

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА:
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ**

*Учебно-методическое пособие
для студентов очной и заочной форм обучения*

*Составители:
В. А. Козлов, В. В. Волков, В. Н. Горячев, М. Г. Ордян*

Воронеж 2019

УДК 531(07)
ББК 22.2я73
ТЗ38

Составители В. А. Козлов, В. В. Волков, В. Н. Горячев, М. Г. Ордян

ТЗ38 **Расчетно-графические задания по курсу теоретической механики:** учебно-методическое пособие для студентов очной и заочной форм обучения / сост.: В. А. Козлов, В. В. Волков, В. Н. Горячев, М. Г. Ордян, под общей ред. В. А. Козлова; ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2019. – 106 с.
ISBN

Излагается краткая теория с примерами решения контрольных заданий по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил», «Статический расчет плоских ферм», «Определение координат центра тяжести плоской фигуры», «Равновесие составных конструкций», «Равновесие произвольной пространственной системы сил», «Поступательное и вращательное движения твёрдого тела. Передаточные механизмы», «Кинематический анализ многозвенного механизма», «Сложное движение точки», «Дифференциальные уравнения движения точки», «Теорема об изменении количества движения точки», «Теорема об изменении кинетической энергии точки», «Принцип Даламбера для точки», «Теорема об изменении кинетической энергии системы», «Общее уравнение динамики», «Принцип возможных перемещений». Приводится описание индивидуальных заданий, а также рекомендации по выполнению расчетно-графических работ по данным темам.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения.

Ил. 215. Табл. 11. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531(07)
ББК 22.2я73

Печатается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического университета

Рецензенты:

*кафедра механики и компьютерного моделирования
Воронежского государственного университета;*

*В. Г. Егоров, д-р техн. наук, профессор кафедры технической механики
Воронежского государственного университета инженерных технологий,
г. Воронеж*

ISBN

© Козлов В. А., Волков В. В., Горячев В. Н.,
Ордян М. Г., 2019

© ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет». ВГТУ, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Роль и значение теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. В настоящее время законы и выводы разделов «статика», «кинематика» и «динамика» широко применяются при решении самых разнообразных и сложных технических задач.

По учебнику изучать курс теоретической механики рекомендуется в соответствии с контрольными вопросами, приводимыми в конце данного пособия. В формулировках определений, теорем, принципов и т. п., как правило, бывает существенно каждое слово, и необходимо понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами. То же самое относится и к доказательствам.

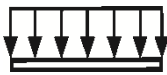
В учебно-методическом пособии приведены краткие сведения из теории с подробным изложением примеров решения по темам: «равновесие произвольной плоской системы сил», «статический расчет плоских ферм», «определение координат центра тяжести плоской фигуры», «равновесие составных конструкций», «равновесие произвольной пространственной системы сил», «поступательное и вращательное движения твёрдого тела. Передаточные механизмы», «кинематический анализ многозвенного механизма», «сложное движение точки», «дифференциальные уравнения движения точки», теоремы об изменении количества движения и кинетической энергии точки», «принцип Даламбера для точки», «теорема об изменении кинетической энергии системы», «общее уравнение динамики», «принцип возможных перемещений». Цель каждого примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью, поэтому в ряде случаев промежуточные расчёты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчёты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.); в конце должны быть даны ответы. Форма представления материала в учебно-методическом пособии позволяет студентам самостоятельно изучать предлагаемые темы и выполнять по ним расчетно-графические задания.

По каждой теме к заданию даётся 10 рисунков выполненных составителями и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Студент во всех задачах выбирает **номер рисунка по последней цифре** номера своей зачётной книжки, а **номер условия в таблице – по предпоследней**. Например, если номер зачётной книжки оканчивается числом 57, то берутся рис. 7 и условие № 5 из таблицы для задачи по соответствующей теме.

Вначале выполняется чертёж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертёж выполняется с учётом условий решаемого варианта задачи и должен быть аккуратным и наглядным.

1. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ» (ЗАДАЧА С1)

Жёсткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 0–9, табл. 1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках. В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 50$ кН·м, равномерно распределенная на участке нагрузка интенсивности $q = 4$ кН/м и сила $\vec{F}$, модуль, точка приложения и направление которой указаны в табл. 1; в окончательных расчётах принять $a = 0,5$ м. Направление действия распределённой нагрузки:

горизонтальный участок	вертикальный участок
	

Определить реакции связей в точках A , B , вызываемые действующими нагрузками.

Краткие теоретические сведения

Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При её решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\vec{F}$ удобно разложить её на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона: $m_O(\vec{F}) = m_O(\vec{F}') + m_O(\vec{F}'')$. Если в результате решения задачи знак алгебраической величины какой-либо силы оказывается отрицательным, то это означает, что ее направление противоположно первоначально выбранному на чертеже. Необходимо помнить, что по закону действия и противодействия давление данного тела на связь равно по величине и противоположно по направлению реакции связи.

Пример 1. Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $\beta = 30^\circ$, $a = 0,5$ м (рис. 1.1).

Определить реакции в точках A , B , вызываемые действующими нагрузками.

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведём координатные оси x и y и изобразим действующие на раму силовые факторы: силу $\vec{F}$, пару сил с моментом M , натяжение троса $\vec{T}$ (по модулю $T = P$), реакции связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена

перпендикулярно опорной плоскости); равномерно распределенную нагрузку интенсивности q , действующую на участке BC , заменяем сосредоточенной силой $\bar{Q}$ (по модулю $Q = 2qa = 2 \text{ кН}$), которая приложена посередине участка.

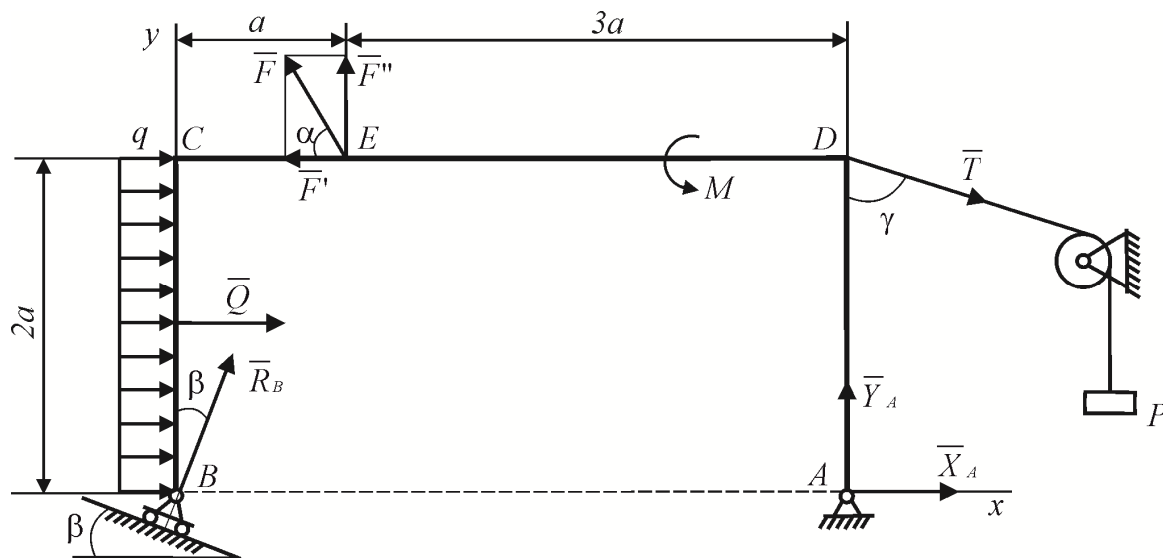


Рис. 1.1

Для равновесия данной плоской системы сил достаточно выполнения трёх уравнений: суммы проекций всех сил на координатные оси x и y , а также сумма их моментов относительно любого центра равны нулю. В третьем уравнении при вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$) и учтём, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0: X_A + R_B \sin \beta + Q - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0: M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a - Q \cdot a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -10,25 \text{ кН}$; $Y_A = -22,81 \text{ кН}$; $R_B = 6,72 \text{ кН}$. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены противоположно показанному на рис. 1.1.

Выполним проверку решения. Для этого составим еще одно дополнительное уравнение моментов относительно такой точки, чтобы в уравнение вошли найденные реакции $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$. Например, в качестве проверочного можно записать уравнение моментов относительно точки E :

$$\begin{aligned} \sum m_E(\bar{F}_k) = & -R_B \cos \beta \cdot a + R_B \sin \beta \cdot 2a + Q \cdot a + M - T \cos \gamma \cdot 3a + \\ & + Y_A \cdot 3a + X_A \cdot 2a = -0,003 \approx 0. \end{aligned}$$

При указанных значениях X_A , Y_A , R_B последнее уравнение равно нулю с точностью до третьего знака после запятой (погрешность зависит от ошибки, с которой вычислялись искомые реакции), следовательно, задача решена верно.

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

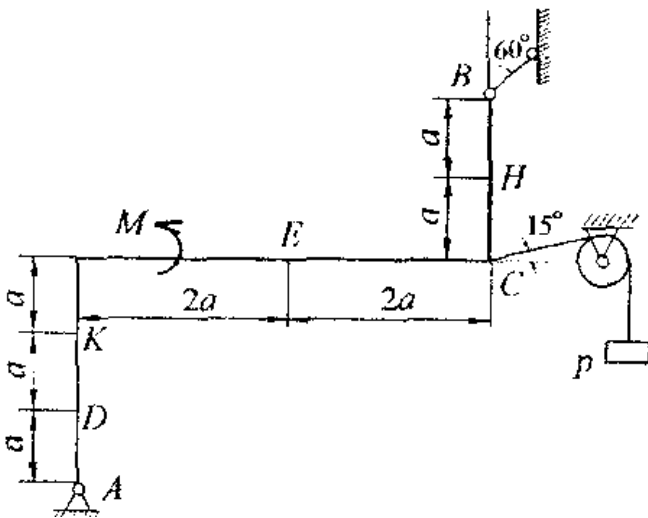


Рис. 0 (q на отрезке CE)

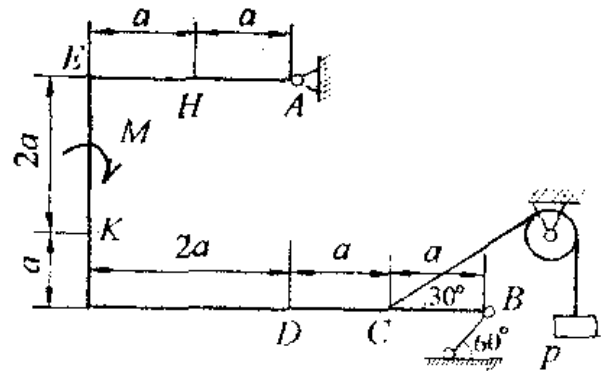


Рис. 1 (q на отрезке KE)

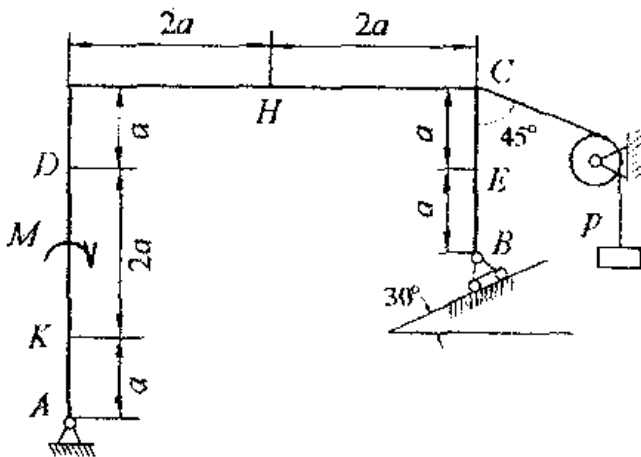


Рис. 2 (q на отрезке CH)

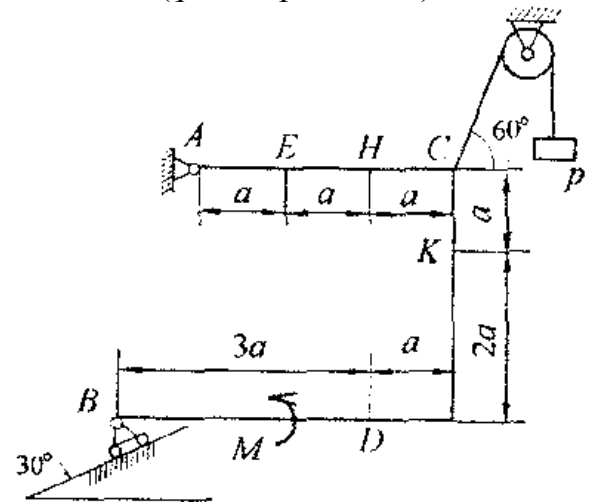


Рис. 3 (q на отрезке KC)

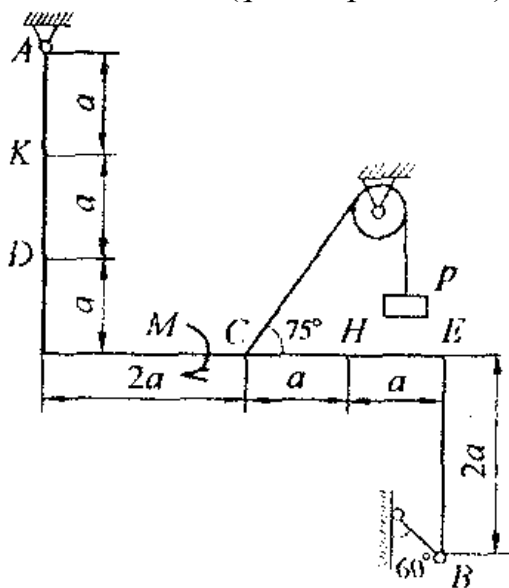


Рис. 4 (q на отрезке HE)

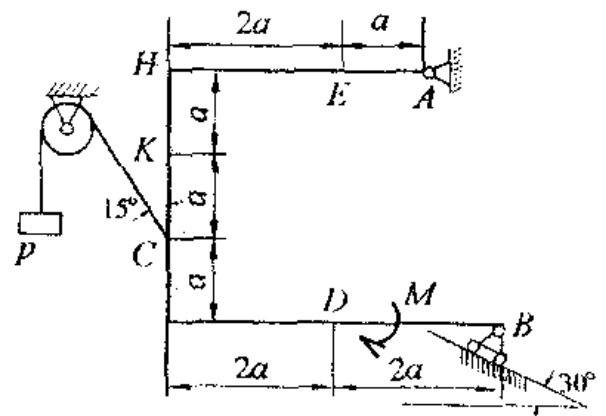


Рис. 5 (q на отрезке KH)

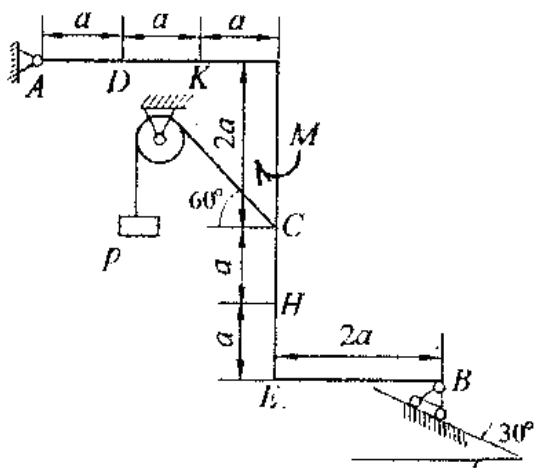


Рис. 6 (q на отрезке KD)

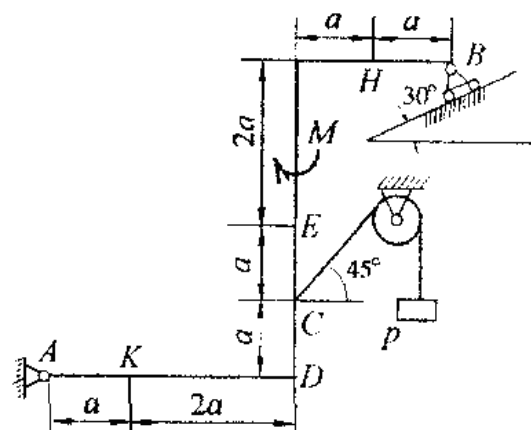


Рис. 7 (q на отрезке CD)

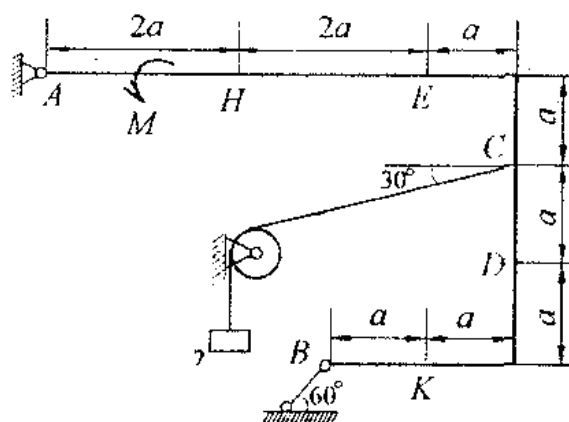


Рис. 8 (q на отрезке HE)

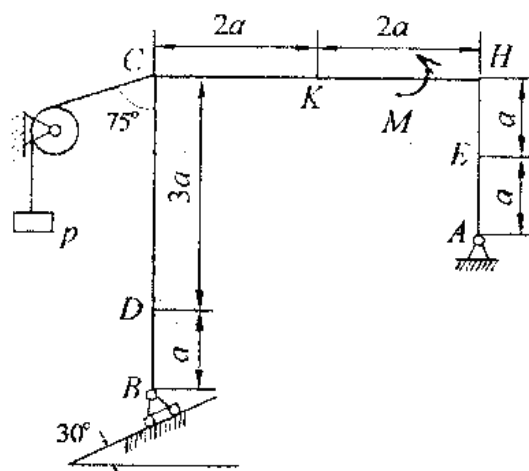


Рис. 9 (q на отрезке CD)

Таблица 1

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сила $\overline{F}$	модуль кН	10	15	20	25	30	35	40	20	30	10
	точка приложения	K	H	E	D	K	H	E	D	K	H
	α^0	30	45	60	30	60	30	45	60	30	60
	направление										

2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ» (ЗАДАЧА С2)

Плоская ферма, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точках A и B , причём в одной из них шарнирно-неподвижно, а в другой опирается на подвижный шарнир (рис. 0–9). На ферму действуют две силы, величины, направления и точки приложения которых указаны в таблице 2 (например, в условии № 2 на ферму действуют сила под углом 75^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке K , и сила под углом 30^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке E).

Определить опорные реакции в точках A и B , усилия в стержнях 1–8 методом вырезания узлов, и дополнительно в стержнях 5, 6, 7 – методом сквозных сечений (Риттера).

Краткие теоретические сведения

Расчёт плоской фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в её стержнях. Опорные реакции можно найти обычными методами статики из трёх уравнений равновесия, рассматривая ферму в целом как твёрдое тело.

При определении усилий в стержнях методом вырезания узлов мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы, реакции самих стержней и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому узлу: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Условно предполагают, что все стержни растянуты, т. е. реакции стержней направлены от узлов. Если в результате вычислений получен ответ со знаком минус, то это значит, что соответствующий стержень сжат. Последовательность рассмотрения узлов обычно определяется условием: число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия, т. е. двух.

Методом Риттера удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчётов. Для определения усилия в каком-нибудь стержне ферму рассекают на две части сечением, проходящем через три стержня, в том числе и через тот, в котором определяется усилие. Одну из частей вместе с приложенными к ней силами мысленно отбрасывают, а её действие заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней в сторону отброшенной части. Затем составляют уравнения моментов сил, действующих на рассматриваемую часть фермы, относительно точки пересечения двух рассечённых стержней, усилия в которых на данном этапе не определяются. Эта точка пересечения называется точкой Риттера. Если точка Риттера находится в бесконечности, т. е. стержни параллельны, то составляют уравнение суммы проекций сил, приложенных к рассматриваемой части фермы, на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

Пример 2. Схема фермы, все действующие нагрузки и размеры показаны на рис. 2.1.

Дано: $P = 10 \text{ кН}$, $F = 30 \text{ кН}$.

Определить опорные реакции и усилия в стержнях 1–4 методом вырезания узлов, 5–7 – методом сквозных сечений.

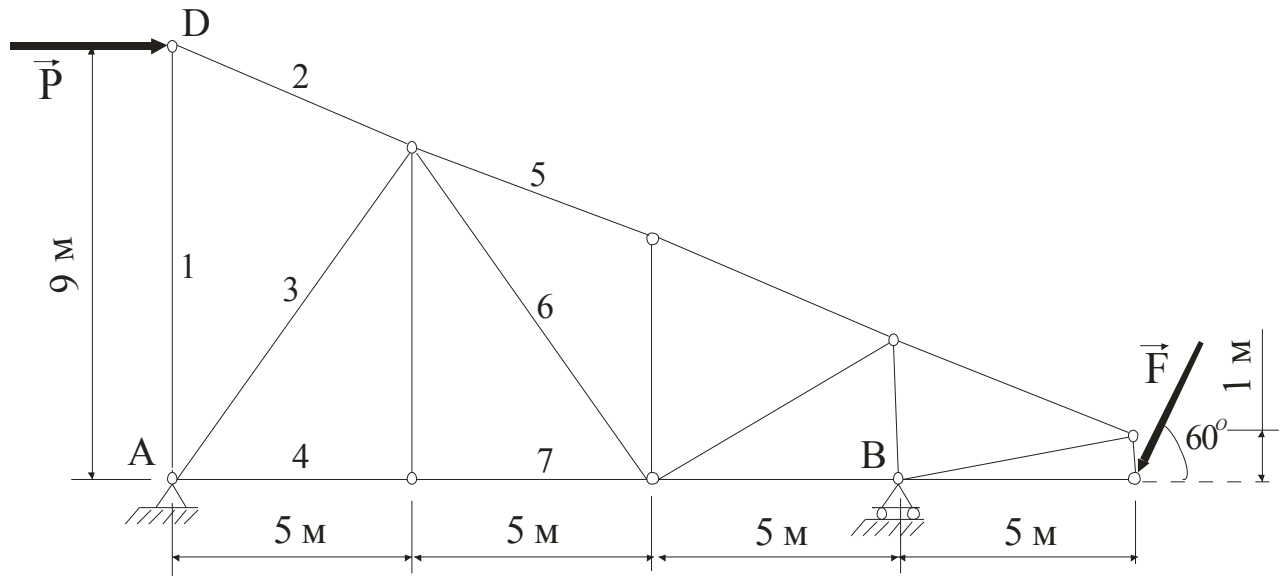


Рис. 2.1

Решение. При определении опорных реакций ферма рассматривается как твёрдое тело. Опоры в узлах A и B мысленно отбрасываются и заменяются соответствующими реакциями: составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ в узле A , $\bar{R}_B$ в узле B (рис. 2.2).

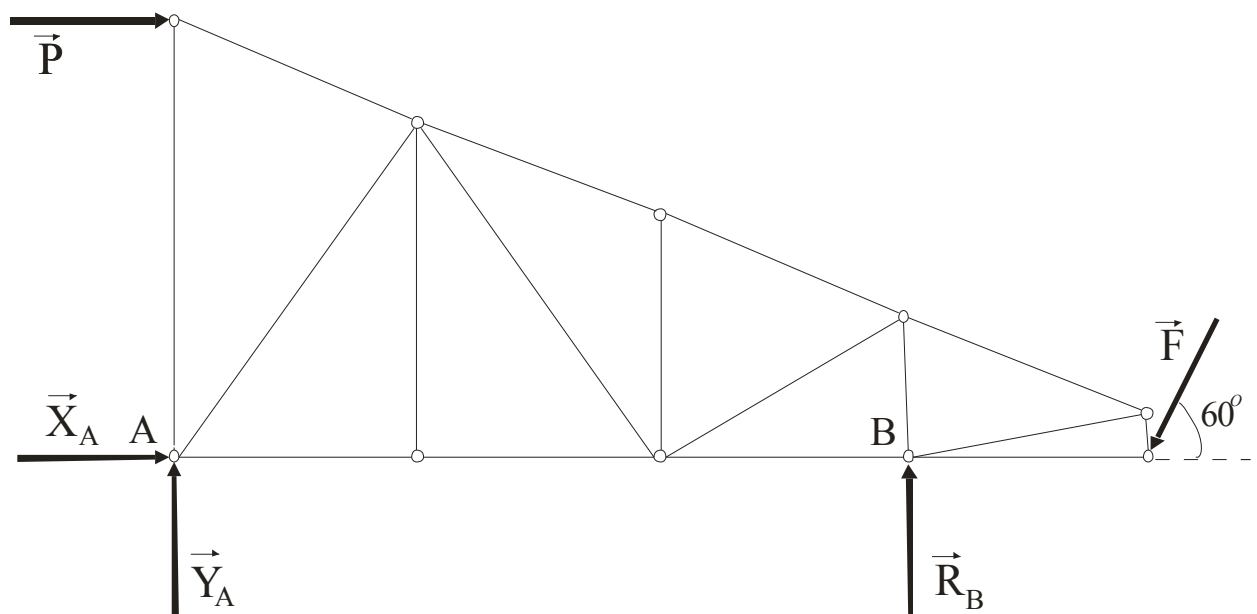


Рис. 2.2

Составляются три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + P - F \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + R_B - F \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum m_{kA} = 0: \quad -P \cdot 9 + R_B \cdot 15 - F \sin 60^\circ \cdot 20 = 0.$$

Из первого уравнения $X_A = 5$ кН, из третьего $R_B = 6 + 20\sqrt{3} \approx 40,64$ кН, из второго $Y_A = -(6 + 5\sqrt{3}) \approx -14,66$ кН; знак «-» показывает, что истинное направление $\vec{Y}_A$ противоположно изображённому на рис. 2.2.

Проверка:

$$\sum m_{kB} = -Y_A \cdot 15 - P \cdot 9 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 = (6 + 5\sqrt{3}) \cdot 15 - 90 - 75\sqrt{3} = 0.$$

При определении усилий в стержнях 1–4 методом вырезания узлов сначала мысленно вырезается узел D (в нём сходятся два стержня, усилия в которых неизвестны) и изображаются все приложенные к нему силы и реакции (рис. 2.3).

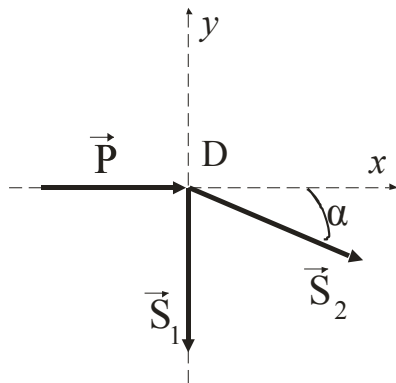


Рис. 2.3

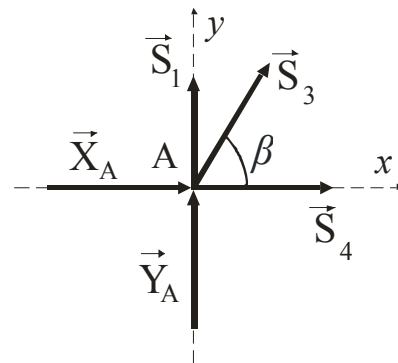


Рис. 2.4

По геометрическим размерам фермы (рис. 2.5) $\operatorname{tg} \alpha = 9/22,5 = 0,4$, следовательно, $\sin \alpha = 0,3714$, $\cos \alpha = 0,9285$. Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0: \quad P + S_2 \cos \alpha = 0; \quad S_2 = -10,77 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad -S_2 \sin \alpha - S_1 = 0; \quad S_1 = 4 \text{ кН.}$$

Затем вырезается узел A (рис. 2.4), здесь неизвестны усилия $\vec{S}_3, \vec{S}_4$; $\operatorname{tg} \beta = 7/5 = 1,4$; $\sin \beta = 0,8137$; $\cos \beta = 0,5812$.

$$\sum F_{ky} = 0: \quad Y_A + S_1 + S_3 \sin \beta = 0; \quad S_3 = 13,1 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{kx} = 0: \quad X_A + S_3 \cos \beta + S_4 = 0; \quad S_4 = -12,61 \text{ кН.}$$

При определении усилий в стержнях 5–7 методом Риттера ферма рассекается по этим трём стержням на две части. Одна из частей вместе с приложенными к ней нагрузками мысленно отбрасывается, а её действие на оставшуюся часть заменяется усилиями $\vec{S}_5, \vec{S}_6, \vec{S}_7$, которые направлены вдоль соответствующих стержней в сторону отброшенной части (см. рис. 2.5).

Для определения $\bar{S}_5$ составляется уравнение моментов от сил, приложенных к оставшейся части фермы, относительно точки пересечения двух остальных разрезанных стержней (точка L).

$$\sum m_{kL} = 0: -Y_A \cdot 10 - P \cdot 9 - S_5 \cos \alpha \cdot 7 + S_5 \sin \alpha \cdot 5 = 0; S_5 = 12,19 \text{ кН.}$$

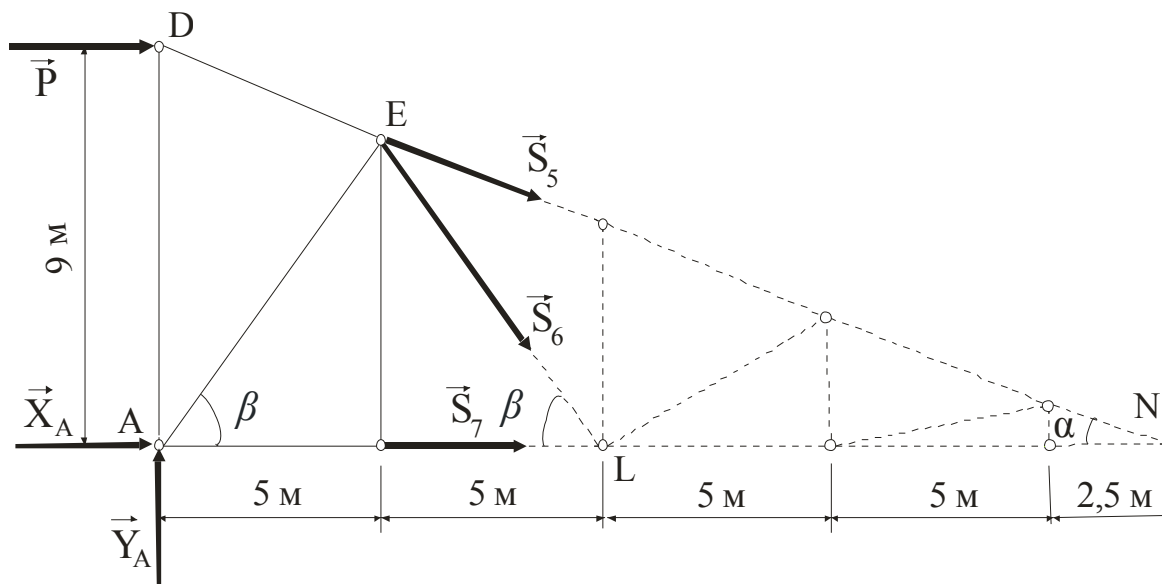


Рис. 2.5

Для определения $\bar{S}_6$ составляется уравнение моментов относительно точки N .

$$\sum m_{kN} = 0: -Y_A \cdot 22,5 - P \cdot 9 - S_6 \cos \beta \cdot 7 + S_6 \sin \beta \cdot 17,5 = 0; S_6 = -23,58 \text{ кН.}$$

При определении $\bar{S}_7$ составляется уравнение моментов относительно точки E .

$$\sum m_{kE} = 0: -Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 7 - P \cdot 2 + S_7 \cdot 7 = 0; S_7 = -12,61 \text{ кН.}$$

Результат $S_4 = S_7$ согласуется с леммой 2 о нулевых стержнях [1, §12], что является дополнительной проверкой результатов счёта.

Ответ: $X_A = 5$ кН; $Y_A = -14,66$ кН; $R_B = 40,64$ кН; $S_1 = 4$ кН; $S_2 = -10,77$ кН; $S_3 = 13,1$ кН; $S_4 = -12,61$ кН; $S_5 = 12,19$ кН; $S_6 = -23,58$ кН; $S_7 = -12,61$ кН. Знаки указывают, что сила $\vec{Y}_A$ направлена противоположно показанному на рис. 2.2, стержни 2, 4, 6, 7 – сжаты, 1, 3, 5 – растянуты.

Инструкция к пользованию программой для расчета фермы на ПЭВМ

Программу для проверки полученных результатов можно скачать на сайте <http://vuz.exponenta.ru/> (**Download** → **Образование** → **Расчет плоской статически определимой балочной фермы**), нажав на «exe, Delphi».

1. В скачанной папке «Ферма 6» выбрать «ferm6» и нажать «Enter».

2. Ввести данные по своему варианту:

число панелей (N) – для данных ферм равно 4;

длина панелей (a) – задаётся одинаковая длина для каждой из панелей фермы;

ввод высот узлов нижнего пояса ($h1$) – все значения «0»;

ввод высот стоек ($h2$) – задать пять значений высот вертикальных стержней слева направо;

раскосы – задать направления наклона раскосов, нажимая на них на рисунке;

опоры – задать номер узла, закреплённого шарнирно-неподвижно (A) и шарнирно-подвижно (B) (нумерация узлов фермы по нижнему поясу слева направо от 1 до 5, по верхнему поясу слева направо от 6 до 10);

число нагрузок (N_p) – 2;

нагрузки – указать величину силы, номер узла, к которому она приложена и угол с положительным направлением оси x (откладывать против часовой стрелки).

3. Получить ответ, нажимая на «Solve».

Результат проверки решения примера 1 на ПЭВМ

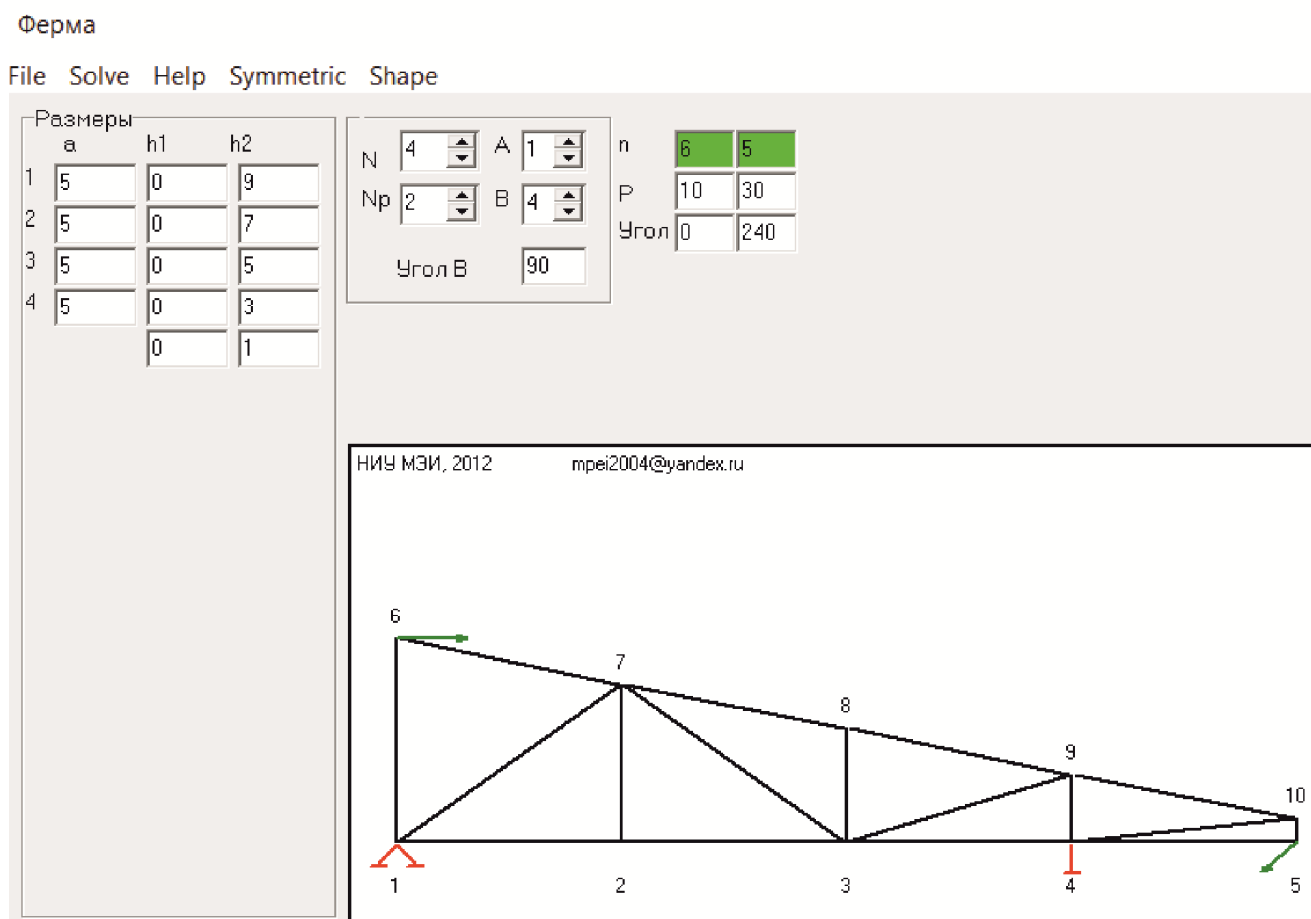


Рис. 2.6. Данные задачи, введенные в программу

Результаты счета

i	Ниж.пояс	Стойки	Верх.пояс	Раскосы
1	-12,6145	4,0000	-10,7703	13,1004
2	-12,6145	0,0000	12,1926	-23,5808
3	-58,3013	0,0000	12,1926	37,2957
4	-15,0000	-31,9808	46,6369	-44,1588
		25,9808		

Реакции опор

 $X_a=5,0000, Y_a=-14,6603, Y_b=40,6410$

Рис. 2.7. Результаты решения задачи

Результаты расчетов примера 1 совпадают с представленными на рис. 2.7 данными. Реакции опор: $X_A = 5 \text{ кН}$; $Y_A = -14,66 \text{ кН}$; $R_B = Y_B = 40,64 \text{ кН}$. Усилия в первом и втором стержнях нижнего пояса: $S_4 = -12,61 \text{ кН}$; $S_7 = -12,61 \text{ кН}$. Усилия в первой стойке: $S_1 = 4 \text{ кН}$. Усилия в первом и во втором стержнях верхнего пояса: $S_2 = -10,77 \text{ кН}$; $S_5 = 12,19 \text{ кН}$. Усилия в первом и во втором раскосах: $S_3 = 13,1 \text{ кН}$; $S_6 = -23,58 \text{ кН}$.

Текст программы для расчета фермы на ПЭВМ

```

PROGRAM FRAM
C   РАСЧЕТ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ
REAL LX, LY, L
DIMENSION G(36,36), P(36), NI(36,2), RL(36,2), MI(36), PXY(18,2)
:   -H(9), D(8), NUL(15)
605  TYPE *, ПРОГРАММА РАСЧЕТА УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ
      IPV=0
      IOUT=7
220  FORMAT(' ЕСТЬ ЛИ ОШИБКИ? ОТВЕЬТЕ: ДА(Y) ИЛИ НЕТ(N)')
225  FORMAT (1A1)
292  FORMAT(' ЕСТЬ ЛИ ЕЩЕ ОШИБКИ? ОТВЕЬТЕ: ДА(Y) ИЛИ НЕТ(N)')
*****В О Д   Д А Н Н Ы Х*****
      TYPE*, ' ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПАНЕЛЕЙ (N НЕ БОЛЕЕ 8)'
      ACCEPТ*,NP
      TYPE*, 'ВВЕДИТЕ ДЛИНУ ПАНЕЛИ'
      ACCEPТ*,AA
      N=4*(NP+1)
      WRITE(7,101)(I,I=1,NP+1)
101  FORMAT(' ВВЕДИТЕ ВЫСОТЫ СТОЕК'/9(6X,I1))
      ACCEPТ*,(H(J),J=1, NP+1)
102  TYPE*, 'ВВЕДИТЕ ТИП РАСКОСОВ (L,R)'
      ACCEPТ 225, (D(J), J=1, NP)
      DO 103 J=1,NP
      IE(D(J).NE.'L'.AND.D(J).NE.'R') GOTO 102
103  CONTINUE
      TYPE*, ' УКАЖИТЕ ПОЛОЖЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ОПОРЫ (НОМЕР УЗЛА)'
      FССЕРТ*,NA
      TYPE*, 'УКАЖИТЕ ПОЛОЖЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ОПОРЫ (НОМЕР УЗЛА)'
      ACCEPТ*,NB
      TYPE*, ' ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ЗАГРУЖЕННЫХ УЗЛОВ'
      ACCEPТ*,M
      TYPE*, ' ВВЕДИТЕ НАГРУЗКИ (ПО СТРОКАМ):  УЗЕЛ, FX, FY'
      DO 104 J=1,M
104  ACCEPТ *, MI(J),PXY(J,1),PXY(J,2)
319  WRITE (IOUT,323)
323  FORMAT('ДАННЫЕ О НАГРУЗКАХ НА ВЕРМУ')
      IF(IPV.EQ.1)TYPE*, 'ИСПРАВЛЕННАЯ ТАБЛИЦА'
      IPV=0
      WRITE(IOUT,320)
320  FORMAT('  '29(' '))
      WRITE(IOUT,325)
325  FORMAT(' ! I ! PX ! PY !')
      WRITE(IOUT, 320)
      DO 335 I=1,M
      WRITE ( IOUT, 330)MI(I),PXY(I,1),PXY(I,2)
330  FORMAT(' ! 'I2,' ! '2(F10.3,' ! '))
      WRITE (IOUT,320)
335  CONTINUE
      IF (IOUT.EQ.6)GOTO 401

390  TYPE 220
391  ACCEPТ 225.OTV
      IF((OTV.NE.'Y') . AND. (OTV.NE.'D').AND.(OTV.NE.'N'))GOTO 390
      IF((OTV.EQ.'N') . AND. (IPV.EQ.0))GOTO 400
      IF((OTV.EQ.'N') . AND. (IPV.EQ.1))GOTO 319
      TYPE*, ' ИСПРАВЬТЕ ОШИБОЧНУЮ СТРОКУ'
      TYPE 392
392  FORMAT(' ВВЕДИТЕ ЧЕРЕЗ ЗАПЯТУЮ ВЕРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ:'.
*      ' НОМЕР СТРОКИ, I, PX, PY')
      ACCEPТ*,I,MI(I), PXY(I,1), PXY(I,2)
      IPV=1
      TYPE 292
      GOTO 391
400  CONTINUE

```

```

C***** О П О Р Ы *****
DO 105 J=1,3
105 NI(N-3+J,1)=-N/2.-J
DO 106 J=1,2
NI(N-3+J,2)=NA
RL(N-2,1)=-1
106 RL(N-2+J,1)=0
NI(N,2)=NB
RL(N,2)=-1
RL(N-2,1)=-1
C***** Н И Ж Н И Й   П О Я С *****
DO 501 J=1, NP
NI(J,1)=J
NI(J,2)=J+1
RL(J,1)=AA
501 RL(J,2)=0
C***** С Т О Й К И *****
DO 502 J=NP+1, NP*2+1
NI(J,1)=J-NP
NI(J,2)=J+1
RL(J,1)=0
502 RL(J,2)=H(J-NP)
C***** В Е Р Х Н И Й   П О Я С*****
DO 503 J=2*NP+2,3*NP+1
JJ=J-2*NP-1
NI(J,1)=J-NP
NI(J,2)=J-NP+1
RL(J,1)=AA
503 RL(J,2)=H(JJ+1)-H(JJ)
C***** Р А С К О С Ы *****
DO 504 J=3*NP+2,4*NP+1
JJ=J-3*NP-1
IF (D(JJ).EQ.'L') GO TO 505
NI(J,1)=NP+2+JJ
NI(J,2)=JJ
RL(J,1)=AA
RL(J,2)=-H(JJ+1)
GOTO 504
505 NI(J,1)=NP+JJ+1
NI(J,2)=JJ+1
RL(J,1)=AA
RL(J,2)=-H(JJ)
504 CONTINUE
DO 4 I=1,N
P(I)=0.
DO 4 J=1,N
G(I,J)=0.
DO 1 I=1,N
NA=NI(I,1)
NE=NI(I,2)
LX=RL(I,1)
LY=RL(I,2)
L=SQRT(LX*2+LY**2)
IF(NA.LT.0) GO TO 50
G(2*NA-1,I)=-LX/L
G(2*NA,I)=-LY/L
50 IF(NE.LT.0) GO TO 1
G(2*NE-1,I)=LX/L
G(2*NE,I)=LY/L
1 CONTINUE
DO 2 J=1,M
KKN=MI(J)
PX=PXY(J,1)
PY=PXY(J,2)
P(2*KKN-1)=PX
P(2*KKN)=PY
2 CONTINUE

```

```

CALL GAUSS(36,N,G,P)
401 WRITE(IOUT,404)
404 FORMAT(/T15, 'ДАННЫЕ О РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ ФЕРМЫ')
WRITE(IOUT,402)
402 FORMAT(' ',61(' '))
WRITE(IOUT,403)
403 FORMAT(' ! ! НОМЕРА УЗЛОВ !Б
* ПРОЕКЦИЯ СТЕРЖНЯ ! !)
WRITE(IOUT,405)

405 FORMAT(' ! !,43(' '),'! !')
WRITE(IOUT,406)
406 FORMAT(' ! N/N ! НАЧАЛО ! КОНЕЦ ! НА ОСЬ !',
* НА ОСЬ ! УСИЛИЯ В ! ' ? ! !',
* СТЕРЖНЯ ! СТЕРЖНЯ !' X ! Y ! СТЕРЖНЯ !')
WRITE(IOUT,405)
WRITE(IOUT,407)
407 FORMAT(' ! ! NA ! NE ! LX ! ,
* LY ! !')
WRITE(IOUT,409)
409 FORMAT(' ! ',61(' '),'!')
WRITE(IOUT,411)
NZ=0
DO 420 I=1,N=3
IF(ABS(P(I)).GT.1.0E-5)GO TO 10
NZ=NZ+1
NOL(NZ)=1
DO TO 11

10 WRITE (IOUT,410)I,NI(I,2),RL(I,1),RL(I,2),P(I)
410 FORMAT(' ! ',I2,' ! ',2(' ',I3,' ' ! '),
* 2(F10.3,' ' ! '),1PE10.3 ' ! ')
IF (I.NE.N-3) WRITE (IOUT,409)
11 IF(I.EQ.NP)WRITE(IOUT,412)
IF(I.EQ.NP*2+1)WRITE(IOUT,413)
IF(I.EQ.NP*3+1)WRITE(IOUT,414)
411 FORMAT(' ! НИЖНИЙ ПОЯС',T64,'!')
412 FORMAT(' ! СТОЙКИ',T64,'!')
413 FORMAT(' ! ВЕРХНИЙ ПОЯС',T64,'!')
414 FORMAT(' ! РАСКОСЫ',T64,'!')
IF(I.EQ.N-3) WRITE (IOUT,402)
IF(IOUT.NE.7) GOTO 420
IF(MOD(I,6).NE.0)GOTO 420\
PAUSE ' НАЖМИТЕ КЛАВИШУ <CR>'
TYPE 402
420 CONTINUE
WRITE(IOUT,416)(NUL(I),I=1,NZ)
416 FORMAT(' «НУЛЕВЫЕ» СТЕРЖНИ:',16(I2,' '))
WRITE(IOUT,415)P(N-2),P(N-1),P(N)
415 FORMAT(' РЕАКЦИИ ОПОР:'/' XA=','G12.5/' YA=','G12.5/' YB=','G12.5)
IF(IOUT.EQ.6) CLOSE(UNIT=6)
IF(IOUT.EQ.6) GOTO 205
425 TYPE *, ' БУДЕТЕ ЛИ ПЕЧАТАТЬ РЕЗУЛЬТАТЫ?'
TYPE *, ' ОТВЕЬТЕ: ДА(Y) ИЛИ НЕТ (N)'
ACCEPT 225, OTV
IF ((OTV.NE.'Y').AND.(OTV.NE.'D').AND.(OTV.NE.'N')) GOTO 425
IF(OTV.EQ.'N') GOTO 205
IOUT=6
GOTO 319
205 TYPE*, ' РЕШИТЬ ЕЩЕ ОДНУ ЗАДАЧУ?'
ACCEPT 225, OTV
IF(OTV.EQ.'Y') GOTO 605
IF(OTV.NE.'N') GOTO 205
STOP
END

```

Рисунки (последняя цифра в номере зачетной книжки)

Рис. 0

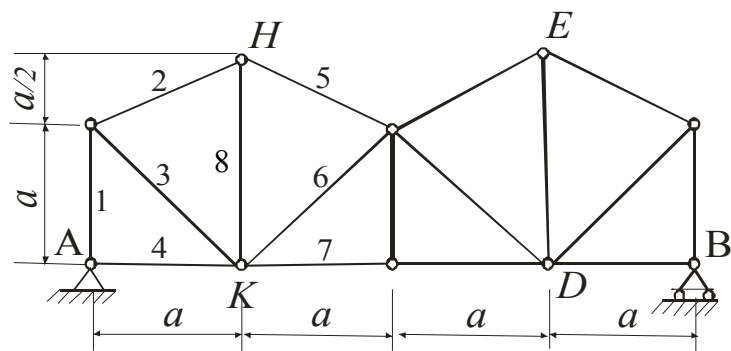


Рис. 1

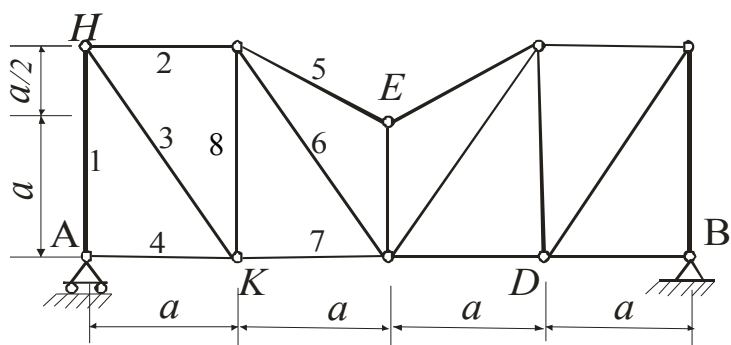


Рис. 2

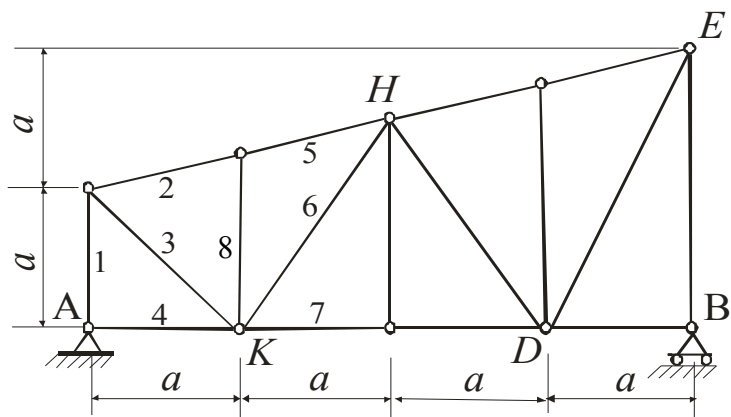


Рис. 3

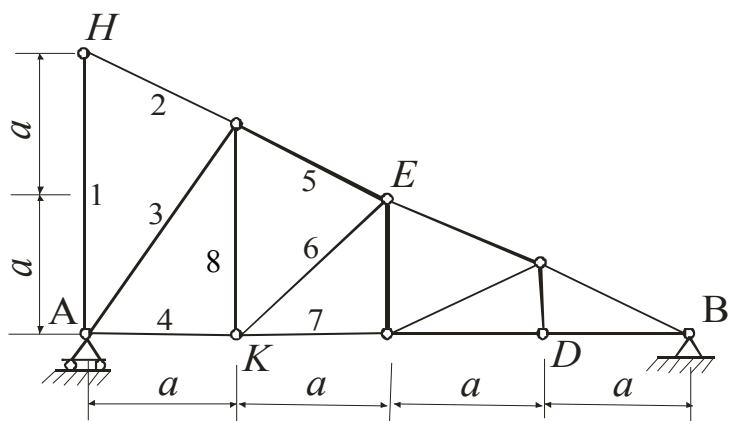


Рис. 4

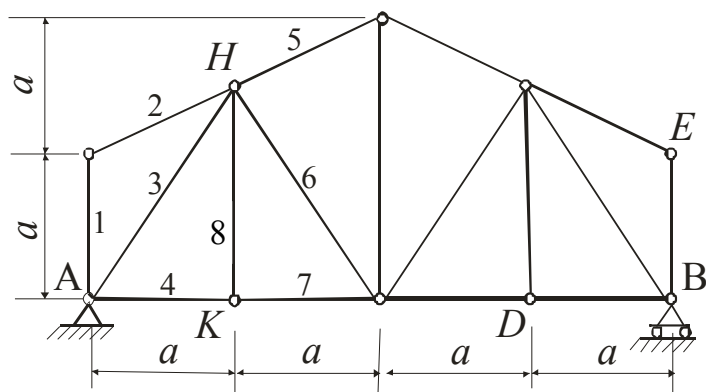


Рис. 5

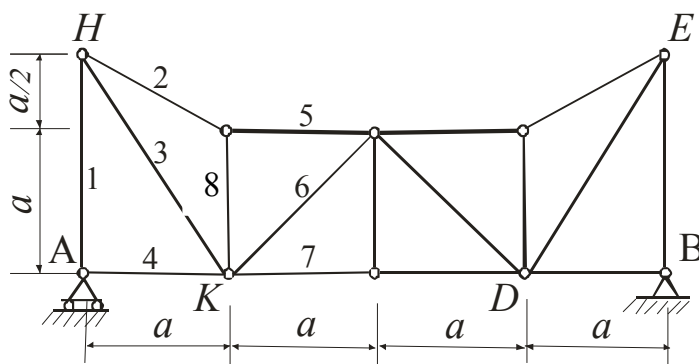


Рис. 6

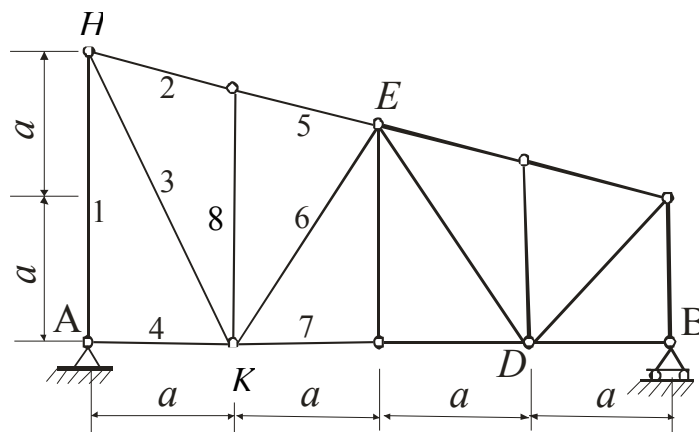


Рис. 7

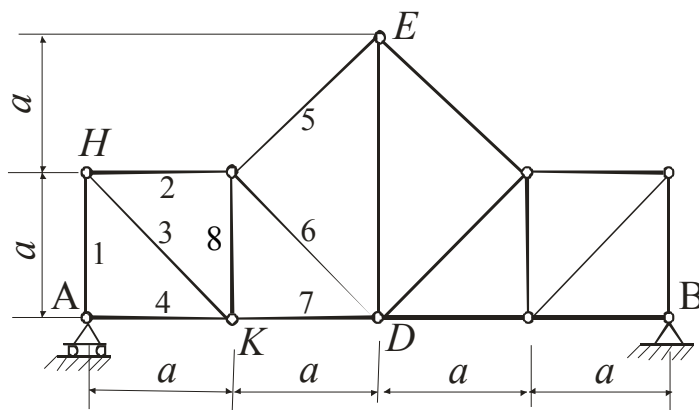


Рис. 8

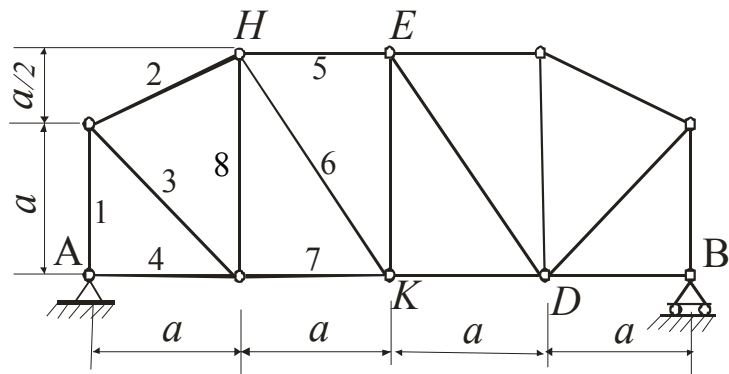


Рис. 9

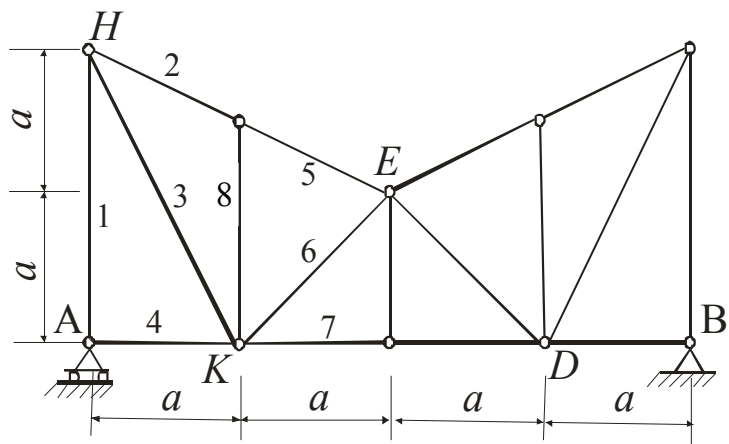
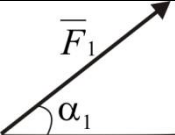
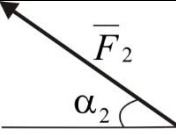
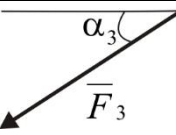
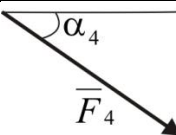


Таблица 2
(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Силы								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 10 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 10 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

3. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ» (ЗАДАЧА СЗ)

Определить координат центра тяжести плоской фигуры, изображённой на соответствующем варианте задания рисунке (рис. 0–9), с учётом геометрических данных табл. 3.

Краткие теоретические сведения

Задача относится к теме: «Определение положения центра тяжести плоских фигур». В решении необходимо применить способ разбиения, при котором плоская фигура разбивается на простейшие части (прямоугольник, треугольник, полукруг), для которых положение центра тяжести известно:

- для прямоугольника (квадрата) – на пересечении диагоналей;
- для прямоугольного треугольника – в точке пересечения отрезков, проведённых на расстоянии $1/3$ длины соответствующего катета ему перпендикулярно от вершины прямого угла;
- для полукруга – на оси симметрии полукруга на расстоянии $4R/3\pi$ от центра соответствующего круга.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются по формулам

$$x_C = \frac{1}{S} \sum_i S_i x_i; \quad y_C = \frac{1}{S} \sum_i S_i y_i,$$

где x_i, y_i – координаты центра тяжести простейшей части фигуры;

S_i – её площадь;

$S = \sum S_i$ – суммарная площадь.

Для фигур, имеющих вырезы в виде простейших частей, применяется частный случай способа разбиений – способ дополнения (метод отрицательных площадей).

Пример 3. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, изображённой на рис. 3.1 при следующих данных:

$a = 40$ см, $b = 100$ см, $r = 20$ см.

Решение. Фигура разбивается на три простейшие части: прямоугольник, треугольник, полукруг, площади которых соответственно равны

$$S_1 = 40 \cdot 60 = 2400 \text{ см}^2; \quad S_2 = 40 \cdot 40 / 2 = 800 \text{ см}^2; \quad S_3 = \pi \cdot 20^2 / 2 = 628 \text{ см}^2.$$

Площадь всей фигуры

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 2400 + 800 - 628 = 2572 \text{ см}^2.$$

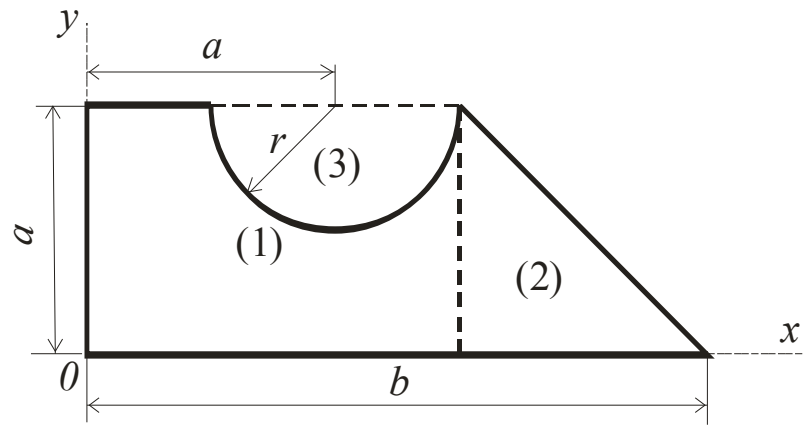


Рис. 3.1

Центры тяжести рассматриваемых частей фигуры имеют следующие координаты:

- для прямоугольника $x_1 = 30$ см, $y_1 = 20$ см;
- для треугольника $x_2 = 60 + 40/3 = 73,3$ см, $y_2 = 40/3 = 13,3$ см;
- для полукруга $x_3 = 40$ см, $y_3 = 40 - 4 \cdot 20 / (3 \cdot \pi) = 31,5$ см.

Координаты центра тяжести фигуры в целом вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{S} (S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3) = \frac{1}{2572} (2400 \cdot 30 + 800 \cdot 73,3 - 628 \cdot 40) = 41,0 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{1}{S} (S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3) = \frac{1}{2572} (2400 \cdot 20 + 800 \cdot 13,3 - 628 \cdot 31,5) = 15,1 \text{ см}.$$

Ответ: $x_C = 41$ см, $y_C = 15,1$ см.

Таблица 3

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , см	20	30	40	50	60	70	60	50	40	30
b , см	70	60	50	40	30	20	30	40	50	60
r , см	90	80	70	60	50	40	30	20	10	50

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

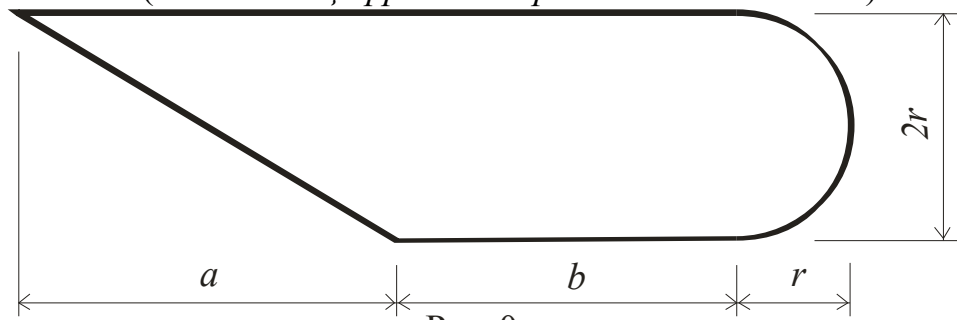


Рис. 0

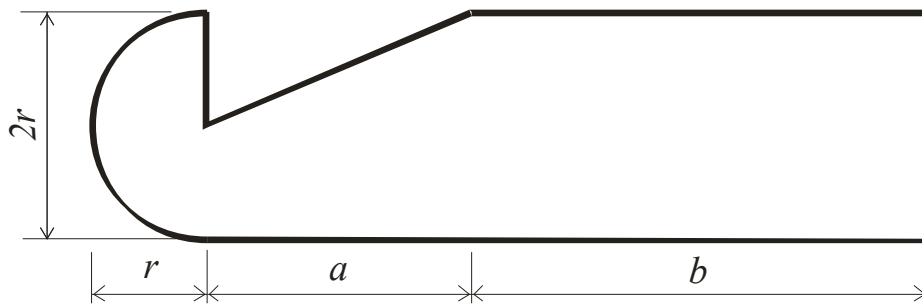


Рис. 1

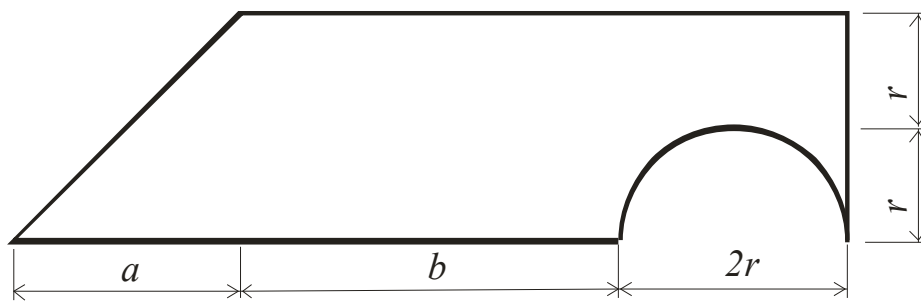


Рис. 2

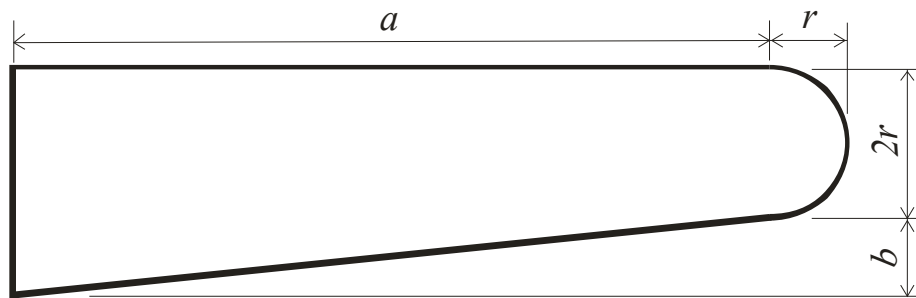


Рис. 3

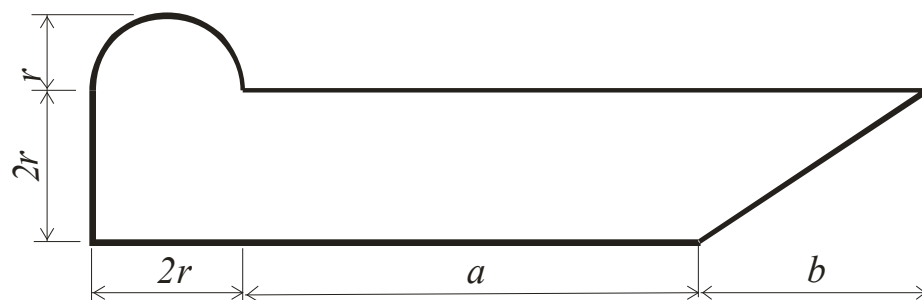


Рис. 4

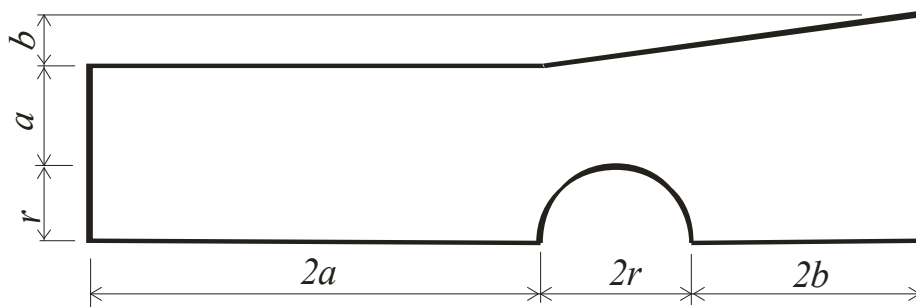


Рис. 5

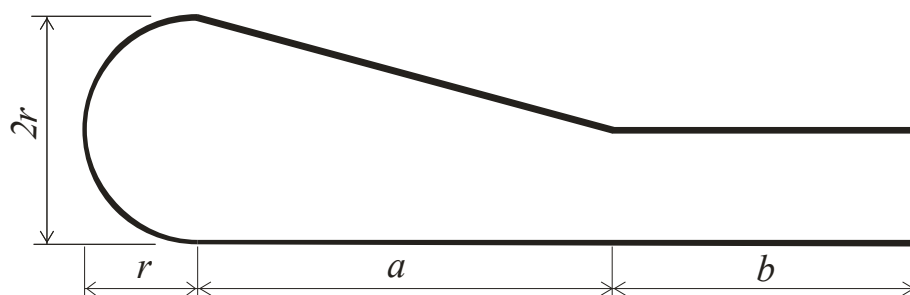


Рис. 6

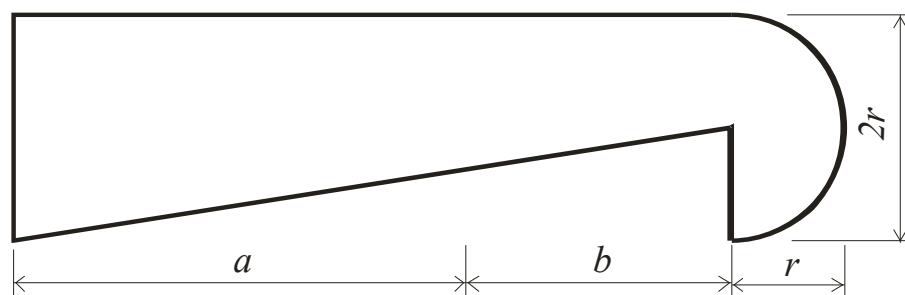


Рис. 7

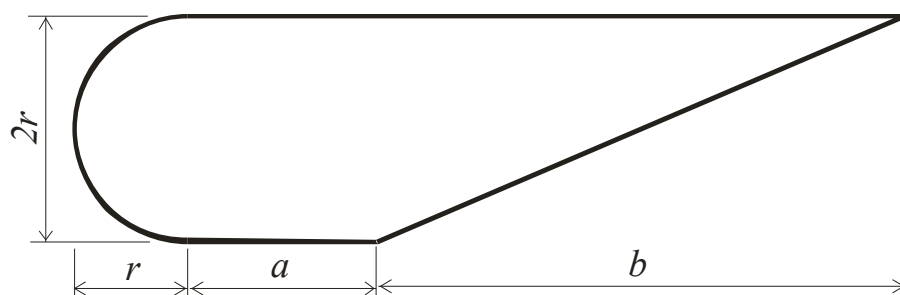


Рис. 8

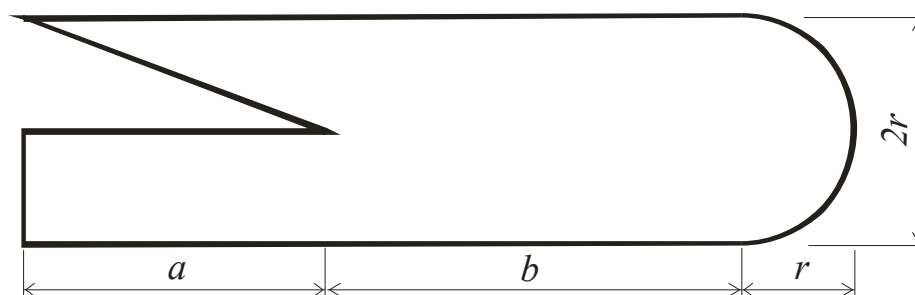


Рис. 9

4. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ» (ЗАДАЧА С4)

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержней, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. 0, 1, 4, 5, 8, 9), или свободно опираются друг о друга (рис. 2, 3, 6, 7). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. 0, 1), или невесомый стержень BB' (рис. 4, 5), или шарнир (рис. 2, 3, 6-9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. 0, 5, 6), или шарнирная опора на катках (рис. 3).

На каждую конструкцию действуют пара сил с моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, равномерная распределённая нагрузка интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}$ и ещё две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 4.1; там же, в столбце «Нагруженный участок», указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условии № 5 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке H , сила $\overline{F}_4$ под углом 75° к горизонтальной оси, приложенная в точке L , и нагрузка, распределённая на участке AE).

Определить реакции связей в точках A , B , C (для рис. 0, 3, 5, 6 ещё и в точке D), вызванные заданными нагрузками. В расчетах принять $a = 0,2 \text{ м}$. Направление распределённой нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. 4.2.

Краткие теоретические сведения

Данная задача – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При решении необходимо расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон действия и противодействия. Некоторые задачи решаются проще, если сначала рассмотреть равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно. При шарнирном соединении частей конструкции реакция внутренней связи представляется двумя неизвестными составляющими $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$, а при свободном отпирании частей друг о друга – одной реакцией $\overline{N}_C$, направленной перпендикулярно плоскости соприкосновения частей конструкции.

Пример 4. На угольник ABC (угол ABC – прямой), конец которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. 4.1,а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору, и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределённая на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M .

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 0,2 \text{ м}$.

Определить реакции в точках A , C , D , вызванные заданными нагрузками.

Решение. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. 4.1,б). Проведём координатные оси x и y и изобразим действующие на стержень силы: силу $\bar{F}$, реакцию $\bar{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\bar{X}_D$, $\bar{Y}_D$, реакции шарнира D .

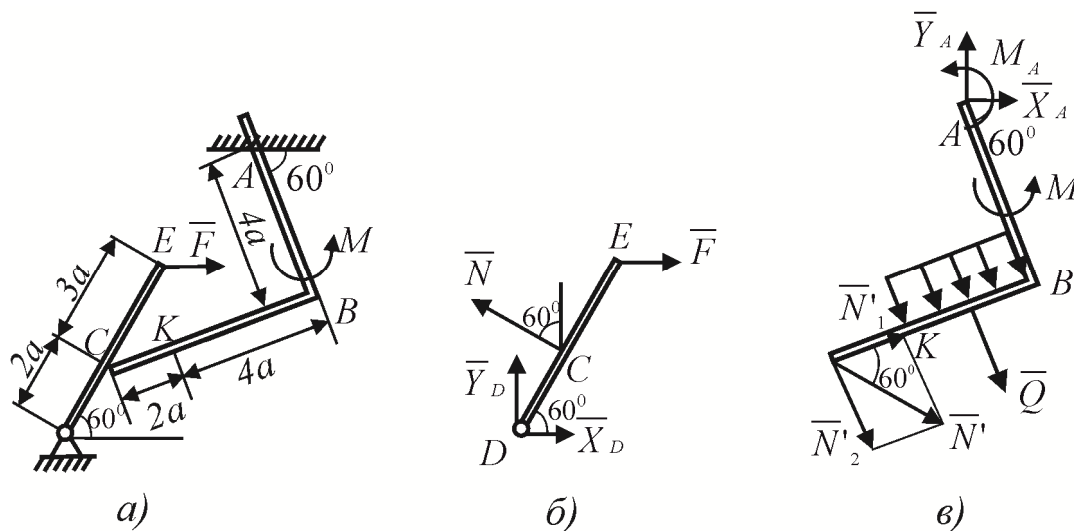


Рис. 4.1

Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

- 1) $\sum F_{kx} = 0: X_D + F - N \sin 60^\circ = 0;$
- 2) $\sum F_{ky} = 0: Y_D + N \cos 60^\circ = 0;$
- 3) $\sum m_D(\bar{F}_k) = 0: N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0.$

Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 4.1,в). На него действуют сила давления стержня $\bar{N}'$, направленная противоположно реакции $\bar{N}$, равномерно распределённая нагрузка, которую заменяем силой $\bar{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16 \text{ кН}$), пара сил с моментом M , реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, и пары с моментом M_A . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

- 4) $\sum F_{kx} = 0: X_A + Q \cos 60^\circ + N' \sin 60^\circ = 0;$
- 5) $\sum F_{ky} = 0: Y_A - Q \sin 60^\circ - N' \cos 60^\circ = 0;$
- 6) $\sum m_A(\bar{F}_k) = 0: M_A + M + Q \cdot 2a + N' \cos 60^\circ \cdot 4a + N' \sin 60^\circ \cdot 6a = 0.$

При вычислении момента силы $\bar{N}'$ разлагаем её на составляющие $\bar{N}'_1$ и $\bar{N}'_2$ ($N'_1 = N' \cos 60^\circ$, $N'_2 = N' \sin 60^\circ$) и применяем теорему Вариньона.

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений 1) – 6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N = N'$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $X_A = -26,8 \text{ кН}$, $Y_A = 24,7 \text{ кН}$, $M_A = -42,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $X_D = 8,8 \text{ кН}$, $Y_D = -10,8 \text{ кН}$, $N = 21,7 \text{ кН}$. Знаки указывают, что силы X_A , Y_D направлены противоположно показанному на рис. 4.1.

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

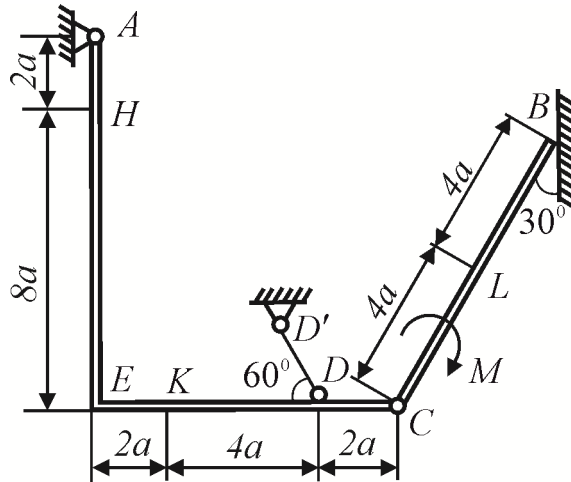


Рис. 0

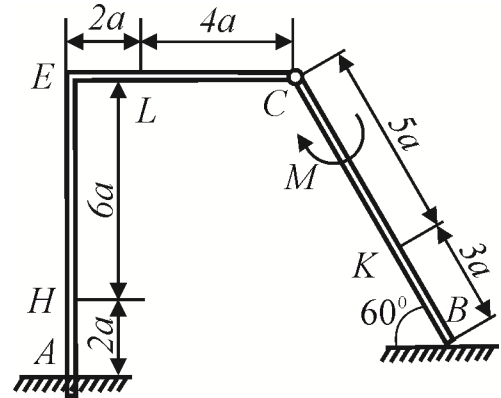


Рис. 1

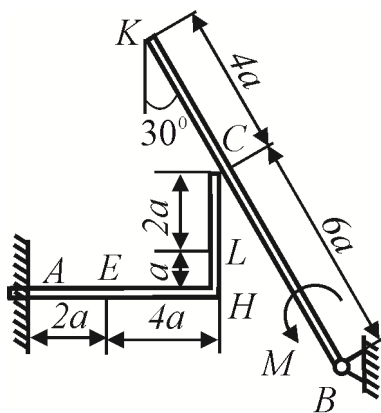


Рис. 2

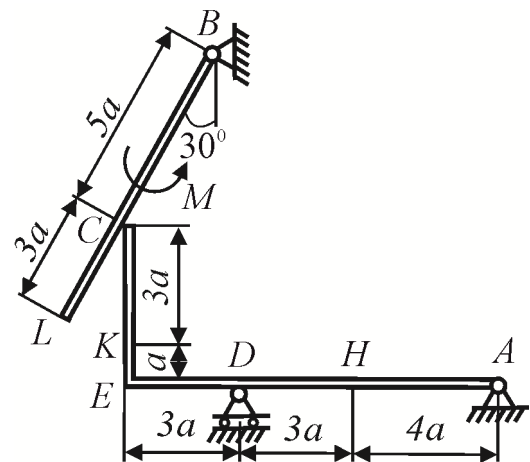


Рис. 3

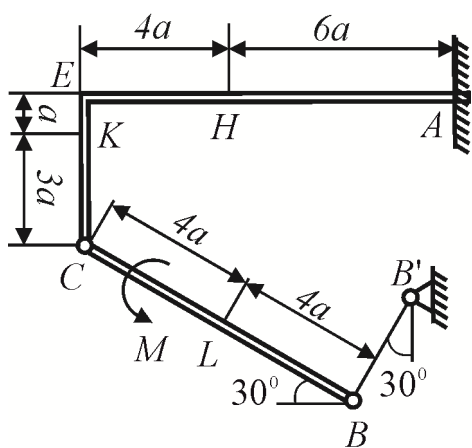


Рис. 4

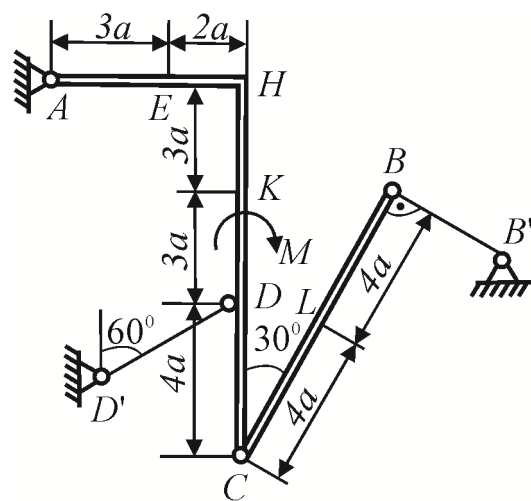


Рис. 5

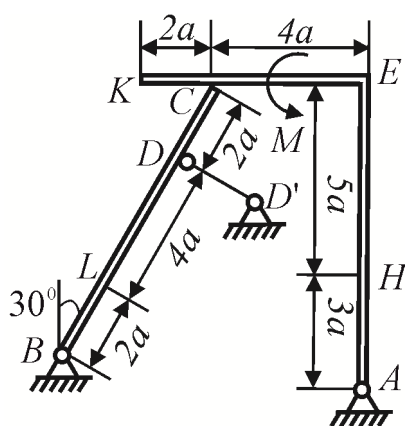


Рис. 6

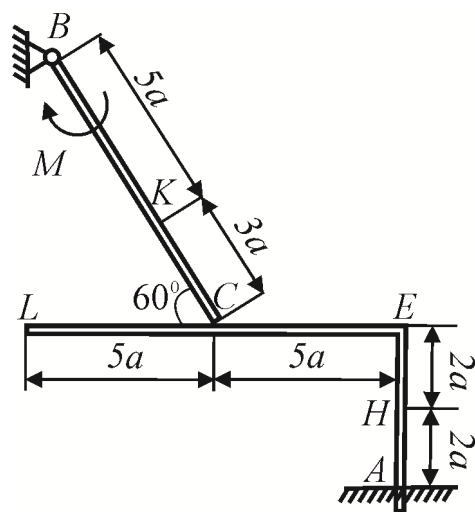


Рис. 7

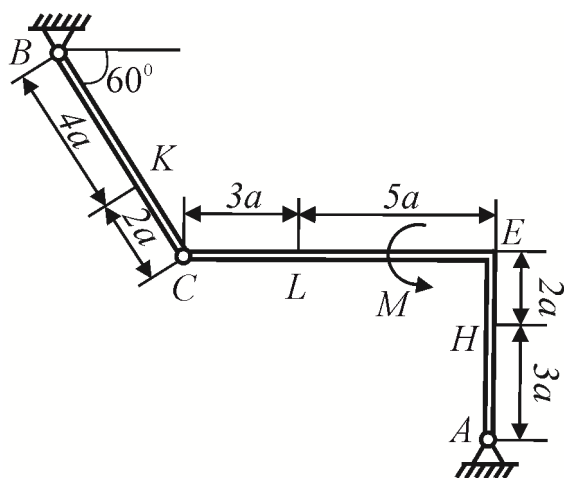


Рис. 8

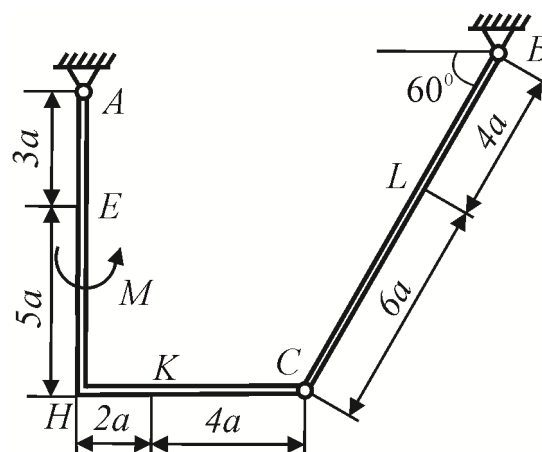


Рис. 9

Таблица 4.1

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

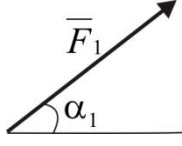
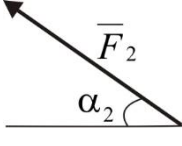
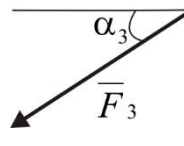
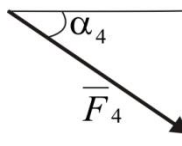
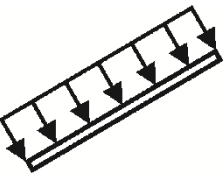
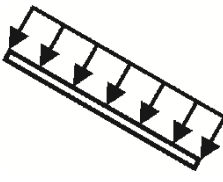
Силы									Нагруженный участок
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$		
Номер условия	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4	
0	H	30	-	-	-	-	K	60	CK
1	-	-	L	15	E	60	-	-	CL
2	K	75	-	-	-	-	E	30	AE
3	-	-	K	60	H	30	-	-	CK
4	L	30	-	-	-	-	E	60	CL
5	-	-	H	30	-	-	L	75	AE
6	E	60	-	-	K	15	-	-	CK
7	-	-	L	60	-	-	H	15	CL
8	H	60	-	-	L	30	-	-	AE
9	-	-	E	75	K	30	-	-	CL

Таблица 4.2

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 6, 9	рис. 1, 2, 4, 7, 8
			

5. РАСЧЕТНО ПО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ТЕМЕ
«РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ
СИЛ»
(ЗАДАЧА С5)

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жёстко соединены под прямым углом друг к другу и закреплены неподвижно: сферическим шарниром в точке A (рис. 4-9), цилиндрическими шарнирами (подшипниками) (например в точке A (рис. 0-3)), невесомыми стержнями (прикреплёнными к плитам и к неподвижным опорам шарнирами).

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $G_1 = 5 \text{ кН}$, вес меньшей плиты $G_2 = 3 \text{ кН}$. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xu – горизонтальная). На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, лежащая в плоскости одной из плит и две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице 5; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xu , сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz , и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит; размер $a = 0,6 \text{ м}$.

Определить реакции связей в точках A, B и реакцию стержня (стержней).

Краткие теоретические сведения

Данная задача – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При её решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить эту силу на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям координат, и тогда по теореме Вариньона $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$.

Пример 5. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. 5.1) закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xz , действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной yz , – пара сил с моментом M .

Дано: $P = 3 \text{ кН}$, $F = 8 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $\alpha = 60^\circ$, $AC = 0,8 \text{ м}$, $AB = 1,2 \text{ м}$, $BE = 0,4 \text{ м}$, $EH = 0,4 \text{ м}$.

Определить реакции опор A, B и стержня DD' .

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара сил с моментом M , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости,

перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

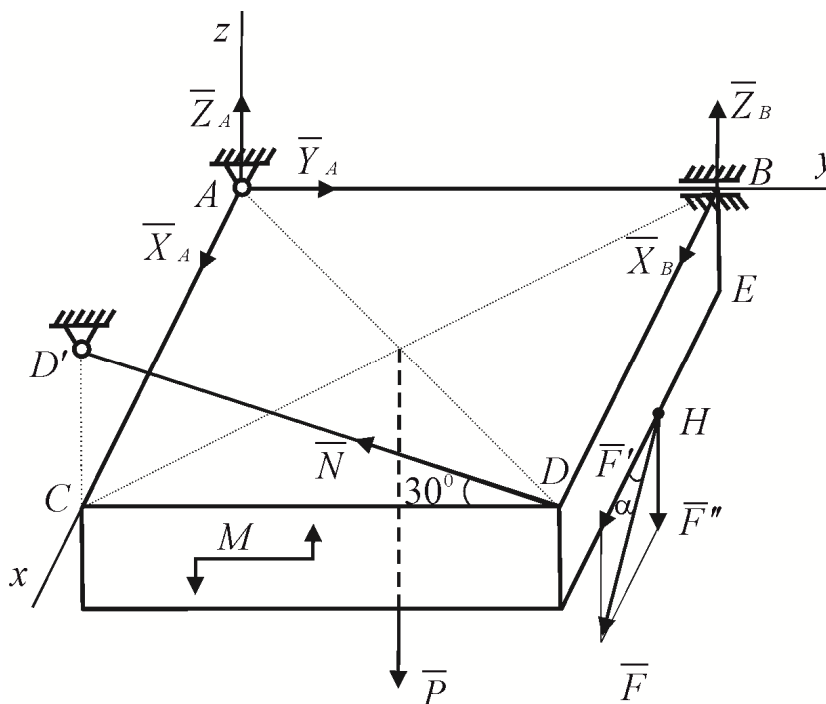


Рис. 5.1

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0: X_A + X_B + F \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0: Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0: Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0: M - P \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + N \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0: P \cdot AC/2 - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \cdot AC/2 - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0: -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

В уравнениях для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем её на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$), и применяем теорему Вариньона. Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$. Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдём искомые реакции связей.

Ответ: $X_A = 3,4 \text{ кН}$; $Y_A = 5,1 \text{ кН}$; $Z_A = 4,8 \text{ кН}$; $X_B = -7,4 \text{ кН}$; $Z_B = 2,1 \text{ кН}$; $N = 5,9 \text{ кН}$. Знак «-» указывает, что реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно показанному на рис. 5.1.

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

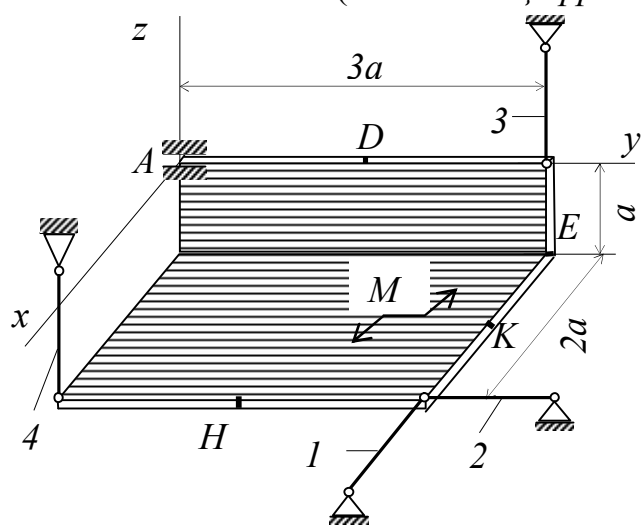


Рис. 0

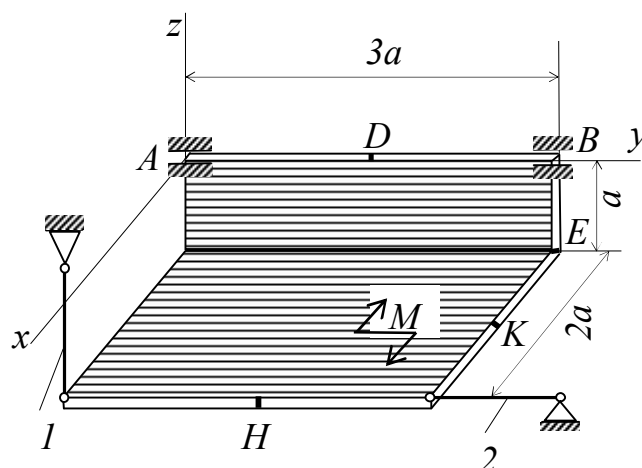


Рис. 1

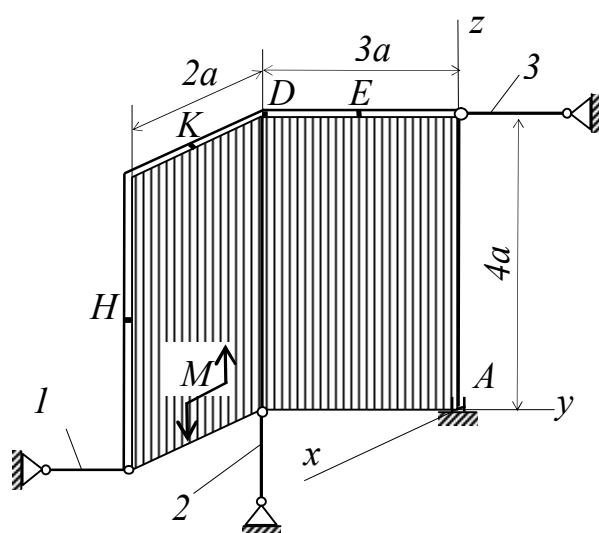


Рис. 2

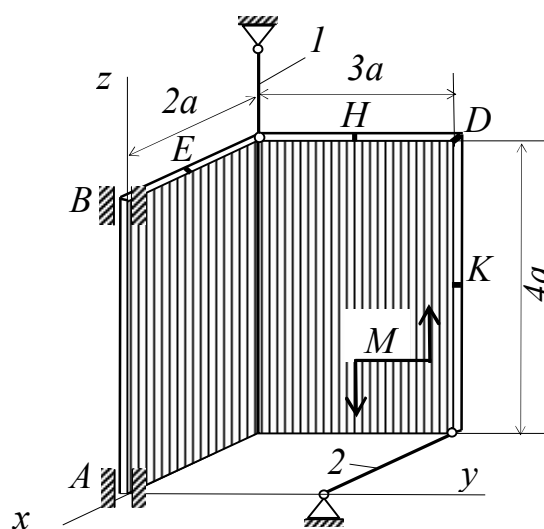


Рис. 3

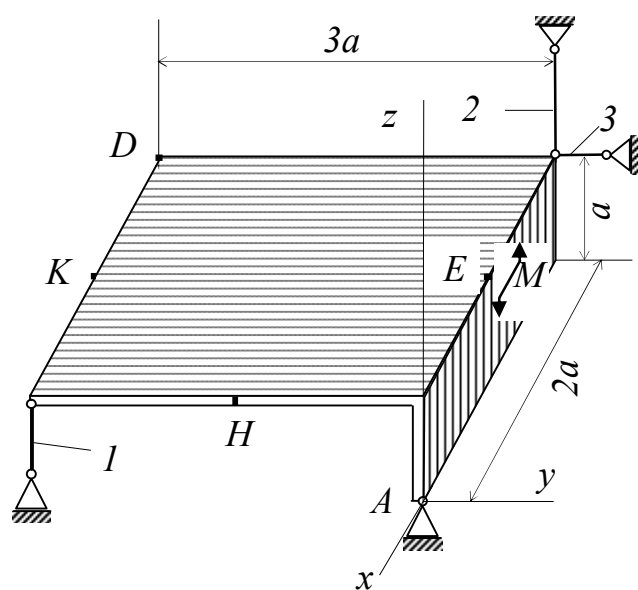


Рис. 4

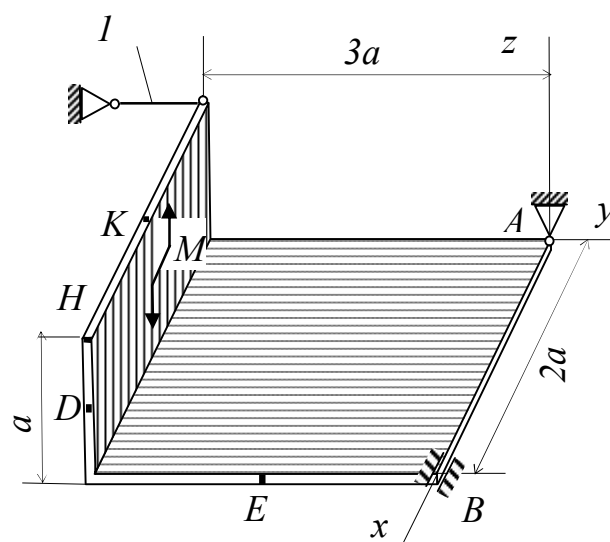


Рис. 5

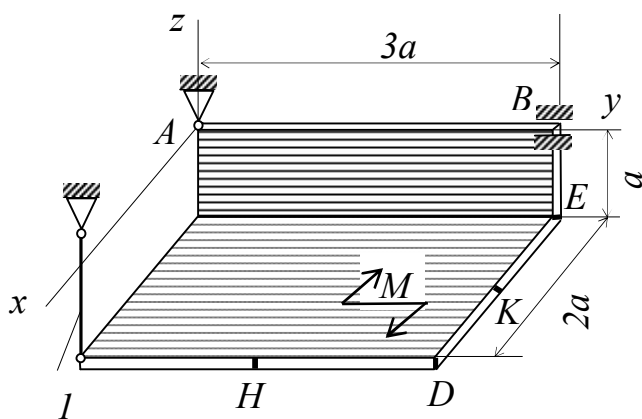


Рис. 6

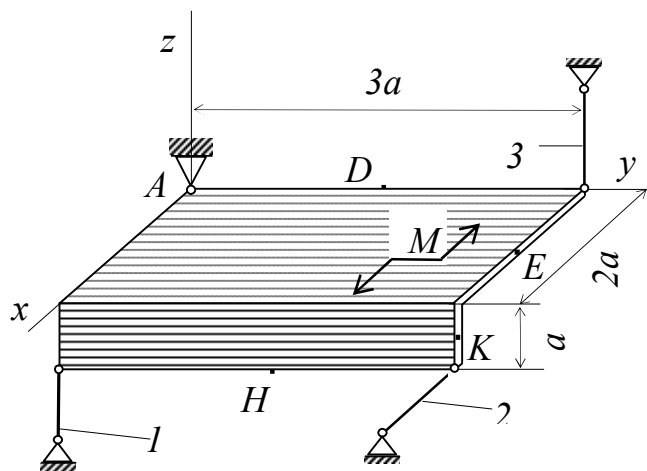


Рис. 7

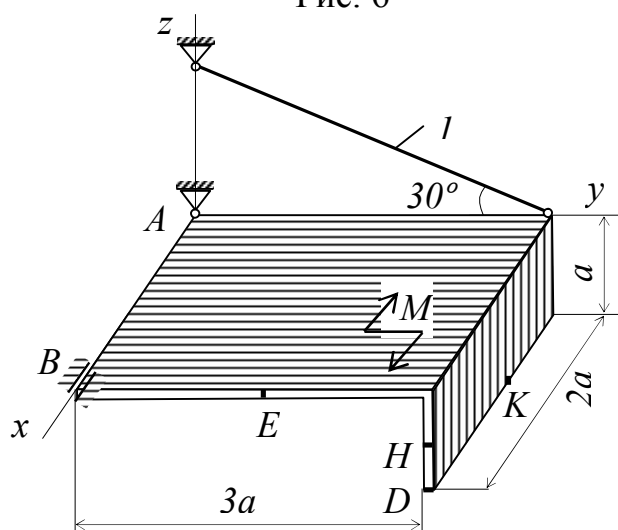


Рис. 8

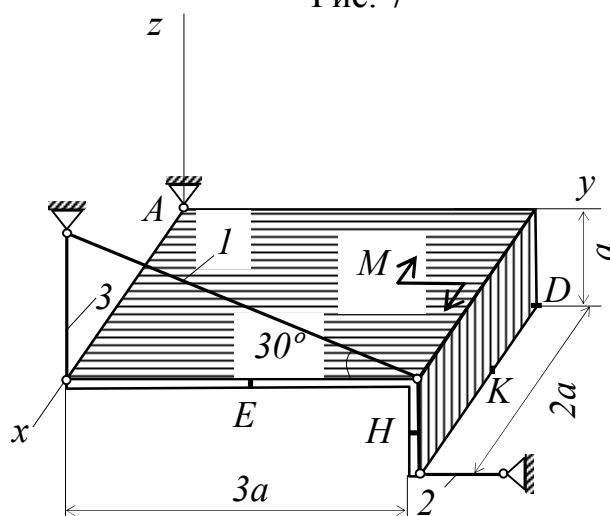
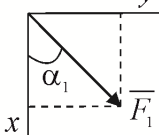
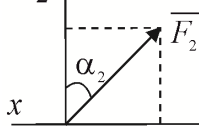
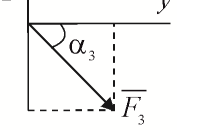
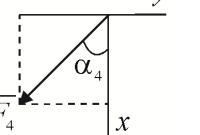


Рис. 9

Таблица 5
(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Силы								
	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1	Точка приложения	α_2	Точка приложения	α_3	Точка приложения	α_4
0	E	60	H	30	-	-	-	-
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	-	-	-	-	K	75	E	30
3	K	60	-	-	D	0	-	-
4	-	-	E	30	-	-	D	60
5	H	0	K	75	-	-	-	-
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	90	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

6. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ» (ЗАДАЧА К1)

Механизм состоит из ступенчатых колёс 2-4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, рейки или груза, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колёс.

В столбцах «Дано» табл. 6 указан закон движения или закон изменения скорости одного из звеньев механизма ($s_1(t)$ – закон движения рейки или груза в см, $v_1(t)$ – закон изменения скорости рейки или груза в см/с, $\varphi(t)$ – закон вращения колеса в рад, $\omega(t)$ – закон изменения угловой скорости соответствующего колеса в 1/с), заданы радиусы r_2, r_3, r_4 в см. Положительное направление для φ и ω – против хода часовой стрелки, для s_1 и v_1 направление оси x показано на рисунках. В момент времени $t = 2$ с определить скорость и ускорение точки M , а также величины, указанные в столбце «Найти».

Краткие теоретические сведения

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Теорема. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис 6.1). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется осью вращения.

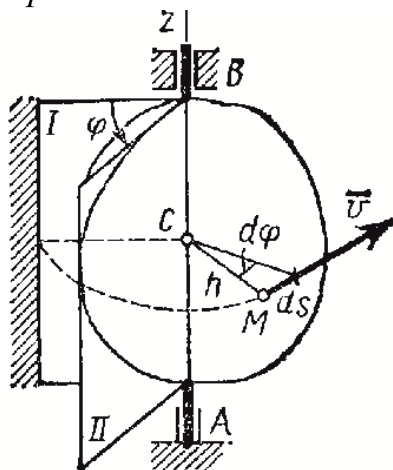


Рис. 6.1 ([1])

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось AB , полуплоскость I – неподвижную и полуплоскость II , врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 6.1). Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем **углом поворота тела**.

Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем

всегда в *радианах*. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t , т. е.

$$\varphi = f(t).$$

Это уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем, что **угловая скорость**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

При вращении против хода часовой стрелки $\omega > 0$, по ходу часовой стрелки – $\omega < 0$. Единица измерения: $[\omega] = 1/c = \text{рад}/c$.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числовое значение среднего **углового ускорения** тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем, что

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Единица измерения: $[\omega] = 1/c^2 = \text{рад}/c^2$.

Скорости точек вращающегося тела. Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис. 6.1). При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h , плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. При повороте тела на угол $d\varphi$ точка M совершит перемещение $ds = h d\varphi$.

Тогда числовое значение скорости точки M

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } v = h\omega.$$

Вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности.

Ускорения точек вращающегося тела. Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_\tau = dv/dt$, $a_n = v^2/\rho$. В нашем случае $\rho = h$. Подставляя значение $v = h\omega$ в выражения a_τ и a_n , получим

$$a_\tau = h \frac{d\omega}{dt}; \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h},$$

или окончательно: $a_\tau = h\varepsilon$; $a_n = h\omega^2$.

Касательная составляющая ускорения a_τ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу MC (см. рис. 6.1) к оси вращения.

Полное ускорение точки M будет

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ или } a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следует учесть, что при внешнем или внутреннем зацеплении колёс скорости и касательные ускорения соприкасающихся точек совпадают ($\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, $\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2$), как и скорости и касательные ускорения точек ремня, соединяющего соответствующие колёса. Два колеса, имеющие общую ось вращения, жёстко связаны между собой, имеют одинаковые углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения.

Пример 6. Дано: $s_1(t) = 5t^2 + 2$ см; $t = 2$ с;
 $r_2 = 10$ см, $r_3 = 15$ см, $r_4 = 20$ см.

Найти: v_M , a_M , v_1 , a_1 .

Решение. По условию задачи задан закон движения груза 1. Так как он движется поступательно, то его скорость движения определяется как производная по времени от закона движения, а ускорение – как производная по времени от скорости (производная по времени обозначается точкой сверху). Следовательно,

$$v_1 = \dot{s}_1 = 10t; \quad a_1 = \dot{v}_1 = 10 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$v_1(2) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (см/с)}.$$

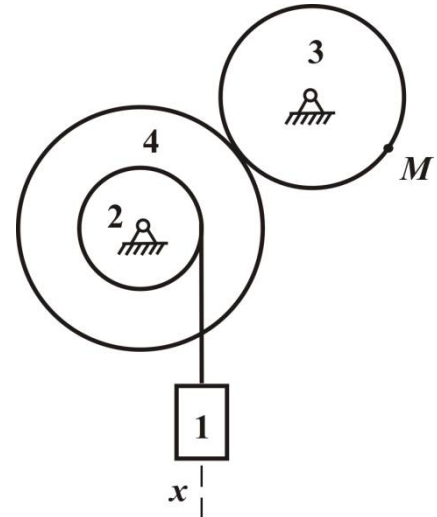


Рис. 6.2. Условие задачи

Скорость груза совпадает со скоростью точек нити, которая сходит по касательной с колеса 2. Тогда из общих формул для скоростей и ускорений точек вращающегося твёрдого тела $v = h \cdot \omega$; $a_\tau = h \cdot \varepsilon$, где h – это расстояние от точки до оси вращения, можно определить угловую скорость и угловое ускорение вращения колеса 2:

$$\omega_2 = v_1 / r_2, \quad \omega_2 = 20 / 10 = 2 \text{ (1/с)}; \quad \varepsilon_2 = a_1 / r_2, \quad \varepsilon_2 = 10 / 10 = 1 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

Так как колеса 2 и 4 имеют общую ось вращения, то их угловые скорости и ускорения совпадают: $\omega_2 = \omega_4 = 2 \text{ (1/с)}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1 \text{ (1/с}^2\text{)}$.

При передаче вращательного движения отношение угловых скоростей и ускорений обратно пропорционально отношению радиусов соответствующих колёс. В рассматриваемом случае вращение от 4 колеса передаётся к 3. Тогда

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_4} \rightarrow \omega_3 = \frac{r_4}{r_3} \omega_4 = \frac{20}{15} \cdot 2 \approx 2,7 \text{ (1/с)};$$

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} = \frac{r_3}{r_4} \rightarrow \varepsilon_3 = \frac{r_4}{r_3} \varepsilon_4 = \frac{20}{15} \cdot 1 \approx 1,3 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

Так как точка M находится на ободе колеса 3, то её скорость и ускорение определяются по формулам $v = h \cdot \omega_3$; $a = h\sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4}$, где $h = r_3$.

$$v_M = 15 \cdot 2,7 = 40,5 \text{ (см/с)}; \quad a_M = 15\sqrt{1,3^2 + 2,7^4} \approx 111,1 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $v_M = 40,5$ см/с; $a_M = 111,1$ см/с²; $v_1 = 20$ см/с; $a_1 = 10$ см/с².

Пример 7. Дано: $\varphi_4(t) = 2(t^2 - 3t)$ см;
 $t = 2$ с; $r_2 = 5$ см, $r_3 = 7$ см, $r_4 = 9$ см.

Найти: v_M , a_M , v_1 , a_1 .

Решение. По условию задан закон вращения колеса 4. Так как точка M находится на ободе, то её скорость и ускорение определяются по формулам

$$v_M = r_4 \omega_4 = r_4 \varphi'_4(t) = 9(4t - 6) \text{ см/с};$$

$$v_M(2) = 9(4 \cdot 2 - 6) = 18 \text{ см/с}.$$

$$a_M = r_4 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \omega_4^4};$$

$$\omega_4 = \varphi'_4(t) = (4t - 6) \text{ рад/с};$$

$$\omega_4(2) = 2 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_4 = \varphi''_4(t) = (4t - 6)' = 4 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_M = r_4 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \omega_4^4} = 9 \sqrt{4^2 + 2^4} = 50,91 \text{ см/с}^2.$$

Так как скорости и касательные ускорения точек ремня, соединяющего соответствующие колёса, равны, то

$$\omega_4 r_4 = \omega_2 r_2, \quad \omega_2 = \frac{\omega_4 r_4}{r_2} = \frac{2 \cdot 9}{5} = 3,6 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_4 r_4 = \varepsilon_2 r_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_4 r_4}{r_2} = \frac{4 \cdot 9}{5} = 7,2 \text{ рад/с}^2.$$

Колеса 2 и 3 имеют общую ось вращения, следовательно, их угловые скорости и ускорения совпадают: $\omega_3 = \omega_2 = 3,6 \text{ рад/с}$; $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 7,2 \text{ рад/с}^2$.

Скорость и ускорение рейки 1 совпадают с касательной скоростью и касательным ускорением колеса 3. Тогда из общих формул для скоростей и ускорений точек вращающегося твёрдого тела

$$v_1 = r_3 \cdot \omega_3 = 7 \cdot 3,6 = 25,2 \text{ см/с};$$

$$a_1 = a_\tau = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 7 \cdot 7,2 = 50,4 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_M = 18 \text{ см/с}$; $a_M = 50,91 \text{ см/с}^2$; $v_1 = 25,2 \text{ см/с}$; $a_1 = 50,4 \text{ см/с}^2$.

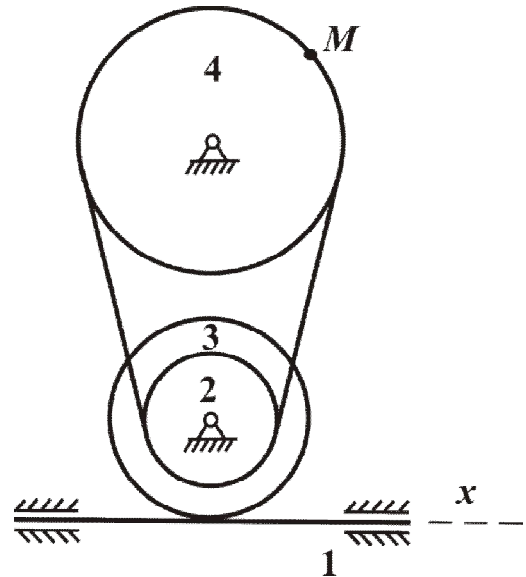


Рис. 6.3. Условие задачи

Рисунки
(последняя цифра в номере зачетной книжки)

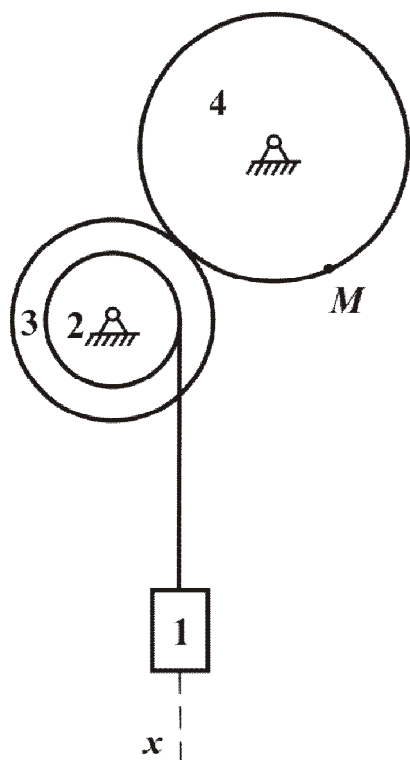


Рис. 0

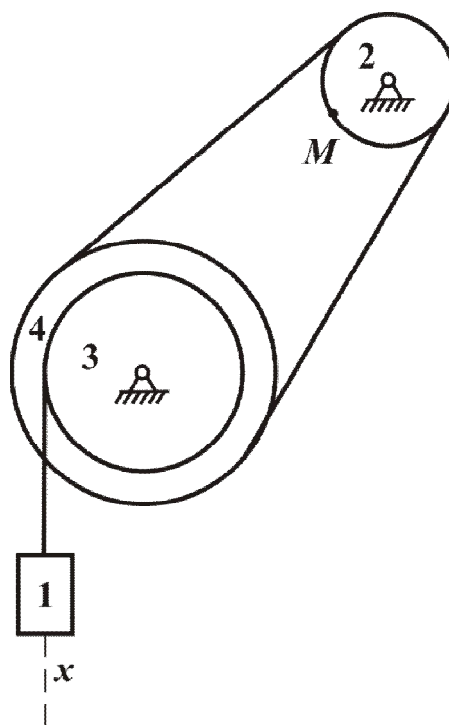


Рис. 1

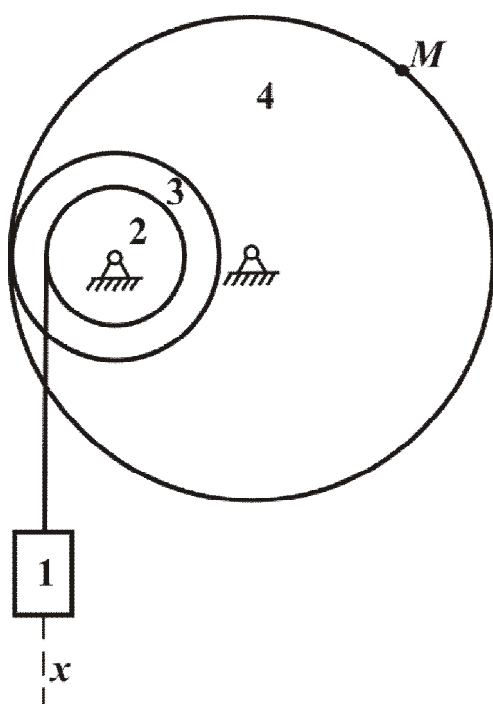


Рис. 2

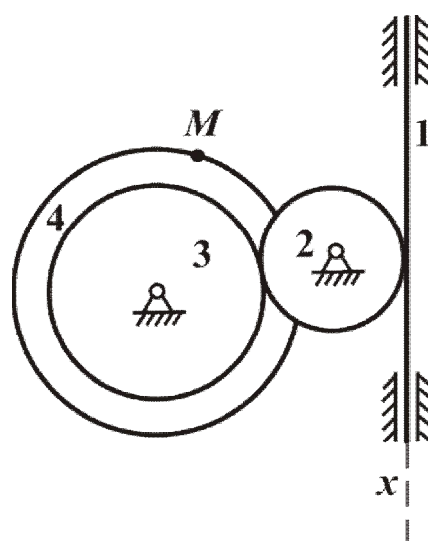
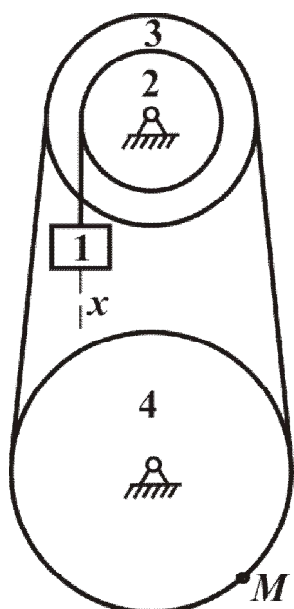
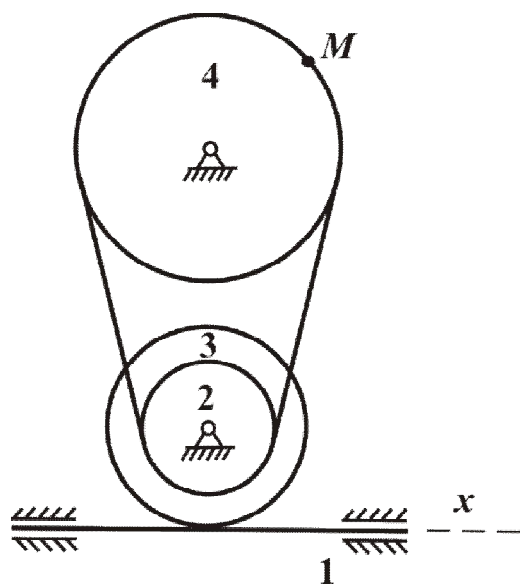


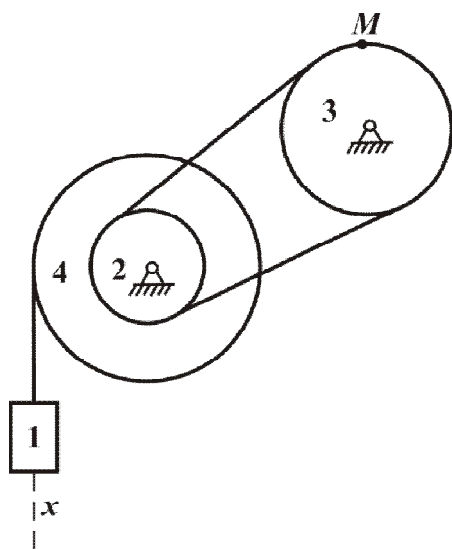
Рис. 3



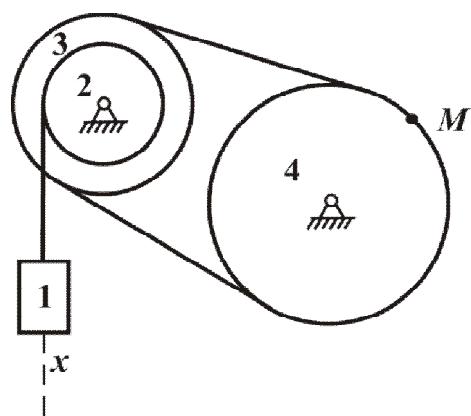
Puc. 4



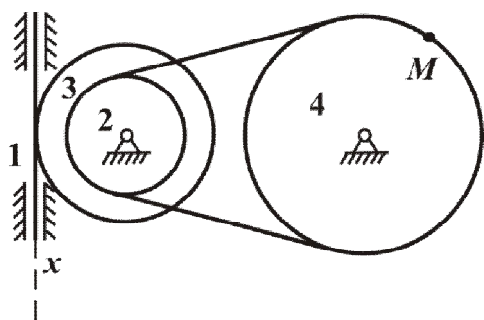
Puc. 5



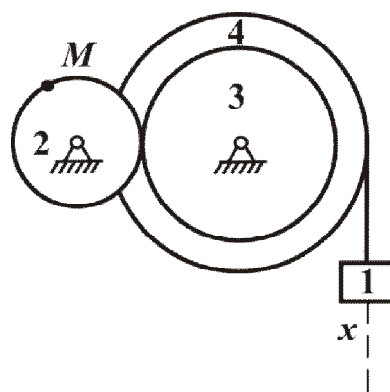
Puc. 6



Puc. 7



Puc. 8



Puc. 9

Таблица 6
(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	Дано				Найти
	$s(t), v(t), \varphi(t), \omega(t)$	r_2	r_3	r_4	
0	$s_1 = 4(7t + t^2)$	2	3	4	ω_3, ε_3
1	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	2	4	5	v_1, a_1
2	$\varphi_2 = 2t^2 - 9$	4	5	8	v_1, a_1
3	$v_1 = 2(t^2 + 3)$	3	4	6	ω_3, ε_3
4	$\varphi_4 = 3t - t^2$	3	5	6	v_1, a_1
5	$s_1 = 2t^2 + 5$	5	7	11	ω_3, ε_3
6	$\varphi_4 = 2(t^2 - 3t)$	3	5	7	v_1, a_1
7	$\omega_2 = 8t - 3t^2$	5	6	10	v_1, a_1
8	$v_1 = 3t^2 + 8$	6	7	9	ω_3, ε_3
9	$\omega_4 = 5t - 2t^2$	4	5	6	v_1, a_1

7. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА» (ЗАДАЧА К2)

Плоский механизм состоит из двух стержней, ползуна B (вертикальная или горизонтальная направляющая) и цилиндра C , катящегося по неподвижной поверхности без проскальзывания. Механизм приводится в движение кривошипом $OA = 15$ см, равномерно вращающимся против хода вращения часовой стрелки с угловой скоростью ω . Радиус цилиндра равен 10 см. Точка G находится посередине звена AB . Горизонтальные и вертикальные размеры указаны на рисунках 0–9 и относятся к неподвижным объектам: шарнирам, опорным плоскостям и линиям движения ползунов. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 7.

Для заданного положения механизма определить:

1. Скорости точек A , B , C , G , F и N с помощью мгновенных центров скоростей.
2. Ускорения точек A и B и угловое ускорение звена AB .

Краткие теоретические сведения

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Из определения следует, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S .

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB . В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A , y_A точки A и угол φ , который отрезок AB образует с осью x .

Точку A , выбранную для определения положения фигуры, будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A , y_A и φ меняются по законам

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

В общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A , и из вращательного движения вокруг этого полюса.

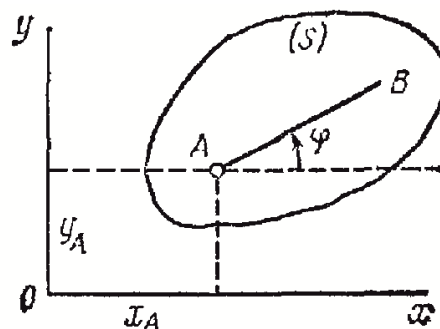


Рис. 7.1 ([1])

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($\bar{v}_{пост} = \bar{v}_A$, $\bar{a}_{пост} = \bar{a}_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса. *Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.*

Определение скоростей точек плоской фигуры

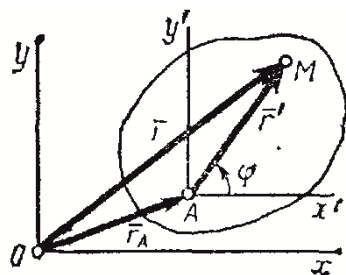


Рис. 7.2 ([1])

Положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}',$$

где $\bar{r}_A$ – радиус-вектор полюса A , $\bar{r}' = \overline{AM}$ – вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой

вращение вокруг полюса A).

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\bar{r}_A/dt$ есть скорость полюса A ; величина же $d\bar{r}'/dt$ равна скорости $\bar{v}_{MA}$, которую точка M получает при $\bar{r}_A = const$, т. е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A . Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}.$$

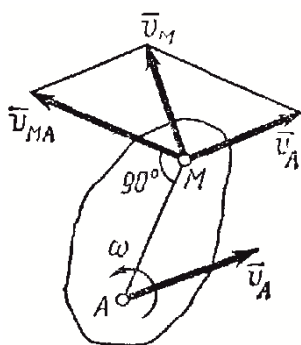


Рис. 7.3 ([1])

При этом скорость $\bar{v}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A , будет: $v_{MA} = \omega \cdot MA$ ($\bar{v}_{MA} \perp \overline{MA}$), где ω – угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\bar{v}_M$ находятся построением, соответствующего параллелограмма.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

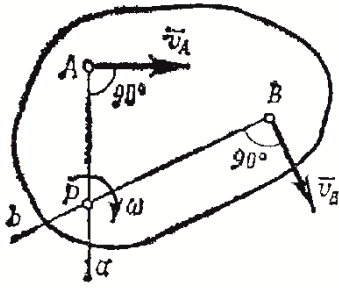


Рис. 7.4 ([1])

Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости v_A и v_B , не параллельные друг другу.

Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору v_A и Bb к вектору v_B , и будет мгновенным центром скоростей, так как $\overline{v_P} = 0$. В самом деле, если допустить, что $\overline{v_P} \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\overline{v_P}$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP , (так как $\overline{v_A} \perp AP$) и BP (так как $\overline{v_B} \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет

$$\overline{v_A} = \overline{v_P} + \overline{v_{PA}} = \overline{v_{PA}},$$

так как $v_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом

$$v_A = \omega \cdot PA \quad (\overline{v_A} \perp PA);$$

$$v_B = \omega \cdot PB \quad (\overline{v_B} \perp PB) \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}.$$

т. е. скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам:

1) Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\overline{v_A}$ и $\overline{v_B}$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2) Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B . Определив мгновенный центр скоростей, скорость точки M найдем из соотношения

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_M}{PM}.$$

3) Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P :

$$\omega = \frac{v_B}{PB}.$$

В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое непоступательно движущееся тело имеет в данный момент вращения свой мгновенный центр скоростей и свою угловую скорость.

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей

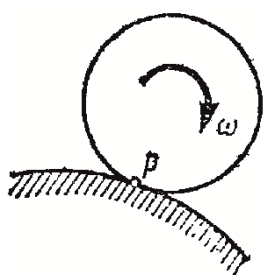


Рис. 7.5 ([1])

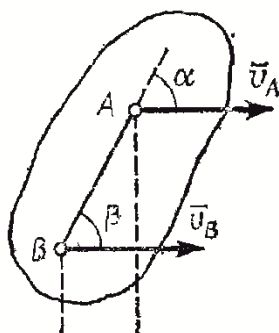


Рис. 7.6 ([1])

1. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности, имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($v_P = 0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей.

2. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна v_A , то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны v_A . При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, т. е. $v_A = v_B$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость ω тела в этот момент времени равна нулю.

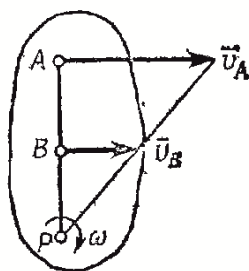


Рис. 7.7 ([1])

3. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна v_A , то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 7.7. Справедливость построений следует из пропорции $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_A и v_B .

4. Если известны вектор скорости $\vec{v}_B$ какой-нибудь точки В фигуры и ее угловая скорость ω , то положение мгновенного центра скоростей P , лежащего на перпендикуляре к $\vec{v}_B$, можно найти из равенства $\omega = \frac{v_B}{PB}$.

Ускорение точек плоской фигуры

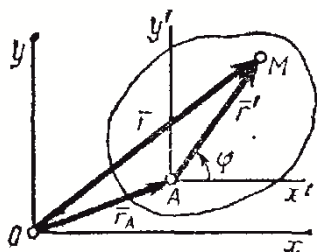


Рис. 7.8 ([1])

Положение точки M по отношению к осям Oxy определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$, где $\vec{r}' = \vec{AM}$. Тогда

$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}.$$

В правой части этого равенства первое слагаемое есть ускорение $\vec{a}_A$ полюса A , а второе слагаемое определяет ускорение $\vec{a}_{MA}$, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A . Следовательно, $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$.

Итак, ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

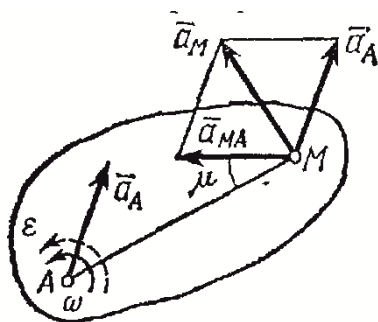


Рис. 7.9 ([1])

Значение $\vec{a}_{MA}$, как ускорения точки вращающегося твердого тела, определяется по формулам

$$a_{MA} = MA \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4};$$

$$\operatorname{tg} \mu = \epsilon / \omega^2,$$

где ω и ϵ — угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ — угол между вектором $\vec{a}_{MA}$ и отрезком MA .

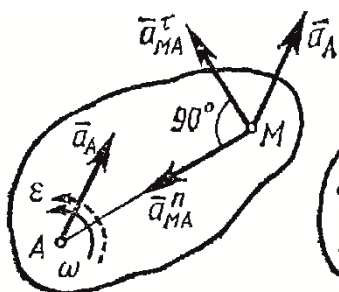


Рис. 7.10 ([1])

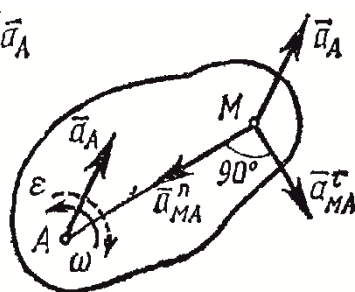


Рис. 7.11 ([1])

При решении задач, чтобы не определять угол μ , удобнее вектор $\vec{a}_{MA}$ заменять его касательной $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ и нормальной $\vec{a}_{MA}^n$ составляющими, т. е.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n.$$

При этом вектор $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор $\vec{a}_{MA}^n$ всегда направлен от точки M к полюсу A .

Численно $a_{MA}^{\tau} = AM\varepsilon$, $a_{MA}^n = AM\omega^2$.

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной $\overline{a_A^{\tau}}$ и нормальной $\overline{a_A^n}$ составляющих, тогда

$$\overline{a_M} = \overline{a_A^{\tau}} + \overline{a_A^n} + \overline{a_{MA}^{\tau}} + \overline{a_{MA}^n}.$$

Мгновенный центр ускорений

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q , ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Определяется положение центра Q , если известны ускорение $\overline{a_A}$ какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ε , следующим путем:

1) находим значение угла μ , из формулы

$$\operatorname{tg} \mu = \varepsilon / \omega^2;$$

2) от точки A под углом μ к вектору $\overline{a_A}$ проводим прямую AE ; при этом прямая AE должна быть отклонена от $\overline{a_A}$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным, т. е. в сторону направления углового ускорения ε ;

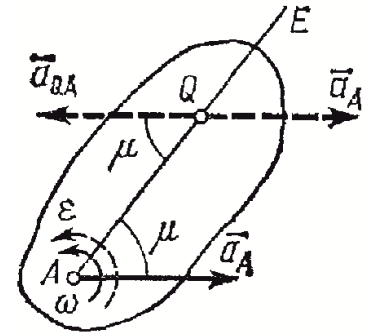


Рис. 7.12 ([1])

3) откладываем вдоль линии AE отрезок AQ , равный $AQ = a_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений.

Если точку Q выбрать за полюс, то, так как $\overline{a_Q} = 0$, ускорение любой точки M тела, согласно формуле, будет $\overline{a_M} = \overline{a_Q} + \overline{a_{MQ}} = \overline{a_{MQ}}$, при этом численно $a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q .

При этом

$$a_M / MQ = a_A / AQ = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

т. е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.

Пример 8. Дано: $R = 20$ см,
 $OA = 30$ см, $AB = 40$ см,
 $BC = 50$ см, $AG = GB = 20$ см,
 $\alpha = 135^\circ$, $\omega_{OA} = 2$ (1/с).

Найти:

- 1) $v_A, v_B, v_G, v_C, v_F, v_N$;
- 2) $a_A, a_B, \varepsilon_{AB}$.

Решение.

1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена AB.*

Изобразим механизм по заданным размерам звеньев (в масштабе) и углу α . Нахождение скоростей точек необходимо начинать с определения скорости точки A ведущего звена OA механизма, движение которого задано.

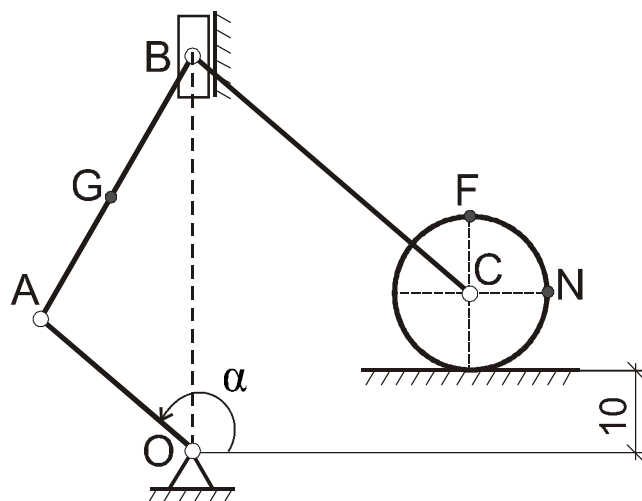


Рис. 7.13. Схема механизма в заданном положении

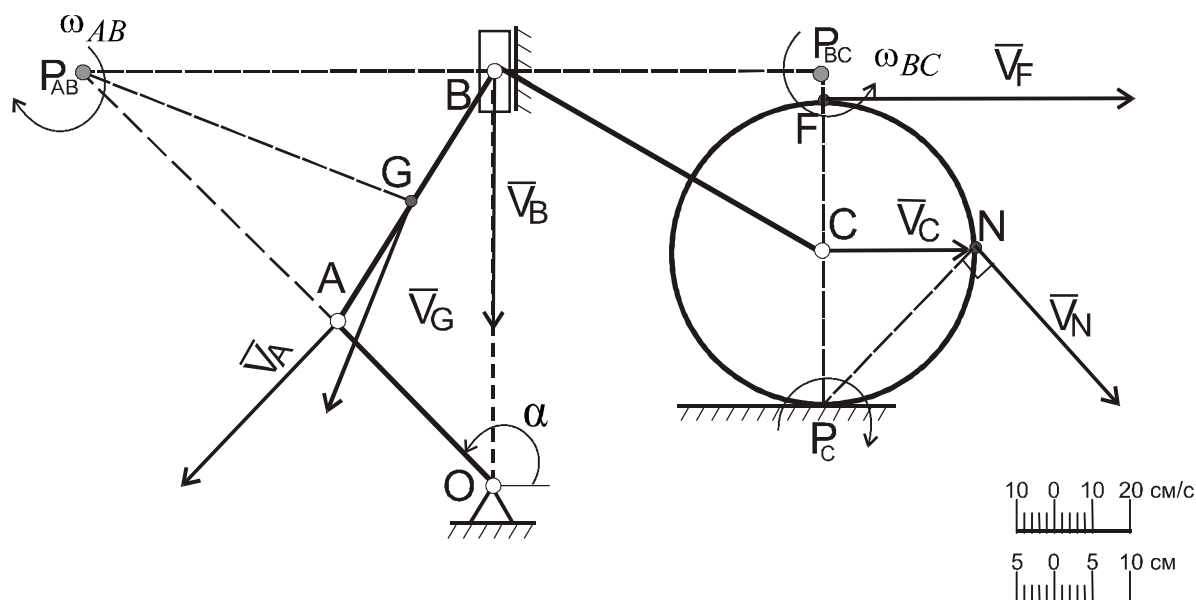


Рис. 7.14. Определение скоростей точек механизма с помощью МЦС

Вычисляем модуль скорости точки A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 30 \cdot 2 = 60 \text{ (см/с)}.$$

Вектор скорости точки A перпендикулярен OA и направлен в сторону вращения кривошипа. Скорость ползуна B направлена вдоль прямой, по которой может перемещаться ползун B , т. е. вертикально. Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к направлениям векторов их скоростей. Так как скорости точек A и B звена AB пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС, то для определения скорости точки B записываем соотношение

$$\frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}}.$$

Расстояния от точек A и B до мгновенного центра скоростей P_{AB} определяем измерением на чертеже с учетом масштаба: $AP_{AB} = 47$ см и $BP_{AB} = 55$ см. В соответствии с этим

$$v_B = \frac{v_A}{AP_{AB}} \cdot BP_{AB} = \frac{60}{47} \cdot 55 = 70,21 \text{ (см/с)}.$$

Определив модуль скорости точки B , находим направление вектора $\bar{v}_B$. По направлению скорости точки A и положению мгновенного центра скоростей P_{AB} устанавливаем, что вращение звена AB происходит по часовой стрелке. Поэтому вектор скорости точки B при заданном положении механизма направлен вниз.

Аналогично определяем модуль скорости точки G ($GP_{AB} = 47$ см из чертежа):

$$\frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_G}{GP_{AB}} \rightarrow v_G = \frac{v_A}{AP_{AB}} \cdot GP_{AB} = \frac{60}{47} \cdot 47 = 60 \text{ (см/с)}.$$

Вектор $\bar{v}_G$ направлен перпендикулярно отрезку GP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB вокруг МЦС.

Аналогично находим скорость центра цилиндра C . Мгновенный центр скоростей P_{BC} звена BC лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек B и C . Для определения скорости точки C записываем соотношение

$$\frac{v_B}{BP_{BC}} = \frac{v_C}{CP_{BC}}.$$

Расстояния от точек B и C до мгновенного центра скоростей P_{BC} определяются измерениями на чертеже с учетом масштаба: $BP_{BC} = 43$ см и $CP_{BC} = 24$ см. В соответствии с этим

$$v_C = \frac{v_B}{BP_{BC}} \cdot CP_{BC} = \frac{70,21}{43} \cdot 24 = 39,19 \text{ (см/с)}.$$

Так как цилиндр катится без проскальзывания, то его мгновенный центр скоростей P_C лежит в точке касания цилиндра с неподвижной плоскостью. Учитывая, что скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС, получаем

$$v_F = \frac{v_C}{CP_C} \cdot FP_C = \frac{v_C}{R} \cdot 2R = 2 \cdot v_C = 78,38 \text{ (см/с)};$$

$$v_N = \frac{v_C}{CP_C} \cdot NP_C = \frac{v_C}{R} \cdot \sqrt{2}R = \sqrt{2} \cdot v_C = 55,42 \text{ (см/с)}.$$

Определим угловую скорость звена AB :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{60}{47} = 1,28 \text{ (1/с)}.$$

2. *Определение ускорения точек A и B и углового ускорения звена AB.*

Приняв точку A за полюс, с помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры найдем ускорение точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^{\epsilon} + \bar{a}_{AB}^{\eta}.$$

Ускорение точки A складывается из касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n,$$

где по модулю $a_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_{OA}$, $a_A^n = OA \cdot \omega_{OA}^2$.

По условию $\omega_{OA} = const$ и поэтому $\varepsilon_{OA} = \frac{d\omega_{OA}}{dt} = 0$. Следовательно, ускорение точки A равно нормальному и направлено от точки A к O.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n; a_A = a_A^n = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 30 \cdot 2^2 = 120 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении звена AB вокруг полюса A направлено от точки B к точке A и по модулю равно

$$a_{AB}^{\eta} = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 40 \cdot 1,28^2 = 65,54 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор ускорения точки B направлен по прямой, вдоль которой движется ползун B. Отложим от точки B в масштабе ускорение полюса $\bar{a}_A$. Через конец этого вектора параллельно BA проводим вектор $\bar{a}_{AB}^{\eta}$. Через конец вектора $\bar{a}_{AB}^{\eta}$ проводим прямую перпендикулярно к BA, т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению $\bar{a}_{AB}^{\epsilon}$. Точка пересечения этой прямой с OB, по которой направлен вектор ускорения ползуна B, определяет конец искомого вектора $\bar{a}_B$.

Измерением на чертеже получаем $a_B = 106,6 \text{ см/с}^2$; $a_{AB}^{\epsilon} = 62,0 \text{ см/с}^2$.

Так как $a_{AB}^{\epsilon} = AB \cdot \varepsilon_{AB}$, то угловое ускорение звена AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{\epsilon}}{AB} = \frac{62}{40} = 1,55 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

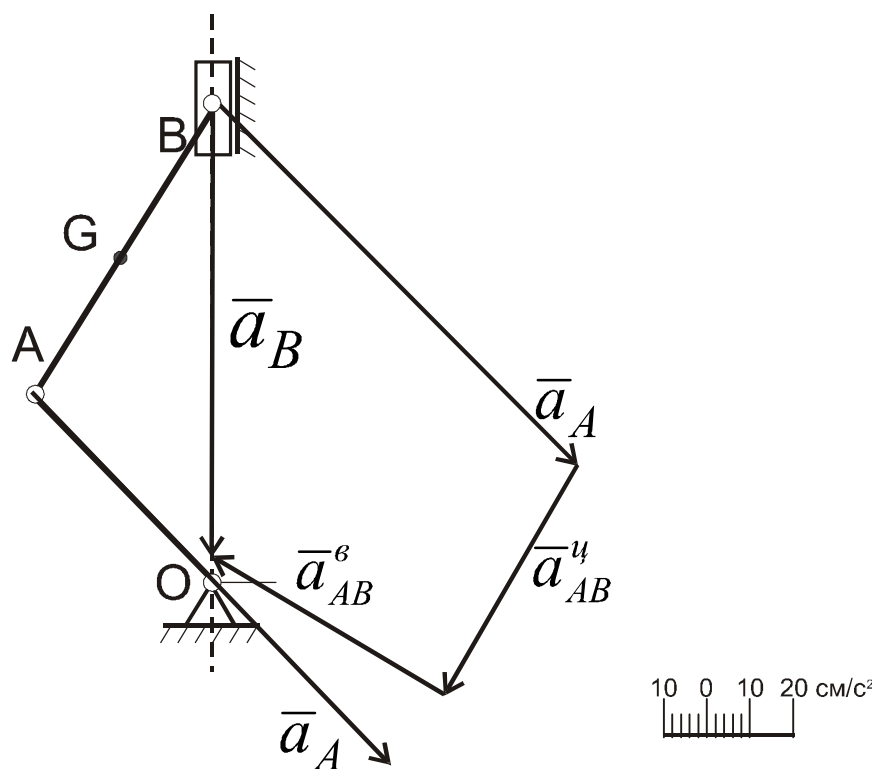


Рис. 7.15. Определение ускорения точки B

Ответ: $v_A = 60 \text{ см/с}$; $v_B = 70,21 \text{ см/с}$; $v_G = 60 \text{ см/с}$; $v_C = 39,19 \text{ см/с}$;
 $v_F = 78,38 \text{ см/с}$; $v_N = 55,42 \text{ см/с}$; $a_A = 120 \text{ см/с}^2$; $a_B = 106,6 \text{ см/с}^2$;
 $\varepsilon_{AB} = 1,55 (1/\text{с}^2)$.

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

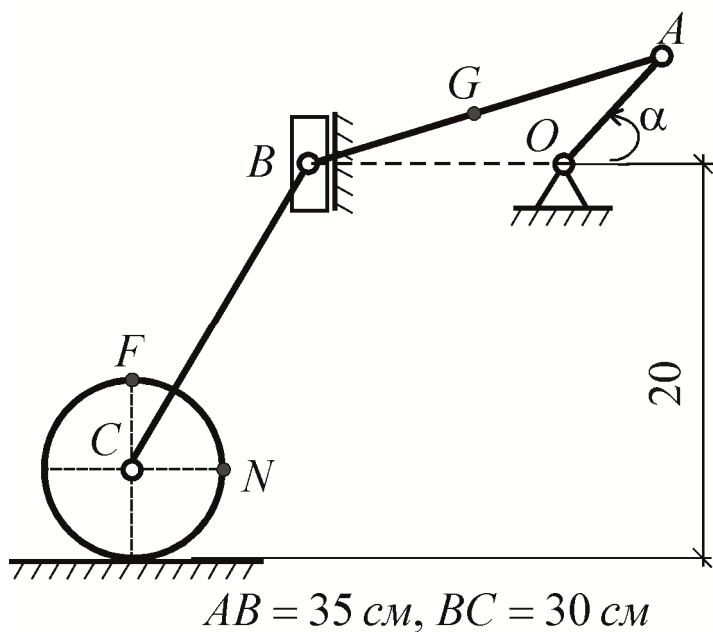
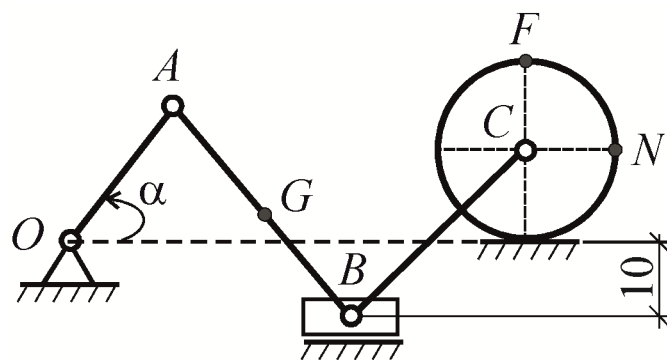
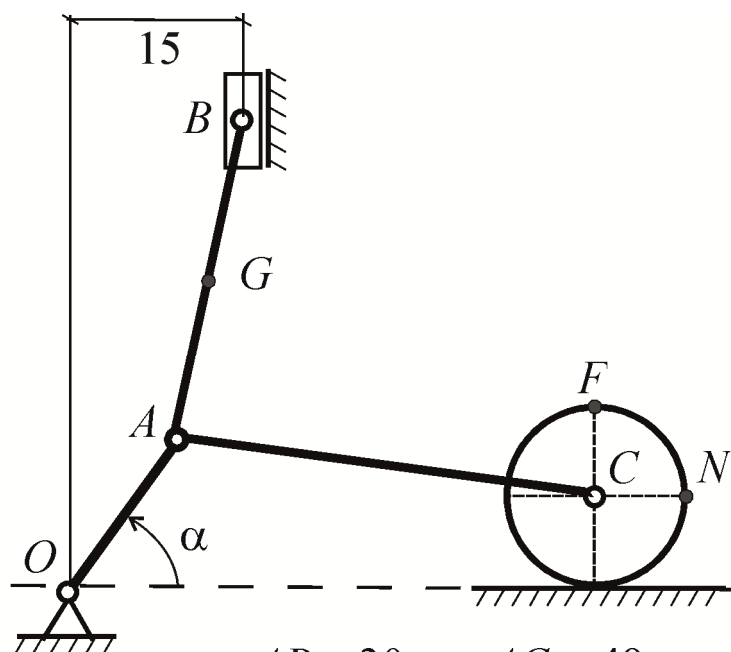


Рис. 0



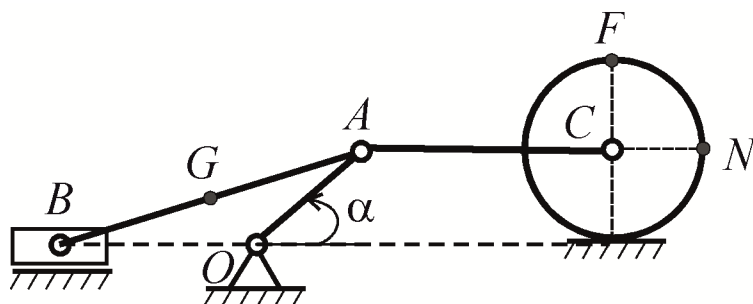
$$AB = 30 \text{ см}, BC = 21 \text{ см}$$

Рис. 1



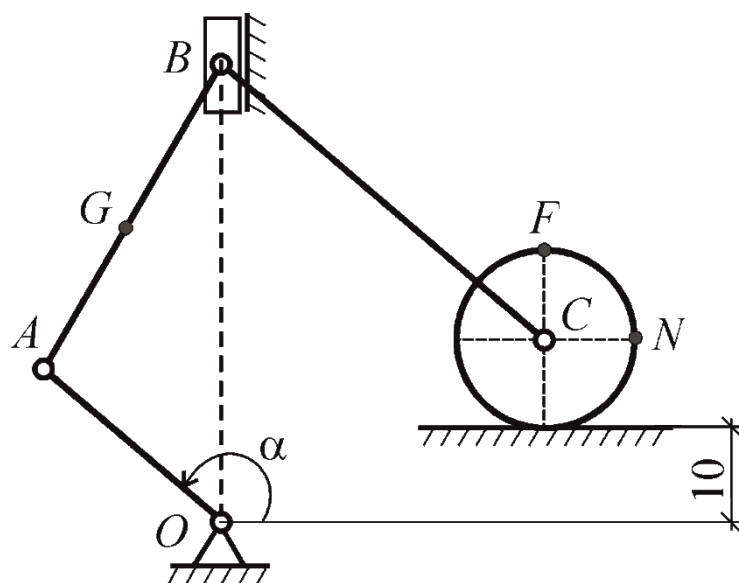
$$AB = 30 \text{ см}, AC = 49 \text{ см}$$

Рис. 2



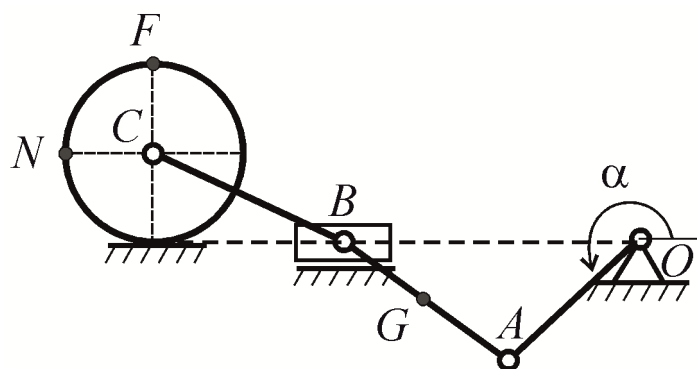
$$AB = 30 \text{ см}, AC = 33 \text{ см}$$

Рис. 3



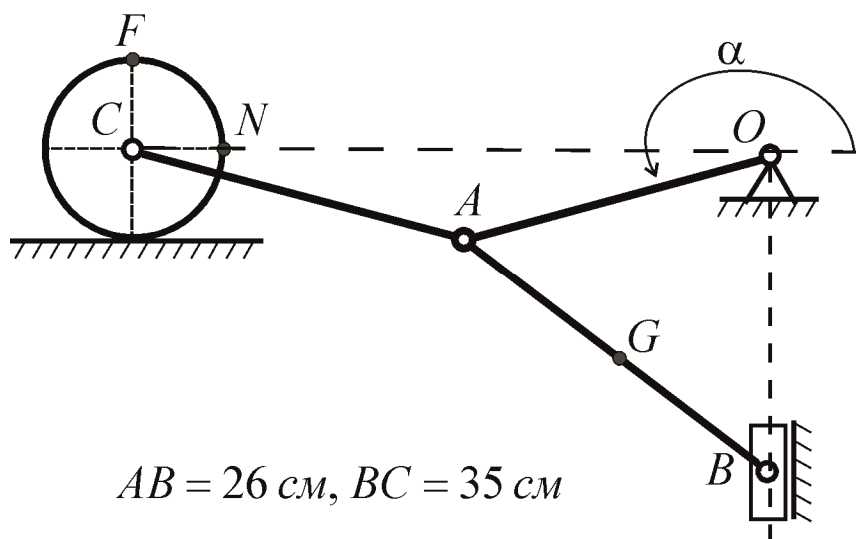
$$AB = 40 \text{ см}, BC = 50 \text{ см}$$

Рис. 4



$$AB = 20 \text{ см}, BC = 21 \text{ см}$$

Рис. 5



$$AB = 26 \text{ см}, BC = 35 \text{ см}$$

Рис. 6

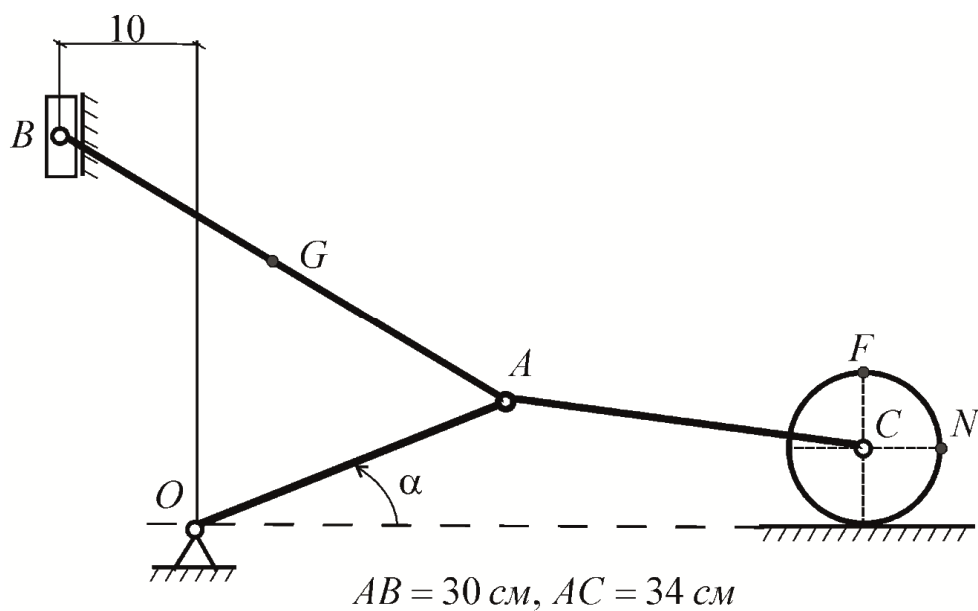


Рис. 7

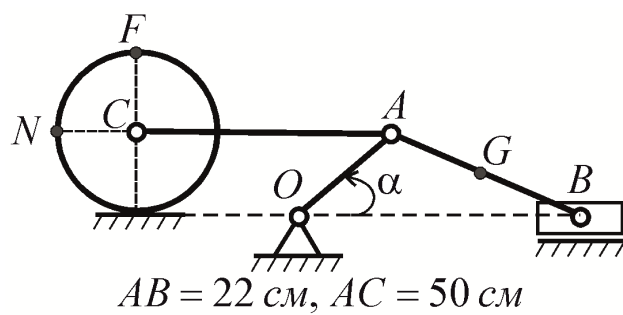


Рис. 8

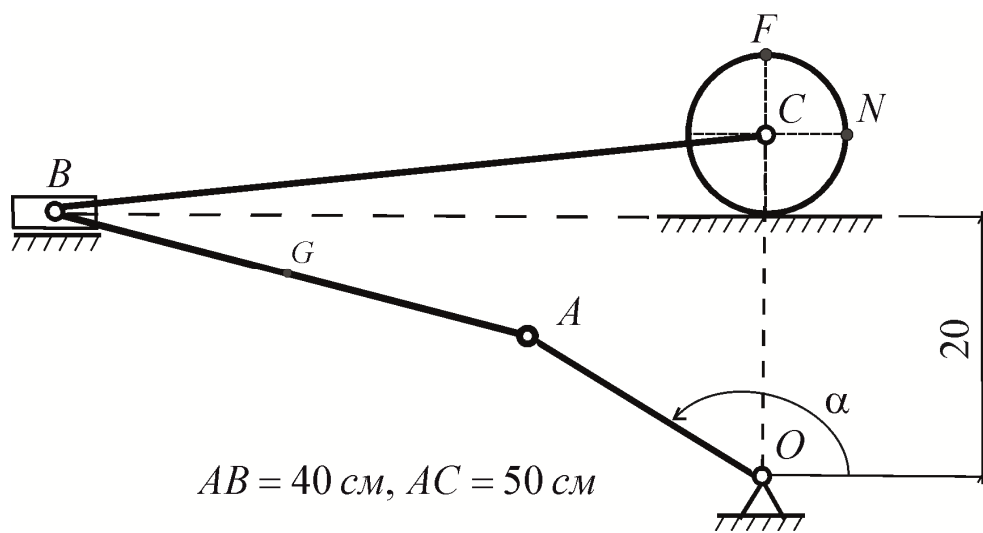


Рис. 9

Таблица 7
(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°
$\omega, 1/\text{с}$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

8. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ» (ЗАДАЧА КЗ)

Геометрическая фигура вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости (рис. 0; 1; 4; 5; 6) или вокруг оси, лежащей в ее плоскости (рис. 2; 3; 7–9). По каналу, расположенному на фигуре, движется точка M по известному закону $AM = S(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при $t = 1$ с. Функция $S(t)$, размер h и закон вращения фигуры $\varphi_{пер}(t)$ даны в табл. 8.2. На рис. 0–3 радиус $R = 60$ см.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам координат, из которых одна считается основной (или условно неподвижной), а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют *составным, или сложным*.

Введем следующие определения:

1. Движение, совершаемое точкой по отношению к подвижной системе отсчета, называется *относительным движением*. Скорость точки называется *относительной скоростью* (обозначается $\bar{v}_{от}$), а ускорение – *относительным ускорением* (обозначается $\bar{a}_{от}$).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе, является для точки *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями точки, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка, называется *переносной скоростью* точки в этот момент (обозначается $\bar{v}_{пер}$), а ускорение этой точки — *переносным ускорением* точки (обозначается $\bar{a}_{пер}$).

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета, называется *абсолютным, или сложным*.

Теорема о сложении скоростей. При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\bar{v}_{аб} = \bar{v}_{от} + \bar{v}_{пер}.$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного (кориолисова).

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}.$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) на относительную скорость точки.

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}).$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{от}$ обозначить через α , будет равен $\vec{a}_{кор} = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_{от}|\sin \alpha$.

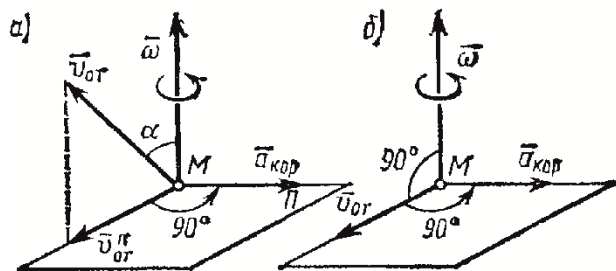


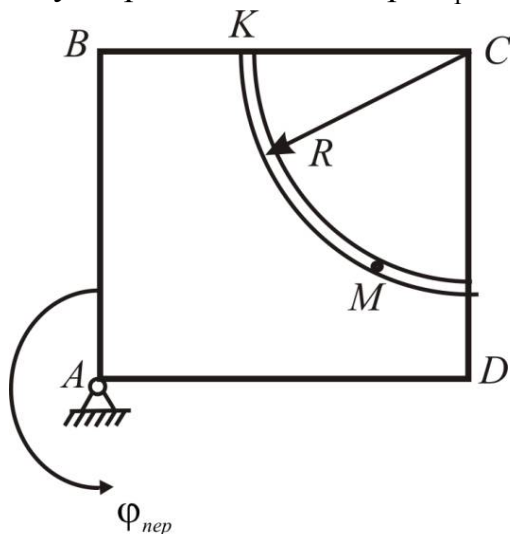
Рис. 8.1 ([1])

Направлен вектор $\vec{a}_{кор}$ так же, как и вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}_{от}$, т. е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{от}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{\omega}$ с $\vec{v}_{от}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 8.1, а).

Из рис. 8.1, а видно также, что направление вектора $\vec{a}_{кор}$ можно определить, спроектировав вектор $\vec{v}_{от}$ на плоскость Π , перпендикулярную $\vec{\omega}$, и повернув эту проекцию $\vec{v}_{от}^{\perp\Pi}$ на 90° в сторону переносного вращения (правило Жуковского).

Примеры решения задач

Пример 9. Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг оси, проходящей через вершину A (рис. 8.2). Ось перпендикулярна плоскости прямоугольника. По круговому каналу (центр в точке C), расположенному на прямоугольнике, движется точка M по закону $KM = 5\pi t^3 / 3$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при $t_1 = 1$ с.



$$\begin{aligned}\varphi_{пер} &= t^2 + t, \\ R &= 10 \text{ см}, \\ AB &= 12 \text{ см}, \\ BC &= 15 \text{ см}.\end{aligned}$$

Рис. 8.2

Решение. Движение точки M представим в виде суммы относительного движения по круговому каналу и переносного вращения вместе с прямоугольником.

1. *Положение точки.* За время t_1 точка проходит путь по дуге окружности

$$KM = 5\pi / 3 \text{ (см)}.$$

Центральный угол, соответствующий этой дуге, равен

$$\alpha = \frac{KM}{R} = \frac{5\pi}{3 \cdot 10} = \frac{\pi}{6}.$$

Изобразим точку в этом положении (рис. 8.3).

2. *Определение скорости.* Относительная скорость точки M направлена по касательной к окружности (под углом α к вертикали) и при $t = 1$ с равна

$$v_{om} = \frac{d}{dt} KM(t) = 5\pi t^2 = 15,71 \text{ (см/с)}.$$

Переносной скоростью точки является скорость точки прямоугольника, совпадающей в данный момент с M :

$$v_{nep} = \omega_{nep} R_{nep}.$$

Найдем радиус R_{nep} траектории переносного движения и угловую скорость фигуры ω_{nep} при $t = 1$ с:

$$R_{nep} = \sqrt{(AB - R \sin \alpha)^2 + (BC - R \cos \alpha)^2} = 9,44 \text{ (см)};$$

$$\omega_{nep} = \frac{d\varphi_{nep}(t)}{dt} = 2t + 1 = 3 \text{ (рад/с)}.$$

Отсюда

$$v_{nep} = 3 \cdot 9,44 = 28,33 \text{ (см/с)}.$$

Модуль абсолютной скорости $\vec{v} = \vec{v}_{om} + \vec{v}_{nep}$ найдем, проецируя это равенство на неподвижные оси координат x, y (можно воспользоваться также теоремой косинусов):

$$v_x = v_{om} \sin \alpha - v_{nep} \sin \beta;$$

$$v_y = -v_{om} \cos \alpha + v_{nep} \cos \beta.$$

Вычислим тригонометрические функции угла β :

$$\sin \beta = \frac{AB - R \sin \alpha}{R_{nep}} = \frac{12 - 10 \cdot 0,5}{9,44} = 0,741;$$

$$\cos \beta = \frac{BC - R \cos \alpha}{R_{nep}} = \frac{15 - 10 \cdot 0,866}{9,44} = 0,671.$$

Получим численные значения проекций абсолютной скорости

$$v_x = -13,15 \text{ (см/с)}; v_y = 5,41 \text{ (см/с)}.$$

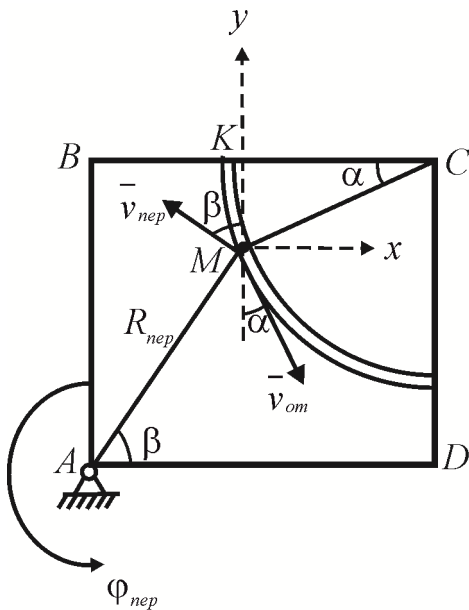


Рис. 8.3

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{13,15^2 + 5,41^2} = 14,22 \text{ (см/с)}.$$

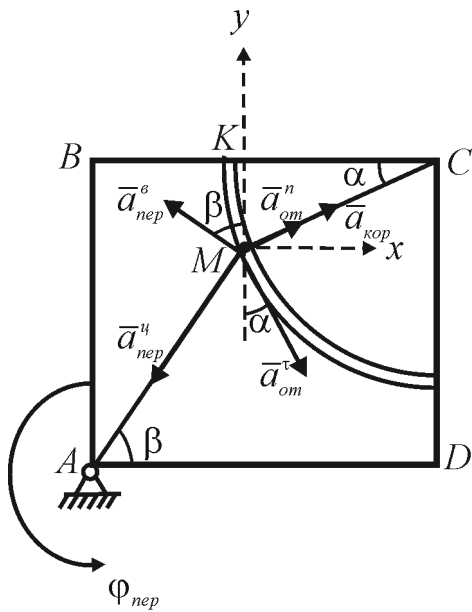


Рис. 8.4

3. *Определение ускорения.* Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений Кориолиса

$$\bar{a} = \bar{a}_{om} + \bar{a}_{nep} + \bar{a}_{kop}. (*)$$

Относительное ускорение точки, движущейся относительно прямоугольника по окружности, имеет нормальную и касательную компоненты

$$a_{om}^{\tau} = \frac{dv_{om}}{dt} = 10\pi t = 31,42 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{om}^n = \frac{v_{om}^2}{R} = \frac{15,71^2}{10} = 24,67 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ускорение $\bar{a}_{om}^n$ направим по радиусу окружности к точке C. $\bar{a}_{om}^{\tau}$ – по касательной, в

сторону увеличения дуги KM, т. к. $a_{om}^{\tau} > 0$ (рис. 8.4).

Траектория *переносного* движения точки – окружность радиуса R_{nep} с центром A. Прямоугольник вращается с угловой скоростью $\omega_{nep} = 2t + 1$ и угловым ускорением

$$\varepsilon_{nep} = \frac{d\omega_{nep}}{dt} = \frac{d(2t + 1)}{dt} = 2 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Вычислим соответствующие компоненты переносного ускорения

$$a_{nep}^u = \omega_{nep}^2 R_{nep} = 3^2 \cdot 9,44 = 85 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{nep}^e = \varepsilon_{nep} R_{nep} = 2 \cdot 9,44 = 18,89 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\bar{a}_{nep}^e$ направлен против хода часовой стрелки перпендикулярно радиусу R_{nep} . Вектор $\bar{a}_{nep}^u$ – к центру A.

Величина ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$a_{kop} = 2|\omega_{nep}||v_{om}|\sin\gamma.$$

Вектор $\bar{\omega}_{nep}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, угол γ между $\bar{v}_{om}$ и $\bar{\omega}_{nep}$ равен 90° . Имеем

$$a_{kop} = 2 \cdot 3 \cdot 15,71 = 94,26 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Направление вектора ускорения Кориолиса получим по правилу Жуковского поворотом вектора относительно скорости по направлению переносного вращения, т. е. против хода часовой стрелки.

Найдем абсолютное ускорение. Спроецируем формулу (*) на неподвижные оси координат

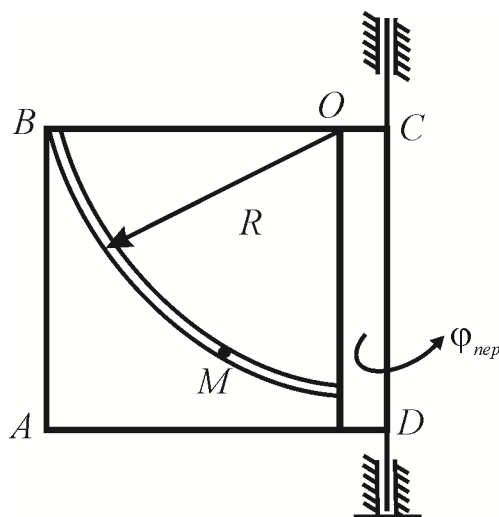
$$\begin{aligned} a_x &= a_{om}^{\tau} \sin \alpha + a_{om}^n \cos \alpha - a_{nep}^u \cos \beta - a_{nep}^e \sin \beta + a_{кор} \cos \alpha = \\ &= 31,42 \cdot 0,5 + 24,67 \cdot 0,866 - 85 \cdot 0,671 - 18,89 \cdot 0,741 + \\ &\quad + 94,26 \cdot 0,866 = 47,65 \text{ (см/с}^2\text{)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= -a_{om}^{\tau} \cos \alpha + a_{om}^n \sin \alpha - a_{nep}^u \sin \beta + a_{nep}^e \cos \beta + a_{кор} \sin \alpha = \\ &= -31,42 \cdot 0,866 + 24,67 \cdot 0,5 - 85 \cdot 0,741 + 18,89 \cdot 0,671 + 94,26 \cdot 0,5 = \\ &= -18,06 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Окончательно найдем величину абсолютного ускорения точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{47,65^2 + 18,06^2} = 50,96 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Пример 10. Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг оси, проходящей по стороне DC (рис. 8.5). По круговому каналу (центр в точке O), расположенному на прямоугольнике, движется точка M по закону $BM = \pi t(2t - 3)$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при $t = t_1$ с.



$$\begin{aligned} \varphi_{nep} &= 0.2t^2, \\ R &= 12 \text{ см}, \\ BC &= 15 \text{ см}, \\ t_1 &= 2 \text{ с}. \end{aligned}$$

Рис. 8.5

Решение.

1. *Положение точки.* Найдем центральный угол, соответствующий дуге BM при $t = t_1$:

$$\alpha = \frac{BM}{R} = \frac{\pi}{6}.$$

Изобразим точку в этом положении (рис. 8.6).

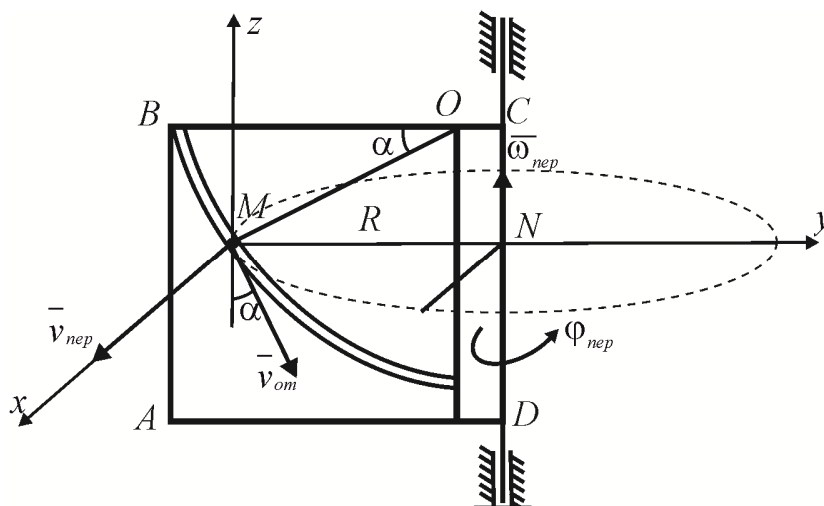


Рис. 8.6

2. *Определение скорости.* Относительная скорость точки M направлена по касательной к окружности (под углом α к оси z) и при $t = 2$ с равна

$$v_{om} = \frac{d}{dt} BM(t) = \frac{d}{dt} \pi t(2t - 3) = \pi(4t - 3) = 15,71 \text{ (см/с)}.$$

Траекторией переносного движения точки является окружность с центром N . Эта окружность лежит в плоскости xy , перпендикулярной к оси вращения DC (ось z). Радиус окружности

$$MN = R \cos \alpha + OC = R \cos \alpha + BC - R = 12 \cdot 0,866 + 15 - 12 = 13,39 \text{ (см)}.$$

Угловая скорость вращения прямоугольника $ABCD$

$$\omega_{nep} = \frac{d\varphi_{nep}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 0,2t^2 = 0,4t = 0,8 \text{ (рад/с)}.$$

Отсюда переносная скорость точки

$$v_{nep} = \omega_{nep} MN = 0,8 \cdot 13,39 = 10,71 \text{ (см/с)}.$$

Вектор $\bar{v}_{om}$ лежит в плоскости zy , а $\bar{v}_{nep}$ направлен по оси x , следовательно, они перпендикулярны.

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_{nep}^2 + v_{om}^2} = \sqrt{10,71^2 + 15,71^2} = 19,01 \text{ (см/с)}.$$

3. *Определение ускорения.*

Абсолютное ускорение точки определяется по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_{om} + \bar{a}_{nep} + \bar{a}_{кор}.$$

Найдем относительное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса R . Нормальная составляющая

$$a_{om}^n = \frac{v_{om}^2}{R} = \frac{15,71^2}{12} = 20,56 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Касательная составляющая

$$a_{om}^\tau = \frac{dv_{om}}{dt} = \frac{d}{dt} \pi(4t - 3) = 4\pi = 12,57 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Оба вектора лежат в плоскости zy (рис. 8.7).

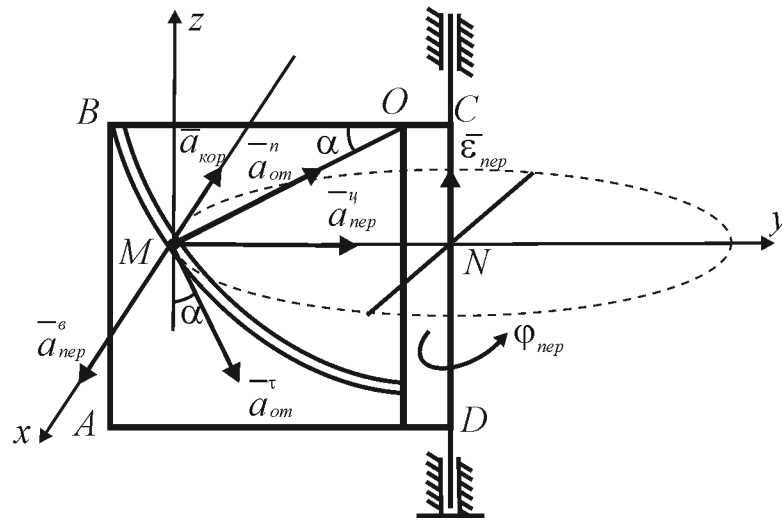


Рис. 8.7

Вычислим компоненты переносного ускорения. Прямоугольник вращается с угловой скоростью $\omega_{пер} = 0,4t$ рад/с и угловым ускорением

$$\varepsilon_{пер} = \frac{d\omega_{пер}}{dt} = \frac{d}{dt}(0,4t) = 0,4 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Отсюда

$$a_{пер}^u = \omega_{пер}^2 MN = 0,8^2 \cdot 13,39 = 8,57 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{пер}^e = \varepsilon_{пер} MN = 0,4 \cdot 13,39 = 5,36 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\vec{a}_{пер}^e$ направлен по оси x , вектор $\vec{a}_{пер}^u$ – к оси вращения вдоль y . Величина ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}||v_{ом}|\sin\gamma.$$

Вектор $\vec{\omega}_{пер}$ всегда направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки. В нашем случае – вверх. Угол γ между $\vec{v}_{ом}$ и $\vec{\omega}_{пер}$ равен 150° . Имеем

$$a_{кор} = 2 \cdot 0,8 \cdot 15,71 \cdot 0,5 = 12,57 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

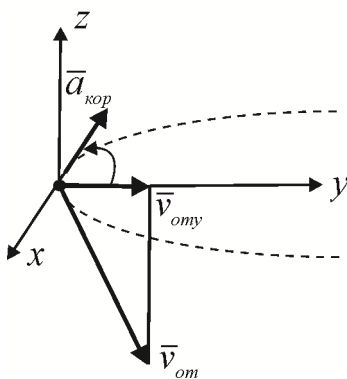


Рис. 8.8

Для того, чтобы найти направление вектора ускорения Кориолиса, воспользуемся правилом Жуковского (рис. 8.8).

Спроектируем вектор относительной скорости $\vec{v}_{ом}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения, т.е. на плоскость xu . Повернув полученную проекцию по направлению переносного вращения на 90° , получим направление вектора ускорения Кориолиса. Вектор $\vec{a}_{кор}$ лежит на оси x и направлен в сторону

отрицательных значений.

Вычислим абсолютное ускорение. Проекции векторной суммы всех найденных ускорений

$$a_x = a_{nep}^6 - a_{кор} = 5,36 - 12,57 = -7,21 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$\begin{aligned} a_y &= a_{nep}^y + a_{om}^\tau \sin \alpha + a_{om}^n \cos \alpha = \\ &= 8,57 + 12,57 \cdot 0,5 + 20,56 \cdot 0,866 = 32,66 \text{ (см/с}^2\text{)}; \end{aligned}$$

$$a_z = a_{om}^n \sin \alpha - a_{om}^\tau \cos \alpha = 20,56 \cdot 0,5 - 12,57 \cdot 0,866 = -0,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Окончательно абсолютное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{7,21^2 + 32,66^2 + 0,6^2} = 33,45 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Рисунки

(последняя цифра в номере зачетной книжки)

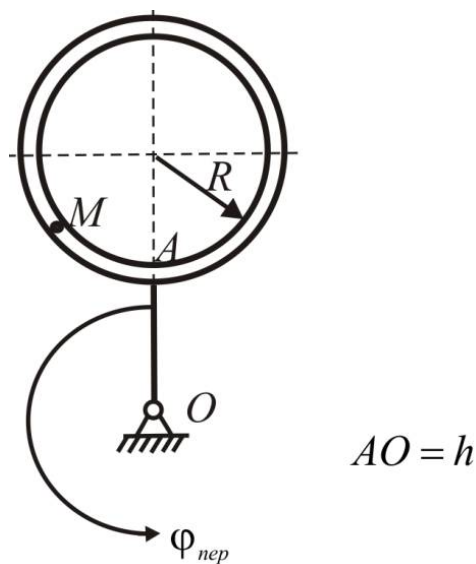


Рис. 0

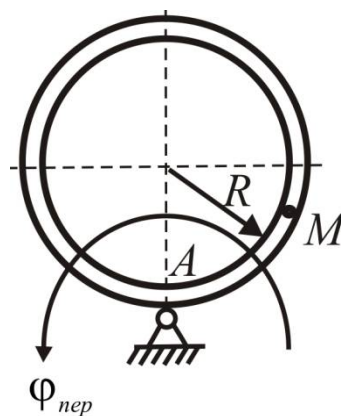


Рис. 1

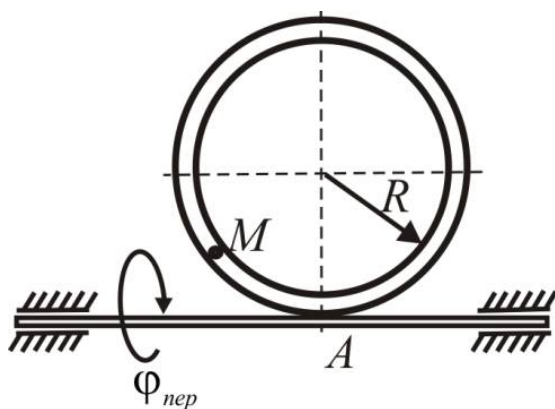


Рис. 2

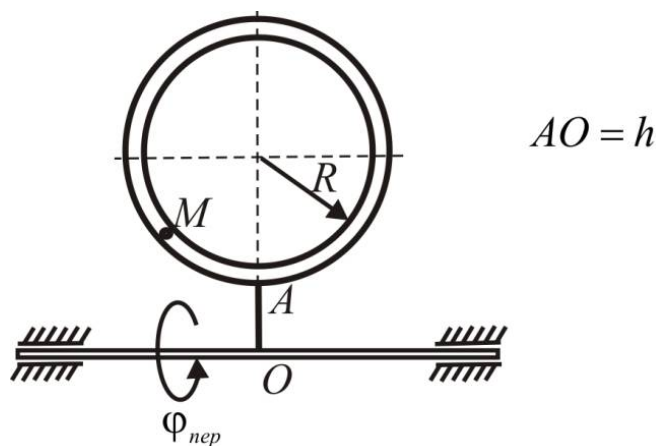
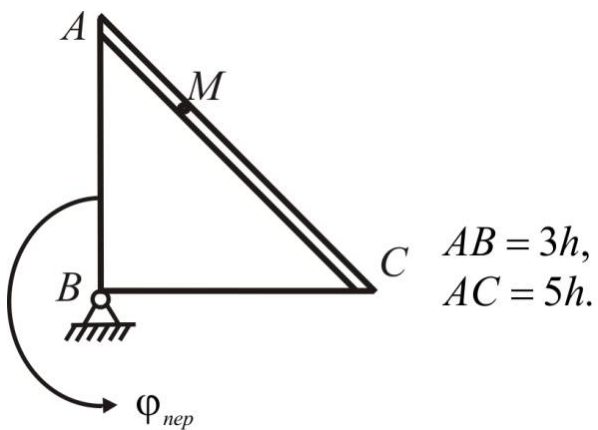
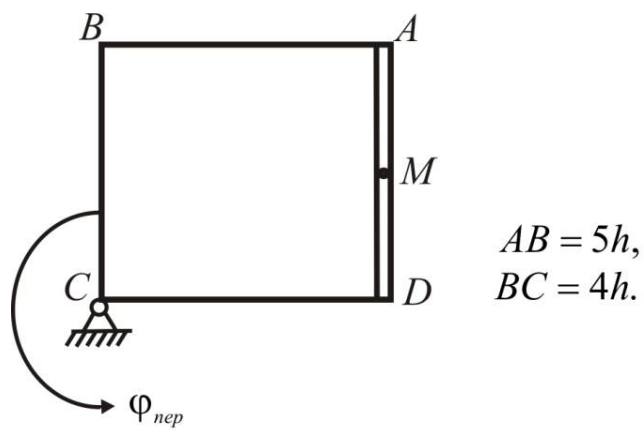


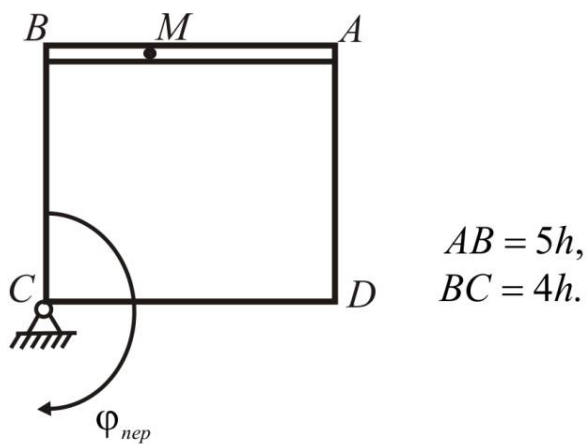
Рис. 3



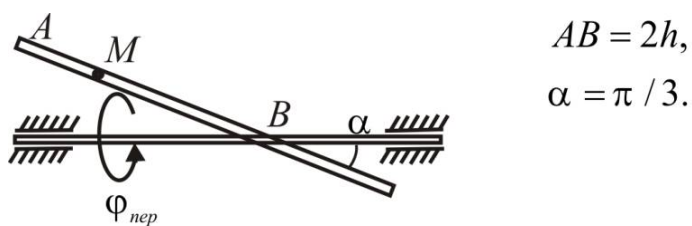
Puc. 4



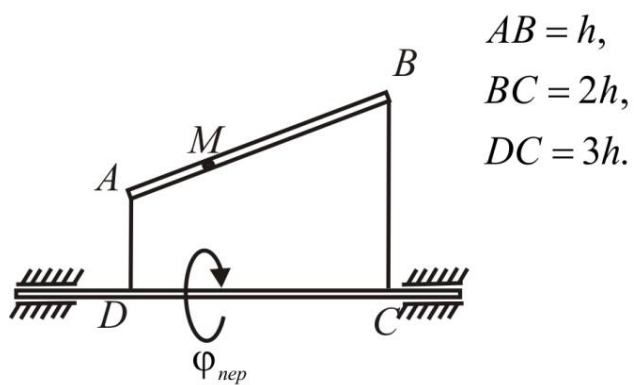
Puc. 5



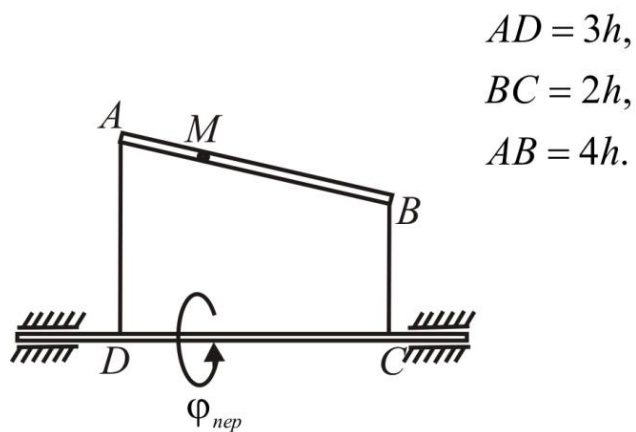
Puc. 6



Puc. 7



Puc. 8



Puc. 9

Таблица 8

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	$\varphi_{\text{неп}}(t)$, рад	h , см	$S(t)$, см	
			Рис. 4.0-4.3	Рис. 4.4-4.9
0	$4t(t-1)$	25	$\frac{\pi}{3} R t^2 (4-2t)$	$50t(3-t) - 64$
1	$3t^2 - 8t$	26	$\frac{\pi}{2} R t^2 (2-t)$	$40t^2 (3-t^2) - 32$
2	$6t^3 - 12t^2$	27	$\frac{\pi}{4} R t^3 (6t-1)$	$40(2t(t-1) + 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	28	$\frac{2\pi}{3} R t^2 (2t-t)$	$12(5t(2-t^2) - 1)$
4	$10t^2 - 5t^3$	29	$\frac{\pi}{6} R t (12t-1)$	$16(5t^2 (2-t) - 3)$
5	$2t(t-1)$	30	$\frac{\pi}{2} R t (1-4t)$	$40t^2 + t$
6	$t(5-4t)$	31	$\frac{\pi}{6} R t^3 (3-t)$	$10t(5t-2)$
7	$3t(5-t^2)$	32	$\frac{\pi}{4} R t^2 (1-2t)$	$40t^2 (3-2t^2)$
8	$t(2t^2 - 11)$	33	$\frac{\pi}{2} R t^2 (5t^2 - 2)$	$10t(2t-1) + 20$
9	$3t^2 (2-t)$	20	$\frac{\pi}{3} R t (6t-1)$	$20t(1-2t) + 50$

9. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ДИНАМИКА ТОЧКИ» (ЗАДАЧА Д1)

Тяжелая шайба массой m , имея в точке A начальную скорость v_0 , скользит по изогнутой оси и, сорвавшись с неё в точке C , находится некоторое время в свободном полете, а затем ударяется о преграду. На прямолинейном участке пути шайба разгоняется в течение $t = t_1$ переменной силой $\vec{F}$, направленной под углом γ к перемещению. На криволинейном участке оси, изогнутой по дуге окружности радиуса $r = 4$ м (геометрический центр в точке O), действует постоянная сила сопротивления (трения) $\vec{R}$. Участки оси сопрягаются в точке B без излома, вся траектория находится в вертикальной плоскости.

В каком месте шайба ударится о преграду? (b –?)

Найти давление шайбы на криволинейный участок оси в точке C (рис. 0, 1, 2, 6, 7) или в точке B (рис. 3, 4, 5, 8, 9).

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения движения точки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \end{cases}$$

где

m – масса точки;

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на декартовы оси координат;

$\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – проекции действующих на материальную точку сил на декартовы оси координат.

Теорема об изменении количества движения точки

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\vec{V}$, направленный так же, как вектор скорости, по касательной к траектории движения этой точки.

Импульсом силы за конечный интервал времени $[0, T]$ называется вектор

$$\vec{S} = \int_0^T \vec{F} \cdot dt,$$

совпадающий по направлению с вектором силы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме: изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно сумме импульсов сил, действующих на материальную точку за тот же промежуток времени:

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum_0^T \int \bar{F} \cdot dt.$$

При решении задач используют эту теорему в проекциях на ось, направленную вдоль прямой, по которой движется точка:

$$mV_x - mV_{0x} = \sum_0^T \int F_{kx} \cdot dt.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{mV^2}{2}$.

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 определяется выражением

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds,$$

где F_τ – проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории, направленной в сторону движения (или проекция силы $\vec{F}$ на направление скорости $\vec{V}$ точки); ds – элементарное перемещение точки приложения силы.

Если величина силы $\vec{F}$ постоянна ($F = \text{const}$), то, обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 , получим

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s_1 = F \cdot s_1 \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением касательной к траектории точки приложения силы и вектором силы $\vec{F}$.

Работа силы тяжести материальной точки

$$A = \pm P \cdot h,$$

где P , h – вес и вертикальное перемещение точки соответственно.

Если точка опускается, то $A(\bar{P}) > 0$, если точка поднимается, то $A(\bar{P}) < 0$. Если высоты начального и конечного положений равны (например, при движении по горизонтальной прямой или по замкнутому контуру), то $A(\bar{P}) = 0$.

Работа силы трения скольжения

$$A_{(M_0M_1)} = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{mp} ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N ds,$$

где f – коэффициент трения;

N – нормальная реакция поверхности;

$f \cdot N$ – модуль силы трения.

Если численно сила трения постоянна, то

$$A_{(M_0 M_1)} = -F_{mp} \cdot s,$$

где s – длина дуги кривой $M_0 M_1$, по которой перемещается точка.

Таким образом, работа силы трения скольжения всегда отрицательна.

Принцип Германа-Эйлера-Даламбера

Геометрическая сумма всех приложенных к материальной точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

$$\sum \bar{F}_k + \bar{\Phi} = 0,$$

где $\bar{\Phi} = -m \cdot \bar{a}$ – сила инерции материальной точки.

Пример 9.

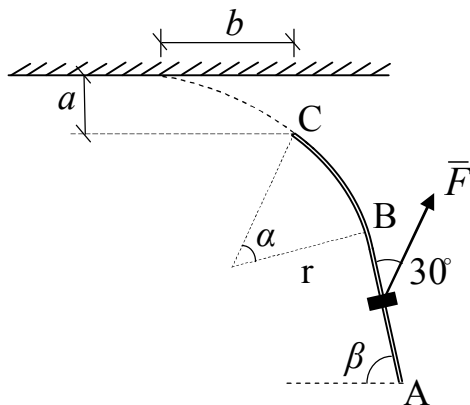


Рис. 9.1. Условие задачи

$$F = 4t^3 + \sin t \text{ Н},$$

$$t = 2 \text{ с},$$

$$m = 1,5 \text{ кг},$$

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$\beta = 75^\circ,$$

$$R = 3 \text{ Н},$$

$$a = 2 \text{ м},$$

$$v_0 = 25 \text{ м/с},$$

$$r = 8 \text{ м}.$$

Найти расстояние b и давление шайбы на ось в точке C .

Решение. Для того, чтобы определить b , надо знать скорость шайбы в точке C . Для этого необходимо сначала рассмотреть движение шайбы по прямолинейному участку пути AB , а затем по криволинейному BC .

а) Участок AB

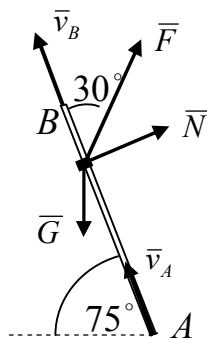


Рис.9.2. Участок AB

Изобразим действующие на шайбу силы. В проекции на ось AB запишем уравнение теоремы об изменении количества движения ($G = mg$)

$$mv_B - mv_A = \int_0^t (F \cos 30^\circ - mg \sin 75^\circ) dt.$$

Отсюда найдем скорость шайбы в точке B ($v_A = v_0$):

$$v_B = v_0 + \frac{\cos 30^\circ}{m} \int_0^t (4t^3 + \sin t) dt - g \sin 75^\circ \int_0^t dt = v_0 + \frac{\cos 30^\circ}{m} (t^4 - \cos t) \Big|_0^t - g \sin 75^\circ t \Big|_0^t = 25 + \frac{0,866}{1,5} (16 + 0,416 + 1) - 9,81 \cdot 0,966 \cdot 2 = 16,1 \text{ м/с},$$

б) Участок BC

Найдем работу сил, приложенных к шайбе, на участке пути BC. Сила тяжести совершает работу на перепаде высот между точками C и B. Так как точка перемещается вверх, то работа должна быть меньше нуля. Из чертежа ясно, что работа равна

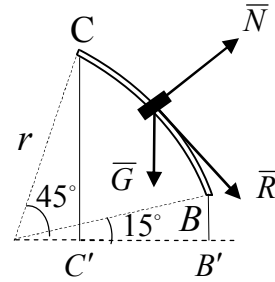


Рис. 9.3. Участок BC

$$A(\vec{G}) = -mg(CC' - BB') = -mgr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) = -mgr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ).$$

Сила трения направлена по касательной к траектории, длина пути (дуга BC) равна $r\alpha\pi/180$, где α – угол в градусах. Теорема об изменении кинетической энергии точки на участке BC примет вид

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = A(\vec{G}) + A(\vec{R}) = -mgr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) - R \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

Отсюда найдём

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_B^2 - 2gr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) - R \frac{r\alpha\pi}{90m} = \\ &= 16,1^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 8 \cdot (0,866 - 0,259) - 3 \frac{8 \cdot 45 \cdot \pi}{90 \cdot 1,5} = 138,77 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

$$v_C = 11,78 \text{ м/с.}$$

в) Участок свободного полёта

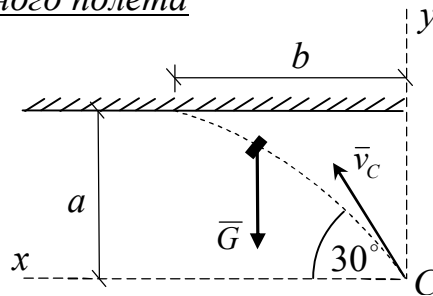


Рис. 9.4. Участок свободного полёта

Составим уравнение движения тела, брошенного под углом $\beta - \alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью v_C . Начало координат поместим в точке C. Время t будем отсчитывать от нуля. На шайбу действует только одна сила – вертикальная сила тяжести $G = mg$:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -mg, \text{ или } \ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды при начальных условиях

$$t = 0: x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = v_C \cos 30^\circ, \quad \dot{y} = v_C \sin 30^\circ.$$

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C_1 = \text{const};$$

$$v_x(0) = \dot{x}(0) = v_C \cos 30^\circ \Rightarrow C_1 = v_C \cos 30^\circ;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_C \cos 30^\circ; \quad dx = v_C \cos 30^\circ dt; \quad \int dx = v_C \cos 30^\circ \int dt;$$

$$x = v_C \cos 30^\circ t + C_2; \quad x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Окончательно $x = v_C \cos 30^\circ t$.

$$\ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad dv_y = -g dt, \quad \int dv_y = -g \int dt, \quad v_y = -gt + C_3;$$

$$v_y(0) = \dot{y}(0) = v_C \sin 30^\circ \Rightarrow C_3 = v_C \sin 30^\circ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_C \sin 30^\circ; \quad dy = -g dt + v_C \sin 30^\circ dt; \quad \int dy = -g \int dt + v_C \sin 30^\circ \int dt;$$

$$y = -gt^2 / 2 + v_C \sin 30^\circ t + C_4; \quad y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0.$$

Окончательно $y = -gt^2 / 2 + v_C \sin 30^\circ t$.

В некоторый момент t_* шайба ударится о преграду на высоте $y = a$.

Найдем t_* , решив квадратное уравнение $a = v_C \sin 30^\circ t_* - gt_*^2 / 2$:

$$t_{*1,2} = \frac{0,5v_C \pm \sqrt{0,25v_C^2 - 2ga}}{g} = \frac{11,78 \cdot 0,5 \pm \sqrt{34,69 - 2 \cdot 9,81 \cdot 1,5}}{9,81} = \frac{5,89 \pm 2,29}{9,81}.$$

$$t_{*1} = 0,367 \text{ с}, \quad t_{*2} = 0,834 \text{ с}.$$

Из двух решений берем меньшее – момент первого пересечения траектории с поверхностью преграды. При $t_* = 0,367$ имеем

$$b = x(t_*) = v_C \cos 30^\circ \cdot 0,367 = 11,78 \cdot 0,866 \cdot 0,367 = 3,74 \text{ м}.$$

Найдем давление шайбы на ось в точке C , применив принцип Даламбера. Изобразим действующие на шайбу силы и добавим силу инерции в проекциях на касательную и главную нормаль (рис. 9.5).

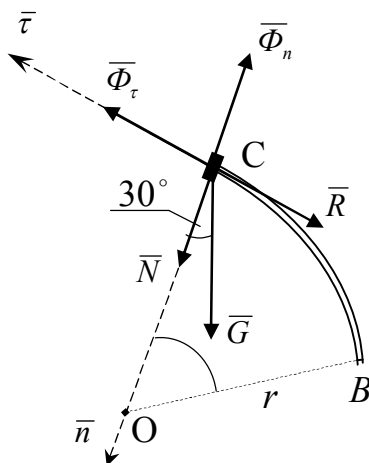


Рис. 9.5. Силы, действующие на шайбу в точке C

Ответ: $b = 4,74 \text{ м}, N = 13,28 \text{ Н}.$

Спроецируем силы на ось главной нормали к траектории движения $\bar{n}$, направленную от C к O . Согласно принципу Даламбера, сумма проекций должна быть равна нулю:

$$N + G \cos 30^\circ - \Phi_n = 0;$$

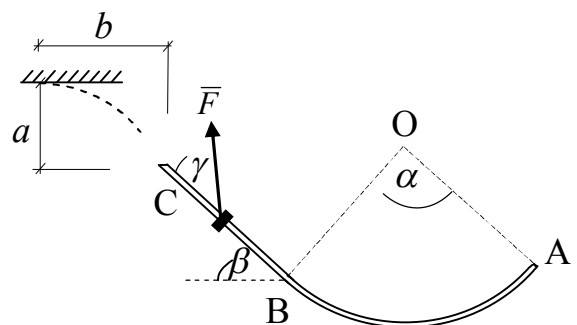
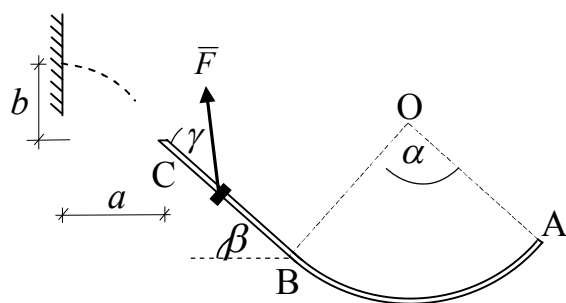
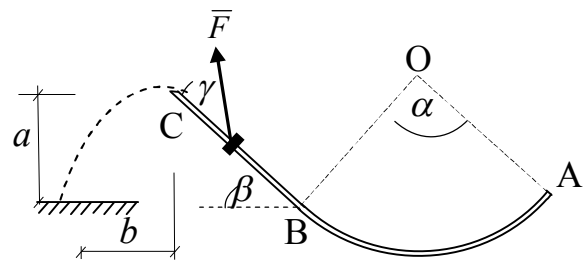
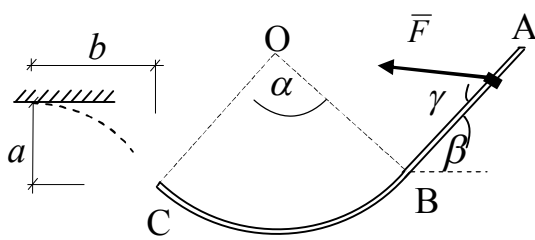
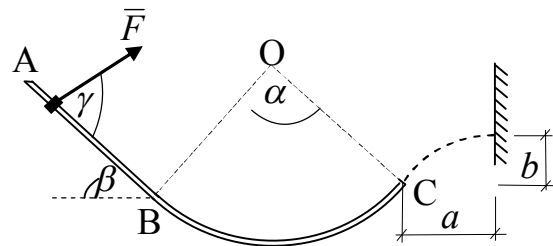
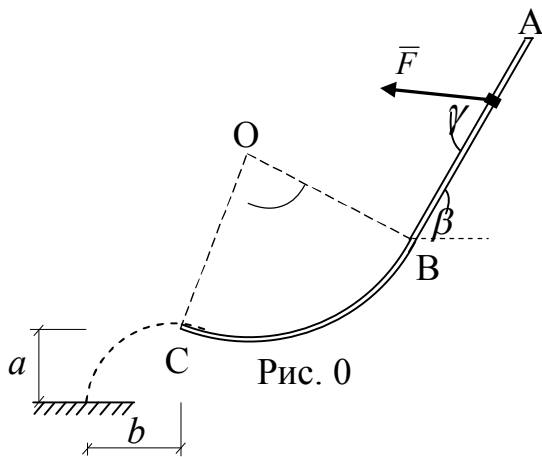
$$N = \Phi_n - G \cos 30^\circ.$$

$$\Phi_n = \frac{mv_C^2}{r} = \frac{1,5 \cdot 138,77}{8} = 26,02 \text{ НН}$$

$$N = 26,02 - 1,5 \cdot 9,81 \cdot 0,866 = 13,28 \text{ НН}$$

N – это реакция опоры, следовательно, сила давления шайбы на ось равна 13,28 Н и направлена вверх.

Рисунки
(последняя цифра в номере зачетной книжки)



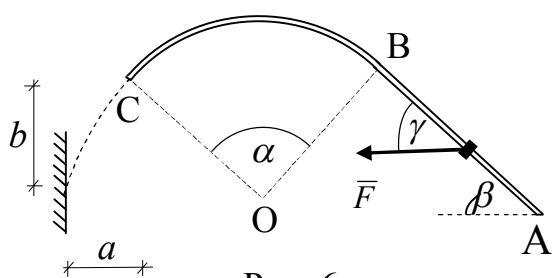


Рис. 6

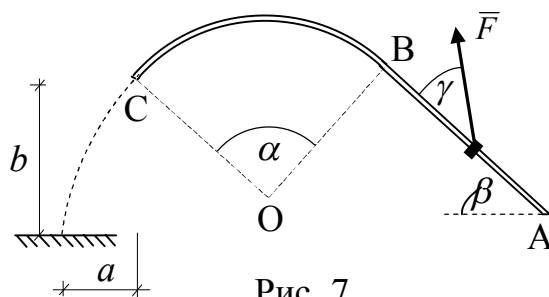


Рис. 7

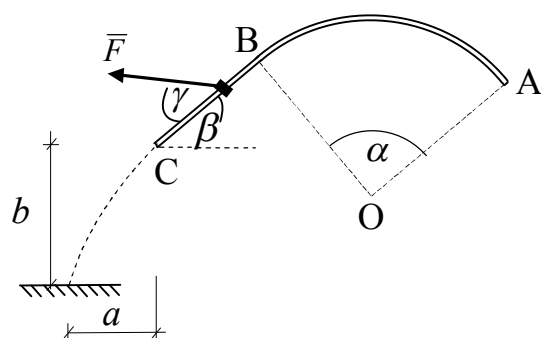


Рис. 8

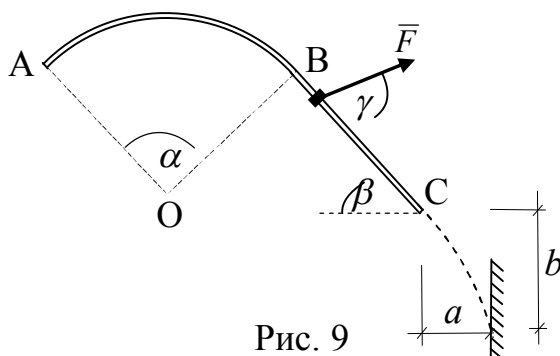


Рис. 9

Таблица 9
(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	F	R	v_0	α	β	γ	m	t_1	a
	H	H	$м/с$	$град$	$град$	$град$	$кг$	$с$	$м$
0	$3 \cdot t^2 + t$	5	15	60	45	60	0,5	4	5
1	$0,2 \exp(t/4) + 4$	9	10	75	60	75	0,2	3	2
2	$21 + 3t^2$	13	12	45	30	45	0,9	2	7
3	$0,4 \exp(t/2) + 4$	14	16	30	15	30	0,4	5	6
4	$3 + 6t^3$	10	14	90	75	15	0,3	3	9
5	$0,4 \exp(t/5) + 4t$	7	11	60	30	60	0,6	4	8
6	$3 + 0,4 \cdot t^3$	11	17	45	15	30	0,8	3	4
7	$\pi t / 3 + 0,6 \cdot t^3$	8	20	75	45	45	0,5	5	10
8	$2\pi t + 0,3 \cdot t^2$	6	14	60	45	15	0,4	3	6
9	$0,4 \exp(t/2) + t$	15	13	90	60	75	0,3	6	3

10. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ **«ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ»** **(ЗАДАЧА Д2)**

Пользуясь принципом возможных перемещений, для составной конструкции из двух тел, соединённых между собой с помощью шарнира С, определить реакции опор. Схемы конструкций показаны на рис. 0–9, а необходимые для решения данные приведены в табл. 10.

Краткие теоретические сведения

Принцип возможных перемещений: если в некотором положении механической системы с двусторонними, идеальными связями приложенные к ней силы уравниваются, то на любом возможном перемещении системы из этого положения сумма работ задаваемых сил будет равна нулю:

$$\sum F_k \cdot \delta S_k \cdot \cos(\bar{F}_k, \delta \bar{S}_k) = 0.$$

Возможными, или виртуальными, перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Принцип возможных перемещений позволяет определять составляющие любой реакции связи независимо от других реакций. Это особенно удобно в том случае, когда требуется определить реакции не всех опор, а одной или нескольких.

Принцип возможных перемещений применим к механизму, на рисунках расчетно-графического задания Д2 изображены жесткие геометрически неизменяемые конструкции. Рассмотрим правила преобразования неизменяемой конструкции в механизм.

1. Если связь, наложенная на конструкцию, имеет одну составляющую реакции, то связь отбрасывают и заменяют её соответствующей реакцией.

2. Если наложенная на конструкцию связь имеет две реакции (например, неподвижная цилиндрическая опора), то для определения горизонтальной составляющей $\bar{X}_A$ связь заменяют горизонтальным ползуном, к нему прикладывают горизонтальную реакцию $\bar{X}_A$, допуская при этом возможное перемещение ползуна δS_A только по горизонтали, изображают возможное перемещение остальных частей конструкции и составляют уравнение работ.

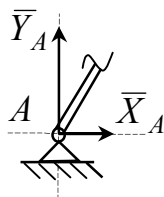


Рис. 10.1

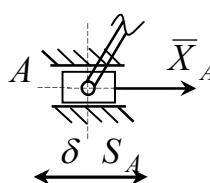


Рис. 10.2

Для определения вертикальной составляющей $\bar{Y}_A$ связь заменяют вертикальным ползуном, к нему прикладывают вертикальную реакцию $\bar{Y}_A$, допуская при этом возможное перемещение ползуна δS_A только по вертикали, изображают возможное перемещение остальных частей конструкции и составляют уравнение работ.

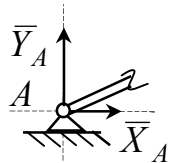


Рис. 10.3

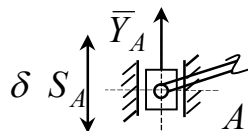


Рис. 10.4

3. Если наложенная на конструкцию связь имеет три составляющие реакции (например, жёсткая заделка, защемление), то для определения реактивного момента жёсткой заделки M_A связь заменяют неподвижным цилиндрическим шарниром, а к элементу конструкции прикладывают реактивный момент жёсткой заделки M_A . При таком закреплении допускается только поворот балки AB . Возможным перемещением балки будет её бесконечно малый поворот $\delta\varphi$ вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку A .



Рис. 10.5

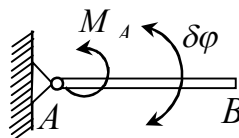


Рис. 10.6

Для определения горизонтальной составляющей $\bar{X}_A$ защемления связь заменяют горизонтальным ползуном, элемент конструкции прикрепляют к ползуну жестко, чтобы исключить поворот элемент конструкции. К ползуну прикладывают горизонтальную реакцию $\bar{X}_A$. При таком закреплении балка AB движется поступательно. Поэтому все точки элемента имеют одинаковые горизонтальные возможные перемещения δS .



Рис. 10.7

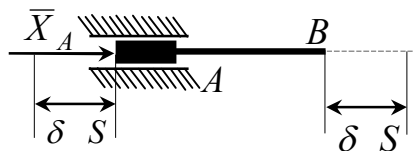


Рис. 10.8

Для определения вертикальной составляющей $\bar{Y}_A$ связь заменяют вертикальным ползуном, элемент конструкции прикрепляют к ползуну жестко, чтобы исключить поворот элемент конструкции. К ползуну прикладывают горизонтальную реакцию $\bar{Y}_A$. При таком закреплении балка AB движется поступательно. Поэтому все точки элемента имеют одинаковые вертикальные возможные перемещения δS , после чего дают возможное перемещение остальным частям конструкции и составляют уравнение работ.

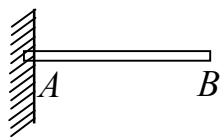


Рис. 10.9



Рис. 10.10

Для определения реакций опор с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Выбираем реакцию опоры, которую хотим определить. Изображаем рисунок своего варианта с учетом выше указанного преобразования жесткой конструкции в механизм.

2. Указываем все задаваемые силы.

3. Даём механизму возможное перемещение, соблюдая законы кинематики.

4. Все возможные перемещения выражаем через одно, соответствующее перемещению определяемой реакции, и выносим это перемещение за скобки.

5. Приравниваем нулю выражение в скобках и определяем из него требуемую составляющую реакции связи.

Наиболее сложным элементом принципа возможных перемещений для составной конструкции является выбор возможных перемещений для механизма, полученного из тел составной конструкции. Рассмотрим различные случаи движения тел:

- если тело движется поступательно, то все точки тела имеют одинаковые возможные перемещения δS ;
- если тело совершает вращательное движение, то возможные перемещения δS точек распределяются подобно распределению скоростей точек тела;
- если тело движется плоскопараллельно, то определяется положение мгновенного центра поворота.

Приведем некоторые возможные случаи нахождения мгновенного центра поворота тел.

1. Если в одной точке тела известно возможное перемещение δS_A , а в другой точке известна линия, по которой направлено возможное перемещение δS_B , то мгновенный центр поворота находится на пересечении перпендикуляров, проведенных к возможным перемещениям этих точек.

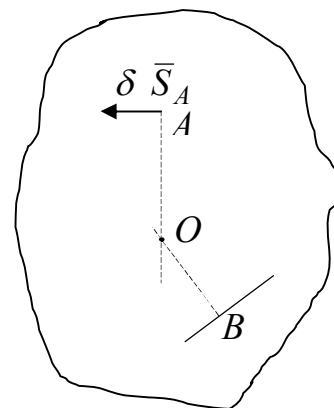


Рис. 10.11

2. Если в двух точках тела известны возможные перемещения δS_A и δS_B , то мгновенный центр поворота находится на пересечении перпендикуляра, проведенного к направлениям возможных перемещений этих точек, и линии, которая соединяет конечные точки векторов возможных перемещений.

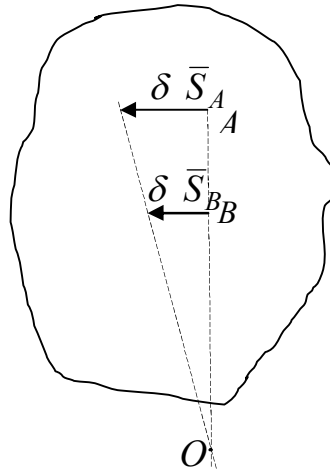


Рис. 10.12

3. Если в двух точках тела известны возможные перемещения δS_A и δS_B , то мгновенный центр поворота находится на пересечении перпендикуляра, проведенного к направлениям возможных перемещений этих точек, и линии, которая соединяет конечные точки возможных перемещений.

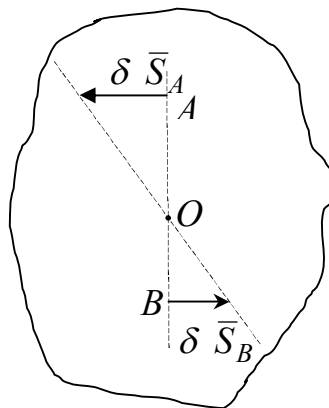


Рис. 10.13

4. Если в двух точках тела известны возможные перемещения $\delta S_A, \delta S_B$ и $\delta S_A = \delta S_B$, то мгновенный центр поворота находится в ∞ , а тело совершает поступательное движение, и возможные перемещения всех точек тела одинаковы.

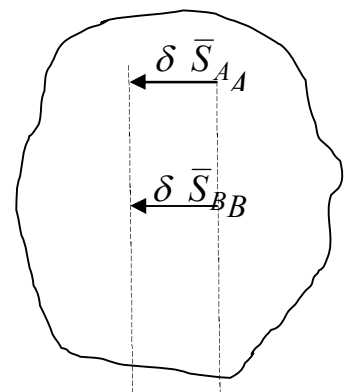


Рис. 10.14

5. Если в двух точках тела известны возможные перемещения δS_A , δS_B и $\delta S_A \parallel \delta S_B$, то мгновенный центр поворота находится в бесконечности, а тело совершает поступательное движение, и возможные перемещения всех точек тела одинаковы.

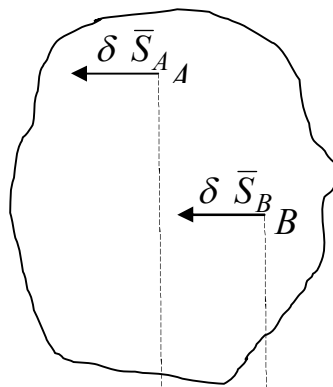


Рис. 10.15

Пример 12.

Дано: $a = 3$ м, $F = 40$ кН, $P = 25$ кН, $q = 12$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

(рис.10.16)

Найти: реакции опор.

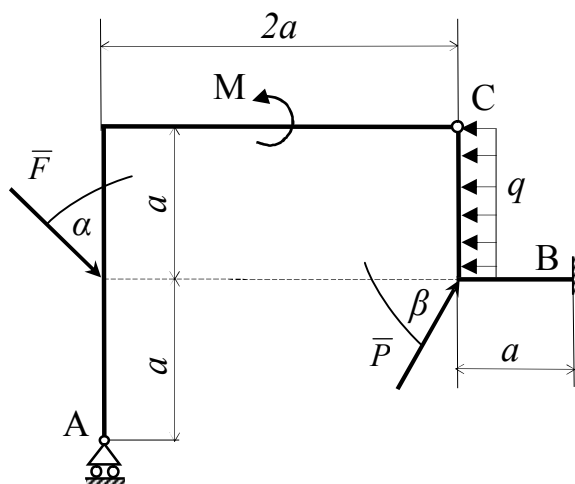


Рис. 10.16 Условие задачи

Решение. Конструкция, состоящая из двух тел AC и BC , имеет в точке A шарнирно-подвижную опору, а в точке B – жёсткое защемление. Следовательно, реакция в точке A имеет только одну вертикальную составляющую $\bar{R}_A$, а реакция заделки – три: горизонтальную составляющую $\bar{X}_B$, вертикальную $\bar{Y}_B$ и момент M_B .

Найдём реакцию подвижной опоры A , для чего мысленно отбросим эту связь, заменив её действием реакцией $\bar{R}_A$ (рис. 10.17). Система получает одну степень свободы – поворот части AC вокруг точки C , при этом часть BC остаётся неподвижной.

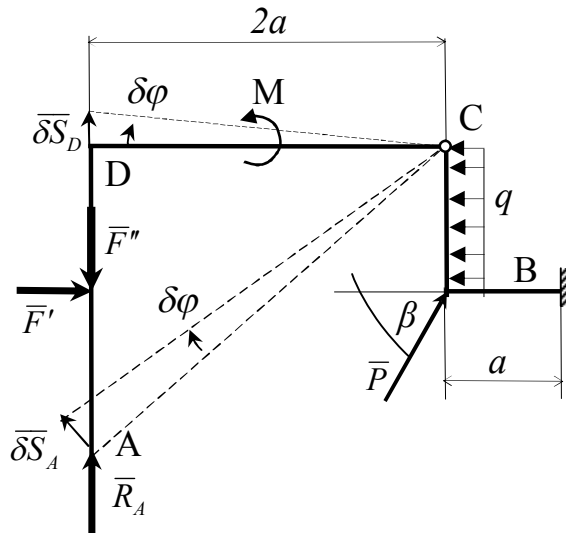


Рис. 10.17. К определению реакции $\bar{R}_A$

Разложим силу $\bar{F}$ на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$F' = F \sin \alpha = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ кН}; \quad F'' = F \cos \alpha = 40\sqrt{3} / 2 = 34,64 \text{ кН}.$$

Рама BC неподвижна, рама AC может вращаться вокруг оси неподвижного шарнира B. Сообщим системе возможное перемещение (поворот) $\delta\varphi > 0$. Составим уравнение элементарных работ, выражающее принцип возможных перемещений, учитывая, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно центра вращения на угол поворота и положительна, если направления момента и угла поворота совпадают:

$$R_A 2a \cdot \delta\varphi - F'a \cdot \delta\varphi - F''2a \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0, \\ \text{или } (R_A 2a - F'a - F''2a - M) \cdot \delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi > 0$, то равенство выполняется лишь в том случае, когда выражение в скобках равно нулю. Отсюда

$$R_A = F' / 2 + F'' + M / 2a = 53,81 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальной составляющей заделки $\bar{X}_B$ представим опору B в виде ползуна в горизонтальных направляющих и приложим реакцию $\bar{X}_B$ (рис. 10.18).

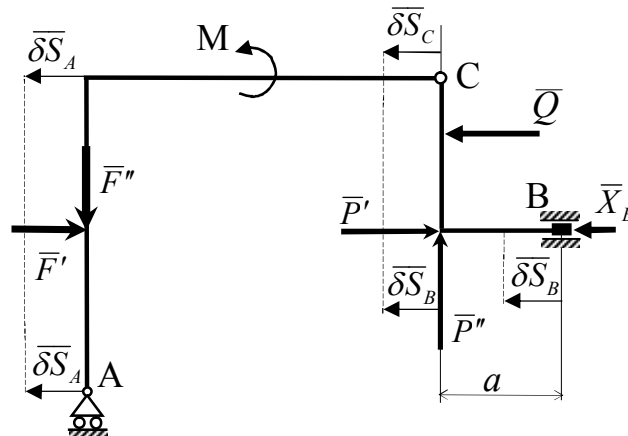


Рис. 10.18. К определению составляющей $\bar{X}_B$ реакции в точке B

Равномерно распределённую нагрузку q заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot a = 36 \text{ кН}$, а $\bar{P}$, как и $\bar{P}$, разложим на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$P' = P \cos \beta = 17,68 \text{ кН}; \quad P'' = P \sin \beta = 17,68 \text{ кН}.$$

Так как ползун В движется по направляющим и поворот рамы ВС запрещён, то перемещение шарнира С горизонтально, подвижный шарнир А перемещается горизонтально и мгновенный центр поворота рамы АС находится в бесконечности, то есть конструкция перемещается поступательно.

Сообщим всей конструкции направленное влево возможное поступательное перемещение $\delta s = \delta s_A = \delta s_B = \delta s_C > 0$. Составим уравнение возможных работ, учитывая, что работа силы при поступательном движении тела равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на величину перемещения. Знак работы определяется по знаку проекции силы на направление движения. Если сила перпендикулярна направлению смещения, то её работа на этом перемещении равна нулю. Момент при поступательном движении работы не совершает.

$$X_B \cdot \delta s + Q \cdot \delta s - P' \cdot \delta s - F \cdot \delta s = 0,$$

$$\text{или } (X_B + Q - P' - F) \cdot \delta s = 0.$$

Приравнявая нулю выражение в скобках, получим

$$X_B = P' + F' - Q = 1,68 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной составляющей $\bar{Y}_B$ реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки В, заменив жёсткую заделку скользящей с вертикальными направляющими, и приложим реакцию $\bar{Y}_B$ (рис. 10.19).

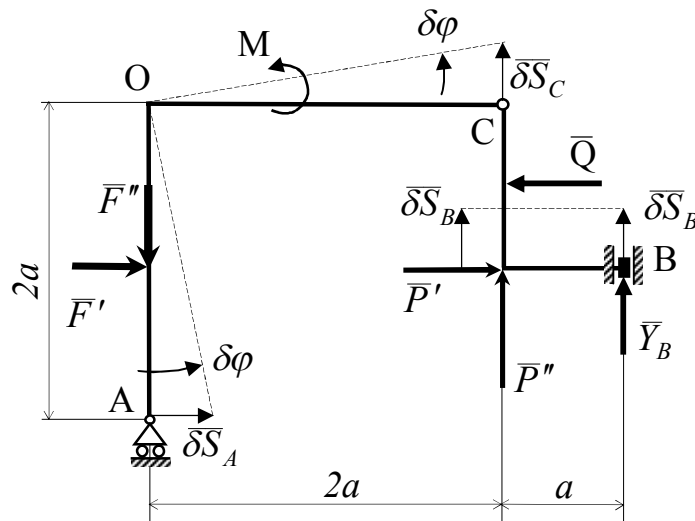


Рис. 10.19. К определению составляющей $\bar{Y}_B$ реакции в точке В

Сообщим части ВС возможное перемещение $\delta s = \delta s_B = \delta s_C$, направленное вертикально вверх. Тогда другая часть конструкции АС будет совершать плоское движение. Так как перемещение $\delta s_C = \delta s$ в точке С направлено вертикально вверх, а перемещение δs_A точки А – горизонтально (связь опоры А,

имеющей реакцию $\bar{R}_A$, препятствует её вертикальному перемещению), то мгновенный центр вращения (точка O) тела AC находится на пересечении перпендикуляров к направлениям перемещений в точках A и C . При этом элементарный угол поворота AC вокруг точки O выражается через δs формулой $\delta\varphi = \delta s_C / 2a = \delta s / 2a$.

Составим уравнение возможных работ для определения $\bar{Y}_B$:

$$\begin{aligned} Y_B \cdot \delta s + P'' \cdot \delta s + M \cdot \delta\varphi + F'a \cdot \delta\varphi &= 0; \\ Y_B \cdot \delta s + P'' \cdot \delta s + (M / 2a) \cdot \delta s + (F' / 2) \cdot \delta s &= 0; \\ Y_B &= -P'' - M / 2a - F' / 2 = -36,85 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак «минус» показывает, что вертикальная составляющая заделки направлена в сторону, противоположную направлению, показанному на рис. 10.19.

Для определения момента заделки M_B заменим заделку шарнирно-неподвижной опорой и приложим к конструкции момент M_B (рис. 10.20).

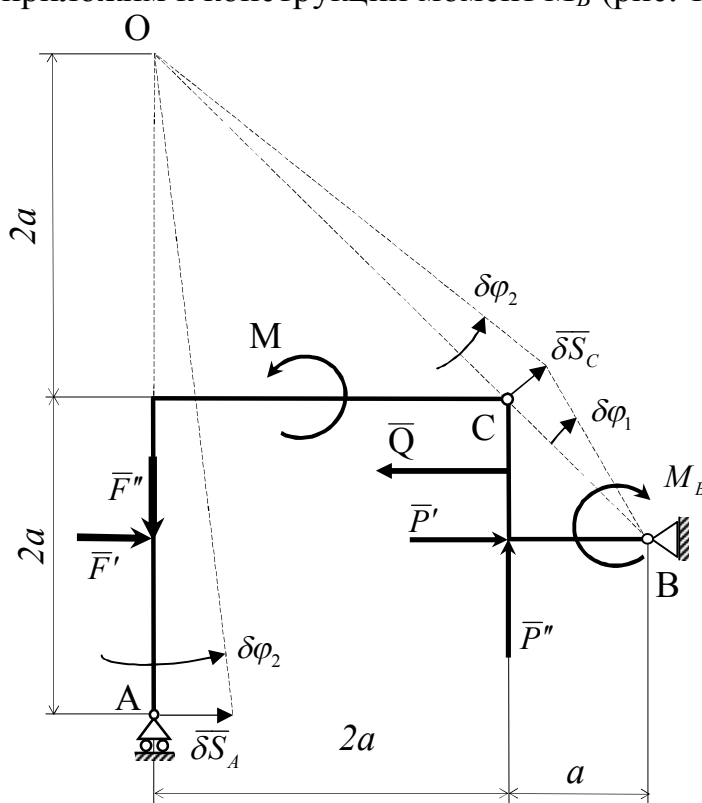


Рис. 10.20. К определению реактивного момента M_B

Сообщим системе возможное перемещение, повернув BC вокруг шарнира B на возможный угол поворота $\delta\varphi_1$. Часть AC конструкции в этом случае будет совершать плоское движение вокруг мгновенного центра вращения O , положение которого определяется точкой пересечения перпендикуляров к направлениям смещений в точках A и C . При этом

$$\begin{aligned} \delta s_C &= BC \cdot \delta\varphi_1 = OC \cdot \delta\varphi_2 \rightarrow \delta\varphi_2 = (BC / OC) \cdot \delta\varphi_1; \\ BC &= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; \quad OC = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2a\sqrt{2} \rightarrow \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 / 2. \end{aligned}$$

Составим уравнение возможных работ для определения момента M_B

$$M_B \cdot \delta\varphi_1 + P''a \cdot \delta\varphi_1 - Q(a/2) \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_2 + F'3a \cdot \delta\varphi_2 = 0;$$

$$M_B \cdot \delta\varphi_1 + P''a \cdot \delta\varphi_1 - (Qa/2) \cdot \delta\varphi_1 + (M/2) \cdot \delta\varphi_1 + (F'3a/2) \cdot \delta\varphi_1 = 0;$$

$$M_B = Qa/2 - P''a - M/2 - F'3a/2 = -116,54 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ответ: $R_A = 53,81 \text{ кН}$; $X_B = 1,68 \text{ кН}$; $Y_B = -36,85 \text{ кН}$; $M_B = -116,54 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Кратко рассмотрим другие варианты возможных перемещений конструкции. При определении горизонтальной и вертикальной составляющих реакции шарнирно-неподвижной опоры её заменяют шарнирно-подвижной опорой (рис. 10.21,а–в). На рис. 10.21,б вся конструкция совершает мгновенно-вращательное движение вокруг центра вращения точки О, совпадающей с точкой В; на рис. 10.21,в балка ВС вращается вокруг точки В, а угольник АС совершает мгновенно-поступательное движение, так как направления перемещений в точках А и С параллельны.

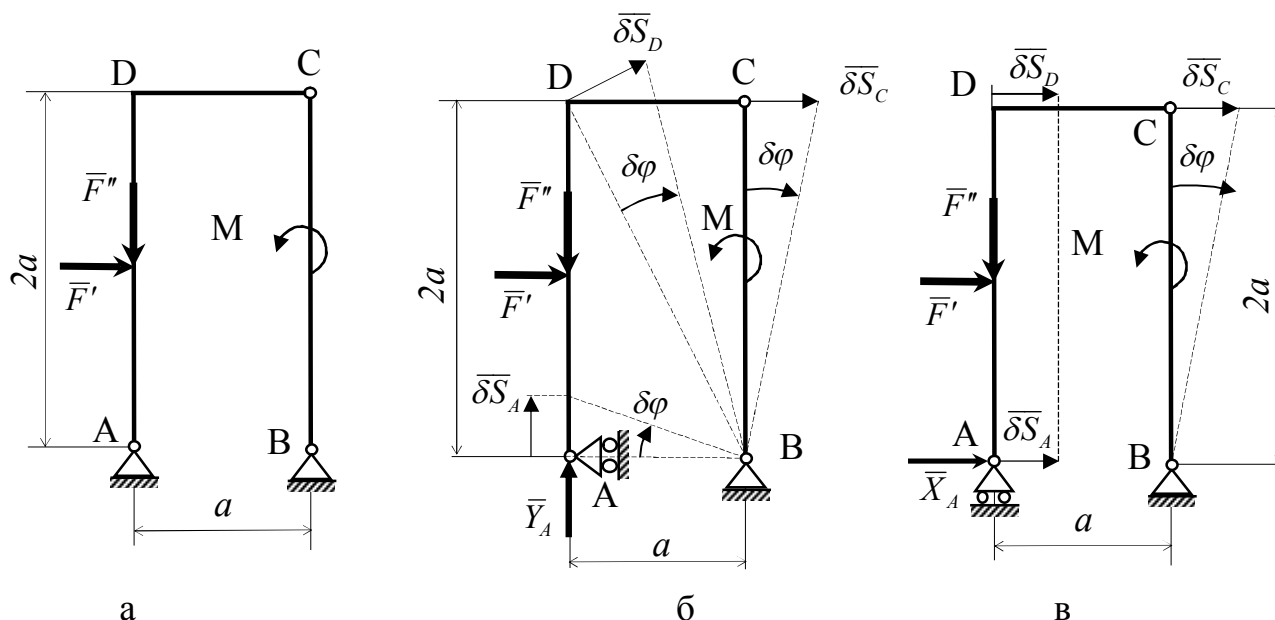


Рис. 10.21

Рисунки
(последняя цифра в номере зачетной книжки)

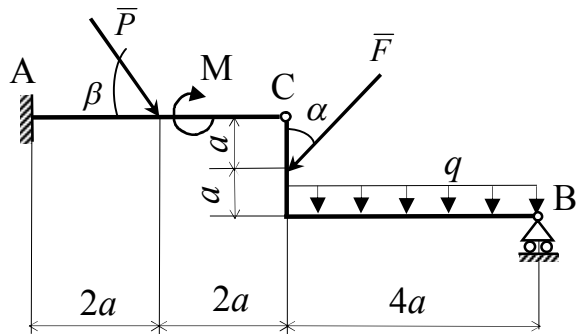


Рис. 0

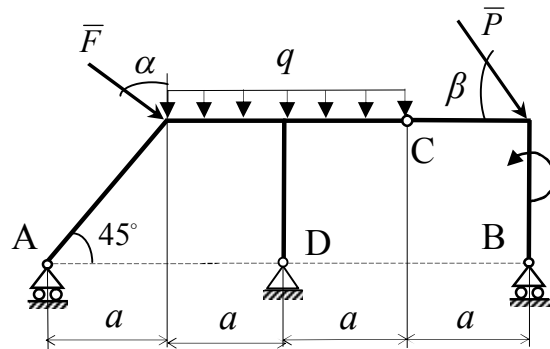


Рис. 1

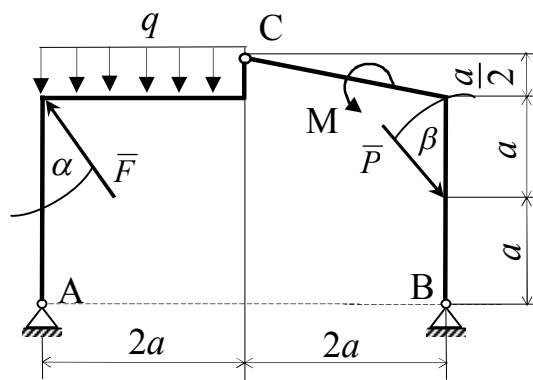


Рис. 2

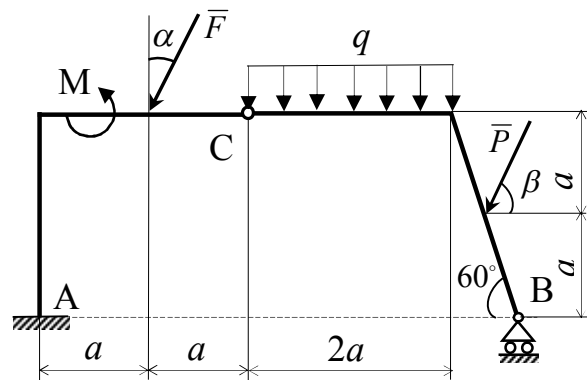


Рис. 3

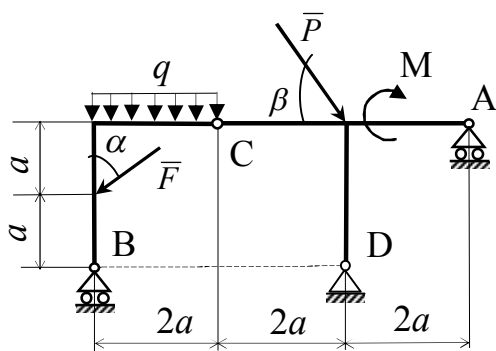


Рис. 4

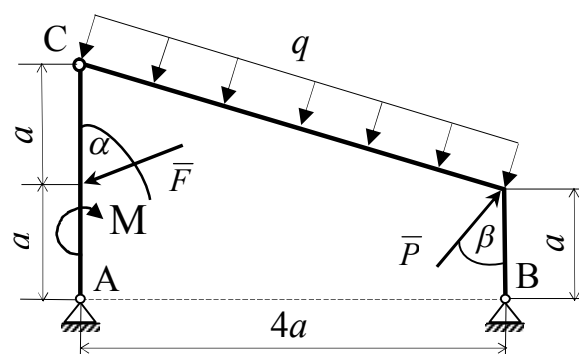


Рис. 5

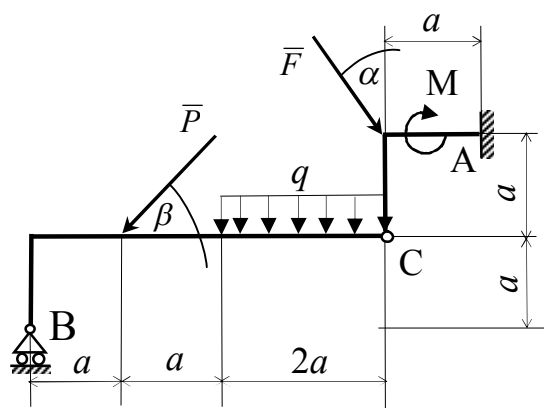


Рис. 6

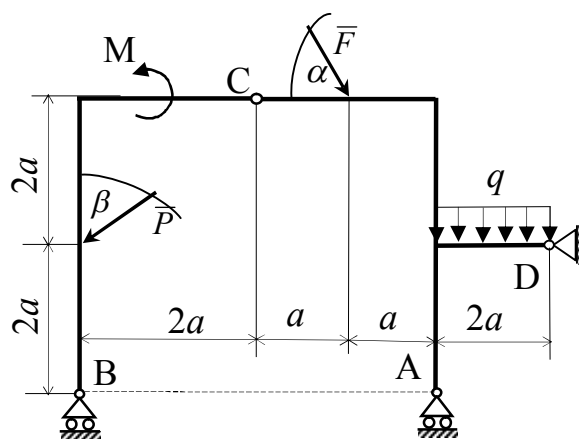


Рис. 7

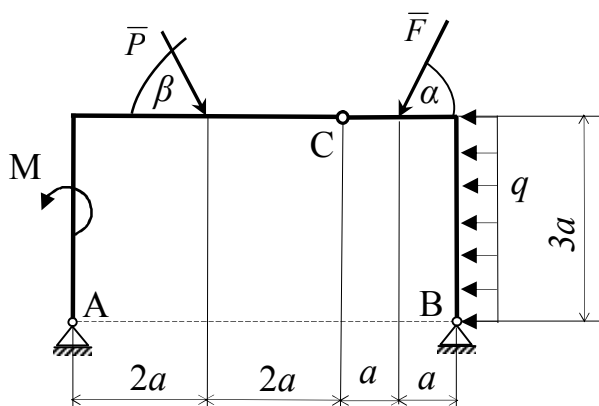


Рис. 8

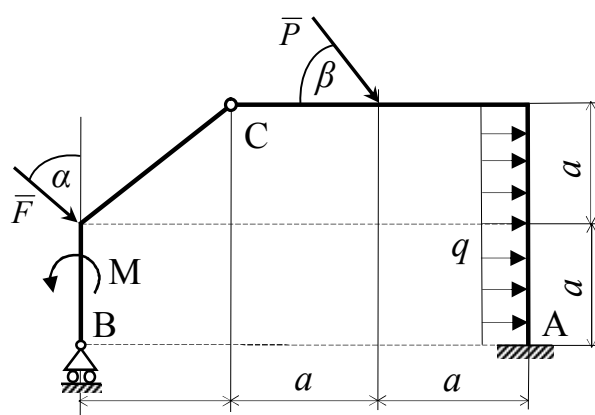


Рис. 9

Таблица 10

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия	a m	F $кН$	P $кН$	M $кН·м$	q $кН/м$	α $град$	β $град$
0	5	45	30	35	4	30	45
1	1	5	10	65	2	60	30
2	3	25	15	40	3	45	30
3	8	65	40	100	12	60	60
4	4	30	25	35	10	45	45
5	2	8	20	20	1	30	60
6	6	50	45	75	8	30	30
7	10	80	50	80	18	60	45
8	9	30	70	45	16	45	60
9	7	40	65	50	6	60	30

**11. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ
«ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
СИСТЕМЫ»
(ЗАДАЧА ДЗ)**

Механическая система, состоящая из твердых тел, соединённых нерастяжимыми нитями, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывая трение скольжения груза о плоскость и сопротивление качению цилиндров, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, определить скорость и ускорение тела, совершившего перемещение s (указано на рисунке), в конце пройденного им пути с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы. Считать, что все тела катятся без скольжения. Для ступенчатых блоков и катков принять большой радиус за R_k , малый радиус за r_k , а радиусы инерции – равными i_k . Простые блоки и катки считать сплошными однородными цилиндрами с радиусами R_k .

Необходимые для решения данные приведены на рисунках к заданию и в табл. 11. Таблица 11 содержит избыточные данные, поэтому следует выбирать из неё величины, соответствующие своему варианту рисунка.

Краткие теоретические сведения

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина T , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum m_k \cdot V_k^2 / 2,$$

где m_k и V_k – соответственно масса и скорость k -той точки системы.

Кинетическая энергия является характеристикой как поступательного, так и вращательного движений системы. Это скалярная неотрицательная величина, поэтому она не зависит от направления движения точек системы и не характеризует изменений этих направлений. Если система состоит из нескольких тел, то её кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел.

Формулы для вычисления кинетической энергии тела при различных случаях его движения

Поступательное движение

$$T = m \cdot V_C^2 / 2,$$

где m – масса тела;

V_C – скорость центра масс.

Вращательное движение (тело совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси Oz)

$$T = J_Z \cdot \omega^2 / 2,$$

где J_Z – момент инерции относительно оси вращения;

ω – угловая скорость вращения.

Плоскопараллельное (плоское) движение

$$T = m \cdot V_C^2 / 2 + J_{ZC} \cdot \omega^2 / 2.$$

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс тела.

Осевой момент инерции

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_Z = \sum m_k \cdot h_k^2,$$

где h_k – расстояние от точки массой m_k до оси Oz .

Из определения следует, что момент инерции тела (системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю. Осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции тела. Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется линейная скалярная величина i_z , определяемая равенством

$$J_Z = m \cdot i_z^2,$$

где m – масса тела.

Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz до той точки, в которой необходимо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной точки был равен моменту инерции всего тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел

Тонкий однородный стержень длиной l и массой m .

Момент инерции относительно оси Az , перпендикулярной стержню проходящей через одно из его конечных сечений A :

$$J_{Az} = m \cdot l^2 / 3.$$

Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой m .

Момент инерции относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр C :

$$J_{Cz} = m \cdot R^2.$$

Такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массой m и радиусом R относительно её оси.

Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой m .

Момент инерции круглой пластины относительно оси Cz , перпендикулярной плоскости пластины и проходящей через его центр C :

$$J_{Cz} = m \cdot R^2 / 2.$$

Работа силы

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 вычисляется как предел суммы элементарных работ:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0M_1} F_{\tau} ds,$$

где F_{τ} – проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории, направленную в сторону перемещения (или проекция $\vec{F}$ на направление скорости $\vec{V}$ точки приложения силы);

ds – элементарное перемещение точки приложения силы.

Если величина силы $\vec{F}$ постоянна ($\vec{F} = \text{const}$), то, обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 , получим

$$A_{(M_0M_1)} = F_{\tau} \cdot s_1.$$

В частности, такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($\vec{F} = \text{const}$), а тело, к которому приложена сила, движется прямолинейно. В этом случае ($F_{\tau} = F \cos \alpha = \text{const}$) и

$$A_{(M_0M_1)} = F \cdot s_1 \cos \alpha,$$

где α – угол между вектором силы $\vec{F}$ и направлением перемещения точки приложения силы.

Если угол острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ работа равна $A = F \cdot s$. Если угол тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^\circ$ работа равна $A = -F \cdot s$. Если угол $\alpha = 90^\circ$, т. е. сила направлена перпендикулярно перемещению точки, то работа силы равна нулю. Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая $\vec{F}_{\tau}$ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая $\vec{F}_{\tau}$ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Работа сил тяжести, действующих на механическую систему:

$$A = \pm P \cdot h_C,$$

где P – вес системы;

h_C – вертикальное перемещение центра масс.

Работа сил, приложенных к вращающемуся телу:

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z d\varphi,$$

а в случае постоянного момента

$$A = M_Z \cdot \varphi_1,$$

где M_Z – вращающий момент;

$d\varphi$ – элементарный угол поворота тела; φ_1 – конечный угол поворота.

Работа силы трения скольжения

$$A_{(M_0 M_1)} = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{mp} ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N ds,$$

где f – коэффициент трения, а N – нормальная реакция поверхности.

Если численно сила трения постоянна, то

$$A_{(M_0 M_1)} = -F_{mp} \cdot s = -f \cdot N \cdot s,$$

где s – длина дуги кривой $M_0 M_1$, по которой перемещается тело.

Работа сопротивления качению

Элементарная работа сопротивления качению равна

$$dA_{кач} = -k \cdot N d\varphi = -\frac{k}{R} \cdot N ds_C,$$

где k – коэффициент трения качения;

R – радиус колеса;

ds_C – элементарное перемещение центра C колеса.

Если $N = const$, то полная работа сил сопротивления качению

$$A_{кач} = -k \cdot N \cdot \varphi_1 = -\frac{k}{R} \cdot N \cdot s_C.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Изменение кинетической энергии системы материальных точек при её перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы на этом перемещении:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

где T_0 , T_1 – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно;

A_k^e , A_k^i – работы внешних и внутренних сил системы соответственно.

В случае неизменяемой системы материальных точек (абсолютно твердые тела, нерастяжимые нити) сумма работ внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек принимает вид

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e.$$

При решении задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии рекомендуется следующая последовательность действий:

1. Изобразить систему в начальном и конечном (если положение отдельных тел системы не влияет на распределение скоростей, то только в заданном) положении. Приложить к телам системы все внешние и внутренние силы (в случае системы, состоящей из твёрдых тел, соединённых идеальными связями, только внешние силы, так как в этом случае $\sum A_k^i = 0$).

2. Подсчитать кинетическую энергию системы в начальном и конечном положениях, выразив её через скорость точки (тела), движение которого требуется определить (или задано).
3. Подсчитать сумму внешних и внутренних сил искомым (или заданным) перемещением точек системы, выразив их через перемещения той точки (того тела), движение которой ищется (или задано).
4. Подставить полученные значения кинетической энергии и работ в формулу теоремы и найти искомую величину.

Пример 13.

Дано: механическая система из абсолютно твёрдых тел с нерастяжимыми нитями (рис. 11.1) состоит из сплошного цилиндрического катка 1 радиуса r_1 (коэффициент трения качения о плоскость равен k), ступенчатого шкива 2 с радиусами R_2 , r_2 и радиусом инерции i и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2, которые параллельны соответствующим наклонным плоскостям. Механизм из состояния покоя под действием сил тяжести пришел в движение. Какую скорость развил груз 3, пройдя путь s ? Найти ускорение этого груза.

Исходные данные: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 10$ кг, $R_2 = 0,2$ м; $R_2 / r_2 = 2$; $r_1 = r_2$; $i / r_2 = 1$; $f = 0,1$; $k / r_2 = 0,05$; $s = 2$ м, $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

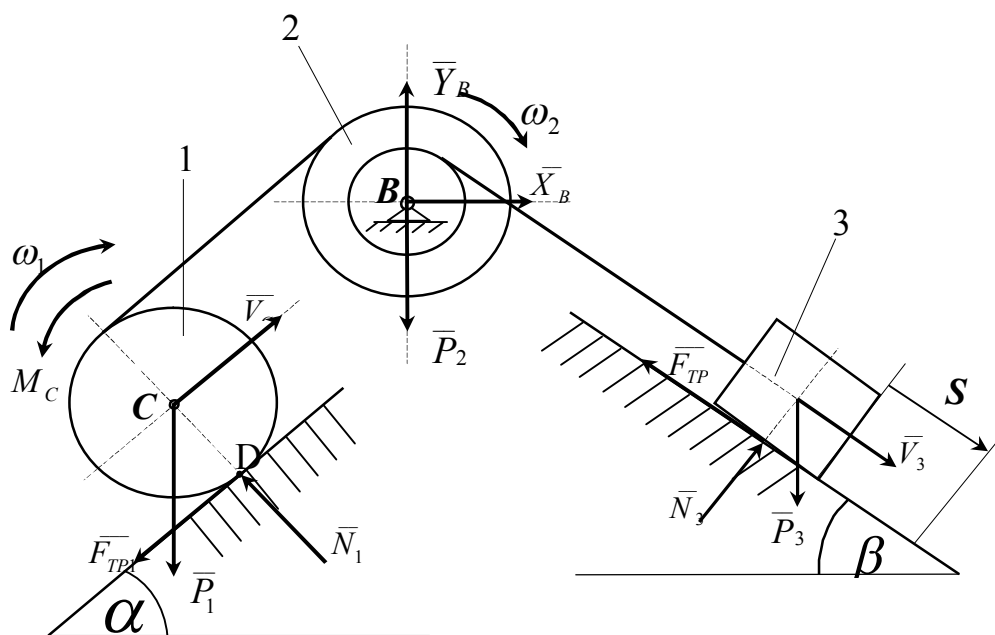


Рис. 11.1

Решение. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$; реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$; силы трения $\bar{F}_{тр1}, \bar{F}_{тр2}$ и момент сопротивления качению M_C .

Для определения V_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Определяем T, T_0 . Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_{C1}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{C1} \cdot \omega_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2.$$

Все входящие в выражения скорости следует выразить через искомую V_3 :

$$\omega_2 = \frac{V_3}{r_2};$$

$$V_1 = \omega_2 \cdot R_2 = V_3 \cdot \frac{R_2}{r_2},$$

где V_1 – скорость левой нити.

Приняв во внимание, что точка D – мгновенный центр скоростей катка 1, получим

$$V_{C1} = \frac{1}{2} V_1 = V_3 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2};$$

$$\omega_1 = \frac{V_1}{2 \cdot r_1} = V_3 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2}.$$

Моменты инерции имеют следующие значения:

$$J_{C1} = m_1 \cdot r_1^2 / 2; \quad J_Z = m_2 \cdot i^2.$$

Таким образом, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{R_2}{2 \cdot r_2} \right)^2 \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \right)^2 \cdot V_3^2 = \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 \cdot V_3^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot i^2 \cdot \left(\frac{V_3}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{i}{r_2} \right)^2 \cdot V_3^2.$$

Суммарная кинетическая энергия механической системы будет равна

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{i}{r_2} \right)^2 + m_3 \right) \cdot V_3^2.$$

Теперь найдем сумму работ действующих на систему внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда тело 3 пройдет путь S . Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину S ,

для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями:

$$S_{C1} = \frac{R_2}{2 \cdot r_2} \cdot S; \varphi_1 = \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot S.$$

$$A(\overline{P_1}) = -P_1 \cdot S_1 \cdot \sin \alpha = -m_1 \cdot g \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2} \cdot S \cdot \sin 30^\circ;$$

$$A(M_C) = -M_C \cdot \varphi_1 = -k \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot S = -m_1 \cdot g \cdot \frac{k \cdot R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot S \cdot \cos 30^\circ;$$

$$A(\overline{P_3}) = -P_3 \cdot S \cdot \sin \beta = -m_3 \cdot g \cdot S \cdot \sin 60^\circ;$$

$$A(\overline{F}) = -F \cdot S = -f \cdot N_3 \cdot S = -f \cdot m_3 \cdot g \cdot S \cdot \cos 60^\circ.$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка D, где приложены силы $\overline{N_1}$ и $\overline{F_{TP}}$, – мгновенный центр скоростей, точка приложения сил $\overline{P_2}$, $\overline{X_B}$, $\overline{Y_B}$ неподвижна, а реакция $\overline{N_3}$ перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = g \cdot S \cdot \left(-m_1 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2} \cdot \sin 30^\circ - m_1 \cdot \frac{k \cdot R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot \cos 30^\circ + m_3 \cdot \sin 60^\circ - f \cdot m_3 \cdot \cos 60^\circ \right).$$

Приравнявая суммарную кинетическую энергию механической системы и сумму работ действующих на систему внешних сил, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot V_3^2 \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{i}{r_2} \right)^2 + m_3 \right) = \\ = g \cdot S \cdot \left(-m_1 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2} \cdot \sin 30^\circ - m_1 \cdot \frac{k \cdot R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot \cos 30^\circ + m_3 \cdot \sin 60^\circ - f \cdot m_3 \cdot \cos 60^\circ \right); \\ \frac{1}{2} V_3^2 \left(\frac{3}{8} 2 \cdot 2^2 + 4 + 10 \right) = g S \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 2 \cdot 0,886 + 10 \cdot 0,866 - 0,1 \cdot 10 \cdot 0,5 \right); \\ \frac{1}{2} \cdot V_3^2 \cdot 14,19 = g \cdot S \cdot 7,09; V_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 7,09}{14,19}} = 4,43 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Продифференцируем предпоследнее выражение

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot V_3 \cdot \dot{V}_3 \cdot 14,19 = g \cdot \dot{S} \cdot 7,09.$$

Учитывая, что $\dot{V}_3 = a_3$; $\dot{S} = V_3$, после сокращения окончательно получаем

$$a_3 = \frac{g \cdot 7,07}{14,19} = 4,90 \text{ м/с}^2.$$

Рисунки
(последняя цифра в номере зачетной книжки)

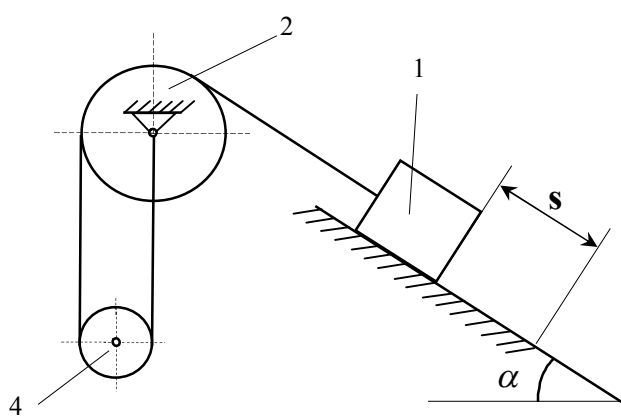


Рис. 0

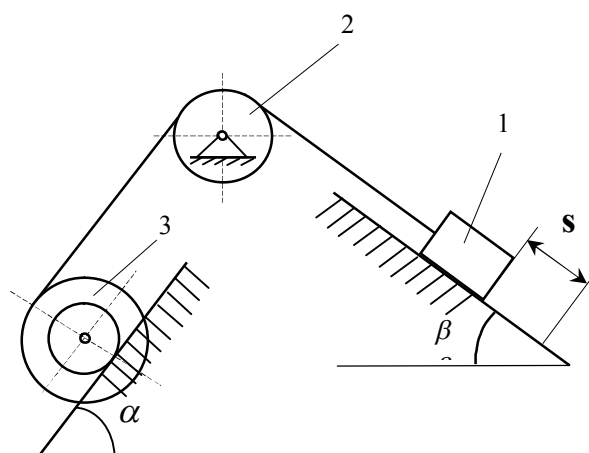


Рис. 1

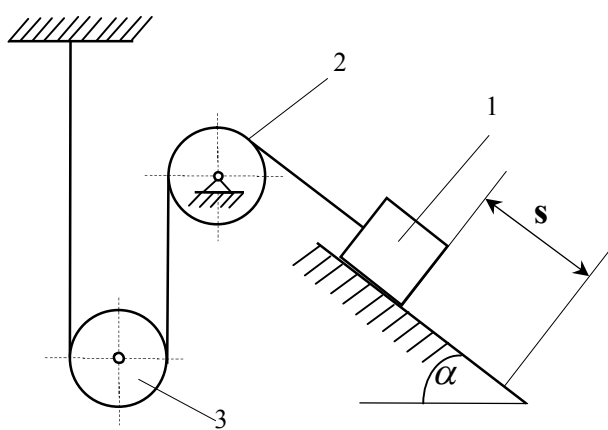


Рис. 2

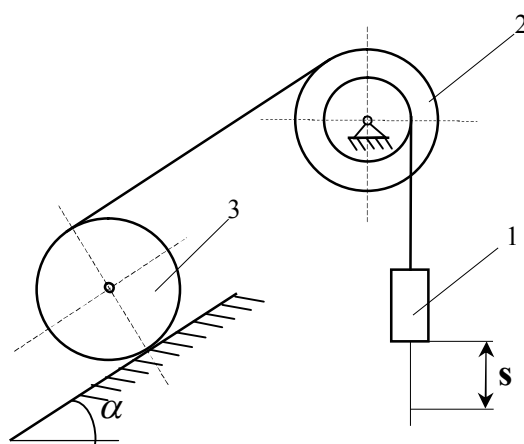


Рис. 3

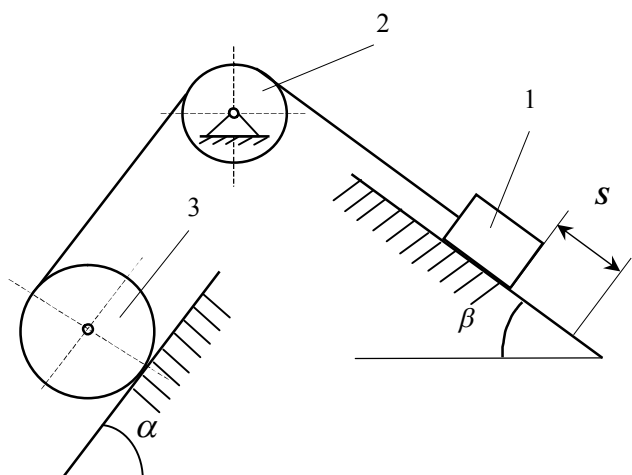


Рис. 4

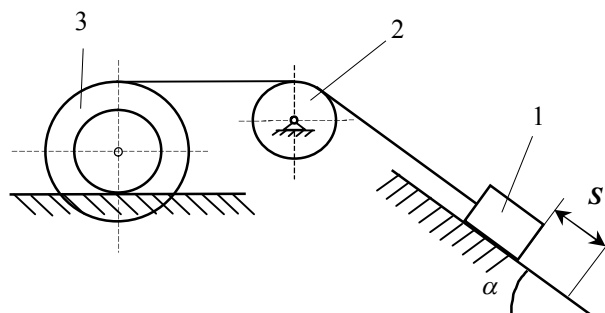


Рис. 5

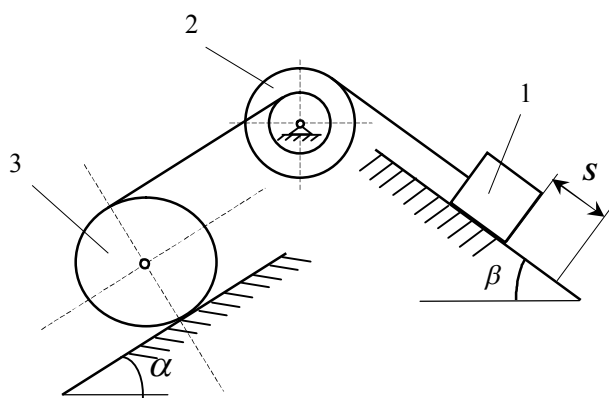


Рис. 6

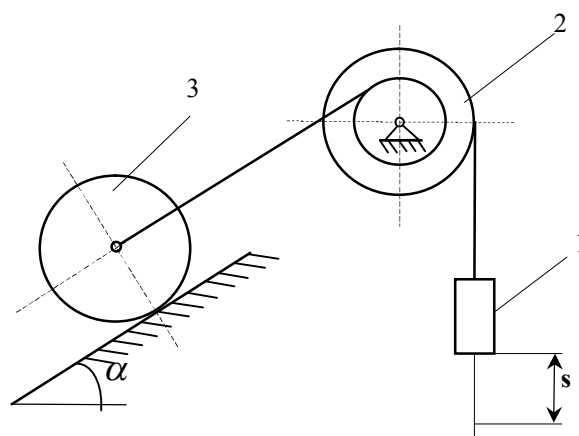


Рис. 7

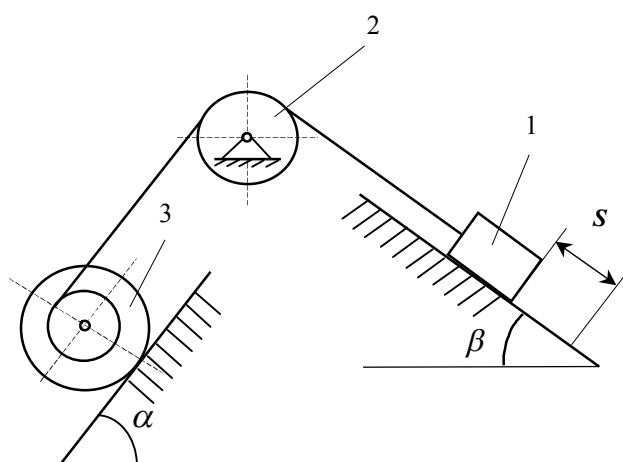


Рис. 8

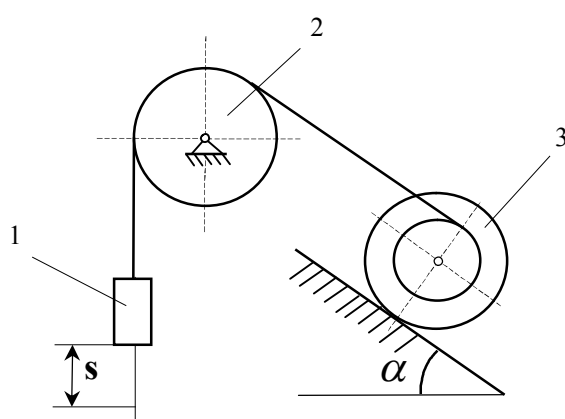


Рис. 9

Таблица 11

(предпоследняя цифра в номере зачетной книжки)

Номер условия.	m_1	m_2	m_3	m_4	α	β	f	R_2	$\frac{R_2}{r_2}$	R_3	$\frac{R_3}{r_3}$	i_2	i_3	k	S
	кг				град			м		м		м	м	м	м
0	18	6	3	20	15	65	0,08	0,8	4	0,5	2,5	1,0	1,1	0,005	1,0
1	12	9	4	15	45	60	0,09	0,48	1,5	0,4	2	1,0	1,0	0,005	1,1
2	10	7	6	19	80	45	0,05	0,6	1,2	0,55	1,1	1,0	1,2	0,006	1,2
3	11	8	2	18	65	35	0,1	0,44	1,1	0,42	2,4	1,1	1,3	0,006	1,3
4	17	4	3	23	55	30	0,08	0,8	2	0,6	3	1,1	1,4	0,007	1,4
5	25	6	5	33	55	60	0,07	0,6	2	0,45	1,5	1,1	1,1	0,008	1,5
6	14	5	6	21	75	55	0,08	0,66	1,1	0,63	3	1,2	1,2	0,009	1,6
7	15	3	2	17	45	15	0,1	0,56	1,4	0,48	2,4	1,2	1,0	0,01	1,7
8	16	4	3	18	50	35	0,07	0,36	1,5	0,3	1,5	1,2	1,3	0,005	1,8
9	17	5	5	24	65	45	0,06	0,3	1,5	0,25	2,5	1,4	1,4	0,005	1,9

12. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ» (ЗАДАЧА Д4)

Механическая система, состоящая из твердых тел, соединённых нерастяжимыми нитями, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывая трение скольжения груза о плоскость и сопротивление качению цилиндров, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, определить ускорение тела, совершившего перемещение s (указано на рисунке), в конце пройденного им пути с помощью общего уравнения динамики. Считать, что все тела катятся без скольжения. Для ступенчатых блоков и катков принять большой радиус за R_k , малый радиус за r_k , а радиусы инерции – равными i_k . Простые блоки и катки считать сплошными однородными цилиндрами с радиусами R_k .

Необходимые для решения данные приведены на рисунках к заданию Д3 и в табл. 11. Таблица 11 содержит избыточные данные, поэтому следует выбирать из неё величины, соответствующие своему варианту рисунка.

Краткие теоретические сведения

Общее уравнение динамики: при движении механической системы с идеальными и двусторонними связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi = 0,$$

где $\sum \delta A_k^a$ и $\sum \delta A_k^\Phi$ – суммы элементарных работ активных сил и сил инерции соответственно.

Связи механической системы называются идеальными, если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы будет равна нулю. Связи механической системы называются двусторонними, или удерживающими, если они препятствуют движению системы в двух взаимно противоположных направлениях. При решении задания возможные перемещения задаются такими, как будто все связи двусторонние.

Вычисление работ сил инерции на возможных перемещениях точек твёрдого тела производится по следующим формулам:

а) *при поступательном движении*

$$\delta A = \bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r},$$

где $\bar{\Phi}$ – равнодействующая сил инерции ($\bar{\Phi} = -m \cdot \bar{a}$; $\bar{a}$ – ускорение любой точки твёрдого тела, движущегося поступательно);

$\delta \bar{r}$ – возможное перемещение любой точки твёрдого тела;

б) *при вращении вокруг неподвижной оси*

$$\delta A = M_Z^\Phi \cdot \delta \varphi,$$

где M_Z^Φ – главный момент сил инерции относительно оси вращения Z ($M_Z^\Phi = -J_Z \cdot \varepsilon$); $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение твердого тела;

б) при плоскопараллельном движении тела

$$\delta A = \overline{\Phi}_C \cdot \delta \bar{r}_C + M_{ZC}^\Phi \cdot \delta \varphi,$$

где $\overline{\Phi}_C$ – главный вектор сил инерции ($\overline{\Phi}_C = -m \cdot \bar{a}_C$; $\bar{a}_C$ – ускорение центра масс твердого тела);

M_{ZC}^Φ – главный момент сил инерции относительно оси Z , проходящей через центр масс C твердого тела перпендикулярно к плоскости движения ($M_{Zc}^\Phi = -J_{Zc} \varepsilon$).

$\delta \bar{r}_C$ – возможное перемещение центра масс C твердого тела;

$\delta \varphi$ – возможное угловое перемещение твердого тела.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики материальных точек в случаях, когда в задаваемые и искомые величины входят: инерционные характеристики (массы и моменты инерции), ускорения точек системы (линейные и угловые), активные силы и моменты, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

План решения задач с помощью общего уравнения динамики:

1) изобразить на чертеже активные силы и реакции неидеальных связей (например, силы трения, моменты сил сопротивления качению), превратив тем самым все связи системы в идеальные;

2) определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы;

3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через это перемещение;

4) вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы, и составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю;

5) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо провести интегрирование дифференциального уравнения движения.

Пример 14.

Дано: механическая система из абсолютно твёрдых тел с нерастяжимыми нитями (рис. 12.1) состоит из сплошного цилиндрического катка 1 радиуса r_1 (коэффициент трения качения о плоскость равен k), ступенчатого шкива 2 с радиусами R_2 , r_2 и радиусом инерции i и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2, которые параллельны соответствующим наклонным плоскостям. Механизм из состояния покоя под действием сил тяжести пришел

в движение. Определить величину получаемого при этом ускорения груза с помощью общего уравнения динамики.

Исходные данные: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 4 \text{ кг}$, $m_3 = 10 \text{ кг}$, $R_2 = 0,2 \text{ м}$; $\frac{R_2}{r_2} = 2$;
 $r_1 = r_2$; $\frac{i}{r_2} = 1$; $f = 0,1$; $\frac{k}{r_2} = 0,05$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$.

Решение. Изобразим действующие на систему активные силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$; силы трения $\bar{F}_{TP1}, \bar{F}_{TP}$ и момент сопротивления качению M_C . Задавшись направлением ускорения $\bar{a}_3$ (по наклонной плоскости вниз), покажем на рисунке силы инерции $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_3$ и моменты сил инерции $\bar{M}_1^\Phi$ и $\bar{M}_2^\Phi$.

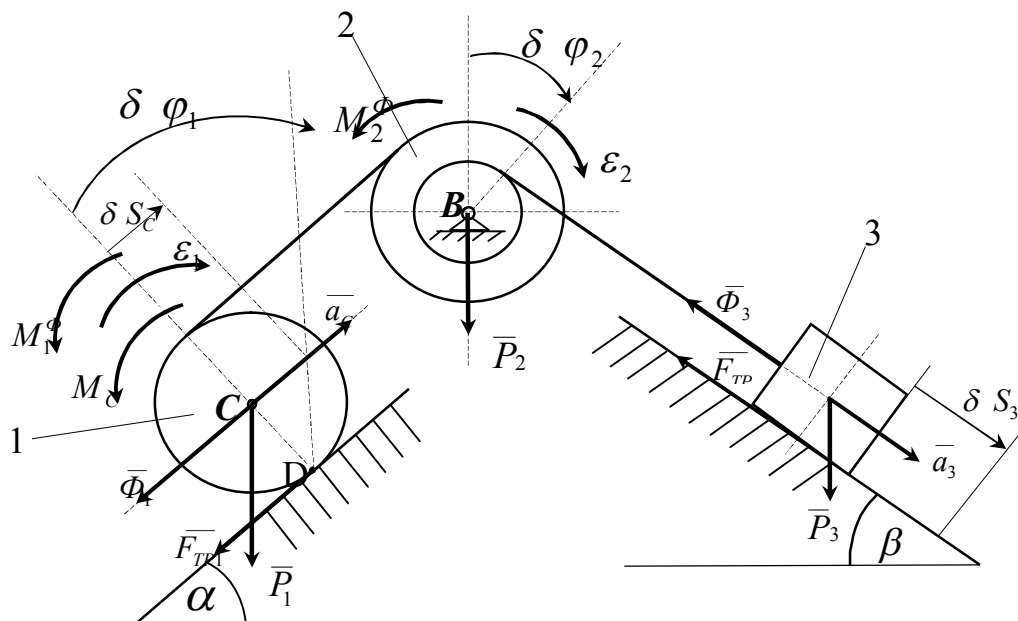


Рис. 12.1

При этом по модулю инерциальные величины равны

$$\Phi_1 = m_1 \cdot a_{C1}; \Phi_3 = m_3 \cdot a_3; M_1^\Phi = J_{C1} \cdot \epsilon_1; M_2^\Phi = J_2 \cdot \epsilon_2.$$

Все входящие сюда ускорения следует выразить через искомое a_3 . Зависимость между ускорениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями (см. решение задания с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы, пример 11).

$$a_{C1} = a_3 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2}; \epsilon_1 = a_3 \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2}; \epsilon_2 = \frac{a_3}{r_2}.$$

Сообщая системе возможное перемещение и составляя общее уравнение динамики, получим

$$(P_3 \cdot \sin \beta - F_{TP} - \Phi_3) \cdot \delta S_3 - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 - (\Phi_1 + P_1 \cdot \sin \alpha) - (M_C + M_1^\Phi) \cdot \delta \varphi_1 = 0.$$

Выразим все возможные перемещения через δS_3 :

$$\delta S_C = \frac{R_2}{2 \cdot r_2} \cdot \delta S_3; \delta \varphi_1 = \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \cdot \delta S_3; \delta \varphi_1 = \frac{\delta S_3}{r_2}.$$

Подставив выражения для инерциальных силовых факторов, ускорений и возможных перемещений в общее уравнение динамики, получим

$$\left[m_3 \cdot g \cdot \sin 60^\circ - f \cdot m_3 \cdot g \cdot \cos 60^\circ - m_3 \cdot a_3 - m_2 \cdot i^2 \cdot \frac{a_2}{2} - m_1 \cdot a_3 \left(\frac{R_2}{2 \cdot r_2} \right)^2 - \right. \\ \left. - m_1 \cdot g \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2} - k \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 \cdot a_3 \cdot \left(\frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \right)^2 \right] \cdot \delta S_3 = 0.$$

Учитывая, что $\delta S_3 \neq 0$, приравниваем нулю выражение, стоящее в последнем равенстве в квадратных скобках. Отсюда окончательно найдём a_3

$$a_3 = g \cdot \frac{m_3 \cdot g \cdot \sin 60^\circ - f \cdot m_3 \cdot g \cdot \cos 60^\circ - m_1 \cdot g \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_2} - k \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{R_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2}}{\frac{3}{8} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{i}{r_2} \right)^2 + m_3}.$$

Числитель и знаменатель в этом соотношении уже встречались в расчётах примера 11, подставим их значения:

$$a_3 = \frac{g \cdot 7,07}{14,19} = 4,90 \text{ м/с}^2.$$

Результат, полученный с помощью общего уравнения динамики, совпадает с числовым значением ускорения, полученным с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы (см. пример 13).

Дополнительные рисунки к задачам Д3, Д4

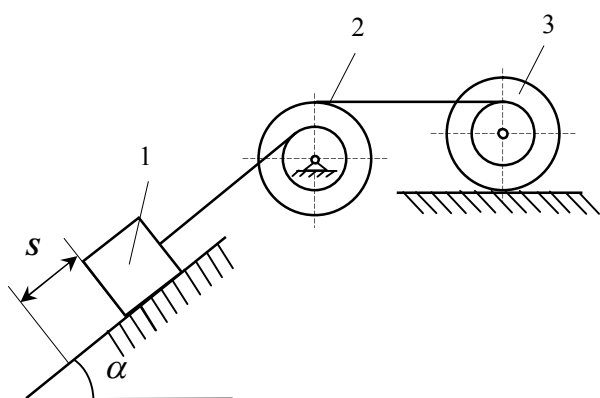


Рис. 10

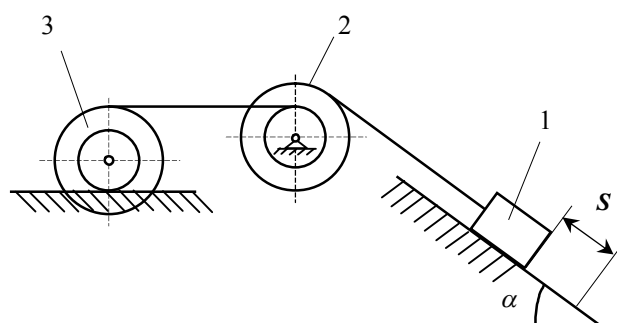


Рис. 11

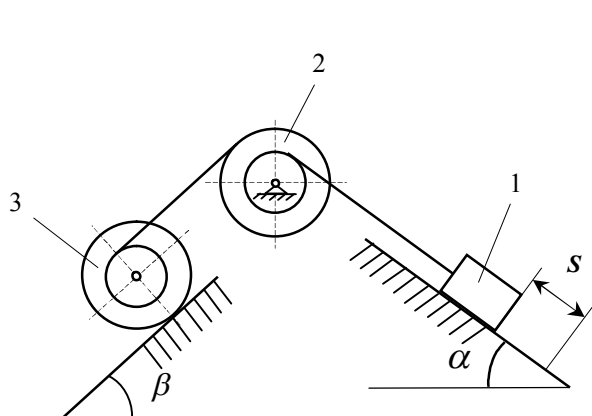


Рис. 12

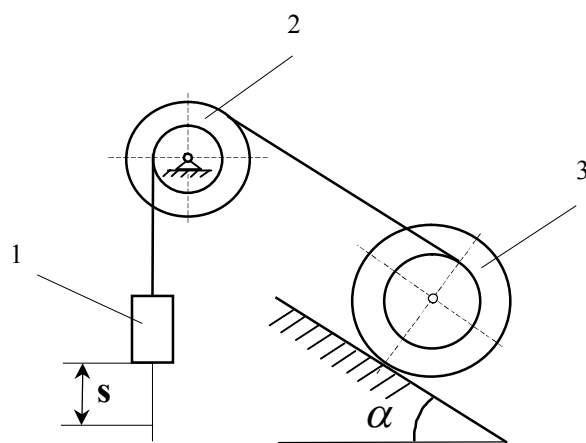


Рис. 13

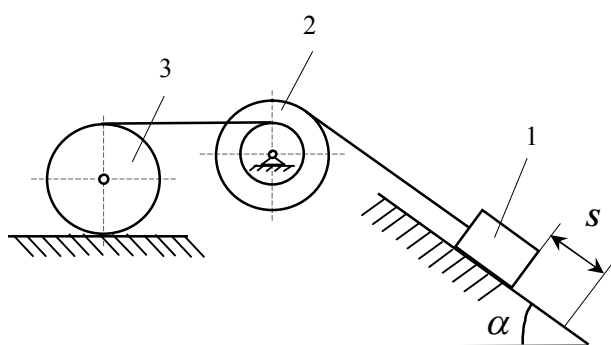


Рис. 14

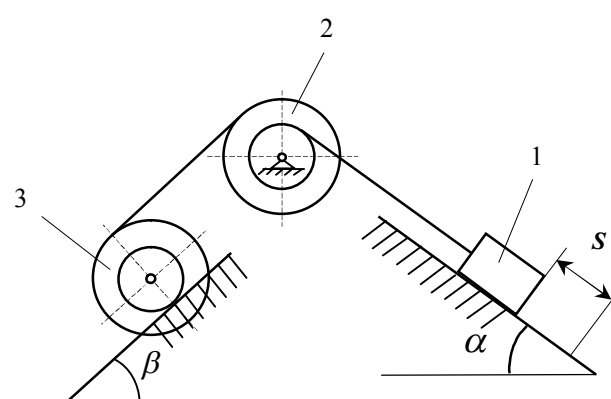


Рис. 15

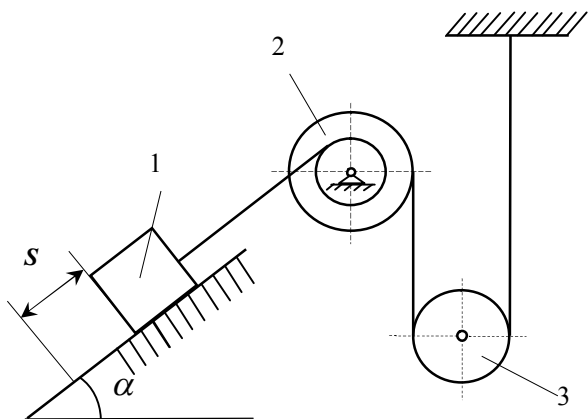


Рис. 16

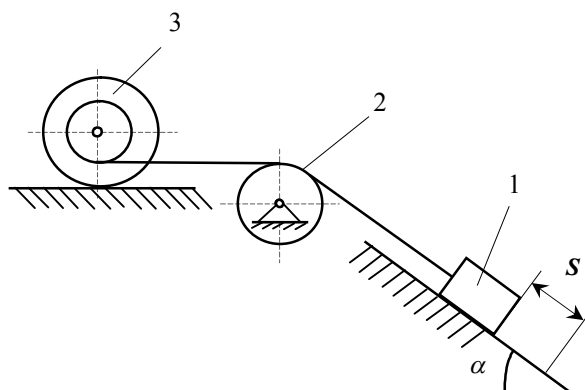


Рис. 17

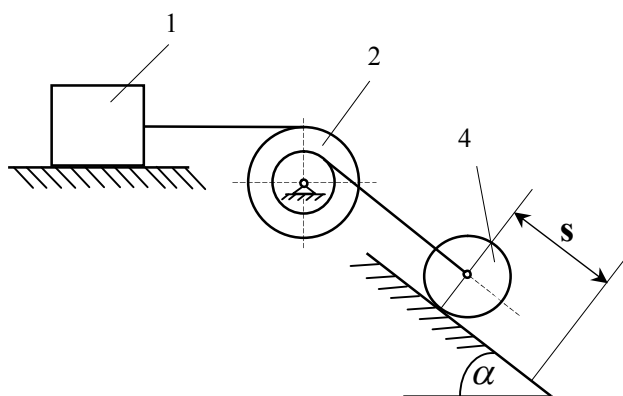


Рис. 18

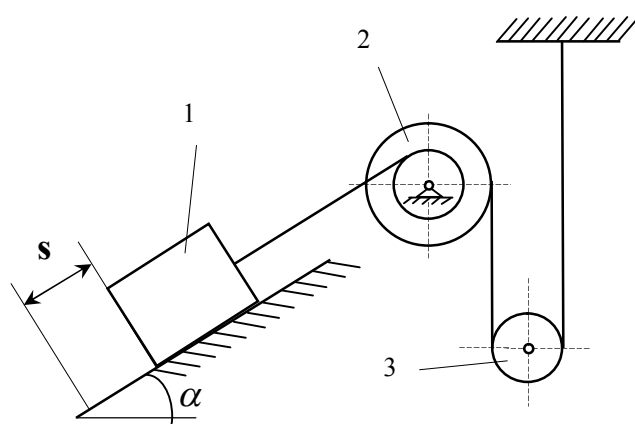


Рис. 19

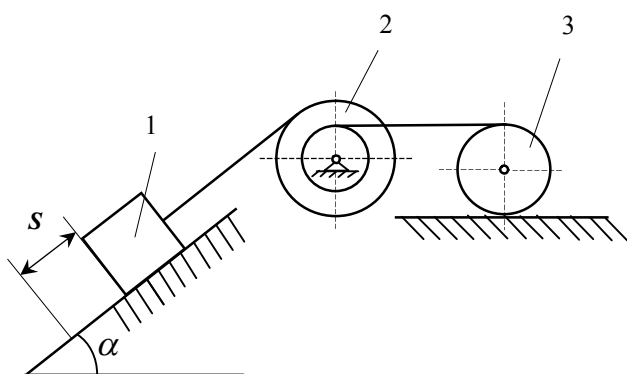


Рис. 20

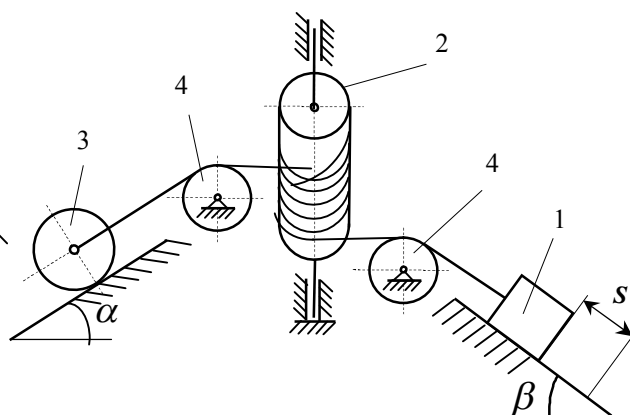


Рис. 21

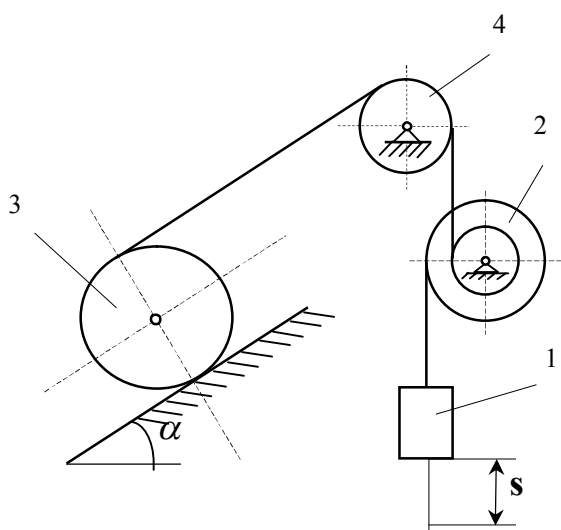


Рис. 22

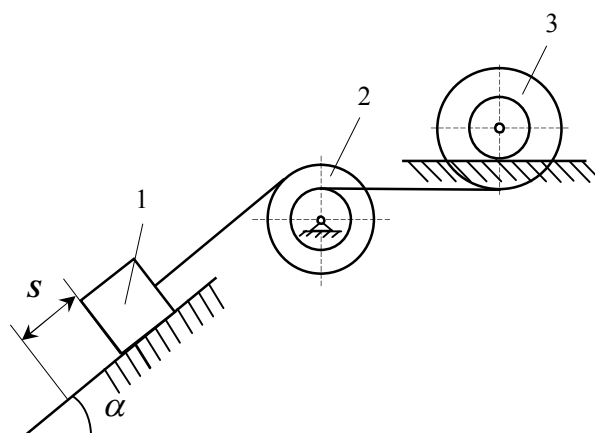


Рис. 23

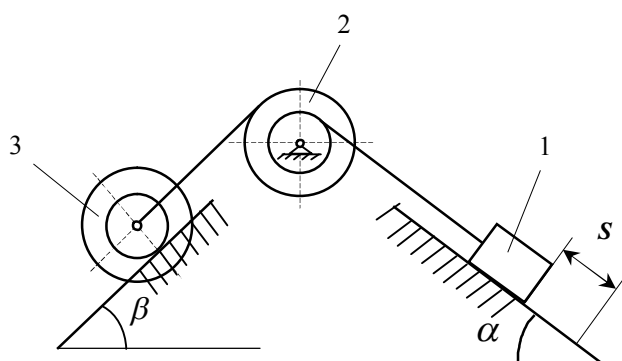


Рис. 24

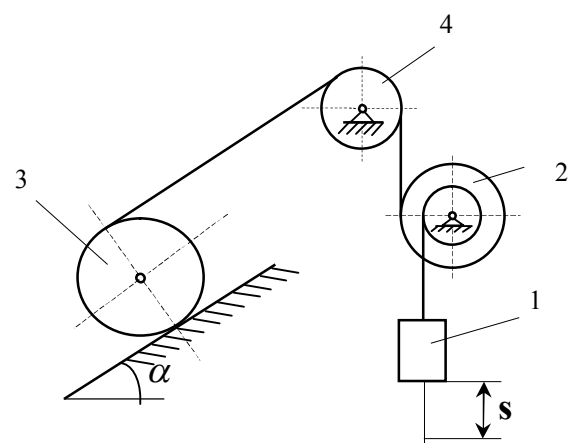


Рис. 25

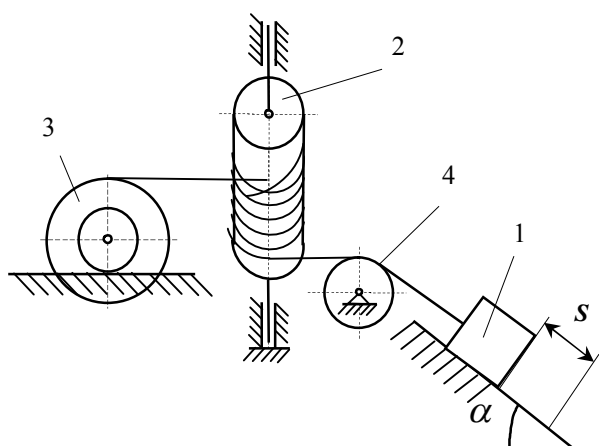


Рис. 26

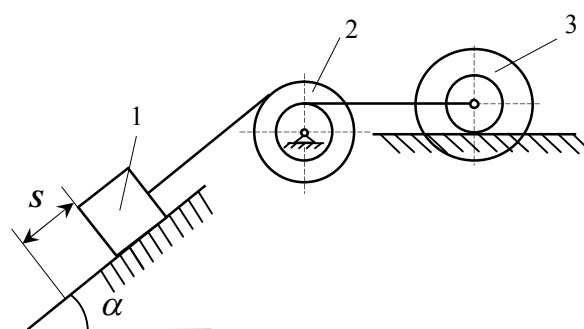


Рис. 27

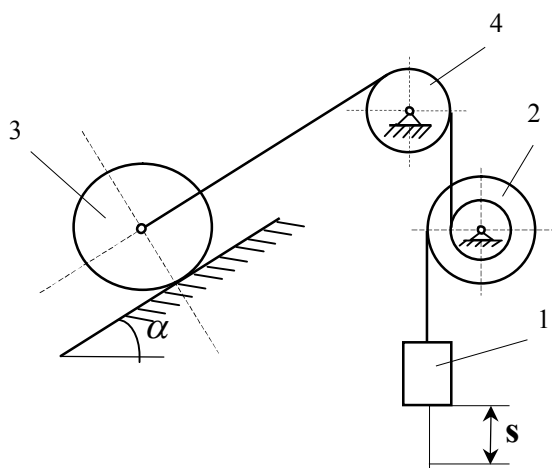


Рис. 28

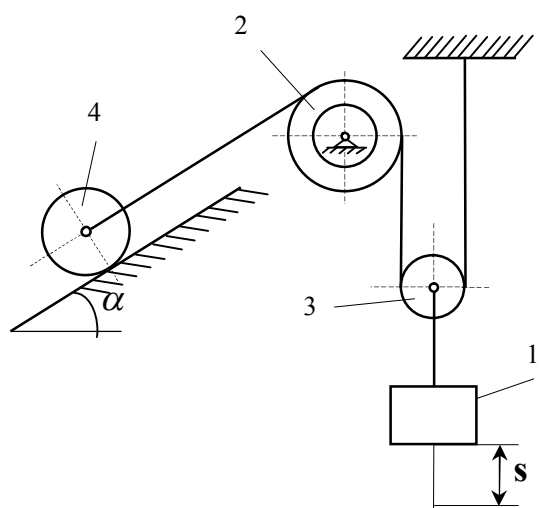


Рис. 29

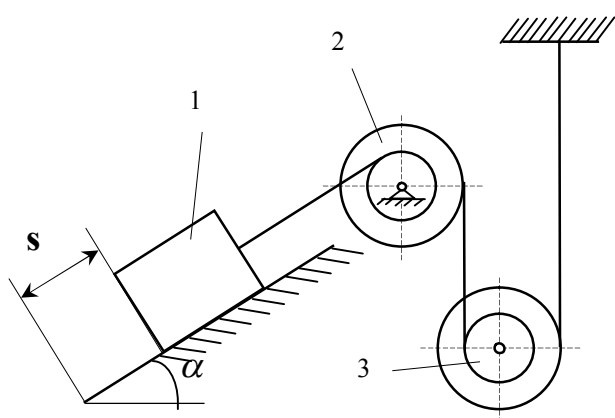


Рис. 30

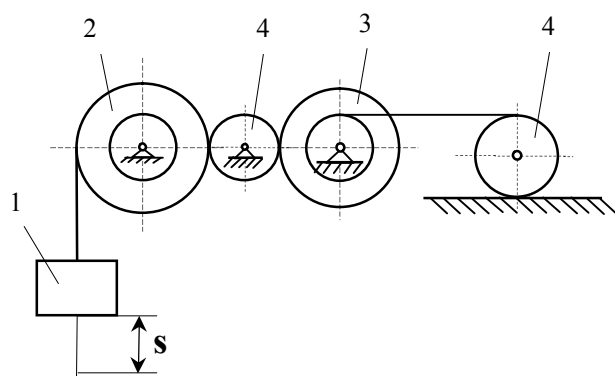


Рис. 31

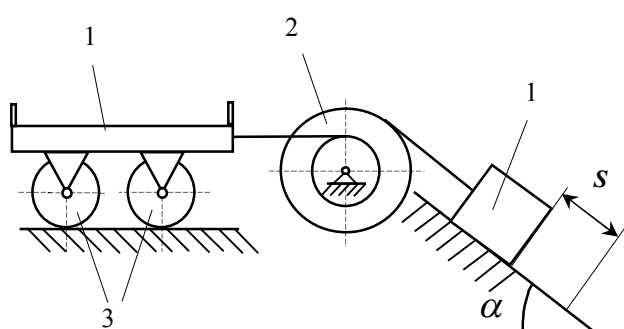


Рис. 32

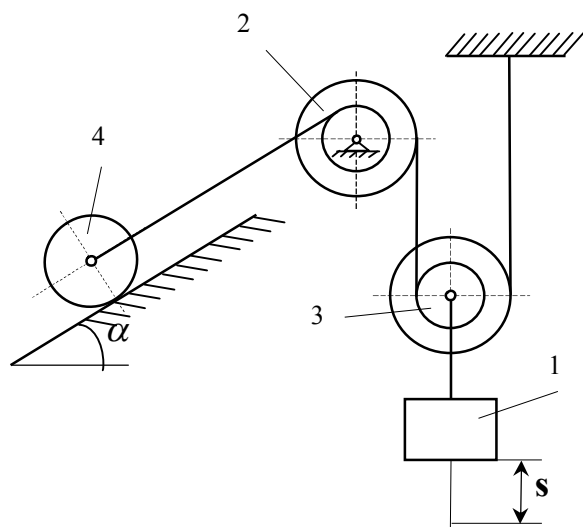


Рис. 33

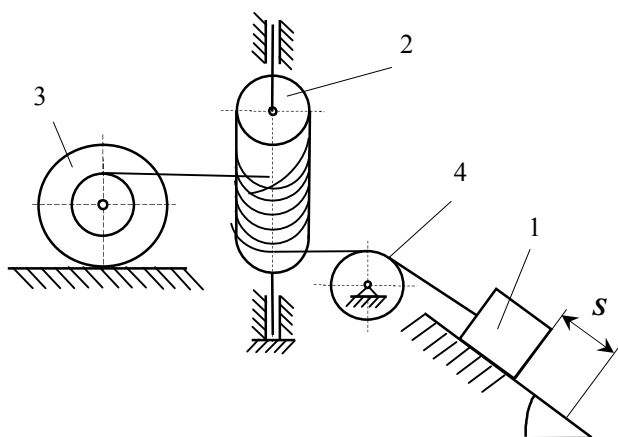


Рис. 34

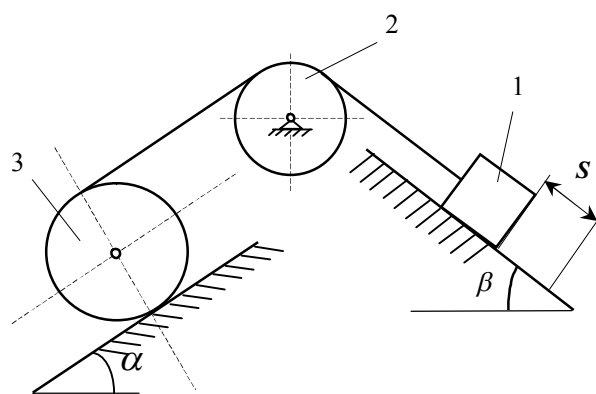


Рис. 35

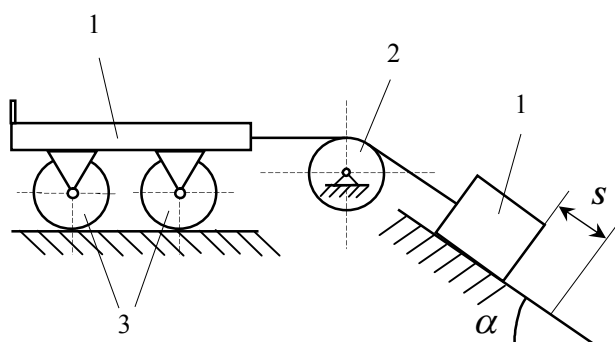


Рис. 36

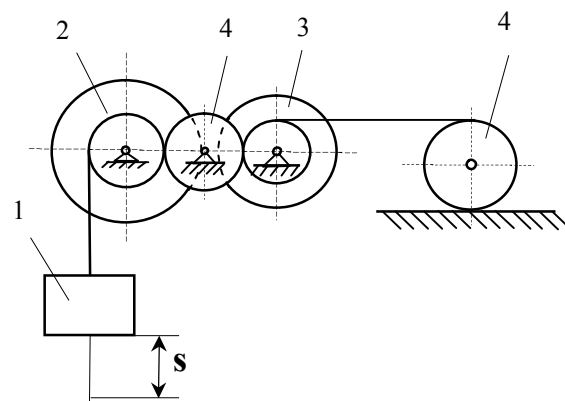


Рис. 37

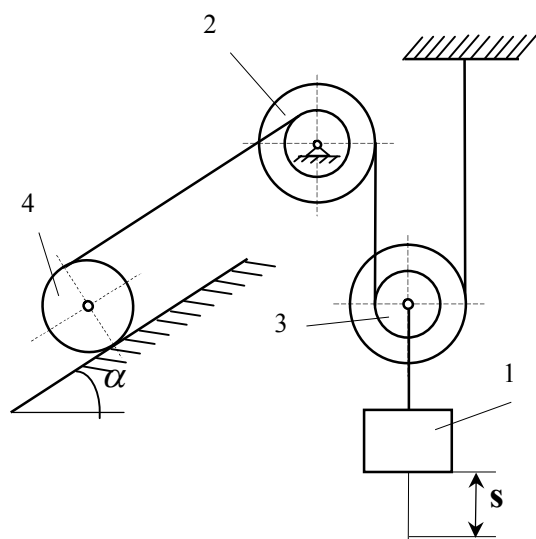


Рис. 38

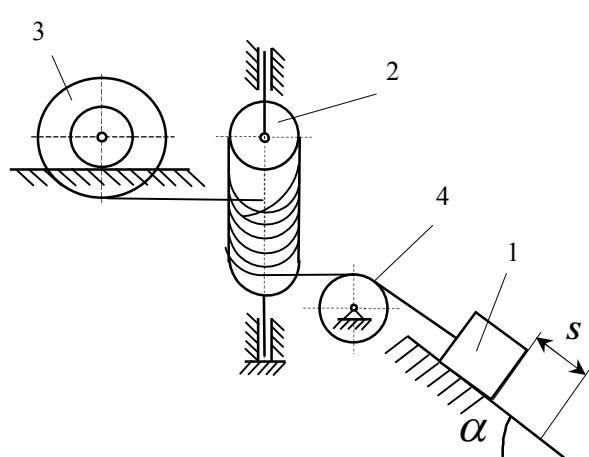


Рис. 39

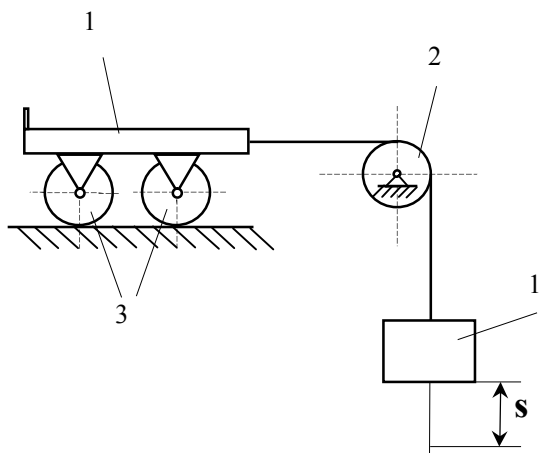


Рис. 40

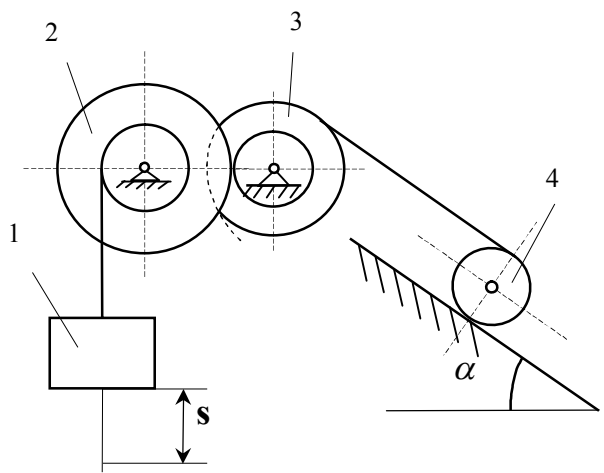


Рис. 41

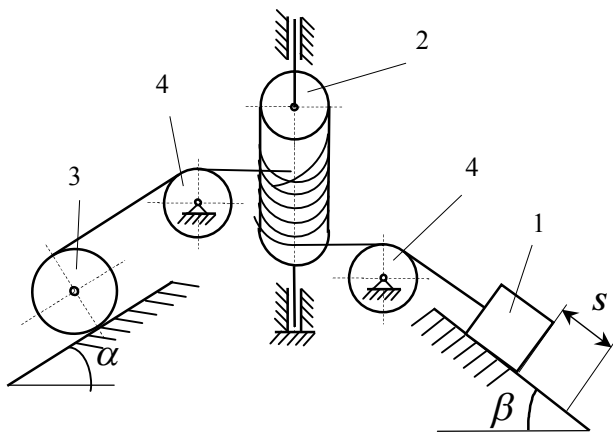


Рис. 42

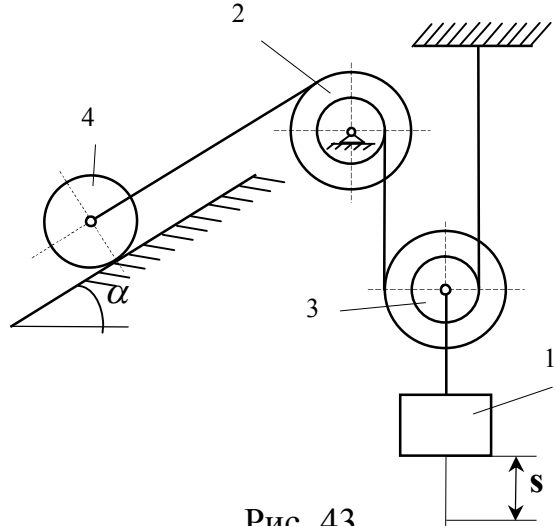


Рис. 43

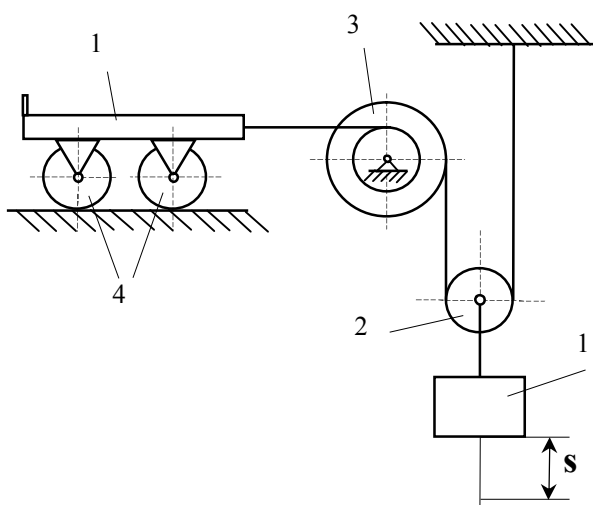


Рис. 44

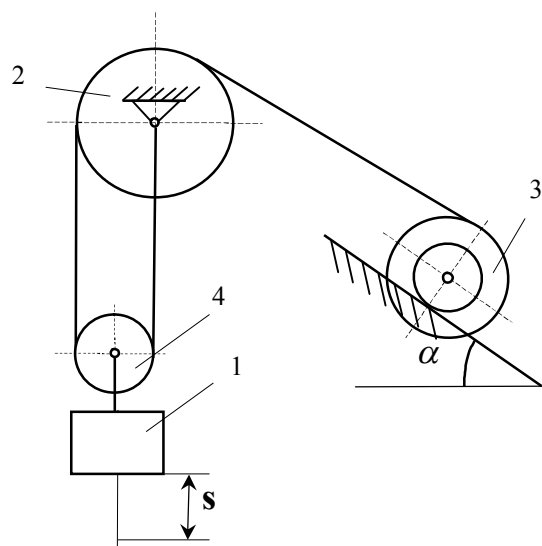


Рис. 45

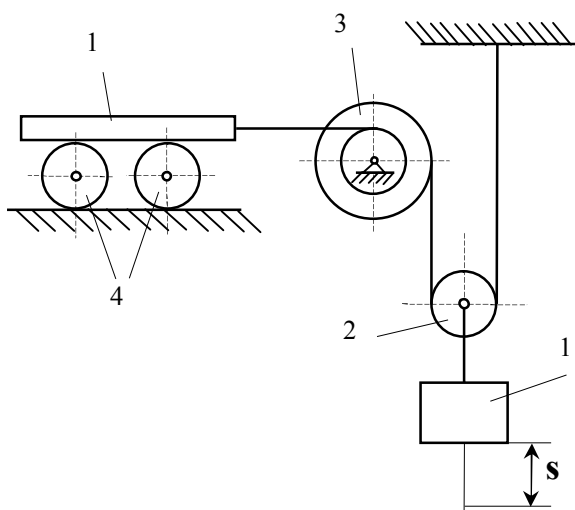


Рис. 46

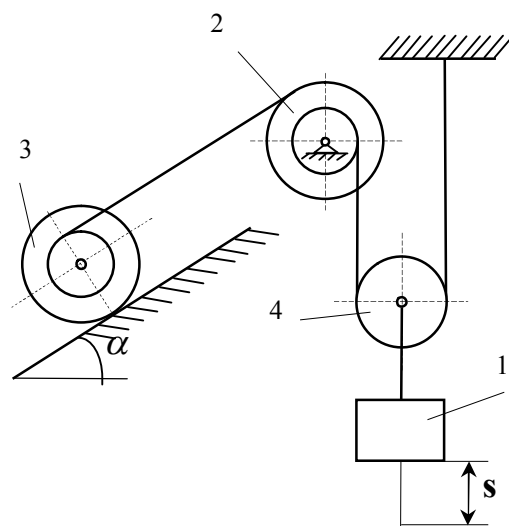


Рис. 47

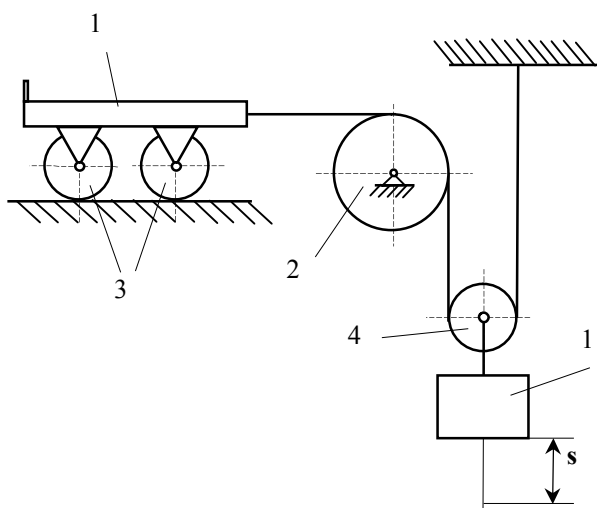


Рис. 48

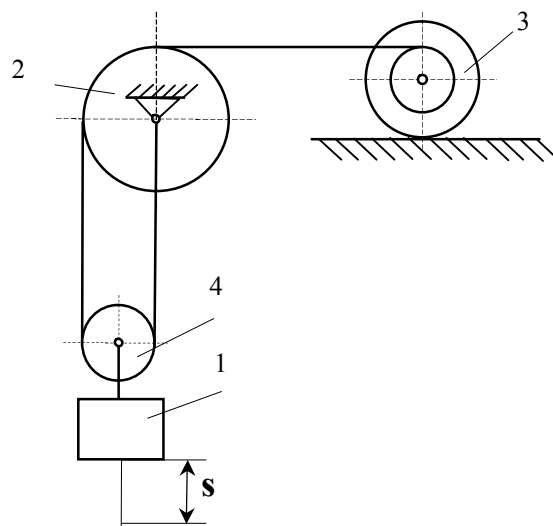


Рис. 49

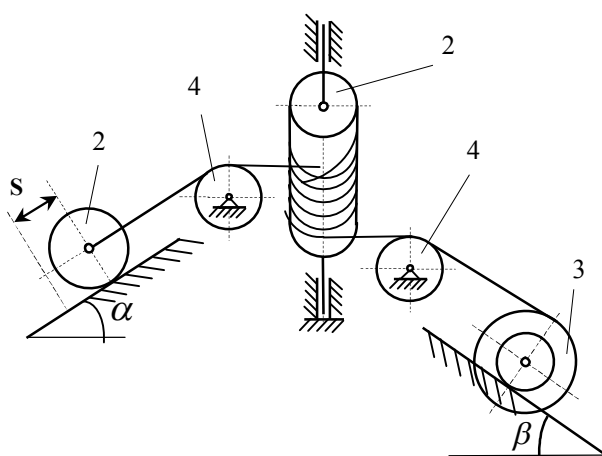


Рис. 50

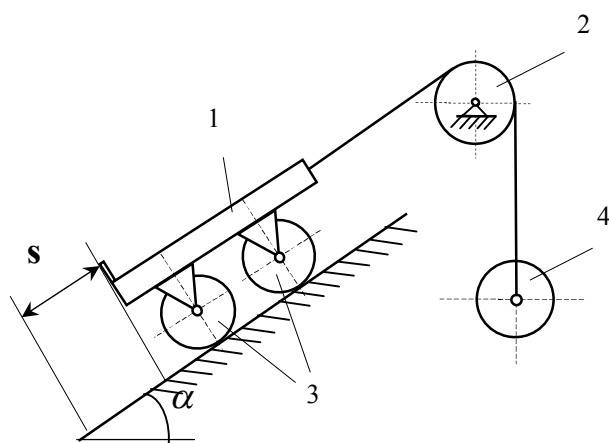


Рис. 51

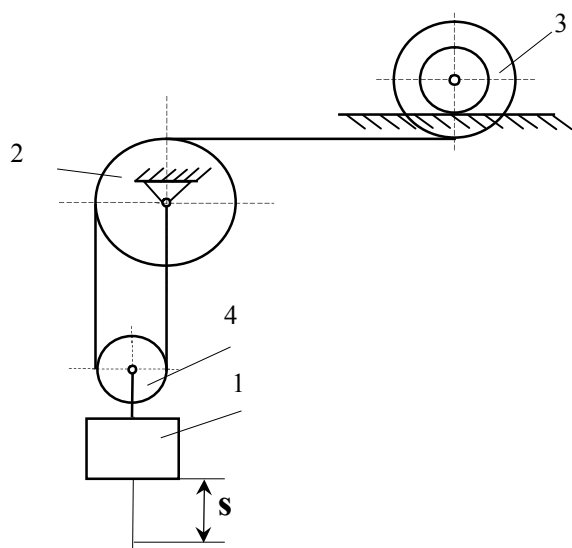


Рис. 52

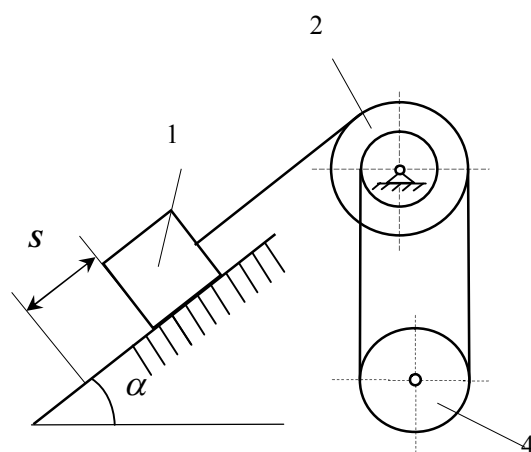


Рис. 53

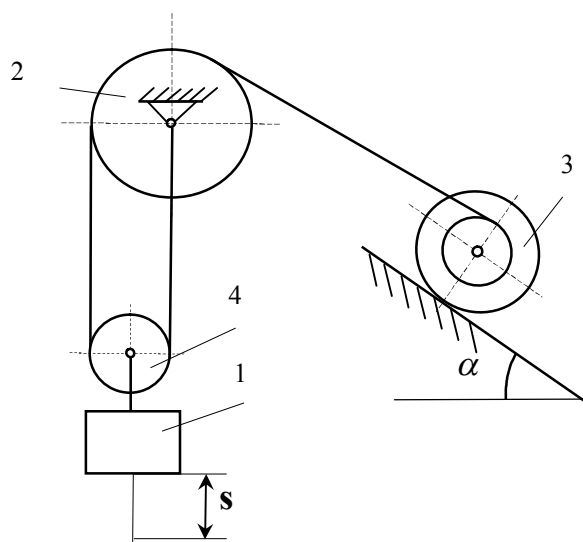


Рис. 54

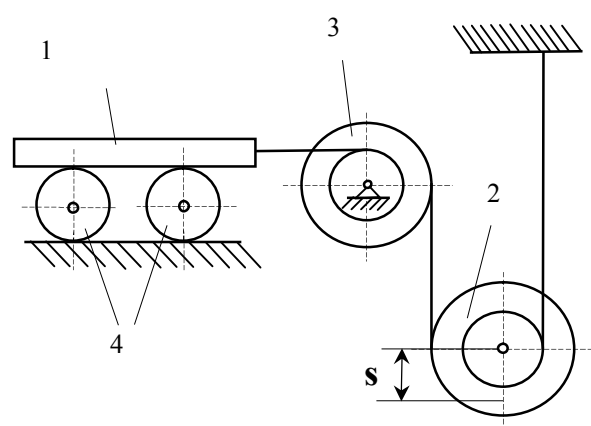


Рис. 55

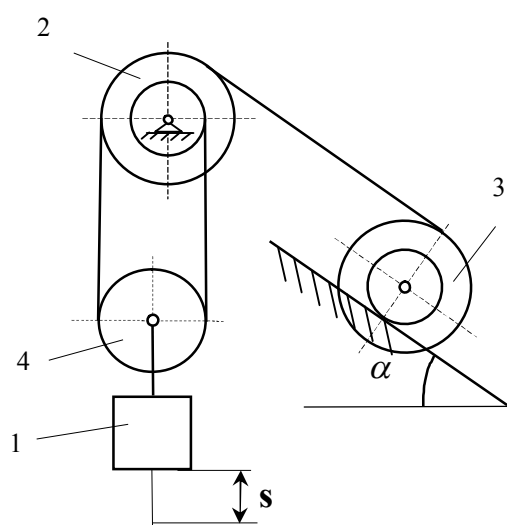


Рис. 56

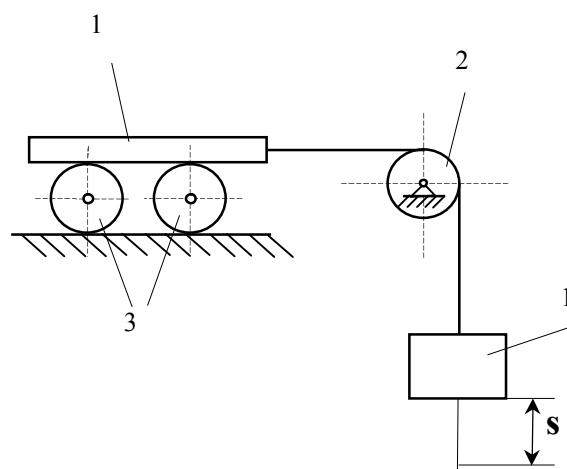


Рис. 57

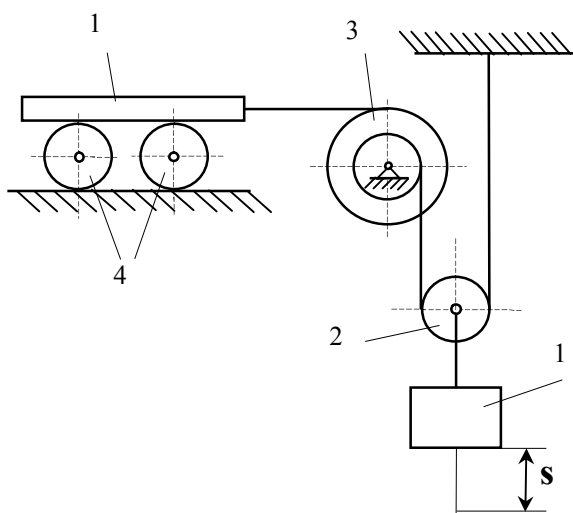


Рис. 58

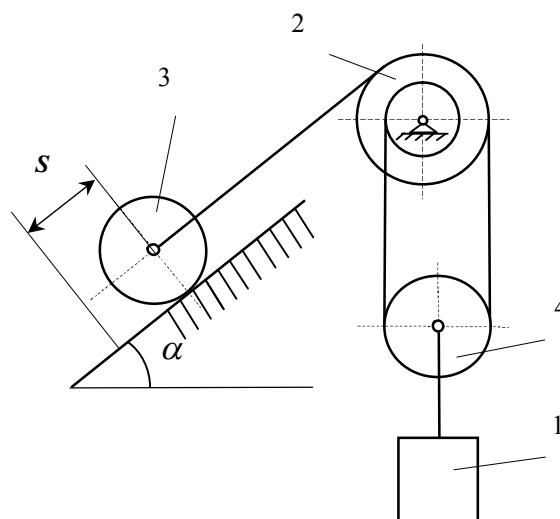


Рис. 59

Примечание: Радиус блока или катка с номером 4 для задач с рисунками 53, 56, 59 принять равным $R_4 = (R_2 + r_2) / 2$, для остальных задач – $R_2 / 2$. Для задач с рисунками 46, 55, 57, 58 считать, что длина плиты 1, опирающейся на цилиндрические катки, достаточно велика, а её вес распределён поровну между катками за все время её движения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Раздел «Статика»

1. Основные понятия статики.
2. Аксиомы статики.
3. Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей.
4. Сложение сил.
5. Проекция силы на ось и плоскость.
6. Равновесие системы сходящихся сил.
7. Теорема о трёх силах.
8. Момент силы относительно центра (как вектор).
9. Пара сил. Момент пары.
10. Теорема об эквивалентности пар, вытекающие свойства пары.
11. Теорема Пуансо о параллельном переносе силы.
12. Теорема о приведении системы сил к центру.
13. Условия равновесия системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра (оси).
14. Плоская система сил. Алгебраические моменты силы и пары.
15. Уравнения равновесия плоской системы сил (3 формы).
16. Равновесие составных конструкций.
17. Плоские фермы. Леммы о нулевых стержнях.
18. Расчёт плоских ферм (метод вырезания узлов и метод сечений).
19. Трение скольжения.
20. Трение качения.
21. Момент силы относительно оси.

22. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил.
23. Уравнения равновесия пространственной системы сил. Случай параллельных сил.
24. Центр тяжести твёрдого тела. Координаты центра тяжести для объёмных тел.
25. Координаты центра тяжести плоской фигуры. Центр тяжести треугольника, сектора круга.
26. Координаты центра тяжести линии. Центр тяжести дуги окружности.
27. Методы нахождения центра тяжести твёрдых тел. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси.

Раздел «Кинематика»

28. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки при векторном и координатном способах задания её движения.
29. Скорость и ускорение точки при естественном способе задания её движения.
30. Частные случаи движения точки.
31. Поступательное движение твёрдого тела, его свойства.
32. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Частные случаи вращения твёрдого тела.
33. Скорости и ускорения точек вращающегося твёрдого тела. Передаточные механизмы.
34. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.
35. Теорема о сложении скоростей при плоском движении твёрдого тела. Следствие (теорема о проекции скоростей двух точек твёрдого тела).
36. Мгновенный центр скоростей, его существование и единственность. Частные случаи определения мцс.
37. Теорема о сложении ускорений при плоском движении твёрдого тела.
38. Мгновенный центр ускорений, его определение по известным $\vec{a}_A, \omega, \varepsilon$.
39. Мгновенный центр ускорений, его определение по известным $\vec{a}_A, \vec{a}_B$.
40. Задачи и методы кинематического анализа плоских механизмов.
41. Сложное движение точки.

Раздел «Динамика»

42. Законы динамики.
43. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.
44. Две задачи динамики.
45. Количество движения точки. Импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки.
46. Момент количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки.
47. Работа силы. Мощность.
48. Работа силы тяжести, трения, упругости.
49. Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

50. Принцип Даламбера для точки.
51. Свободные колебания точки.
52. Затухающие колебания точки.
53. Вынужденные колебания точки. Резонанс.
54. Относительное движение точки.
55. Система материальных точек (определение, внешние и внутренние силы, масса системы, центр масс).
56. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
57. Теорема о движении центра масс. Следствия.
58. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения системы. Следствия.
59. Моменты инерции твёрдого тела. Примеры (стержень, кольцо, диск, пластина).
60. Теорема о моменте инерции тела относительно параллельных осей (Штейнера-Гюйгенса).
61. Кинетический момент системы. Теорема об изменении кинетического момента. Следствия.
62. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
63. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела.
64. Работа вращающего момента. Сопротивление при качении.
65. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия тела при поступательном, вращательном, плоском движениях. Теорема об изменении кинетической энергии системы.
66. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции.
67. Принцип возможных перемещений.
68. Общее уравнение динамики.
69. Обобщённые координаты, скорости, силы.
70. Уравнения Лагранжа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение следует отметить, что при современном стремительном развитии научно-технического прогресса теоретическая механика остается основой построения всех технических наук, рассматривающих равновесие или движение материальных тел и систем и определяющих развитие таких наукоемких отраслей, как строительство, машиностроение, транспорт, энергетика и т. п. В ходе развития техники и технологий постоянно ставятся новые задачи, решение которых опирается на основные принципы, теоремы и положения теоретической механики, а также требует совершенствования применяемых в механике подходов, возникновения новых разделов, что иллюстрируется на примере развития космической техники, робототехники и т. д.

Изучение теоретической механики невозможно без необходимого объема знаний математики, прежде всего разделов векторной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления. О значении владения абстрактным математическим языком писал великий Галилей еще в XVII веке: «Философия написана в той величественной книге, которая постоянно лежит у нас перед глазами открытой (я имею в виду Вселенную), но которую невозможно понять, если не научиться предварительно ее языку и не узнать те письмена, которыми она написана. Ее язык – это язык математики ... без него мы можем только кружиться впустую по темному лабиринту».

Для студентов сложность усвоения курса теоретической механики обусловлена необходимостью моделирования и математического представления исследуемых физических явлений природы при решении конкретных инженерных задач. Предлагаемое учебно-методическое пособие, содержащее методические указания по применению основных законов и положений базовых разделов теоретической механики при решении конкретных задач, поможет обучающимся сформировать исследовательский подход при решении инженерно-технических, научных проблем и задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
2. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика : учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: Кнорус, 2011. – 603 с.
3. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика: учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 667 с.
4. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика : учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 638 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для вузов: доп. МО СССР / под общ. ред. А. А. Яблонского. – 18-е изд., стер. – М.: Кнорус, 2011. – 386 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Равновесие произвольной плоской системы сил	4
Статический расчет плоских ферм	8
Определение координат центра тяжести плоской фигуры	20
Равновесие составных конструкций	24
Равновесие произвольной пространственной системы сил	29
Поступательное и вращательное движения твёрдого тела.	
Передаточные механизмы.....	33
Кинематический анализ многозвенного механизма	40
Сложное движение точки	53
Динамика точки	63
Принцип возможных перемещений	70
Теорема об изменении кинетической энергии системы	81
Общее уравнение динамики	90
Контрольные вопросы	102
Заключение	105
Библиографический список	105

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

*Учебно-методическое пособие
с контрольными заданиями
для студентов очной и заочной форм обучения*

Составители: Козлов Владимир Анатольевич
Волков Виталий Витальевич
Горячев Валентин Николаевич
Ордян Микаел Гарегинович

Редактор Сахарова Д. О.

Подписано в печать __.02.2019. Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. 6,65.
Усл.-печ. л. 6,7. Бумага писчая. Тираж 500 экз. Заказ № ____.

Участок оперативной полиграфии
издательства ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет».
394026 Воронеж, Московский проспект, 14