

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Воронежский государственный технический университет»

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета РТЭ Небольсин В.А.  
«30» 08 2017 г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

дисциплины

«Методы математической физики»

Направление подготовки 16.03.01 Техническая физика

Профиль Физическая электроника

Квалификация выпускника бакалавр

Нормативный период обучения 4 года

Форма обучения очная

Год начала подготовки 2017

Автор программы

Шуни / Шунин Г.Е./

Заведующий кафедрой  
Высшей математики и  
физико-математического  
моделирования

Батаронов /Батаронов И.А./

Руководитель ОПОП

Калинин /Калинин Ю.Г./

Воронеж 2017

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Воронежский государственный технический университет»

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета РТЭ \_\_\_\_\_ Небольсин В.А.  
« » 2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

дисциплины

«Методы математической физики»

**Направление подготовки** 16.03.01 Техническая физика

**Профиль** Физическая электроника

**Квалификация выпускника** бакалавр

**Нормативный период обучения** 4 года

**Форма обучения** очная

**Год начала подготовки** 2017

Автор программы \_\_\_\_\_ / Шунин Г.Е./

Заведующий кафедрой Высшей математики и физико-математического моделирования \_\_\_\_\_ /Батаронов И.Л./

Руководитель ОПОП \_\_\_\_\_ /Калинин Ю.Г./

Воронеж 2017

# 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Цели дисциплины

состоят в освоении принципов построения основных физико-математических моделей и методов математической физики, используемых при их исследовании, а также в овладении практическими навыками применения стандартных аналитических и численных методов математической физики для формулировки и решения конкретных физико-технических задач.

## 1.2. Задачи освоения дисциплины

1.2.1 получить представление о физико-математическом моделировании как особом способе исследования и описания физических явлений и процессов, общности ее понятий и представлений; об основных физико-математических моделях и методах математической физики, используемых при их исследовании.

1.2.2 научиться использовать основные приёмы и методы математической физики для исследования основных физико-математических моделей.

1.2.3 научиться применять универсальные системы компьютерной математики и системы конечно-элементного анализа при решении вычислительных задач математической физики.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Методы математической физики» относится к дисциплинам базовой части блока Б1.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс изучения дисциплины «Методы математической физики» направлен на формирование следующих компетенций:

ДПК-3- способностью использовать фундаментальные законы основных профессиональных дисциплин выбранного профиля в профессиональной деятельности

ОПК-2- способностью применять методы математического анализа, моделирования, оптимизации и статистики для решения задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности

ОПК-3- способностью к теоретическим и экспериментальным исследованиям в избранной области технической физики, готовностью учитывать современные тенденции развития технической физики в своей профессиональной деятельности.

Компетенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции
ДПК-3	<b>Знает:</b> основные физико-математические модели, используемые в профессиональной деятельности, основные положения и методы математической физики, образующих фундаментальную основу физико-математического моделирования объектов,

	явлений и процессов.
ОПК-2	<b>Умеет:</b> решать краевые задачи математической физики и находить геометрические, дифференциальные и интегральные характеристики физических полей аналитическими, приближёнными и численными методами с использованием систем компьютерной математики.
ОПК-3	<b>Владеет:</b> методологией физико-математического моделирования позволяющей выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Методы математической физики» составляет 5 з.е.

Распределение трудоемкости дисциплины по видам занятий  
**очная форма обучения**

Виды учебной работы	Всего часов	Семестры	
		5	6
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	108	54	54
В том числе:			
Лекции	54	36	18
Практические занятия (ПЗ)	36	18	18
Лабораторные работы (ЛР)	18	-	18
<b>Самостоятельная работа</b>	72	54	18
Виды промежуточной аттестации - зачет, зачет с оценкой	+	+	+
Общая трудоемкость:			
академические часы	180	108	72
зач.ед.	5	3	2

#### 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**5.1 Содержание разделов дисциплины и распределение трудоемкости по видам занятий**

**очная форма обучения**

№ п/п	Наименование темы	Содержание раздела	Лекц	Прак зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего, час
<b>5 семестр</b>							
1	Введение в физико-математиче	Эволюция основных идей, понятий и методов	3	-	-	6	9

	ское моделирование.	математической физики. Научные биографии основоположников математической физики. Основные этапы физико-математического моделирования объектов. Вычислительный эксперимент.					
2	Дифференциальные и интегральные операции математической физики.	Элементы тензорной алгебры: Понятие тензора и его ранга. Действия с тензорами. Симметричные и антисимметричные тензоры второго ранга. Их геометрическая интерпретация. Скалярные, векторные и тензорные поля. Основные дифференциальные операторы математической физики. Типы векторных полей. Теорема Гельмгольца. Криволинейные, поверхностные и объёмные интегралы от тензорных полей. Формулы Остроградского-Гаусса, Грина и Стокса. Криволинейные координаты в векторном анализе. Дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах.	7	4	-	9	20
3	Основные физико-математические модели.	Пространственно-временной континуум. Основные динамические уравнения. Законы сохранения. Задача Коши. Тензор напряжений. Уравнение механики сплошной среды. Случай идеальной жидкости. Уравнения непрерывности и теплопроводности. Вывод уравнения упругих колебаний струны. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах. Законы сохранения. Электростатические и магнитостатические поля. Потенциалы электромагнитного поля. Калибровочные преобразования. Скалярные и векторные уравнения Лапласа и Пуассона. Электромагнитные волны. Векторные и скалярные	10	2	-	15	27

		уравнения Даламбера и Гельмгольца. Квазистационарные электромагнитные поля. Векторные и скалярные уравнения диффузии. Условия на границе раздела двух сред.					
4	Постановка краевых задач математической физики.	Понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных. Классификация квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка. Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов. Краевая задача для эллиптических уравнений. Смешанная краевая задача. Корректность постановки краевых задач.	6	4	-	9	19
5	Аналитические методы решения краевых задач.	Линейные уравнения. Принцип суперпозиции. Уравнения с разделяющимися переменными. Метод разделения переменных Фурье. Понятие о функциональных пространствах. Обобщённые ряды Фурье. Собственные функции и собственные значения линейных операторов. Постановка задач на собственные значения дифференциальных операторов. Задача Штурма-Лиувилля. Понятие о специальных функциях. Функции Бесселя, полиномы Лежандра и сферические гармоники. Общая схема метода разложения по собственным функциям. Сущность метода функций Грина.	10	8	-	15	33
<b>6 семестр</b>							
6	Элементы вариационного исчисления.	Понятие функционала и его вариации. Экстремум функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Функционалы зависящие от производных высших порядков и от нескольких функций. Функционалы зависящие от функций нескольких переменных. Вариационные задачи с подвижными границами.	8	16	-	8	32

		Естественные и главные граничные условия. Обратная задача вариационного исчисления.					
7	Приближённые и численные методы решения краевых задач.	Прямые методы вариационного исчисления. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Рунге-Кутты. Проекционные методы. Сущность метода конечных элементов. Конечные элементы и аппроксимации.	10	2	18	10	40
<b>Итого</b>			<b>54</b>	<b>54</b>	<b>18</b>	<b>72</b>	<b>180</b>

## 5.2 Перечень лабораторных работ

6 семестр

1. Аппроксимация функций (3 часа).
2. Численное решение задачи Коши для основного динамического уравнения (3 часа).
3. Решение одномерных краевых задач методом конечных разностей (3 часа).
4. Решение одномерных краевых задач методом Рунге (3 часа).
5. Решение одномерных краевых задач методом Галёркина (3 часа).
6. Решение одномерных краевых задач методом конечных элементов (3 часа).

## 6. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ) И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Предусматривается в 5 семестре коллоквиум по разделам «Дифференциальные и интегральные операции математической физики. Основные физико-математические модели» и контрольная работа по разделу «Аналитические методы решения краевых задач», а в 4 семестре коллоквиум по разделу «Элементы вариационного исчисления» и контрольная работа по разделу «Приближённые и численные методы решения краевых задач».

На коллоквиумах осуществляется рубежное тестирование знаний студентов, а на контрольных работах проверяется умение решать стандартные и прикладные задачи.

Освоение дисциплины предусматривает также выполнение индивидуального домашнего задания (ИДЗ) в 6 семестре.

Тема ИДЗ : «Решение краевых задач математической физики с помощью конечно-элементных комплексов программ».

ИДЗ включает в себя теоретическую и расчётную части. В теоретической части рассматриваются возможности конечно-элементных комплексов программ. В расчётной части рассматривается физико-математическая модель (определяется индивидуальным заданием), формулируется соответствующая краевая задача и находится её решение в заданной области с помощью выбранного подходящего конечно-элементного комплекса программ.

Примерные варианты индивидуальных заданий:

1. Двухмерные краевые задачи электростатики.
  2. Трёхмерные краевые задачи электростатики.
  3. Двухмерные краевые задачи стационарной теплопередачи.
  4. Двухмерные краевые задачи нестационарной теплопередачи.
  5. Трёхмерные краевые задачи стационарной теплопередачи.
- Задачи, решаемые при выполнении ИДЗ:
- а) Осуществить поиск необходимой информации по теме работы;
  - б) Систематизировать найденную информацию;
  - в) Осуществить обзор литературных источников по заданной теме;
  - г) Выработать умения решать прикладные задачи

## **7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

### **7.1. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания**

#### **7.1.1 Этап текущего контроля**

Результаты текущего контроля знаний и межсессионной аттестации оцениваются по следующей системе:

«аттестован»;

«не аттестован».

<b>Компетенция</b>	<b>Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции</b>	<b>Критерии оценивания</b>	<b>Аттестован</b>	<b>Не аттестован</b>
ДПК-3	<b>знать</b> основные физико-математические модели, используемые в профессиональной деятельности, основные положения и методы математической физики, образующих фундаментальную основу физико-математического моделирования объектов, явлений и процессов.	Тест	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах
ОПК-2	<b>уметь</b> решать краевые задачи математической физики и находить геометрические, дифференциальные и интегральные характеристики физических полей аналитическими, приближёнными и численными методами с использованием систем компьютерной математики.	Решение стандартных практических задач	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах
ОПК-3	<b>владеть</b> методологией математического моделирования позволяющей выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.	Решение прикладных задач в конкретной предметной области	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах

#### **7.1.2 Этап промежуточного контроля знаний**

Результаты промежуточного контроля знаний оцениваются в 5, 6 семестрах для очной формы обучения по двух/четырёхбалльной системе:

«зачтено»



«не зачтено»

Компетенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции	Критерии оценивания	Зачтено	Не зачтено
ДПК-3	<b>знать</b> основные физико-математические модели, используемые в профессиональной деятельности, основные положения и методы математической физики, образующих фундаментальную основу физико-математического моделирования объектов, явлений и процессов.	Тест	Выполнение теста на 70-100%	Выполнение менее 70%
ОПК-2	<b>уметь</b> решать краевые задачи математической физики и находить геометрические, дифференциальные и интегральные характеристики физических полей аналитическими, приближёнными и численными методами с использованием систем компьютерной математики.	Решение стандартных практических задач	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены
ОПК-3	<b>владеть</b> методологией математического моделирования позволяющей выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.	Решение прикладных задач в конкретной предметной области	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены

ИЛИ

«отлично»;

«хорошо»;

«удовлетворительно»;

«неудовлетворительно».

Компетенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции	Критерии оценивания	Отлично	Хорошо	Удовл.	Неудовл.
ДПК-3	<b>знать</b> основные физико-математические модели, используемые в профессиональной деятельности, основные положения и методы математической физики, образующих фундаментальную основу физико-математического моделирования объектов, явлений и процессов.	Тест	Выполнение теста на 90- 100%	Выполнение теста на 80- 90%	Выполнение теста на 70- 80%	В тесте менее 70% правильных ответов
ОПК-2	<b>уметь</b> решать краевые задачи математической физики и находить геометрические, дифференциальные и	Решение стандартных практических задач	Задачи решены в полном объеме и получены	Продемонстрирован верный ход решения всех, но не получен	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены

	интегральные характеристики физических полей аналитическими, приближёнными и численными методами с использованием систем компьютерной математики.		верные ответы	верный ответ во всех задачах		
ОПК-3	<b>владеть</b> методологией математического моделирования позволяющей выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.	Решение прикладных задач в конкретной предметной области	Задачи решены в полном объеме и получены верные ответы	Продемонстрирован верный ход решения всех, но не получен верный ответ во всех задачах	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены

## 7.2 Примерный перечень оценочных средств (типичные контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности)

### 7.2.1 Примерный перечень заданий для подготовки к тестированию 5 семестр

1. Какое из уравнений Максвелла является дифференциальной формой закона электромагнитной индукции Фарадея?

а)  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ , б)  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , в)  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , г)  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .

2. При выводе уравнения колебаний струны используется:

а) закон сохранения энергии, б) закон сохранения заряда, в) второй закон Ньютона, г) закон сохранения массы.

3. Стационарная теплопередача при наличии внутренних источников тепла описывается уравнением

а)  $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T$ , б)  $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \Delta T$ , в)  $\Delta T = -f$ , г)  $\Delta T = 0$ .

4. Дифференциальное уравнение  $a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y, u)u = f(x, y)$  является:

а) линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка,  
 б) линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка,  
 в) квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка,  
 г) нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

5. Определите тип уравнения  $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u)$ , если  $b^2 - ac > 0$ .

а) смешанный, б) эллиптический, в) параболический, г) гиперболический.

6. Определить тип линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

а) смешанный, б) эллиптический, в) параболический, г) гиперболический.

7. Определить тип уравнения и тип краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \mu(x), u(x, l) = \nu(x), \\ u_x(x, 0) = u_x(x, l) = 0 \end{cases}$$

а) эллиптический, краевая задача второго рода, б) параболический, смешанная краевая задача, в) гиперболический, задача Коши, г) гиперболический, смешанная краевая задача.

8. Решением задачи Коши для волнового уравнения  $u_{tt} = 4u_{xx}$  с начальными условиями  $u(x,0) = 2 \sin(x)$ ,  $u_t(x,0) = 0$  будет

а)  $u(x,t) = (\sin(x-2t) + \sin(x+2t))$ , б)  $u(x,t) = (\sin(x-2t) - \sin(x+2t))$ ,

в)  $u(x,t) = (\cos(x-2t) + \cos(x+2t))$ , г)  $u(x,t) = (\cos(x-2t) - \sin(x+2t))$ ,

9. Решение краевой задачи для уравнения  $y''+y=0$  с граничными условиями  $y(0)=y(\pi)=0$  будет

а)  $\sin(3x)$ , б)  $\cos(3x)$ , в)  $\sin(x)$ , г)  $\cos(x)$ .

10. Собственными значениями и собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля  $y''+\lambda y=0$ ,  $y(0)=y(\pi)=0$  являются

а)  $\lambda_n=n$ ,  $y_n=\cos(nx)$ , б)  $\lambda_n=n^2$ ,  $y_n=\cos(nx)$ , в)  $\lambda_n=n$ ,  $y_n=\sin(nx)$ , г)  $\lambda_n=n^2$ ,  $y_n=\sin(nx)$ .

11. Решение смешанной краевой задачи для волнового уравнения  $u_{tt}=u_{xx}$  с граничными условиями  $u(0,t)=u(1,t)=0$  и начальными условиями  $u(x,0)=x(1-x)$ ,  $u_t(x,0)=0$  имеет вид

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x) \cos(\pi n t)$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x) \sin(\pi n t)$ ,

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) \cos(\pi n t)$ , г)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) \sin(\pi n t)$ .

**6 семестр**

### 7.2.2 Примерный перечень заданий для решения стандартных задач

в1. Найти эквипотенциальные поверхности и семейство линий наибыстрейшего возрастания скалярного поля

$$u = x^2 + y^2 - z^2.$$

2. Найти производную скалярного поля  $u(x,y,z) = x^2 - \arctg(y+z)$  в точке  $M(2,1,1)$  по направлению вектора  $l=3j-4k$ .

3. Найти поток векторного поля  $a=(2y-5x)i + (x-1)j + (2xy+2z)k$  через замкнутую поверхность  $S$ :  $2x+2y-z=4$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  (нормаль внешняя), используя формулу Остроградского-Гаусса.

4. Найти потенциал векторного поля  $a=2xyi+(x^2-2yz)j-y^2k$ .

5. Определить вид векторного поля  $a=(yz-xy)i+(xz-x^2/2+yz^2)j+(xy+yz)^2k$ .

6. Найти общее решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$3 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

7. Найти фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. Найти общее решение уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2.$$

9. Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

с начальными условиями

$$u(0)=\sin(x), u_t(0)=0.$$

10. Определить тип и привести к каноническому виду дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

11. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи с периодическими граничными условиями

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \quad x \in [0, 1].$$

12. Решить краевую задачу методом конечных разностей. Сравнить с точным решением. Провести анализ сходимости аппроксимации.

$$e^x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + e^x \frac{d\varphi}{dx} = -2x; \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0, \quad \varphi(1) = 4.$$

### 7.2.3 Примерный перечень заданий для решения прикладных задач

1. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы  $I$ , текущим по бесконечному проводу, определяется формулой  $\mathbf{H}(P) = 2I \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ . Вычислить  $\operatorname{div} \mathbf{H}(P)$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H}(P)$ .

Определить вид этого поля.

2. Определить суммарный электрический заряд, распределенный по поверхности пластины  $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$  если поверхностная плотность заряда в точке  $P(x, y, z)$  равна  $k \sqrt{|xyz|}$ , где  $k > 0$  – коэффициент пропорциональности.

3. Бесконечная плоская пластина толщиной  $h$  равномерно заряжена по объёму с плотностью  $\rho$ . Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса найти напряжённость  $\mathbf{E}$  электрического поля вне пластины.

4. Пользуясь формулой Стокса найти напряжённость  $\mathbf{H}$  магнитного поля создаваемого бесконечно длинным тонким проводником с током  $I$ .

5. Найти траекторию движения частицы с зарядом  $q$  и начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$  в однородном постоянном электрическом поле с напряжённостью  $\mathbf{E}$ .

6. Вывести из уравнений Максвелла закон сохранения заряда.

7. Сформулировать краевую задачу о проникновении переменного магнитного поля в правое полупространство с проводимостью  $\sigma$ , если начиная с момента времени  $t=0$  на поверхности  $x=0$  поддерживается напряжённость  $\mathbf{H} = H_0 \sin(\omega t)$ ,  $\omega$ -частота поля.

8. Один конец стержня  $x=0$  теплоизолирован, а другой  $x=l$  поддерживается при температуре равной нулю. В начальный момент времени  $t=0$  температура во всех точках стержня равна  $T_0$ . Найти распределение температуры при  $t > 0$ .

9. Решите одномерную задачу стационарной теплопроводности в полой цилиндрической трубке с внутренним и внешним радиусами, равными соответственно 0.5 и 2. Температуру на внутренней и внешней поверхностях задайте равными 100 и 200 соответственно. Покажите, что полученное решение одномерно. Сравните численное решение с точным решением.

10. Найти стационарное распределение температуры  $u$  в прямоугольной пластине  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$  которая нагревается от источников тепла с мощностью  $Q(x, y)$ , если

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{y=0} = -1, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{y=2} = 1; \quad Q(x, y) = 3.$$

11. Рассчитайте распределение температуры в поперечном сечении длинного цилиндра. Теплопроводность равна 2.2. Граничные условия следующие: одна половина внешней поверхности цилиндра теплоизолирована, в то время как другая омывается жидкостью с температурой 500, коэффициент теплоотдачи равен 22. В половине сечения с теплоизолированной границей происходит выделение тепло с  $S=2000$ , в другой половине источниковый член  $S$  равен 0.

### 7.2.4 Примерный перечень вопросов для подготовки к зачету

1. Основные этапы физико-математического моделирования объектов.
2. Понятие тензора и его ранга.

3. Действия с тензорами.
4. Симметричные, антисимметричные и инвариантные тензоры второго ранга.
5. Скалярные, векторные и тензорные поля.
6. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей.
7. Основные дифференциальные операции математической физики.
8. Виды векторных полей. Теорема Гельмгольца.
9. Криволинейные интегралы от тензорных полей.
10. Поверхностные интегралы от тензорных полей.
11. Объёмные интегралы от тензорных полей.
12. Формула Остроградского-Гаусса.
13. Формулы Грина.
14. Формула Стокса.
15. Основные динамические уравнения и законы сохранения.
16. Задача Коши для динамического уравнения.
17. Тензор напряжений и уравнение механики сплошной среды.
18. Уравнения течения идеальной жидкости, непрерывности и теплопроводности.
19. Дифференциальная форма уравнений Максвелла. Граничные условия.
20. Стационарные уравнения Максвелла. Скалярные и векторные уравнения Лапласа, Пуассона.
21. Электромагнитные волны. Скалярные и векторные волновые уравнения.
22. Гармонические электромагнитные поля. Скалярные и векторные уравнения Гельмгольца.
23. Квазистационарные уравнения Максвелла. Скалярные и векторные уравнения диффузии.
24. Основные уравнения математической физики: Лапласа, Пуассона, волновое и теплопроводности.
25. Классификация квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка.
26. Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов.
27. Краевая задача для эллиптических уравнений.
28. Смешанная краевая задача.
29. Корректность постановки краевых задач.
30. Линейные уравнения. Принцип суперпозиции.
31. Уравнения с разделяющимися переменными. Метод Фурье.
32. Задачи на собственные значения дифференциальных операторов.
33. Задача Штурма-Лиувилля. Понятие о специальных функциях.
34. Метод разложения по собственным функциям.
35. Линейные неоднородные уравнения. Общая схема метода собственных функций.
36. Сущность метода функций Грина.
37. Решение уравнения колебаний бесконечной струны методом Даламбера.
38. Задача Дирихле для круга.
39. Задача об охлаждении бесконечной пластины конечной толщины.
40. Решение уравнения свободных колебаний закреплённой струны.

### **7.2.5 Примерный перечень вопросов для подготовки к зачету с оценкой**

1. Основная задача вариационного исчисления. Функциональные пространства. Понятие функционала. Экстремум.
2. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления.
3. Уравнение Эйлера. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
4. Канонические уравнения (уравнения Гамильтона).
5. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.
6. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
7. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
8. Вариационная формулировка некоторых физических задач (электростатика, стационарная теплопроводность).
9. Вывод уравнения свободных колебаний струны вариационным методом.
10. Необходимые условия экстремума для простейшей задачи с подвижными границами.
11. Задача Больца. Вариационная формулировка краевых задач 1-го, 2-го и 3-го рода.
12. Главные и естественные граничные условия в задаче стационарного распределения тепла.
13. Вариационные задачи на условный экстремум.
14. Изопериметрическая задача.
15. Прямые методы решения вариационных задач. Метод Ритца. Метод Эйлера.
16. Задачи физического характера на применение метода Ритца (колебания клина, кручение цилиндра, стационарное распределение тепла в прямоугольной пластине).
17. Метод Канторовича.
18. Конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных: дискретизация эллиптических, гиперболических и параболических уравнений.
19. Проекционные методы дискретизации дифференциальных задач: метод взвешенных невязок; методы коллокаций, моментов, Галеркина.
20. Одновременная аппроксимация решения дифференциального уравнения и граничных условий в методе взвешенных невязок.
21. Проекционно-разностные методы и вариационно-разностные методы дискретизации дифференциальных задач. Основные положения метода конечных элементов.
22. Конечные элементы и аппроксимация. Ансамблирование элементов.
23. Дискретизация одномерных задач методом конечных элементов.
24. Дискретизация эллиптических задач методом конечных элементов.
25. Частичная дискретизация на примере нестационарного уравнения теплопроводности.

### **7.2.6. Методика выставления оценки при проведении промежуточной аттестации**

Зачёт с оценкой проводится по тест-билетам, каждый из которых содержит 10 вопросов и задачу. Каждый правильный ответ на вопрос в тесте оценивается 1 баллом, задача оценивается в 10 баллов (5 баллов верное решение и 5 баллов за верный ответ). Максимальное количество набранных баллов – 20.

1. Оценка «Неудовлетворительно» ставится в случае, если студент набрал менее 6 баллов.

2. Оценка «Удовлетворительно» ставится в случае, если студент набрал от 6 до 10 баллов

3. Оценка «Хорошо» ставится в случае, если студент набрал от 11 до 15 баллов.

4. Оценка «Отлично» ставится, если студент набрал от 16 до 20 баллов.

### 7.2.7 Паспорт оценочных материалов

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции	Наименование оценочного средства
1	Введение в физико-математическое моделирование.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, отчёт, опрос.
2	Дифференциальные и интегральные операции математической физики.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, коллоквиум, отчёт, опрос.
3	Основные физико-математические модели.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, коллоквиум, отчёт, опрос.
4	Постановка краевых задач математической физики.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, контрольная работа, отчёт, опрос.
5	Аналитические методы решения краевых задач.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, контрольная работа, отчёт, опрос.
6	Элементы вариационного исчисления.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, коллоквиум, отчёт, опрос.
7	Приближённые и численные методы решения краевых задач.	ДПК-3, ОПК-2, ОПК-3	Тест-билет, контрольная работа, защита лабораторных работ, отчёт, опрос.

### 7.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Тестирование осуществляется, либо при помощи компьютерной системы тестирования, либо с использованием выданных тест-заданий на бумажном носителе. Время тестирования 30 мин. Затем осуществляется проверка теста экзаменатором и выставляется оценка согласно методике выставления оценки при проведении промежуточной аттестации.

Решение стандартных задач осуществляется, либо при помощи компьютерной системы тестирования, либо с использованием выданных задач на бумажном носителе. Время решения задач 30 мин. Затем осуществляется проверка решения задач экзаменатором и выставляется оценка, согласно методике выставления оценки при проведении промежуточной аттестации.

Решение прикладных задач осуществляется, либо при помощи компьютерной системы тестирования, либо с использованием выданных задач на бумажном носителе. Время решения задач 30 мин. Затем осуществляется проверка

решения задач экзаменатором и выставляется оценка, согласно методики выставления оценки при проведении промежуточной аттестации.

## **8 УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **8.1 Перечень учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.Н. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. -368 с.
2. Сборник задач по математике для втузов : В 4 т.: Учеб. пособие. Т. 3 / Под ред А.В.Ефимова, А.С.Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Физматиздат, 2002. - 576 с.
3. Шунин Г.Е., Кострюков С.А., Пешков В.В. Введение в конечно-элементный анализ: учебное пособие /ФГБОУ ВО "Воронеж. гос. техн. ун-т". -Воронеж : Воронежский государственный технический университет, 2017. - 204 с.
4. Кострюков С.А., Пешков В.В., Шунин Г.Е. Основы вариационного исчисления : Учеб. пособие. - Воронеж : ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011. - 165 с.
5. Нечаев В.Н., Шуба А.В. Методы математической физики : Учеб. пособие. Ч.1. - Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2009. - 177 с.
6. Нечаев В.Н., Шуба А.В. Методы математической физики : Учеб. пособие. Ч.2. - Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2009. - 110 с.
7. Кострюков С.А., Пешков В.В., Шунин Г.Е., Шулгина В.А. Практикум по численным методам [Электронный ресурс] : учебное пособие / ФГБОУ ВО "Воронеж. гос. техн. ун-т", каф. высш. математики и физ.-мат. моделирования. - Воронеж : Воронежский государственный технический университет, 2017. - 256 с.
8. Пичугин Б. Ю., Пичугина А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие. Омск : Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского. 2016.–180 с. – 978-5-7779-1976-2. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/59669.html>
9. Киреев И. В., Кнауб Л. В., Левчук Д. В., Нужин Я. Н. Тензорный анализ и дифференциальная геометрия: учеб. пособие. Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2017. –102 с. – 978-5-7638-3622-6. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/84148.html>

### **8.2 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем:**

1	Операционные системы, средства просмотра Web,	<i>Лицензионные:</i> Windows XP и выше; <i>свободно распространяемые:</i> Internet Explorer 7 и выше,
---	---	--



	поисковые системы, средства работы с текстовой, графической и видео информацией	Chrome, Google, Yandex, Open Office, Acrobat Reader
2	Системы компьютерной математики	<i>Лицензионные:</i> Maple 14; <i>свободно распространяемые:</i> демонстрационная версия Maple 5.4, Maxima, Scilab, MathStudio
	Конечно-элементные комплексы программ	<i>Свободно распространяемые:</i> Femppdesolver, Femm, студенческие версии Flexpde, Elcut
3	Сайт библиотеки ВГТУ и ИОС ВГТУ	<a href="http://catalog.vorstu.ru">http://catalog.vorstu.ru</a> <a href="http://eios.vorstu.ru">http://eios.vorstu.ru</a>
4	Электронные библиотеки, профессиональные базы данных и информационные справочные системы	<a href="http://www.elabory.ru">http://www.elabory.ru</a> <a href="http://www.iprbookshop.ru">http://www.iprbookshop.ru</a> <a href="http://eqworld.ipmnet.ru">http://eqworld.ipmnet.ru</a> <a href="http://dic.academic.ru">http://dic.academic.ru</a> <a href="http://m.mathnet.ru">http://m.mathnet.ru</a>

## 9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

9.1	<i>Лекции:</i> специализированное помещение для проведения лекций, оборудованное компьютером с видеопроектором.
9.2	<i>Лабораторные занятия:</i> специализированная лаборатория, оборудованная персональными компьютерами с выходом в Интернет.
9.3	<i>Практические занятия:</i> специализированное помещение для проведения практических, оборудованное компьютерами с выходом в Интернет.

## 10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

По дисциплине «Спецглавы математики» читаются лекции, проводятся практические занятия и лабораторные работы, выполняется курсовая работа.

Основой изучения дисциплины являются лекции, на которых излагаются наиболее существенные и трудные вопросы, а также вопросы, не нашедшие отражения в учебной литературе.

Практические занятия направлены на приобретение практических навыков применения математического аппарата для решения стандартных и прикладных задач. Занятия проводятся путем решения конкретных задач в аудитории.

Лабораторные работы выполняются с помощью вычислительной техники в соответствии с методиками, приведенными в указаниях к выполнению работ.

Вид учебных занятий	Деятельность студента
Лекция	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; пометать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь.

	Обозначение вопросов, терминов, материала, которые вызывают трудности, поиск ответов в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на лекции или на практическом занятии.
Практическое занятие	Конспектирование рекомендуемых источников. Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы. Прослушивание аудио- и видеозаписей по заданной теме, выполнение расчетно-графических заданий, решение задач по алгоритму.
Лабораторная работа	Лабораторные работы позволяют научиться применять теоретические знания, полученные на лекции при решении конкретных задач. Чтобы наиболее рационально и полно использовать все возможности лабораторных работ для подготовки к ним необходимо: следует разобрать лекцию по соответствующей теме, ознакомиться с соответствующим разделом учебника, проработать дополнительную литературу и источники, решить задачи и выполнить другие письменные задания.
Самостоятельная работа	Самостоятельная работа студентов способствует глубокому усвоению учебного материала и развитию навыков самообразования. Самостоятельная работа предполагает следующие составляющие: - работа с текстами: учебниками, справочниками, дополнительной литературой, а также проработка конспектов лекций; - выполнение домашних заданий и расчетов, курсовой работы; - работа над темами для самостоятельного изучения; - участие в работе студенческих научных конференций, олимпиад; - подготовка к промежуточной аттестации.
Подготовка к промежуточной аттестации	Готовиться к промежуточной аттестации следует систематически, в течение всего семестра. Интенсивная подготовка должна начаться не позднее, чем за месяц-полтора до промежуточной аттестации. Данные перед зачетом, зачетом с оценкой три дня эффективнее всего использовать для повторения и систематизации материала.