

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

## **ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Методические указания  
к упражнениям и расчетной работе по  
курсу "Сопротивление материалов"  
часть 3 (теория упругости)  
для студентов специальности ПГС  
дневной формы обучения

ВОРОНЕЖ 2001

Составители: С.В. Ефрюшин, А.В. Резунов, А.Н. Синозерский

УДК 624

ББК 30.121

Плоская задача теории упругости: Методические указания к упражнениям и расчетной работе по курсу "Сопротивление материалов" часть 3 (теория упругости)/ Сост.: С.В. Ефрюшин, А.В. Резунов, А.Н. Синозерский; Воронеж. гос. арх.-строит. унив. Воронеж: 2001. с.

Приведены пояснения и разобраны примеры, необходимые для выполнения упражнений и расчетной работы по теме "Плоская задача теории упругости". Дан пример решения плоской задачи с помощью функции напряжений с использованием системы символьной математики MathCAD 7.0 PRO.

Предназначены для студентов третьего курса специальности ПГС дневной формы обучения.

Ил. 10. Библиогр.: 2 назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

Рецензент -

## ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей теории упругости является определение напряжений, деформаций и перемещений в точках упругого тела при известных размерах, значениях упругих постоянных, условиях закрепления, поверхностных и объемных силах. Искомое решение должно удовлетворять условиям на поверхности тела, дифференциальным уравнениям равновесия и совместности деформаций. Усвоению основных положений теории упругости способствуют рассмотренные ниже примеры выполнения упражнений и расчетной работы по теме "Плоская задача теории упругости".

Необходимые теоретические сведения излагаются на лекциях и содержатся в учебниках /1,2/. Схемы, размеры, нагрузки, значения упругих постоянных и т.п. к заданиям назначаются преподавателем.

## 1. УПРАЖНЕНИЕ №1. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

### 1.1. ЗАДАНИЕ

Пластинка 1-2-3-4 толщиной  $\delta=1$  закреплена по грани 3-4 и нагружена перпендикулярными к ее поверхности распределенными силами. Линейные размеры и величины нагрузок указаны на рис. 1.1. Начало отсчета декартовой прямоугольной системы координат помещено в точку 2.

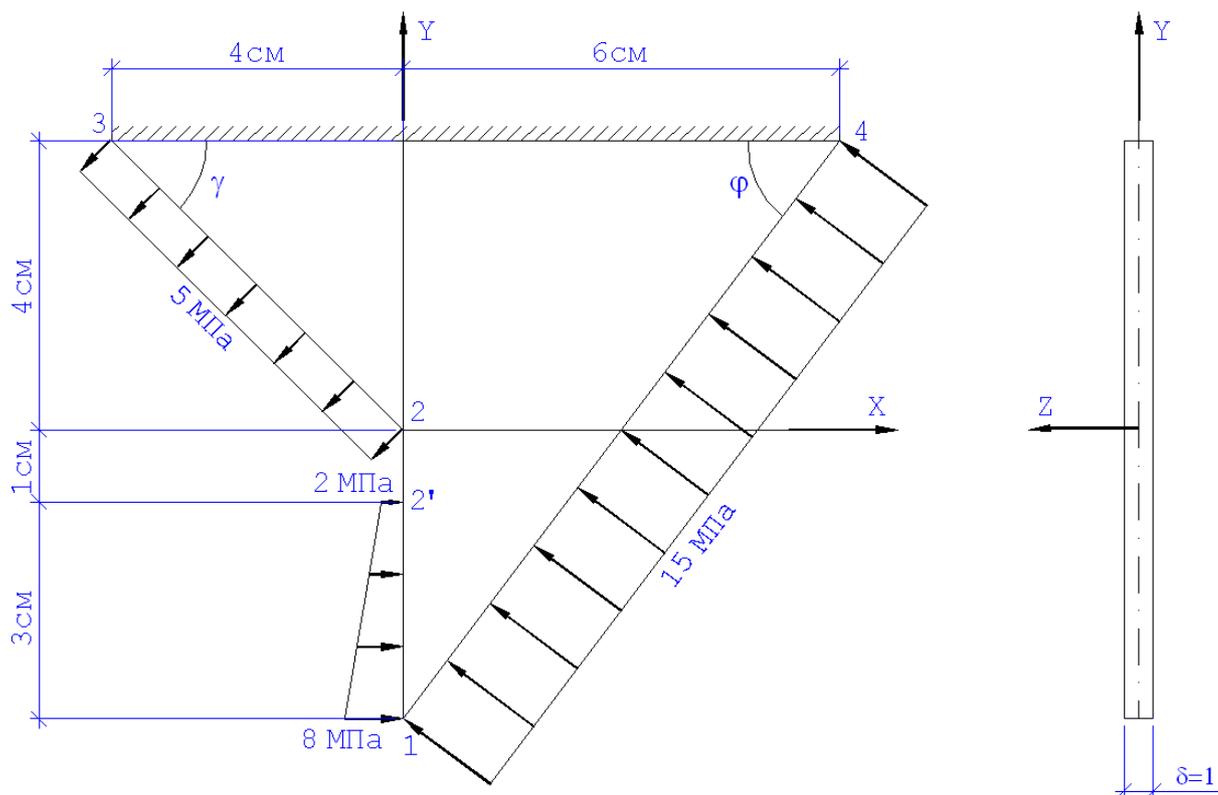


Рис. 1.1 М1:1

**Требуется**, соблюдая масштаб, **изобразить** пластинку и для всех граней, исключая закрепленную:

1) **1) найти** длину грани и указать интервалы изменения координат  $x$  и  $y$ ;

2) **определить** направляющие косинусы  $l = \cos \angle x, n$  и  $m = \cos \angle y, n$ , составляющие поверхностных сил  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ , а на участках с неравномерно распределенными нагрузками - зависимости

$$S = S(x), \bar{X} = \bar{X}(x), \bar{Y} = \bar{Y}(x) \text{ или } S = S(y), \bar{X} = \bar{X}(y), \bar{Y} = \bar{Y}(y);$$

3) **записать** уравнения на поверхности

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m, \quad \bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m. \quad (1.1)$$

При вычислении направляющих косинусов угол откладывается от положительного направления оси до внешней нормали  $n$  к грани.

### 1.2. УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

Сначала найдем длины граней и тригонометрические функции углов  $\gamma$  и  $\varphi$ . Имеем:

$$L_{12} = 4 \text{ см}, L_{23} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.657 \text{ см}, L_{14} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ см},$$

$$\cos \gamma = 4/5.657 = 0.707, \sin \gamma = 4/5.657 = 0.707, \cos \varphi = 6/10 = 0.6, \sin \varphi = 8/10 = 0.8.$$

**Грань 1-2** (рис. 1.2)

Участок 1-2'.

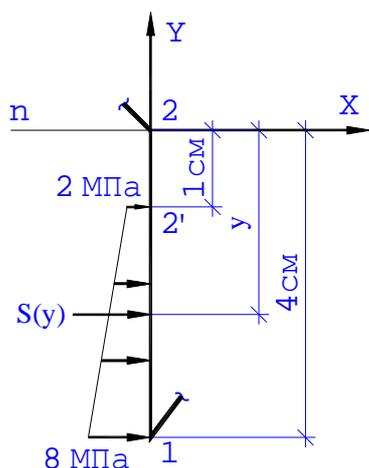


Рис. 1.2 М1:1

Интервалы изменения координат

$$x = 0 \text{ см}, -4 \text{ см} \leq y \leq -1 \text{ см}.$$

Направляющие косинусы

$$l = \cos \angle x, n = \cos 180^\circ = -1, \quad m = \cos \angle y, n = \cos 90^\circ = 0.$$

Поверхностные силы представим в виде  $S(y) = d \cdot y + e$ ,

(1.2)

где постоянные  $d$  и  $e$  находятся из условий

$$S(-4) = 8 \text{ МПа}, S(-1) = 2 \text{ МПа},$$

которые при подстановке в (1.2) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 8 = -4d + e, \\ 2 = -1d + e. \end{cases}$$

Отсюда находим  $d = -2 \text{ МПа/см}$ ,  $e = 0$  и, следовательно,  $S(y) = -2y \text{ МПа}$ .

Тогда составляющие поверхностных сил будут равны

$$\bar{X} = S(y) = -2y, \quad \bar{Y} = 0.$$

С учетом полученных  $l, m, \bar{X}, \bar{Y}$  уравнения (1.1) примут вид

$$-2y = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{yx} \cdot 0 = -\sigma_x, \quad 0 = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_x \cdot 0 = -\tau_{xy}.$$

Участок 2'-2.

Имеем: координаты  $x = 0 \text{ см}$  и  $-1 \text{ см} \leq y \leq 0 \text{ см}$ ; направляющие косинусы  $l = -1$  и  $m = 0$ ; составляющие поверхностных сил  $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ ; уравнения на поверхности  $0 = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{yx} \cdot 0 = -\sigma_x$ ,  $0 = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy}$ .

**Грань 2-3** (рис. 1.3):

координаты  $-4 \text{ см} \leq x \leq 0 \text{ см}$ ,  $0 \text{ см} \leq y \leq 4 \text{ см}$ ;

направляющие косинусы  $l = \cos \angle x, n = -\sin \gamma = -0.707$ ;  $m = \cos \angle y, n = -\cos \gamma = -0.707$ ; составляющие поверхностных сил

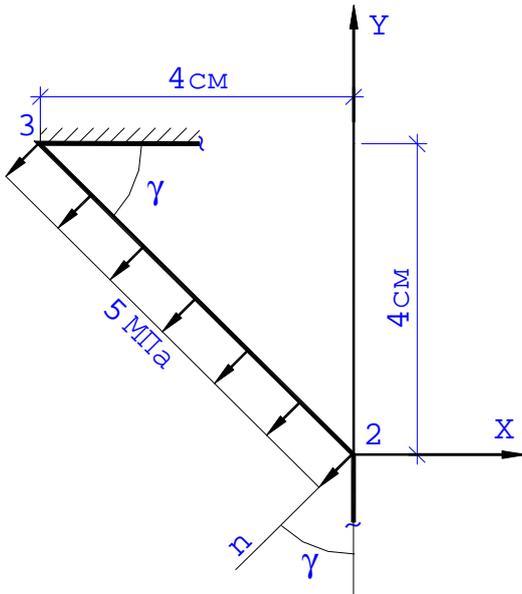


Рис. 1.3 М1:1

$$\bar{X} = -5 \sin \gamma = -5 \cdot 0.707 = -3.535 \text{ МПа},$$

$$\bar{Y} = -5 \cos \gamma = -5 \cdot 0.707 = -3.535 \text{ МПа};$$

уравнения на поверхности

$$-3.535 = \sigma_x \cdot (-0.707) + \tau_{yx} \cdot (-0.707),$$

$$-3.535 = \tau_{xy} \cdot (-0.707) + \sigma_y \cdot (-0.707).$$

Для **грани 1-4** (рис. 1.4) получим

$$0 \text{ см} \leq x \leq 6 \text{ см}, \quad -4 \text{ см} \leq y \leq 4 \text{ см};$$

$$l = \cos \angle x, n = \sin \varphi = 0.8,$$

$$m = \cos \angle y, n = -\cos \varphi = -0.6;$$

$$\bar{X} = -15 \sin \varphi = -15 \cdot 0.8 = -12 \text{ МПа},$$

$$\bar{Y} = 15 \cos \varphi = 15 \cdot 0.6 = 9 \text{ МПа};$$

уравнения на поверхности

$$-12 = \sigma_x \cdot 0.8 + \tau_{yx} \cdot (-0.6),$$

$$9 = \tau_{xy} \cdot 0.8 + \sigma_y \cdot (-0.6).$$

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите уравнения на поверхности в декартовых координатах для пространственного напряженного состояния.
2. То же для плоской задачи теории упругости.
3. Перечислите признаки плоского напряженного состояния.
4. То же для плоской деформации.
5. Как определяются направляющие косинусы?

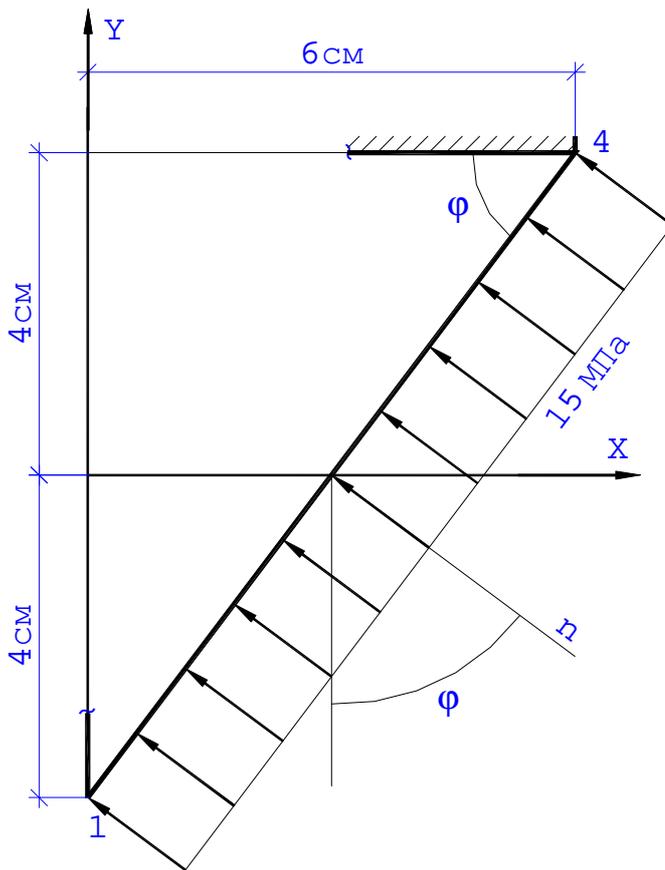


Рис. 1.4 М1:1

## 2. УПРАЖНЕНИЕ №2. ПРОВЕРКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

### 2.1. ЗАДАНИЕ

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.1а) высотой  $h$  и шириной  $b=1$ . Расчетная схема, необходимые размеры и действующие нагрузки показаны на рис. 2.1б.

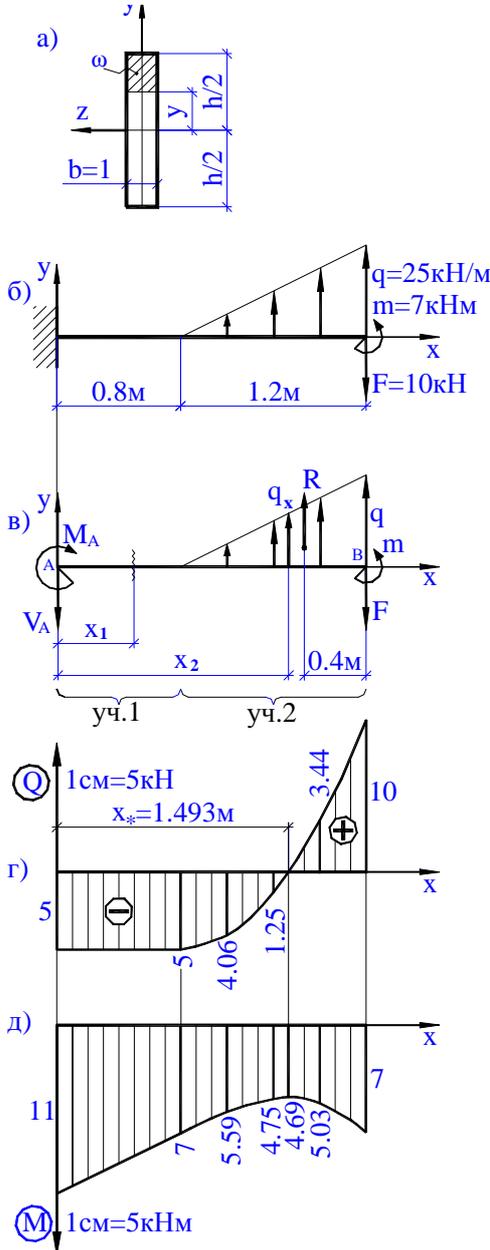


Рис. 2.1. М1:50

#### Требуется.

- 1) Найти опорные реакции и выполнить проверку.
- 2) Взяв начало координат на левом конце балки, записать выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . На участках загрузки с линейной зависимостью  $Q$  и  $M$  от координаты  $x$  вычислить их значения в двух крайних сечениях, при нелинейных зависимостях  $Q$  и  $M$  от  $x$  найти их в пяти равноотстоящих сечениях. Если на концах участка поперечная сила  $Q$  принимает значения разных знаков, необходимо определить положение сечения, в котором она обращается в нуль и вычислить в этом сечении значение изгибающего момента  $M$ . По полученным данным построить эпюры  $Q$  и  $M$ .
- 3) Пренебрегая весом балки и находя напряжения по формулам сопротивления материалов

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{Q \cdot S_z^{\omega}}{J_z \cdot b} = -\frac{Q}{2 \cdot J_z} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right); \\ \sigma_x &= -\frac{M \cdot y}{J_z}; \quad \sigma_y = 0, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

проверить выполнение дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

где  $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$  - момент инерции,  $S_z^{\omega} = \frac{b}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$  - статический момент

части поперечного сечения площадью  $\omega$  относительно оси  $z$  (рис. 2.1а).

4) На участке, где уравнение (2.3) в предположении, что  $\sigma_y = 0$ , не выполняется, определить  $\sigma_y$  из (2.3). В сечении, расположенном посередине этого участка, вычислить напряжения  $\sigma_y$  в пяти равноотстоящих точках и построить эпюру распределения  $\sigma_y$ .

## 2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Составим уравнения равновесия для сил, действующих на балку (рис. 2.1в)

$$\sum y = 0 \dots -V_A + R - F = 0, \quad \sum m_A = 0 \dots M_A - m - R \cdot 1.6 + F \cdot 2 = 0,$$

где  $R = 0.5 \cdot 25 \cdot 1.2 = 15 \text{ кН}$  - равнодействующая распределенной нагрузки.

Отсюда получим

$$V_A = R - F = 15 - 10 = 5 \text{ кН}, \quad M_A = m + R \cdot 1.6 - F \cdot 2 = 7 + 15 \cdot 1.6 - 10 \cdot 2 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Проверка:**

$$\sum m_B = 0 \dots M_A - V_A \cdot 2 + R \cdot 0.4 - m = 11 - 5 \cdot 2 + 15 \cdot 0.4 - 7 = 17 - 17 \equiv 0.$$

## 2.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР Q и M

**Участок 1** (рис. 2.1в).  $0 \leq x \leq 0.8 \text{ м}.$

$$Q_1 = -V_A = -5 \text{ кН}, \quad M_1 = -V_A \cdot x + M_A = -5 \cdot x + 11, \quad (2.4)$$

$$M_1(0) = -5 \cdot 0 + 11 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_1(0.8) = -5 \cdot 0.8 + 11 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Участок 2** (рис. 2.1в).  $0.8 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}.$

$$q_x = \frac{25}{1.2} \cdot (x - 0.8).$$

$$Q_2 = -V_A + \frac{1}{2} \cdot q_x \cdot (x - 0.8) = -5 + \frac{25}{2.4} \cdot (x - 0.8)^2, \quad (2.5)$$

$$Q_2(0.8) = -5 \text{ кН}, \quad Q_2(1.1) = -4.06 \text{ кН}, \quad Q_2(1.4) = -1.25 \text{ кН}, \quad Q_2(1.7) = -3.44 \text{ кН}, \quad Q_2(2) = 10 \text{ кН}.$$

Полагая  $Q(x_*) = 0$ , будем иметь  $-5 + \frac{25}{2.4} \cdot (x_* - 0.8)^2 = 0$ . Отсюда  $x_* = 1.493 \text{ м}.$

$$M_2 = -V_A \cdot x + M_A + \frac{1}{2} \cdot q_x \cdot (x - 0.8) \cdot \frac{(x - 0.8)}{3} = -5 \cdot x + 11 + \frac{25}{7.2} \cdot (x - 0.8)^3; \quad (2.6)$$

$$M_2(0.8) = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2(1.1) = 5.59 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2(1.4) = 4.75 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2(1.7) = 5.03 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2(2) = 7.00 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2(1.493) = 4.69 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным на рис. 2.1г и рис. 2.1д построены эпюры Q и M.

## 2.4. ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

**Участок 1.** Подставим выражения (2.4) в формулы (2.1)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{5}{2 \cdot J_z} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{2.5}{J_z} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \sigma_x = \frac{(5 \cdot x - 11) \cdot y}{J_z}.$$

Тогда найдем  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{5 \cdot y}{J_z}$ ,  $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\frac{5 \cdot y}{J_z}$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$  и, подставляя эти соотношения в (2.2), (2.3), получим

$$\frac{5 \cdot y}{J_z} - \frac{5 \cdot y}{J_z} = 0, \quad 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, на участке 1 решение, полученное с использованием формул сопротивления материалов, удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия.

**Участок 2.** С учетом (2.5), (2.6) выражения (2.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \left[ 5 - \frac{25}{2.4} \cdot (x - 0.8)^2 \right] \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot J_z}, \\ \sigma_x &= \left[ 5 \cdot x - 11 - \frac{25}{7.2} \cdot (x - 0.8)^3 \right] \cdot \frac{y}{J_z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \left[ 5 - \frac{25 \cdot 3}{7.2} \cdot (x - 0.8)^2 \right] \cdot \frac{y}{J_z}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = - \left[ 5 - \frac{25}{2.4} \cdot (x - 0.8)^2 \right] \cdot \frac{y}{J_z}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= - \frac{25 \cdot 2}{2.4 \cdot 2 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в уравнения (2.2), (2.3)

$$\begin{aligned} \left[ 5 - \frac{25}{2.4} \cdot (x - 0.8)^2 \right] \cdot \frac{y}{J_z} - \left[ 5 - \frac{25}{2.4} \cdot (x - 0.8)^2 \right] \cdot \frac{y}{J_z} &= 0, \\ - \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + 0 &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Следовательно, первое из дифференциальных уравнений равновесия (2.2) выполняется, а второе уравнение (2.3) не выполняется. Для устранения этого противоречия необходимо отказаться от используемой в сопротивлении материалов гипотезы об отсутствии в балке напряжений  $\sigma_y$ .

## 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ $\sigma_y$

Предполагая, что в (2.3)  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \neq 0$ , вместо уравнения (2.8) получим

$$- \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.9)$$

Интегрируя выражение (2.9) по  $y$ , будем иметь

$$\sigma_y(x, y) = \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + C(x). \quad (2.10)$$

Функцию  $C(x)$  определим из условия  $\sigma_y = 0$  при  $y = -\frac{h}{2}$

$$\frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left[ \frac{h^2}{4} \cdot \left( -\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] + C(x) = 0,$$

$$C(x) = \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \frac{h^3}{12}. \quad (2.11)$$

Подставим (2.11) в (2.10)

$$\sigma_y(x, y) = \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + \frac{25}{2.4 \cdot J_z} \cdot (x - 0.8) \cdot \frac{h^3}{12}. \quad (2.12)$$

С учетом, что  $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ , получим окончательно

$$\sigma_y(x, y) = \frac{125}{b \cdot h^3} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + \frac{25}{2.4 \cdot b} \cdot (x - 0.8). \quad (2.13)$$

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , определяемые формулами (2.7), (2.12), тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия. Проверим, что (2.13) удовлетворяет условиям на верхней

грани балки, где  $\sigma_y = \frac{q_x}{b} = \frac{25}{1.2 \cdot b} \cdot (x - 0.8)$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_y \left( x, \frac{h}{2} \right) &= \frac{125}{b \cdot h^3} \cdot (x - 0.8) \cdot \left( \frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{2} - \frac{h^3}{3 \cdot 8} \right) + \frac{25}{2.4 \cdot b} \cdot (x - 0.8) = \\ &= \frac{125}{12 \cdot b} \cdot (x - 0.8) + \frac{25}{2.4 \cdot b} \cdot (x - 0.8) = \frac{25}{1.2 \cdot b} \cdot (x - 0.8). \end{aligned}$$

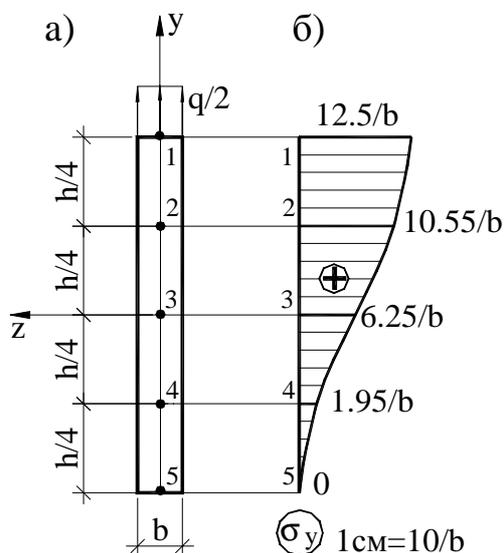


Рис. 2.2

В сечении, расположенном посередине второго участка ( $x = 1.4$  м), выражение (2.13) приводится к виду

$$\begin{aligned} \sigma_y(1.4, y) &= \frac{75}{b \cdot h^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + \frac{6.25}{b} = \\ &= \frac{6.25}{b} \cdot \left( 3 \cdot \frac{y}{h} - 4 \cdot \frac{y^3}{h^3} + 1 \right) \end{aligned}$$

и, следовательно, в точках 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 2.2.а) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_y \left( 1.4, \frac{h}{2} \right) &= \frac{12.5}{b}, \quad \sigma_y \left( 1.4, \frac{h}{4} \right) = \frac{10.55}{b}, \quad \sigma_y(1.4, 0) = \frac{6.25}{b}, \\ \sigma_y \left( 1.4, -\frac{h}{4} \right) &= \frac{1.95}{b}, \quad \sigma_y \left( 1.4, -\frac{h}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Соответствующая этим данным эпюра изображена на рис. 2.2.б.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите дифференциальные уравнения равновесия в декартовых координатах для плоского напряженного состояния.
2. То же для пространственного напряженного состояния.
3. То же при учете только собственного веса.
4. Запишите дифференциальные зависимости между поперечной силой  $Q$ , изгибающим моментом  $M$  и интенсивностью распределенной нагрузки  $q$ .
5. Как найти экстремальное значение изгибающего момента?

### 3. РАСЧЕТНАЯ РАБОТА. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

#### 3.1. ЗАДАНИЕ

Для прямоугольной пластинки 1-2-3-4 длиной  $L=0.8$  м, высотой  $H=0.6$  м, толщиной  $\delta=1$  (рис. 3.1) при заданных функции напряжений

$$\varphi = -50 \cdot x^3 \cdot y; \quad (3.1)$$

условиях закрепления

$$\text{в точке 6} - V=0, \quad (3.2)$$

$$\text{в точке 7} - U=0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

и начале координат в точке 5 - центре тяжести пластинки **требуется:**

- 1) **проверить** выполнение уравнения совместности деформаций

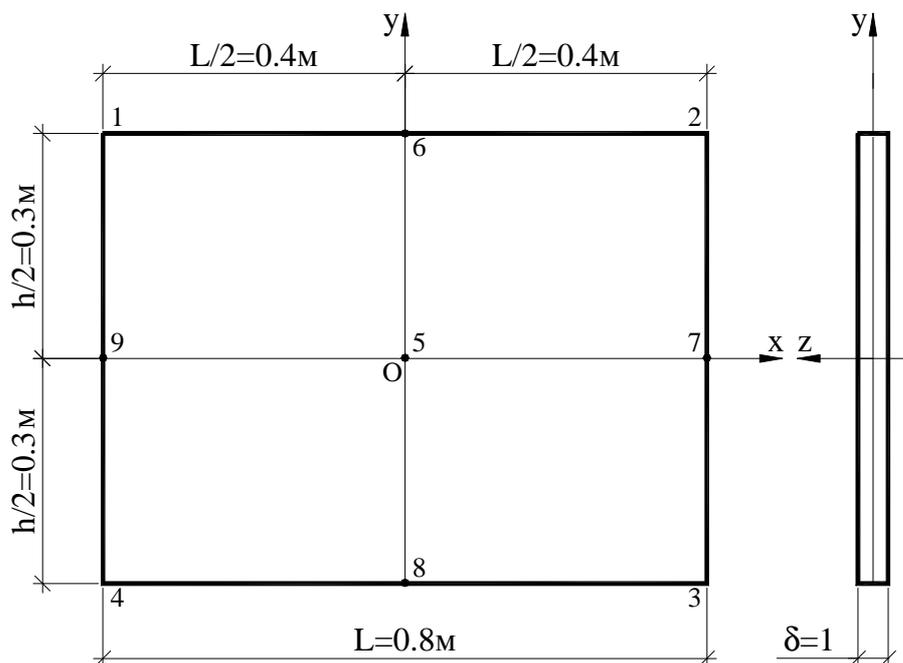


Рис. 3.1 М1:10

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.4)$$

и, пренебрегая объемными силами, **найти** напряжения

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad (3.5)$$

- 2) для каждой грани **установить** – интервалы изменения координат  $x$  и  $y$  и направляющие косинусы  $l$  и  $m$ ; из уравнений на поверхности (1.1) и (1.2) **определить** составляющие  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  внешних сил; **построить** эпюры  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ ; **найти** составляющие  $\bar{R}^x$  и  $\bar{R}^y$  по осям координат равнодействующей и момент  $M$  относительно центра тяжести грани внешних сил; **проверить** выполнение уравнений равновесия  $\sum x=0, \sum y=0, \sum m_5=0$  с допустимыми невязками до 1% от суммы всех слагаемых одного знака;
- 3) при коэффициенте Пуассона  $\nu=0.25$ , модулях упругости  $E$  и сдвига  $G=E/2/(1+\nu)=E/2.5$  **определить** перемещения  $U$  и  $V$  точки 4, привлекая

$$\text{закон Гука} - \left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) / E = (\sigma_x - 0.25 \cdot \sigma_y) / E \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) / E = (\sigma_y - 0.25 \cdot \sigma_x) / E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G = 2.5 \cdot \tau_{xy} / E \end{aligned} \right\}, \quad (3.6)$$

**зависимости Коши** –

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.7)$$

и заданные условия закрепления;

**показать** на рисунке найденные перемещения  $U$  и  $V$ ;

- 4) **выполнить** проверочный расчет на ПЭВМ и представить протокол расчета.

### 3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Вычисляя производные функции  $\varphi(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -150 \cdot x^2 \cdot y, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -300 \cdot x \cdot y, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= -300 \cdot y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -50 \cdot x^3, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -150 \cdot x^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= -300 \cdot x, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

и подставляя в уравнение совместности деформаций (3.4), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

По формулам (3.5) находим напряжения

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -300 \cdot x \cdot y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 150 \cdot x^2. \quad (3.8)$$

### 3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

**Грань 1-2.**

Интервалы изменения координат  $-0.4 \text{ м} \leq x \leq 0.4 \text{ м}$ ,  $y = 0.3 \text{ м}$ .

Направляющие косинусы  $l = \cos 90^\circ = 0$ ,  $m = \cos 0^\circ = 1$ .

Интенсивности поверхностных сил найдем по (1.1) и (1.2) с учетом выражений (3.8)

$$\bar{X}=0\cdot 0+150\cdot x^2\cdot 1=150\cdot x^2, \quad \bar{Y}=150\cdot x^2\cdot 0+(-300\cdot x\cdot y)\cdot 1=-300\cdot x\cdot 0.3=-90\cdot x.$$

Функция  $\bar{X}(x)$  нелинейная, поэтому вычисляем ее через  $0.25\cdot L=0.2$  м

$$\bar{X}(-0.4)=150\cdot(-0.4)^2=24\text{МПа}, \quad \bar{X}(-0.2)=6\text{МПа}, \quad \bar{X}(0)=0\text{МПа},$$

$$\bar{X}(0.2)=6\text{МПа}, \quad \bar{X}(0.4)=24\text{МПа}.$$

Зависимость  $\bar{Y}(x)$  линейная и для построения эпюры  $\bar{Y}$  достаточно найти  $\bar{Y}(-0.4)=-90\cdot(-0.4)=36\text{МПа}$ ,  $\bar{Y}(0.4)=-90\cdot 0.4=-36\text{МПа}$ .

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны

$$R_{1-2}^x = \int_{-0.4}^{0.4} \bar{X} \cdot dx \cdot \delta = 150 \cdot \delta \cdot \int_{-0.4}^{0.4} x^2 \cdot dx = 150 \cdot \delta \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-0.4}^{0.4} = 50 \cdot [0.4^3 - (-0.4)^3] \cdot \delta = 6.4 \cdot \delta,$$

$$R_{1-2}^y = \int_{-0.4}^{0.4} \bar{Y} \cdot dx \cdot \delta = -90 \cdot \delta \cdot \int_{-0.4}^{0.4} x \cdot dx = -90 \cdot \delta \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-0.4}^{0.4} = -45 \cdot [0.4^2 - (-0.4)^2] \cdot \delta = 0,$$

$$M_{1-2} = \int_{-0.4}^{0.4} (-\bar{Y}) \cdot x \cdot dx \cdot \delta = 90 \cdot \delta \cdot \int_{-0.4}^{0.4} x^2 \cdot dx = 90 \cdot \delta \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-0.4}^{0.4} = 30 \cdot [0.4^3 - (-0.4)^3] \cdot \delta = 3.84 \cdot \delta.$$

По полученным данным на рис. 3.2 построены эпюры величин  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  на грани **1-2** и показаны значения и направления  $R_{1-2}^x$ ,  $R_{1-2}^y$ ,  $M_{1-2}$ .

### Грань 2-3.

Интервалы изменения координат  $x = 0.3$  м,  $-0.3$  м  $\leq y \leq 0.3$  м.

Направляющие косинусы  $l = \cos 0^\circ = 1$ ,  $m = \cos 90^\circ = 0$ .

Характеристики поверхностных сил

$$\bar{X}=0\cdot 1+150\cdot x^2\cdot 0=0, \quad \bar{Y}=150\cdot x^2\cdot 1+(-300\cdot x\cdot y)\cdot 0=150\cdot 0.4^2=24\text{МПа}.$$

$$R_{2-3}^y = \int_{-0.3}^{0.3} \bar{Y} \cdot dy \cdot \delta = \int_{-0.3}^{0.3} 24 \cdot dy \cdot \delta = 24 \cdot \delta \cdot \left. y \right|_{-0.3}^{0.3} = 24 \cdot \delta \cdot [0.3 - (-0.3)] = 14.4 \cdot \delta,$$

$$R_{2-3}^x = \int_{-0.3}^{0.3} \bar{X} \cdot dy \cdot \delta = \int_{-0.3}^{0.3} 0 \cdot dy \cdot \delta = 0, \quad M_{2-3} = \int_{-0.3}^{0.3} \bar{X} \cdot y \cdot dy \cdot \delta = \int_{-0.3}^{0.3} 0 \cdot y \cdot dy \cdot \delta = 0.$$

Эпюры величин  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ , значения и направления  $R^x$ ,  $R^y$ ,  $M$  на грани **2-3** изображены на рис. 3.2.

Аналогично выполняются соответствующие расчеты и построения для **граней 3-4 и 1-4**.

$$R_{3-4}^x = -6.4 \cdot \delta, \quad R_{3-4}^y = 0, \quad M_{3-4} = 3.84 \cdot \delta, \quad R_{1-4}^x = 0, \quad R_{1-4}^y = 14.4 \cdot \delta, \quad M_{1-4} = 0.$$

**Проверка** равновесия пластинки в целом

$$\sum X = 0, \quad R_{1-2}^x + R_{2-3}^x + R_{3-4}^x + R_{1-4}^x = 6.4 \cdot \delta + 0 - 6.4 \cdot \delta + 0 = 0,$$

$$\sum Y = 0, \quad R_{1-2}^y + R_{2-3}^y + R_{3-4}^y + R_{1-4}^y = 0 + 14.4 \cdot \delta + 0 - 14.4 \cdot \delta = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum m_5 = 0, \quad & M_{1-2} + R_{1-2}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{2-3} - R_{2-3}^y \cdot \frac{L}{2} + M_{3-4} - R_{3-4}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{1-4} + R_{1-4}^y \cdot \frac{L}{2} \\ & = 3.84 \cdot \delta + 6.4 \cdot \delta \cdot 0.3 + 0 - 14.4 \cdot \delta \cdot 0.4 + 3.84 \cdot \delta + 6.4 \cdot \delta \cdot 0.3 + 0 - 14.4 \cdot \delta \cdot 0.4 = 11.52 \cdot \delta - 11.52 \cdot \delta = 0. \end{aligned}$$

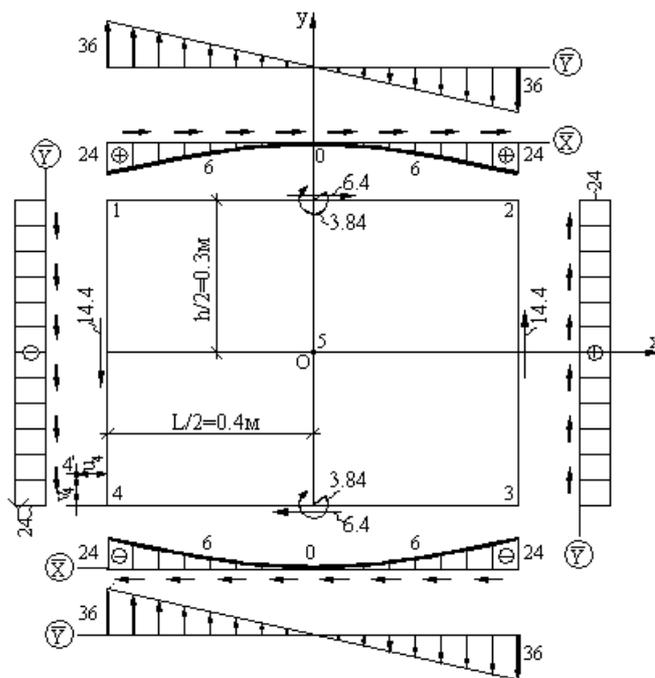


Рис. 3.2 М1:10; масштабы - эпюр  $\bar{X}, \bar{Y}$  1 см = 40 МПа; перемещений 1 см = 30/E.

### 3.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛАСТИНКИ

Подставляя напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$  из (3.8) в выражения для закона Гука (3.6) и затем найденные деформации в соотношения Коши (3.7), будем иметь

$$\epsilon_x = [0 - 0.25 \cdot (-300 \cdot x \cdot y)] / E = 75 \cdot x \cdot y / E,$$

$$\epsilon_y = [(-300 \cdot x \cdot y) - 0.25 \cdot 0] / E = -300 \cdot x \cdot y / E,$$

$$\gamma_{xy} = 2.5 \cdot 150 \cdot x^2 / E = 375 \cdot x^2 / E$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 75 \cdot x \cdot y / E, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -300 \cdot x \cdot y / E, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{375 \cdot x^2}{E}. \tag{3.11}$$

Интегрируя выражения (3.9) и (3.10), получим

$$U = \frac{75 \cdot y \cdot x^2}{2 \cdot E} + f(y) = \frac{37.5 \cdot y \cdot x^2}{E} + f(y), \tag{3.12}$$

$$V = -\frac{300 \cdot x \cdot y^2}{2 \cdot E} + g(x) = -\frac{150 \cdot x \cdot y^2}{E} + g(x), \tag{3.13}$$

Здесь  $g(x)$  и  $f(y)$  неизвестные функции аргументов  $x$  и  $y$  соответственно. Для нахождения функций  $g(x)$  и  $f(y)$  продифференцируем соотношение (3.12) по  $y$ , а (3.13) по  $x$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3.75 \cdot x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{150 \cdot y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx}$$

и, подставляя найденные производные в (3.11), найдем

$$\frac{37.5 \cdot x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy} - \frac{150 \cdot y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{37.5 \cdot x^2}{E}$$

или

$$\frac{df(y)}{dy} - \frac{150 \cdot y^2}{E} = -\frac{dg(x)}{dx} + \frac{337.5 \cdot x^2}{E}. \quad (3.14)$$

В уравнении (3.14) левая часть зависит только от переменной  $y$ , а правая часть – только от переменной  $x$ . Это возможно при условии, что каждая из них равна некоторой произвольной постоянной.

$$\frac{df(y)}{dy} - \frac{150 \cdot y^2}{E} = a, \quad -\frac{dg(x)}{dx} + \frac{337.5 \cdot x^2}{E} = a. \quad (3.15)$$

Интегрируя уравнения (3.15), получим

$$f(y) = \frac{150 \cdot y^3}{3 \cdot E} + a \cdot y + b = \frac{50}{E} \cdot y^3 + a \cdot y + b,$$
$$g(x) = \frac{337.5 \cdot x^3}{3 \cdot E} - a \cdot x + c = \frac{112.5}{E} \cdot x^3 - a \cdot x + c.$$

Подставляя найденные функции в равенства (3.12) (3.13), будем иметь

$$U = \frac{37.5}{E} \cdot x^2 \cdot y + \frac{50}{E} \cdot y^3 + a \cdot y + b, \quad (3.16)$$

$$V = -\frac{150}{E} \cdot x \cdot y^2 + \frac{112.5}{E} \cdot x^3 - a \cdot x + c. \quad (3.17)$$

Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определим из заданных условий (3.2), (3.3) закрепления пластинки. Подставляя в (3.16)  $x=0.4\text{м}$ ,  $y=0$ ,  $U=0$  и в (3.17)  $x=0$ ,  $y=0.3\text{м}$ ,  $V=0$ , найдем

$$0 = \frac{37.5}{E} \cdot 0.4^2 \cdot 0 + \frac{50}{E} \cdot 0^3 + a \cdot 0 + b,$$

$$0 = -\frac{150}{E} \cdot 0 \cdot 0.3^2 + \frac{112.5}{E} \cdot 0^3 - a \cdot 0 + c$$

или  $b=0$ ,  $c=0$ .

Чтобы воспользоваться третьим граничным условием, продифференцируем функцию (3.17) по  $x$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{150}{E} \cdot y^2 + \frac{112.5}{E} \cdot 3 \cdot x^2 - a.$$

Подставляя сюда  $x=0.4\text{м}$ ,  $y=0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ , получим

$$0 = -\frac{150}{E} \cdot 0^2 + \frac{112.5}{E} \cdot 3 \cdot 0.4^2 - a.$$

Таким образом, имеем  $a=54/E$ . Выражения (3.16), (3.17) после подстановки в них найденных значений произвольных постоянных будут иметь вид

$$U = \frac{37.5}{E} \cdot x^2 \cdot y + \frac{50}{E} \cdot y^3 + \frac{54}{E} \cdot y,$$

$$V = -\frac{150}{E} \cdot x \cdot y^2 + \frac{112.5}{E} \cdot x^3 - \frac{54}{E} \cdot x.$$

Для точки 4 с координатами  $x=-0.4\text{м}$ ,  $y=-0.3\text{м}$ , найдем

$$U_4 = \frac{37.5}{E} \cdot (-0.4)^2 \cdot (-0.3) + \frac{50}{E} \cdot (-0.3)^3 + \frac{54}{E} \cdot (-0.3) = -\frac{19.35}{E},$$

$$V_4 = -\frac{150}{E} \cdot (-0.4) \cdot (-0.3)^2 + \frac{112.5}{E} \cdot (-0.4)^3 - \frac{54}{E} \cdot (-0.4) = \frac{19.80}{E}.$$

В результате деформации пластинки точка 4 займет положение 4' (см. рис. 3.2).

### 3.5. ПОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ НА ПЭВМ

Ниже приводится листинг программы для выполнения расчетной работы с использованием системы символьной математики MathCAD 7.0 PRO. Для выполнения расчета с другими исходными данными необходимо в среде системы MathCAD загрузить файл "Пластина" и изменить исходные данные в начале программы и там, где это указано в тексте.

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте условия осуществления плоского напряженного состояния.
2. То же для плоской деформации.
3. Запишите основные уравнения для плоского напряженного состояния.
4. То же для плоской деформации.
5. В чем заключаются прямой, обратный и полуобратный методы решение задачи теории упругости.
6. Сформулируйте теорему Кирхгофа о единственности решения задачи теории упругости.
7. Что означает оператор Лапласа  $\nabla^2$ ?
8. Как и зачем вводится функция напряжений?
9. К решению какого уравнения сводится плоская задача теории упругости при использовании функции напряжений?

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. вузов.-М: Высш. шк., - 400 с.
2. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности.-М.: Наука, 1984. - 320 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. УПРАЖНЕНИЕ №1. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ .....	3
1.1. ЗАДАНИЕ .....	3
1.2. УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ .....	4
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	5
2. УПРАЖНЕНИЕ №2. ПРОВЕРКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ .....	6
2.1. ЗАДАНИЕ .....	6
2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ .....	7
2.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР Q И M .....	7
2.4. ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ...	7
2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ $\sigma_y$ .....	8
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	10
3. РАСЧЕТНАЯ РАБОТА. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ .....	10
3.1. ЗАДАНИЕ .....	10
3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ .....	11
3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ .....	11
3.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛАСТИНКИ .....	13
3.5. ПОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ НА ПЭВМ .....	15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	16

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. Методические указания к упражнениям и расчетной работе по курсу "Сопротивление материалов" часть 3 для студентов специальности ПГС дневной формы обучения.

Составители – доц., канд. техн. наук Сергей Владимирович Ефрюшин,  
– доц., канд. Физ.-мат. наук Александр Васильевич Резунов,  
– проф., канд. техн. наук Александр Николаевич Синозерский

Редактор –

Подп. в печать \_\_\_\_\_ . Формат 60x84 1/16

Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_ . Усл.-печ. л. \_\_\_\_\_ . Бумага для множительных аппаратов

Тираж \_\_\_\_\_ . Заказ \_\_\_\_\_ .

---

Отпечатано на ротапринте Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84.