ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов

Мет. 1.rar	200 К байт	14.10.2008	уч.-изд. 2,1 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

$$R^n$$

Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов,
канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения Ч. 1/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 35 с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 1.rar»

Библиогр.: 11назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме:"Линейная алгебра". Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО БАЗИСУ

Известно, что множество всех векторов образует линейное пространство (для векторов, элементов этого пространства определены операции: сложение и умножение на число. Количество координат вектора определяет размерность пространства. Доказано, что всякий вектор $\overline{x} = (x_1, x_{2..}, x_n)$ n-мерного линейного пространства можно единственным образом представить в виде линейной R^n комбинации векторов, образующих базис,

$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}$, где $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ – базис (в некоторых задачах иногда не будет ставится знак вектора над базисными векторами, но понимать надо, что они всегда являются векторами).

Базис – это совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства R^n.

Заметим, что в n-мерном линейном пространстве существует бесконечно много различных базисов из n векторов. В следующих двух заданиях при решении задач надо уметь устанавливать линейную независимость или линейную зависимость векторов, и убедиться, что векторы, по которым требуется разложить данный вектор, образуют базис.

Задание 1

Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Дано: $\overline{x}=(-9,5,5)$, $\overline{p}=(4,1,1)$, $\overline{q}=(2,0,-3)$, $\overline{q}=(-1,2,1)$.

Требуется найти коэффициенты в разложении

$\overline{x}=\alpha\overline{p}+\beta\overline{q}+\gamma\overline{r}$

Решение: Убедимся, что векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ образуют базис в пространстве R^3. Если они линейно независимы, тогда $\overline{x}\in R^3$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов.

а) Рассмотрим $\lambda_1\overline{p}+\lambda_2\overline{q}+\lambda_3\overline{r}=\overline{0}$ в координатной форме:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{cases}4\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1+0\lambda_2+2\lambda_3=0,\\ \lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

т.к. определитель этой линейной однородной системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}=29\ne 0.$$

Однородная система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Следовательно, $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ – линейно независимы и образуют базис в R^3.

б) Запишем разложение вектора $\overline{x}$ по этому базису

$\bar{x} = \alpha \bar{p} + \beta \bar{q} + \gamma \bar{r}$ имеем:

$$\alpha\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\5\\5\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Векторное уравнение (1) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta - \gamma = -9 \\ \alpha + 0\beta + 2\gamma = 5 \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

Эта линейная неоднородная система (ЛНС) уравнений, у которой $\Delta = 29 \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Вычисляем дополнительные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 5 + 5\cdot(-3)\cdot(-1) -$$

$$- 5\cdot 0\cdot(-1) - (-9)\cdot(-3)\cdot 2 - 5\cdot 2\cdot 1 = 20 + 15 - 54 - 10 = -29$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -9 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 18 + 5 - 40 + 9 = -29$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 27 + 10 + 60 - 10 = 87 .$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{-29}{29} = -1$, $\beta = \dfrac{-29}{29} = -1$,

$\gamma = \dfrac{87}{29} = 3$.

Ответ: В базисе $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ имеем разложение

$\overline{x} = -\overline{p} - \overline{q} + 3\overline{r}$.

Задание 2

Исследовать на линейную зависимость систему векторов или систему уравнений.

Дано: $\overline{a}$ =(1,2,3), $\overline{b}$ =*(4,5,6)*, $\overline{c}$ =*(7,8,9)*,

Решение. Рассмотрим $\lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c} = \overline{0}$

в координатной форме.

Имеем

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Представляющим однородную линейную однородную систему (ЛОС) уравнений. Т.к.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$, то ЛОС имеет единственное

($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) нулевое решение.

Следовательно, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ –линейно независимые векторы.

Задание 3

Дано: *x, x^2,$(1+x)^2$* на интервале $(-\infty,\infty)$. Исследовать систему на линейную зависимость.

Решение: Составим определитель Вронского из данных функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & (1+x)^2 \\ (x)' & (x^2)' & ((1+x)^2)' \\ (x)'' & (x^2)'' & ((1+x)^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & (1+x)^2 \\ 1 & 2x & 2(1+x) \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -x^2 & 1-x^2 \\ 1 & 2x & 2(1+x) \\ 0 & 2 & 92 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -x^2 & 1-x^2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2x^2 - 2 + 2x^2 = 2 \neq 0$$

Т.к. *W(x)* $\neq 0$, то данная система функций линейно независима.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим *m* линейных неоднородных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Эту ЛНС уравнений можно записать в векторной форме $AX=B$, где заданы матрицы коэффициентов A, B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ и B матрица-столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(вектор свободных членов);

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, X- искомый n-мерный вектор неизвестных , которые требуется найти.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной. Имеет место следующая теорема Кронекера - Капели: Для совместности системы (*) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу её расширенной матрицы: *Rang A*= *Rang* $\overline{A}$ =*r*, где

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ -расширенная матрица.

Если $r=n$,то ЛНС(*) имеет единственное решение. Если r<n, то ЛНС(*) имеет бесконечное множество решений. Назовём r неизвестных, базисный минор из коэффициентов при которых отличен от нуля, базисными переменными остальные $(n\text{-}r)$ неизвестных системы назовем свободными переменными. Придавая свободным переменным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных переменных. В результате получим общее решение системы, включающее в себя все частные решения.

Задание 4

Найти общее решение данной неоднородной системы с исследованием её на совместимость. Выделить какое-нибудь частное решение.

Дано: $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение. Здесь число уравнений $m=3$, число неизвестных $n=4$,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$- расширенная матрица,

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$-вектор свободных членов, $$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ -искомый вектор. Вычислим сначала $Rang\,A$ и $Rang\,\overline{A}$ методом окаймляющих миноров:

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{vmatrix}=1\neq 0,\ M_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -5 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=8,$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=3\neq 0,\ M_4=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & -5 & 7\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$$

$\Rightarrow$ *Rang* $\overline{A}=3$.

Т.к. ранги матриц A и $\overline{A}$ равны, то система совместна и имеет бесконечно много решений, ибо ранг $r=3$ меньше числа неизвестных $n=4$. Неизвестные x_1,x_2,x_4 соответствуют базисным столбцам минора $M_3\neq 0$. Примем их за базисные переменные, неизвестная переменная x_3 будет свободной.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_4=4-x_3\\ 2x_1-5x_2+3x_4=7-4x_3\\ x_1-2x_2+4x_4=3-3x_3\end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=3;$$

$$\Delta_{x1}=\begin{vmatrix}4-x_3 & -3 & 2\\ 7-4x_3 & -5 & 3\\ 3-3x_3 & -2 & 4\end{vmatrix}=147x_3+3;$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 1 & 4-x_3 & 2 \\ 2 & 7-4x_3 & 3 \\ 1 & 3-3x_3 & 4 \end{vmatrix} = -6x_3+13;$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4-x_3 \\ 2 & -5 & 7-4x_3 \\ 1 & -2 & 3-3x_3 \end{vmatrix} = 62x_3.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{147x_3+3}{3} = 49x_3+1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{-6x_3+13}{3};$$

$$x_4 = \frac{\Delta_{x4}}{\Delta} = \frac{62x_3}{3}.$$

Обозначим $x_3=C$, где C- произвольная постоянная , $C \in R$

Запишем общее решение в векторной форме

$$X_{общее} = \begin{pmatrix} 49C+1 \\ -2C+13/3 \\ C \\ 62C/3 \end{pmatrix}$$

Получая, например, $C=3$, найдем частные ЛНС:

$X_1=148$; $X_2=-5/3$; $X_3=3$; $X_4=62$.

Ответ: $X_{общее}=(49C+1,-2C+13/3,C,62C/3)$,

$X_{частное}=(148,-5/3,3,62)$.

3. ПОДПРОСТРАНСТВА, ОБРАЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ (ЛОС) УРАВНЕНИЙ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛОС

Рассмотрим линейную однородную систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ -матрица коэффициентов размерности $m \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ -неизвестный вектор, подлежащий определению.

Совокупность линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ ЛОС уравнений называется фундаментальной системой решений (ФСР) , если любое решение этой системы может быть представлено в виде линейной комбинации этих векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$: $X = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k$, где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – любые константы. Последнее равенство является общим решением ЛОС уравнений в векторной форме ,т.к. в нём содержатся всевозможные частные решения при конкретных значениях произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы A меньше числа n неизвестных, то ЛОС уравнений имеет ненулевое решение. Число n-мерных векторов , определяющих ФСР , находятся по формуле $k=n-r$, где $r=Rang\ A$. Таким образом, если рассматривается линейное пространство R^n ,элементами которого являются n-мерные векторы , то множество всех решений ЛОС является подпространством пространства R^n . Размерность этого подпространства равна k.

Задание 5

Найти общее решение данной системы и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений ЛОС, указать размерность пространства).

Дано:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. В данной ЛОС имеем $m=3$- число уравнений, $n=5$- число неизвестных.

Запишем матрицу коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

И определим её ранг с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 23 & -8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -8 & -8/3 & 4/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Т.к. число линейно независимых столбцов преобразований матрицы равно $r=3$, то $RangA=r=3$. $RangA=3<n=5$. Следовательно, ЛОС имеет ненулевые решения.

ФСР состоит двух ($k=n-r=2$)линейно независимых решений. Неизвестные x_1,x_2,x_3 соответствуют базисным столбцам и являются базисными переменными; неизвестные x_4,x_5 – свободными переменными.

Запишем преобразованную систему уравнений, перенеся свободные переменные x_4,x_5 в правую часть системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = (1/3)x_4 - (1/6)x_5 \\ x_2 = (-1/3)x_4 - (1/3)x_5 \\ x_3 = -(1/3)x_4 + (1/6)x_5 \end{cases}$$

Для первого набора φ_1 свободных переменных $x_4=1,\ x_5=0$ и второго набора φ_2 свободных переменных $x_4=0,\ x_5=1$ имеем решения:

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix},\qquad\qquad \varphi_2=\begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\1/6\\0\\1\end{pmatrix}$$

Решения φ_1 и φ_2 образуют ФСР. Общее решение системы в векторной форме:

$$X=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2=c_1\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\1/6\\0\\1\end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Если положить $c_1=3\cdot a$, $c_2=6\cdot b$, где любые числа $a,b\in(-\infty,\infty)$, то общее решение данной ЛОС в координатной форме можно записать так:

$x_1=a-b,\ x_2=-a-2b,\ x_3=-a+b,\ x_4=3\cdot a,\ x_5=6\cdot b,$

$a,b\in(-\infty,\infty)$

Таким образом, исходная система имеет бесконечное множество решений; размерность пространства решений $k=2$.

Ответ: $X=(a-b,\ a-2b,\ -a+b,\ 3\cdot a,\ 6\cdot b)$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Говорят, в линейном векторном пространстве R задано преобразование A, если каждому элементу (вектору) $\bar{x} \in R$ по некоторому закону (или правилу) ставится в соответствие вектор $A\bar{x} \in R$. Преобразование A называют линейным , если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in R$ и любого действительного числа λ выполняется равенства $A(\bar{x}+\bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$ и $A(\lambda \bar{x}) = \lambda A\bar{x}$.
Для простоты возьмём линейное пространство R^3 $(n=3)$.
Пусть в этом пространстве R^3 имеются два базиса: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (старый) и $\overline{e_1^{/}}, \overline{e_2^{/}}, \overline{e_3^{/}}$ (новый), связанные равенствами

$$\begin{cases} \overline{e_1^{/}} = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + a_{13}\bar{e}_3 \\ \overline{e_2^{/}} = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{23}\bar{e}_3 \\ \overline{e_3^{/}} = a_{31}\bar{e}_1 + a_{32}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3 \end{cases} \qquad (**)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица перехода от старого базиса к новому, столбцы, которой являются координатами в формулах перехода (**).
Если вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задан в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то его координаты $\overline{x'} = (x_1^{/}, x_2^{/}, x_3^{/})$ в новом базисе можно найти по формуле $\overline{x'} = A^{-1}\bar{x}$, где матрица линейного преобразования A^{-1} является обратной для матрицы A; т.к. $detA \neq 0$,то - невырожденная матрица. Заметим, что в конечномерном пространстве R линейное преобразование (оператор) называется невырожденным , если определитель матрицы этого линейного преобразования отличен от нуля. Матрицу B' линейного опе-

ратора (преобразования) при переходе от одного ортонормированного базиса к другому находится по формуле $B' = A^{-1}BA$, где A-матрица перехода от старого базиса к новому , B матрица оператора в старом базисе

Задание 6

Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'})$, если он задан в базисе $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$.

Дано: $\overline{x} = (2,6,-3)$, $\overline{e_1'} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$, $\overline{e_2'} = (2/3)\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{e_3'} = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$

Решение. <u>Первый способ.</u>

Имеем по условию разложение вектора $\overline{x} = 2\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2 - 3\overline{e}_3$ старом базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$. Требуется разложить вектор $\overline{x}$ в новом базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$, т.е. надо найти новые координаты x_1', x_2', x_3' вектора $\overline{x} = x_1'\overline{e_1'} + x_2'\overline{e_2'} + x_3'\overline{e_3'}$

Учитывая условие задачи, запишем

$$\overline{x} = x_1'(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3) + x_2'((2/3)\overline{e}_1 - \overline{e}_2) + x_3'(-\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторное уравнение равносильно трем скалярным уравнениям :

$$\begin{cases} x_1' + (2/3)x_2' - x_3' = 2 \\ x_1' - x_2' + x_3' = 6 \\ -2x_1' + 0 \cdot x_2' + x_3' = -3 \end{cases}$$

Это линейная неоднородная система(ЛНС), у которой $\det A = -1$. Решаем ЛНС уравнений по правилу Крамера:

$$x_1' = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2' = \frac{\Delta_2}{\det A},\ x_3' = \frac{\Delta_3}{\det A}$$

Находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2/3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Получим x_1'=5, x_2'=6, x_3'=7. Таким образом, $\overline{x'}$ =(5,6,7).

<u>Второй способ.</u>

Заметим, что координаты вектора $\overline{x'}$ в новом базисе можно найти по формуле $\overline{x'} = A^{-1}\overline{x}$ и $\overline{x} = A\overline{x'}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$-матрица, столбцы которой являются координатами в формулах перехода от старого базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ к новому $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ (см. условие задачи).

Найдем обратную матрицу A^{-1}, $\det A=-1$;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2/3 & -1 & -4/3 \\ -1/3 & -2 & -5/3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij}-алгебраические дополнения к элементам a_{ij}, а индекс T обозначает транспонирование матрицы.

Тогда по формуле получаем

$$\overline{x^{/}} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\overline{x^{/}}$ =(5,6,7).

Задание 7

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Является ли линейными следующие преобразования?

Дано:

$A\overline{x} = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$, $B\overline{x} = (1 + x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$

$C\overline{x} = (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$.

Решение: Преобразование A называется линейным , если для любых векторов $\overline{x}, \overline{y}$ и любого действительного числа λ выполняются равенства $A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$ и $A(\lambda\overline{x}) = \lambda A\overline{x}$.

Проверим на линейность данные преобразования.

1) $A(\lambda\overline{x}) = (\lambda^2 x_1^2, \lambda x_1 - \lambda x_3, \lambda x_2 + \lambda x_3) =$

$= \lambda(\lambda x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3) \neq \lambda A\overline{x}$ -преобразование A не линейно.

2) $B(\lambda\overline{x}) = (1 + \lambda x_1, \lambda x_1 - \lambda x_3, \lambda x_2 + \lambda x_3) =$

$\lambda((1/\lambda) + x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3) \neq \lambda B\overline{x}$ –преобразование B не линейно.

3) $C(\lambda \bar{x}) = (\lambda x, \lambda x_1 - \lambda x_3, \lambda x_2 + \lambda x_3) =$

$= \lambda (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3) = \lambda C\bar{x}$

Напишем матрицу преобразования $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

тогда $C(\bar{x} + \bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$

$= C\bar{x} + C\bar{y}$. Значит преобразование линейное.

Ответ: Преобразование Cx является линейным.

Задание 8

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

$A\bar{x} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $B\bar{x} = (x_2, 2x_3, x_1)$.

Найти $(A\text{-}B)^2 \bar{x}$.

Решение. Напишем матрицы данных преобразований *A, B:*

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тогда $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Находим

$$(A-B)^2\overline{x}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\-3x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

Ответ: $(A-B)^2\overline{x}=(-x_3,-3x_3,x_3)$.

Задание 9

Найти матрицу линейного оператора в базисе $\overline{e_1^{/}},\overline{e_2^{/}},\overline{e_3^{/}}$,
где $\overline{e_1^{/}}=\overline{e}_1-\overline{e}_2+\overline{e}_3,\overline{e_2^{/}}=-\overline{e}_1+\overline{e}_2-2\overline{e}_3$,
$\overline{e_3^{/}}=-\overline{e}_1+2\overline{e}_2+\overline{e}_3$, если она задана в базисе$(\overline{e}_{1,}\overline{e}_{2,}\overline{e}_3)$.

Дано: $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Решение. По условию координаты нового базиса выражаются через координаты старого базиса $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ уравнениями: $\overline{e_1^{/}}=\overline{e}_1-\overline{e}_2+\overline{e}_3,\overline{e_2^{/}}=-\overline{e}_1+\overline{e}_2-2\overline{e}_3,\overline{e_3^{/}}=-\overline{e}_1+2\overline{e}_2+\overline{e}_3$,

где $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$ матрица перехода, у которой

det A=*1*.

Матрицу B' линейного оператора в новом базисе $(\overline{e}_1^{\,/}, \overline{e}_2^{\,/}, \overline{e}_3^{\,/})$ найдем по формуле $B' = A^{-1}BA$

Вычислим сначала A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$B' = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 17 & 6 \\ 2 & 11 & 4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 25 & -24 \\ -13 & 17 & -16 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $B' = \begin{pmatrix} 19 & 25 & -24 \\ -13 & 17 & -16 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Пусть R^n - заданное *n*-мерное линейное пространство . Ненулевой вектор $\overline{h} \in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора (преобразования) ,заданного матрицей A , если найдется такое число λ , что выполняется равенство

$$A\overline{h} = \lambda \overline{h}$$

Само число λ называют собственным (или характеристическим) числом оператора *A*, соответствующим собственному вектору $\overline{h}$. Собственные (значения) матрицы *A* являются корнями характеристического уравнения *det* (A-λ E)=0, являющегося алгебраическим уравнением *n*-ой степени.

Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то характеристическое уравнение в координатной форме имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (***)$$

Для нахождения ненулевого собственного вектора

$$\overline{h}_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0,$$ отвечающему собственному числу λ_m,

$m=1,2,\ldots n$ надо решить линейную однородную систему (ЛОС) уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Эта ЛОС уравнений имеет бесконечно много решений. Поэтому, собственному значению λ_m соответствует семейство собственных векторов. Выбирают любой из них.

Если характеристическое уравнение (***) имеет n различных корней, то соответствующие им собственные векторы $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots \overline{h}_n$ - линейно независимые и образуют базис. Если среди корней характеристического уравнения (*) имеются кратные, т.е. равные корни, например, λ_1 - корень кратности *к*, то хорошо найти *к* линейно независимых собственных векторов $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots \overline{h}_k$, отвечающих собственному значению, кратности *к*; их число $m=n-r$, где n-порядок матрицы (А-λ_1Е), $r=Rang\,(A-\lambda_1 E)$; $m \leq k$.

Задание 10

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы *A*.

Пример 1

Дано:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$(2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$,

$(2-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2(2-\lambda)-4+\lambda=0$ или

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)=0$, $\lambda_1=2, \lambda_{2,3}=3$.

Откуда $\lambda_1=2, \lambda_{2,3}=3$-собственные значения матрицы A.

Для простого корня $\lambda_1=2$ находим собственный вектор

$\overline{h}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\neq 0$, решая ЛОС уравнений

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\ x_1+0\cdot x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+0\cdot x_3=0\end{cases}$$

коэффициенты этой системы равны элементам определителя det (A-λ E)=0, при $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

Решим методом Гаусса, исключая неизвестные:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

или $x_1 = x_2 = x_3$, где x_3 -свободная переменная ,

полагая $x_3 = c_1$, получаем, $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ -семейство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Например, $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для кратного корня $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. Подставляя $\lambda = 3$ в левую часть характеристического уравнения, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ее порядок *n=3* , ранг *r=1* (наивысший порядок миноров , не равных нулю). Число линейно независимых собственных векторов равно *m=n-r=2* и совпадает с кратностью корня *к=2* .Найдем их.

Имеем $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ или $x_1 = x_2 + x_3$.Полагая $x_2 = c_2, x = c_3$, где c_2, c_3-любые константы, одновременно не обращающееся в ноль, получим $\bar{h} = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$- семейство собственных векторов

для $l_2 = l_3 = 3$. Пусть $c_2 = 1, c_3 = 0$. Тогда $\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $c_2 = 0, c_3 = 1$. Тогда $\bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Два линейно независимых собственных вектора $\bar{h}_2$ и $\bar{h}_3$, соответствующих собственному числу $l_2 = l_3 = 3$.

Ответ: $l_1 = 2$, $l_2 = l_3 = 3$– собственные значения матрицы *A*, $\bar{h}_1 = (1,1,1)$, $\bar{h}_2 = (1,1,0)$, $\bar{h}_3 = (1,0,1)$ -соответствующие им линейно независимые вектора.

Пример 2

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 4\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \text{или}\ (2-\lambda)^2(-1-\lambda)+4=0$$

Откуда, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $\lambda^2(\lambda-3)=0$, следовательно $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=0$– - собственные значения данной матрицы.

б) Находим собственные векторы $\bar{h}_m$ из ЛОС уравнения:

$$\begin{cases}(2-\lambda_m)x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3=0\\ 0\cdot x_1+(2-\lambda_m)x_2+4x_3=0\\ 1\cdot x_1+0\cdot x_2+(-1-\lambda_m)x_3=0\end{cases}\quad \text{, где}\quad \bar{h}_m=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\neq 0$$

(*m=1,2,3)* искомый вектор .

Пусть $\lambda_1=3$ имеем:

$$\begin{cases}-x_1+x_2=0\\ 0\cdot x_1+4x_3=0\\ x_1-4\cdot x_3=0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=4x_3\\ x_1=4x_3\end{cases}.$$

Если положить $x_3 = c\ (c \neq 0)$, то $x_1 = 4c, x_2 = c$. Значит,

$\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} 4c \\ 4c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$-семейство собственных векторов для $\lambda_1 = 3$.

Например, $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c=1$.

Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ корни кратности 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 4x_3 = 0 \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - \cdot x_3 = 0 \end{cases},$$

где матрица коэффициентов $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ порядка $n=3$;

ее ранг равен $r=2$. Следовательно, число линейно независимых собственных векторов равно $m=n-r=3-2=1$ для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Решаем систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -4x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$, где x_3 -свободное неизвестное. Полагаем

$x_3 = c_1$. Тогда $\overline{h}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -4c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\forall\, c_1 \neq 0$ -семейство собственных векторов для собственного значения $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ответ: $\lambda_1 = 3$, $\overline{h}_1 = (4c, 4c, c)$;

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$,$\overline{h}_2 = \overline{h}_3 = (c_1, -4c_1, c_1)$, $\forall\, c, c_1 \neq 0$.

Пример 3

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором базисе симметричной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 1\right)^2 \left(\lambda - 10\right) = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 10$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

$$\begin{cases} \left(2-\lambda\right)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + \left(5-\lambda\right)x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + \left(5-\lambda\right)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Подставляем в систему $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

.

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_1 = (1, 2, -2)$.

Подставляем в систему $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_2 = (2, 0, 1)$. Заметим, что $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \Rightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$.

Третий собственный вектор находим как векторное произведение:

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = (2, -5, -4).$$

Ортонормированный базис будут составлять векторы:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\bar{e}_3 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right).$$

Матрица A линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если число переменных $n=2$. то квадратичная форма : $K(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$.

Если $n=3$, то

$K(x_1,x_2,x_3)= =a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3$.

__Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.__

Рассмотрим квадратичную форму трех переменных $K(x_1,x_2,x_3)$. Симметрическая матрица

$$S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

у которой $a_{ij}=a_{ji}$, ($i,j=1,2,3$ при $i\neq j$) называется матрицей квадратичной формы $K(x_1,x_2,x_3)$. Так как S - симметричная матрица, то корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

являются действительными числами и будут собственными значениями матрицы S .

Известно, что собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Следовательно, если матрица симметрическая, то можно говорить об ортогональном базисе векторов, составленном из собственных векторов этой матрицы.

Если среди корней характеристического уравнения есть корень кратности *к*, то можно указать *к* линейно независимых векторов, отвечающих этому собственному значению, согласно следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов матрицы оператора *A*, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность. Число линейно независимых векторов равно

$m=n-r$, где n -размерность матрицы, $r=Rang\ S$.

И так, каждому оператору в разных базисах соответствуют различные матрицы. Наша цель: найти такой базис, в котором матрица оператора имела бы простейший вид, а именно диагональный. В ортонормированном базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$,где на главной диагонали стоят собственные значения матрицы S , ибо характеристический многочлен линейного оператора (преобразования) не зависит от базиса.

Известно, что квадратичную форму $K(x_1,x_2,x_3)$ можно представить в виде скалярного произведения

$K(x_1, x_2, x_3) = (S\bar{x}, \bar{x})$,где

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; S\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Переходя к новому ортонормированному базису, где матрица перехода $B=T^{-1}ST$, старые и новые переменные (координаты) связаны преобразованием $\bar{x} = T\overline{x'}$, где $\overline{x'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ -вектор $\bar{x}$ в новой системе координат, получим квадратичную форму в новой системе координат, определенной базис из собственных нормированных векторов, в виде

$K(x_1', x_2', x_3') = (B\overline{x'}, \overline{x'}) = \lambda_1(\overline{x_1'})^2 + \lambda_2(\overline{x_2'})^2 + \lambda_3(\overline{x_3'})^2$,

не содержащем членов с произведением переменных, $x_1'x_2^1, x_2'x_3', x_1'x_3'$, который называется каноническим видом.

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' \\ x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' , \\ x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{cases}$$

где нормированные собственные векторы матрицы S:

$$\overline{u^0} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \overline{v^0} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \overline{w^0} = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

принято говорить, что квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Вывод. Чтобы привести каноническую форму к каноническому виду надо:

1) По коэффициентам квадратичной формы составить симметрическую матрицу *S*;

2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы *S*, причем собственные векторы пронормировать;

3) Записать квадратичную форму в каноническом виде

$$K(x_1, x_2, x_3) = l_1(\overline{x}_1)^2 + l_2(\overline{x}_2)^2 + l_3(\overline{x}_3)^2 .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Элементы алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. М.: Наука, 1980. 176 с.

2. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. М.: Наука, 2005. 320 с.

3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. М.: Наука, 1979. 390 с.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. М.: Наука, 2007. 333 с.

5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.

6. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 462 с.

8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.

9. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов / В.С. Шипачев. М., 2002.

10. Элементы линейной алгебры: учеб. пособие / Е. Г. Глушко, А. П. Дубровская, Л.Д. Кретова, Н.Б. Ускова. Воронеж, 1998. 120 с.

11. Федотенко Г.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие. / Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова. Воронеж, 2008. 161с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400.62 «Управление и информатика в технических системах», 221000.62 «Мехатроника и робототехника», 140400.62 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», «Электромеханика», 110800.62 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. 2,1 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14