}$. *№8.* $y=(\sin x)^{tgx}$.

№9. $y=x^2e^{-\sin^3 x}$. *№10.* $a\arcsin\dfrac{x}{a}$.

№11. $y^3\cos x=x^3\sin y$. *№12.* $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2-\alpha \end{cases}$.

№13. $y=\ln(tgx)$. *№14.* $y=(x+1)e^{-x}$.

№15. $y=\dfrac{y^5+1}{y^4+1};x_0=1$.

№16. $y=\sqrt{4x-1},x=2{,}56$.

№17. $y''_{xx}-?;\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

№18. $y=(x^2+3x+1)e^{3x+2};y^v-?$

№19. $y'=?;y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$.

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}\right)^{x^2}$.

Вариант 20

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$. №2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{-x^2+3x+8}-2}{\sqrt{x^3+x^2}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi-x}$. №4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-tg2x}$.

№5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\arccos x}}$. №6. $y=\dfrac{1}{e^{\cos 3x}}$.

№7. $y=x\ln(arctg^2x)$. №8. $y=\dfrac{x^3-2}{3-2ctgx}$.

№9. $y=(tgx)^{\sin x}$. №10. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

№11. $y+x=\sin(x-y)$. №12. $\begin{cases} x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2} \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$.

№13. $y=\cos^2 x$. №14. $y=\dfrac{2}{1-x}$.

№15. $y=\dfrac{1}{3x+2}; x_0=2$. №16. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}; x=4{,}16$.

№17. $y''_{xx}-?;\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$. №18. $y=x\ln(1-3x); y^{iv}-?$

№19. $y'-?; y=(\sin x)^{5e^x}$.

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\frac{\pi^2}{16}}{x-\frac{\pi}{4}}}$.

Вариант 21

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4}{2x^4-x^2-1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.

№5. $y=x^4\ln 4x$.

№6. $y=\sqrt[4]{\arcsin^2 x-\ln 5}$.

№7. $y=4^{3\sin 3x}$.

№8. $y=\frac{ctg^2 x}{x^3+x}$.

№9. $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

№10. $y=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

№11. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

№12. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t^3}{3}-t. \end{cases}$

№13. $y=arctg 2x$

№14. $y=(1-x)e^{-x}$.

№15. $y=\frac{x}{x^2+1}, x_0=-2.$

№16. $y=x^7, x=2.002$.

№17. $y''_{xx}-?;\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

№18. $y=\frac{\ln x}{x^5}; y'''-?$

№19. $y'=?; y=(\arcsin x)^{e^x}$.

№20. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^8-8}$.

Вариант 22

№1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

№2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{(x-2)^2}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{tg\sqrt{x}}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$.

№5. $y=\dfrac{x^2+\cos 2x}{x}$.

№6. $y=\sqrt{6+\ln^6 x}$.

№7. $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

№8. $y=2^{arctg^3 x}$.

№9. $y=2\sin^5 xctg2x$.

№10. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-\sqrt{x}}}$.

№11. $(x+y)^2=\sin y$.

№12. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{x^3-1}$.

№14. $y=\ln(kx+1)$.

№15. $y=\dfrac{(x^2-3x+3)}{4}, x_0=3$.

№16. $y=\sqrt{4x-3}, x=1{,}78$.

№17. $\begin{cases} x=\cos t+\sin t \\ y=\sin 2t, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}, y^{iv}=?$

№19. $y=(\cos 2x)^{\ln\left(\frac{\cos 2x}{4}\right)}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{tg(9\pi x)}{\sin(4\pi x)}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Вариант 23

№1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

№2 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}\right)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^x}{\arcsin 3x-5x}$.

№5. $y=\sqrt{3+arctg^2 x}$.

№6. $y=x^2\cdot 2^{4\cos^2 x}$.

№7. $y=\dfrac{x^4}{ctg^3 x}$.

№8. $y=\log_4^4 3x$.

№9. $y=(\arccos x)^{\cos x}$.

№10. $y=\ln\left(\sqrt{1-x^2}-x^2\right)$

№11. $yx\sin+y\sin x=y^3$

№12. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{1}{2}t^3. \end{cases}$

№13. $y=\ln\sin x$.

№14. $y=x\cdot e^{-x}$.

№15. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}, x_0=1$.

№16. $y=\sqrt{x^3}, x=0{,}98$.

№17. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=\dfrac{1}{1+t^2}, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=\dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}, y'''=?$

№19. $y=x^{\arcsin x}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+e^x\right)^{\frac{\sin 1-x(x\pi)}{}}$.

Вариант 24

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-tg2x}$.

№5 $y=x^2\cdot\arccos\sqrt{x}$.

№6. $y=e^{1-\cos^5 x}$.

№7. $y=\dfrac{ctg^2 5x}{x^2+1}$.

№8. $y=\ln\cos^5 x$.

№9. $y=(tgx)^{arcctgx}$.

№10. $y=x^3\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2+x^3}}$.

№11. $y^2\sin(x+y)=2$.

№12. $\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0. \end{cases}$

№13. $y=ctg^2 x$.

№14. $y=a^{5x}$.

№15. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right), x_0=1$.

№16. $y=x^5, x=2{,}997$.

№17. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t, \end{cases} y''_{xx}=?$

№18. $y=e^{\frac{x}{2}}, y^{iv}=?$

№19. $y=(\ln x)^{3^x}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{tg\frac{x\pi}{2a}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$.

Вариант 25

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{9}}-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin(x2\pi)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-tgx}$.

№5. $y=\arccos 3x+\sqrt[3]{3x^2+1}$.

№6. $y=(ctgx)^{\ln x}$.

№7. $y=\sqrt[4]{arcctg5x+\ln 3}$.

№8. $y=3^{\sqrt{x}+\cos^3 x}$.

№9. $y=\log_3 x\cdot tg^3 3x$.

№10. $y=\dfrac{x^3+\arcsin x}{e^x}$.

№11. $y^5-x^4=\sin(xy)$.

№12. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

№14. $y=(ax+b)\cdot e^{-x}$.

№15. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\ x_0=1$.

№16. $y=\sqrt[5]{x^3},\ x=1{,}03$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}},\ y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=(3x-7)\cdot 3^{-x},\ y^{iv}=?$

№19. $y=(ctg3x)^{2e^x},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{ctgx}{\sin 4x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\sin(\pi x)}$.

Вариант 26

№1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$. *№2.* $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$. *№4.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2tgx-\sin x}$.

№5. $y=\sqrt[3]{5+arcctg^2 x}$. *№6.* $y=(3e)^{-\cos^3 x}$.

№7. $y=\frac{6tgx-6}{x^3}$. *№8.* $y=\ln^3 5x\cdot\arccos x$.

№9. $y=(\cos x)^{\lg x}$. *№10.* $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

№11. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$

№12. $\begin{cases}x=cht,\\ y=sht.\end{cases}$

№13. $y=x\cdot(\ln x-1)$.

№14. $y=2^x$.

№15. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\ x_0=1$.

№16. $y=x^4,\ x=3{,}998$.

№17. $\begin{cases}x=tgt\\ y=\frac{1}{\sin 2t},\ y''_{xx}=?\end{cases}$

№18. $y=(x^2+3)\cdot\ln(x-3),\ y^{iv}=?$

№19. $y=(tgx)^{4e^x},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x)^{\frac{6x}{\pi}}$.

Вариант 27

№1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{\left(x^2 - x - 2\right)^2}.$

№2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}} - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2} + x} - \sqrt{2x}}.$

№3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\pi} - e^{x}}{\sin 5x - \sin 3x}.$

№4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 7^{x}}{\arcsin 3x - 5x}.$

№5. $y = \arccos\left(2e^{2x} - 1\right).$

№6. $y = (3e)^{ctg^4 x}.$

№7. $y = \dfrac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}.$

№8. $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right).$

№9. $y = x^{\arcsin x}.$

№10. $y = \log_2 \sin^2 x + \sqrt{x}.$

№11. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$

№12. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^2 + 1. \end{cases}$

№13. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right).$

№14. $y = 5 - 3\cos^2 x.$

№15. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x},\ x_0 = 1.$

№16. $y = \sqrt{1 + x + \sin x},\ x = 0{,}01.$

№17. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t,\ y''_{xx} = ? \end{cases}$

№18. $y = (x + 7)\ln(x + 4),\ y^{iv} = ?$

№19. $y = x^{e^{tgx}},\ y' = ?$

№20. $\lim\limits_{x \to 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{tg 5x \sin 2x}}.$

№21. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{\sin(x3\pi)}{\sin(x\pi)}\right)^{\sin^2(x-2)}.$

Вариант 28

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{arctgx-x^2}$.

№5. $y=\ln tg\dfrac{2x+1}{5}$.

№6. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

№7. $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

№8. $y=x\cdot \arcsin \ln x$.

№9. $y=\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$.

№10. $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$.

№11. $x^4+y^4=x^2y^2$.

№12. $\begin{cases} x=tgt, \\ y=\sin 2t+2\cos 2t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

№13. $y=a\sin(bx+c)$.

№14. $y=2^x+2^{-x}$.

№15. $y=\dfrac{3x+2x^3}{3}, x_0=1$.

№16. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}, x=0{,}01$.

№17. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\ln\sin t, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=\left(4x^3+5\right)\cdot e^{2x+1}, y^{v}=?$

№19. $y=x^{3^x}\cdot 2^x, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin x)^{\frac{3}{x-1}}$.

Вариант 29

№1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}.$ №2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg\left(x^2-2x\right)}{\sin\left(x3\pi\right)}.$ №4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}.$

№5. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x.}}}$ №6. $y=e^{0.5tg^2 x}.$

№7. $y=\dfrac{x^2 * e^{x^2}}{x^2+1}.$ №8. $y=x*\sin x*\cos x.$

№9. $y=x^{2^x}.$ №10. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1-\sin^4 x}.$

№11. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$

№12. $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t*arctgt, t\in\left(0,\infty\right).\end{cases}$

№13. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x.$

№14. $y=\dfrac{1+x}{1-x}.$

№15. $y=3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x},\ x_0=1.$

№16. $y=\sqrt[4]{x^3},\ x=1,03.$

№17. $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=2\sec^2 t\end{cases}, y''_{xx}=?.$

№18. $y=\left(5x-8\right)*2^{-x}, y^{iv}=?$

№19. $y=\left(arcctgx\right)^{\frac{1}{2}\ln arctgx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x\right)^{tg\left(\frac{x\pi}{2}\right)}.$

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\ln tgx}{1-ctgx}\right)^{\frac{1}{x+\frac{\pi}{4}}}.$

Вариант 30

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^3\right)-\left(1+3x\right)}{x+x^5}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

№3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x - tg^2 x}{\left(x-\pi\right)^4}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2x}{x-\sin 9x}$.

№5. $y=\sqrt{arcctg\dfrac{x}{2}}$.

№6. $y=x^2\, 5^{2ctg^2 x}$.

№7. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

№8. $y=3x^3 * \log_3 x$.

№9. $y=\left(\cos x\right)^{ctgx}$.

№10. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}$.

№11. $x*y=arctg\dfrac{x}{y}$.

№12. $\begin{cases} x=\arcsin\left(t^2-1\right), \\ y=\arccos\dfrac{t}{2}, t\in\left(0,\sqrt{2}\right). \end{cases}$

№13. $y=3^{-x^2}$.

№14. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

№15. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}, x_0=1$.

№16. $y=\sqrt{x^2+5}, x=1.97$.

№17. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=x^2\sin\left(5x-3\right), y'''=?$

№19. $y=19^{x^{19}} * x^{19}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(tgx\right)^{ctgx}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приступая к изучению высшей математики, необходимо знать, что математику нельзя изучать пассивно, нужно стараться глубоко вникать в смысл математических понятий и теорем, пытаться самостоятельно решать математические задачи. Результатами изучения курса высшей математики должны быть развитие аналитического мышления, овладение навыками решения математических задач, выработка умения самостоятельно ставить задачи и выбирать или разрабатывать методы их решения.

Материал практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения одного из важнейших разделов в курсе высшей математики - дифференциального исчисления. Позволяет приобрести и закрепить практические навыки решения простых типовых задач, а также познакомится с методикой построения приложений производных к задачам механики и физики. Наиболее эффективный результат может быть достигнут, если использовать пособие, как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Несколько слов о том, как работать с этой книгой. Прежде, чем приступать к изучению методов решения задач, необходимо повторить основные определения и теоремы, относящиеся к данному разделу, постараться понять и запомнить наиболее часто используемые формулы. После этого можно переходить к изучению разобранных примеров. Некоторые типовые задачи и методы рассмотрены в пособии, как в общем виде, так и на примерах. Весьма полезно изучить и то и другое. Это поможет вам не только отработать навыки решения задач, но и лучше понять и усвоить теоретический материал.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1984.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Альфа, т. 1, 1998. - 687с., т. 2, 1998. – 584с.
3. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высшая школа, 1999. - 695с.
4. Пискунов П.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / П.С. Пискунов. – М.: Наука, т. 1, 2001. — 415с., т.2, 2001. — 544с.
5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1986.
6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов / В.П. Минорский. — М.: Наука, 1987.
7. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. — М.: Высш.школа, 2003.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2008.
9. Гусак А.А. Высшая математика / А.А.Гусак. — Мн.: «ТетраСистемс», 2003. Т. 1. - 543 с.
10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, Ч. 1, 2. — М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003.
11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985.
12. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ