МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра «Ракетные двигатели»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для проведения практических и самостоятельных занятий по дисциплине «Методы математического моделирования» для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения

Воронеж 2015

Составители: д-р техн. наук Ю.В. Демьяненко
канд. техн. наук А.А. Гуртовой
д-р техн. наук А.В. Кретинин
канд.физ.-мат. наук А.М. Сушков

УДК 629.13

Методические указания для проведения практических и самостоятельных занятий по дисциплине «Методы математического моделирования» для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет"; Сост. А.А. Гуртовой, Ю.В. Демьяненко, А.В. Кретинин, А.М. Сушков. Воронеж, 2015. 45 с.

В методических указаниях изложены краткие теоретические сведения и вычислительные алгоритмы, которые охватывают следующие разделы программы: методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений; среднеквадратичное приближение функций; метод наименьших квадратов; интерполирование функций

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей», дисциплине «Методы математического моделирования».

Рецензент д-р техн. наук, проф. Г.И. Скоморохов.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. В.С. Рачук.

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания написаны в соответствии с программой по дисциплине «Математическое моделирование», изучаемой студентами технических вузов.

Методические указания состоят из 3 глав, которые охватывают следующие разделы программы: методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений; среднеквадратичное приближение функций; метод наименьших квадратов; эмпирические формулы; интерполирование функций.

В каждой главе приводятся необходимые теоретические сведения – основные теоремы, определения, формулы, различные численные методы, а также примеры, иллюстрирующие применение описанных методов.

Основная цель пособия – помочь развитию практических навыков в применении численных методов. Достижению этой цели способствует, прежде всего, единообразный подход к изложению материалов пособия. Каждая тема содержит: вычислительный алгоритм, теоретические обоснования его применения, условия окончания вычислительного процесса, примеры, а также, в приложениях, – блок-схемы вычислительных алгоритмов.

Настоящие методические указания предназначены для студентов, но может оказаться полезным преподавателям, инженерам и научным работникам, использующим в своей деятельности вычислительные методы.

1. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Метод итераций для одного уравнения с одним неизвестным

Пусть требуется решить уравнение, представленное в виде

$$x = g(x), \tag{1.1}$$

где правая часть уравнения – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $g(x)$. Суть **метода итераций (метода последовательных приближений)** состоит в следующем. Начиная с произвольной точки $x^{(0)}$, принадлежащей отрезку $[a,b]$, последовательно получаем

$x^{(1)} = g(x^{(0)})$ – первое приближение,

$x^{(2)} = g(x^{(1)})$ – второе приближение,

…………………………………….

$x^{(R+1)} = g(x^{(R)})$ – $R+1$-е приближение,

……………………………………..

Последовательность

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ldots,x^{(R)},\ldots \tag{1.2}$$

называется **последовательностью итераций** для уравнения (1.1) с начальной точкой $x^{(0)}$. Если все точки (1.2) принадлежат отрезку $[a,b]$ и существует предел $\xi = \lim\limits_{R\to\infty} x^{(R)}$, то, перейдя к пределу в равенстве

$$x^{(R+1)} = g(x^{(R)}) \quad (R = 0,1,2,\ldots), \tag{1.3}$$

получим $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x^{(k)})$, т.е. $\xi = g(\xi)$.

Следовательно, если существует предел последовательности итераций (1.2), то он является корнем уравнения (1.1). Достаточные условия сходимости последовательности итераций содержатся в следующей теореме.

<u>Теорема.</u> *Пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную и выполнены два условия:*

1) $|g'(x)| \le q < 1$ при $x \in [a,b]$;

2) значение функции $y = g(x)$ принадлежат отрезку $[a,b]$ для любого $x \in [a,b]$.

Тогда при любом выборе начального приближения $x^{(0)} \in [a,b]$ процесс итераций сходится к единственному корню ξ уравнения (1.1) на отрезке $[a,b]$.

Оценка погрешности *k*-го приближения $x^{(k)}$ к корню ξ такова:

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right|, \qquad (1.4)$$

где $q = \max\limits_{a\le x\le b} |g'(x)|$.

Укажем теперь один из способов преобразования уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (1.5)$$

к виду $x = g(x)$, допускающему применения метода итераций, сходящихся к решению ξ уравнения (1.5).

Для любого числа $\lambda \ne 0$ уравнение (1.5) равносильно уравнению (1.1), где $g(x) = x + \lambda f(x)$. Предположим, что производная $f'(x) > 0$ и непрерывна на $[a,b]$. Пусть

$M = \max\limits_{a \le x \le b} f'(x), \quad m = \min\limits_{a \le x \le b} f'(x);$ положим $\lambda = -\dfrac{1}{M}, \quad q = 1 - \dfrac{m}{M}$ и рассмотрим функцию

$$g(x) = x - \frac{1}{M} f(x). \tag{1.6}$$

Для функции, определенной формулой (1.6), выполняются достаточные условия сходимости метода итераций решения уравнения (1.5). В частности, условие теоремы 1 следует из неравенств

$$0 < m \le f'(x) \le M,$$

$$0 \le g'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) \le 1 - \frac{m}{M} = q < 1 \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Замечание 1. Если окажется, что производная $f'(x)$ отрицательна на отрезке $[a, b]$, то уравнение (1.1) можно заменить на уравнение $-f(x) = 0$ и использовать указанное преобразование.

Замечание 2. Если вычисление точного значения числа $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$ затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако при большом M_1 число $q = 1 - \dfrac{m}{M_1}$ ближе к единице и процесс итераций сходится медленнее.

Замечание 3. При нахождении корня уравнения (1.1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ или при оценке погрешности k-го приближения можно, не вычисляя точного значения числа $q = \max\limits_{a \le x \le b} |g'(x)|$, ограничиться следующей практической рекомендацией:

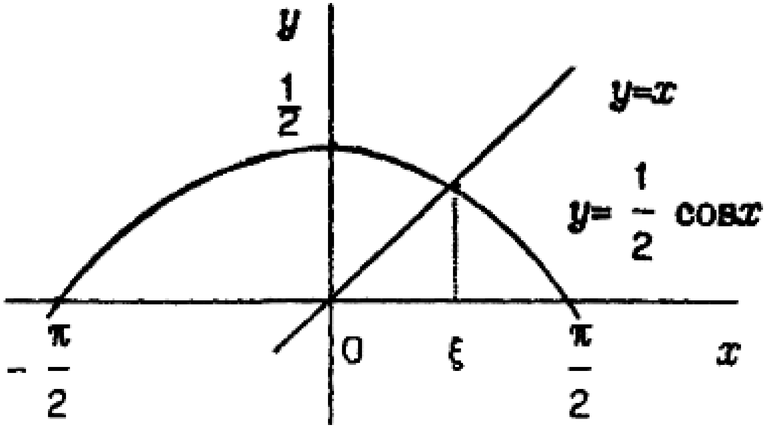


Рис. 1 – Графики функций $y = x$ и $y = \frac{1}{2}\cos x$

$$
\left|\xi - x^{(k)}\right| \le \begin{cases} \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \quad \textbf{при } 0 < q \le \frac{1}{2}; & (2.7\textbf{а}) \\ 10\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \quad \textbf{при } \frac{1}{2} < q \le 1. & (2.7\textbf{б}) \end{cases}
$$

Пример 1. Решить с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ уравнение

$$2x - \cos x = 0. \qquad (1.8)$$

Решение. Для отделения корней представим уравнение (1.8) в виде $x = \frac{1}{2}\cos x.$

Построив график функций $y = x$ и $y = \frac{1}{2}\cos x$ (рис. 1), видим, что корень уравнения (1.8) содержится внутри отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Здесь $f(x) = 2x - \cos x$; $f'(x) = 2 = \sin x > 0$;

$M = \max\limits_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} f'(x) = 2$; $\lambda = -\dfrac{1}{M} = -\dfrac{1}{2}$ и

$$g(x) = x + \lambda f(x) = x - \frac{1}{2}(2x - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x.$$

Положим $x^{(0)} = 0{,}5$. Последовательные приближения найдем по формулам $x^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}\cos x^{(k)}$ $(k = 0,1,2...)$:

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\cos x^{(0)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}5 = 0{,}43879128;$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\cos x^{(1)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}43879128 = 0{,}45263292;$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\cos x^{(2)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}45263292 = 0{,}44964938;$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{2}\cos x^{(3)} = \frac{1}{2}\cos 0{,}44964938 = 0{,}45029978.$$

Для оценки погрешности четвертого приближения воспользуемся неравенством (1.7а).

Так как $q = \max\limits_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} |g'(x)| = \dfrac{1}{2} \max\limits_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} \sin x = \dfrac{1}{2}$, то

$$\left|\xi - x^{(4)}\right| \le \left|x^{(4)} - x^{(3)}\right| = 0{,}0006504 < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Следовательно, $\xi \approx x^{(4)} \approx 0{,}450$ с точностью 10^{-3}.

Пример 2. Решить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ уравнение

$$x + \ln x = 0. \qquad (1.9)$$

Решение: Представим уравнение (1.9) в виде $-x = \ln x$. Построив графики функций $y = -x$ и $x = \ln x$ (рис. 2), заключаем, что уравнение (1.9) имеет единственный корень на отрезке $[0{,}5;1]$. Иначе говоря, для непрерывной и монотонно возрастающей функции $f(x) = x + \ln x$, имеющей на концах отрезка значения разных знаков: $f(0{,}5) = -0{,}193$, $f(1) = 1$, существует единственный корень уравнения (1.9) на этом отрезке (функция монотонно возрастает, так как производная $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ положительна в области определения). Вычислим

$$m = \min_{0{,}5 \le x \le 1} f'(x) = \min_{0{,}5 \le x \le 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2;$$

$$M = \max_{0{,}5 \le x \le 1} f'(x) = \max_{0{,}5 \le x \le 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 3; \quad q = 1 - \frac{m}{M} = \frac{1}{3}.$$

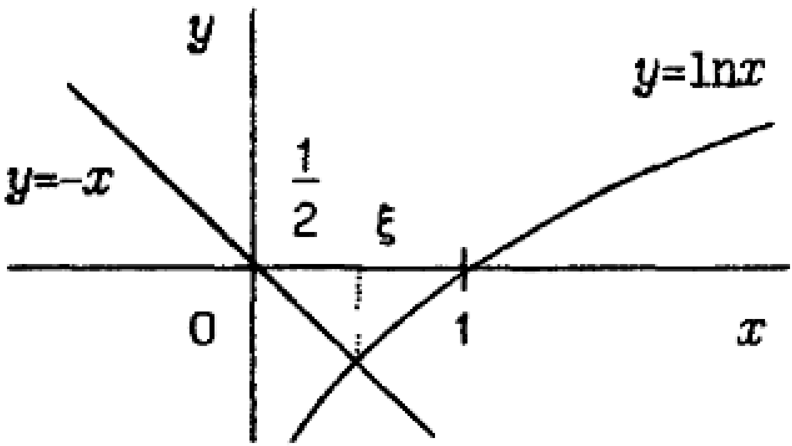


Рис. 2 – Графики функций $y = -x$ и $x = \ln x$

Преобразуем исходное уравнение (1.9) к виду, удобному для итераций:

$$x = g(x); \quad g(x) = x - \frac{1}{M} f(x) = x - \frac{1}{3}(x + \ln x) = \frac{1}{3}(2x - \ln x).$$

Таким образом, сходящаяся к решению уравнение (1.9) последовательность итераций определяется из соотношений

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{3}(2x^{(k)} - \ln x^{(k)}) \quad (k = 0,1,2,...).$$

Пусть $x^{(0)} = 0{,}75$ - начальная точка в итерационном процессе. Оценку погрешности каждого приближения будем определять расстоянием $d_k = \left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right|$.

Производя вычисления, последовательно находим

$x^{(1)} = \frac{1}{3}(2x^{(0)} - \ln x^{(0)}) = \frac{1}{3}(2 \cdot 0{,}75 - \ln 0{,}75) = 0{,}59589402,$

$d_1 = 0{,}1541106;$

$x^{(2)} = \frac{1}{3}(2 \cdot 0{,}59589402 - \ln 0{,}59589402) = 0{,}56982683,$

$d_2 = 0{,}0260672;$

$x^{(3)} = g(x^{(2)}) = 0{,}56735881, \ d_3 = 0{,}00246805;$

$x^{(4)} = g(x^{(3)}) = 0{,}56716032.$

Оценку погрешности четвертого приближения получим из неравенства

$$\left| \xi - x^{(4)} \right| \le d_4 = \left| x^{(4)} - x^{(3)} \right| = 0{,}00019848 < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Следовательно, $\xi \approx x^{(4)} = 0{,}567.$

Пример 3. Решить методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ уравнение

$$4 - e^x - 2x^2 = 0 \ \ (x > 0). \qquad (1.10)$$

Решение. Уравнение (1.10) было решено в главе 1 методом половинного деления. Корень уравнения ξ принадлежит отрезку $[0,1]$. Здесь производная $f'(x) = -e^{x} - 4x < 0$ при $x \in [0,1]$ и является монотонной функцией, модуль которой достигает максимального и минимального значений на концах отрезка:

$$M = \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)| = \max\{1;\ e+4\} = e + 4 \approx 7;$$

$$m = \min_{0 \le x \le 1} |f'(x)| = 1; \qquad q \approx 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Так как в этом примере производная $f'(x)$ отрицательна на отрезке, то, преобразуя уравнение (1.10) к виду удобному для итераций, необходимо воспользоваться замечанием 1 (см. с. 22) следующим образом:

$$-f(x) = -4 + e^{x} + 2x^{2}; \qquad g(x) = x - \frac{1}{M}(-f(x));$$

$$g(x) = x - \frac{1}{7}(-4 + e^{x} + 2x^{2}) = x + \frac{1}{7}(4 - e^{x} - 2x^{2}).$$

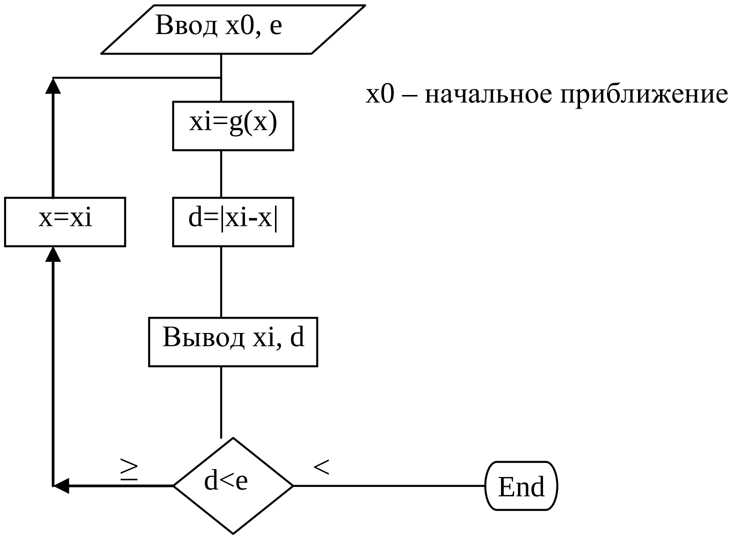
Последовательность вычислений определяется формулами

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{1}{7}\left(4 - e^{x^{(k)}} - 2(x^{(k)})^{2}\right) \qquad (k = 0,1,2,...).$$

Для оценки погрешности k-го приближения здесь используем неравенство (1.7б) в виде $\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| < \frac{\varepsilon}{10}$ $(k = 1,2,...)$. Непосредственно можно убедиться, что если положить $x^{(0)} = 0{,}5$, то последнее неравенство будет выполняться, начиная с пятой итерации. Следовательно, $\xi \approx x^{(5)} = 0{,}887$ $(\varepsilon = 10^{-2})$.

Приложение к параграфу 1.1.

Блок-схема решения уравнения f(x)=0 методом итераций



Примечание. Уравнение *f(x)=0* должно быть предварительно преобразовано к эквивалентному уравнению *x=g(x).*

1.2. Метод итераций для систем двух нелинейных уравнений

Систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

будем представлять в виде

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2), \\ x_2 = g_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1.12}$$

Используя векторные обозначения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Перепишем систему (1.12) в компактной форме:

$$X = g(x). \tag{1.14}$$

Решением системы уравнений (1.11) или (1.12) или (1.14) называют вектор $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, координаты которого, будучи подставлены в уравнения (1.11) или (1.12), обращают их в равенства.

Пусть предварительно установлено, что уравнение (1.14) имеет единственный корень ξ, принадлежащий замкнутому прямоугольнику

$$D = \{(x_1, x_2);\ a_1 \le x_1 \le b_1;\ a_2 \le x_2 \le b_2\}. \tag{1.15}$$

Возьмем произвольную точку $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$, $X^{(0)} \in D$ и, используя формулы

$$X^{(k+1)} = g(X^{(k)}) \quad (k = 0,1,2,...). \tag{1.16}$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{cases} \tag{1.17}$$

получим последовательность векторов

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} \qquad (k = 1,2,...). \tag{1.18}$$

Последовательность (1.18) сходится к решению уравнения (1.14), если выполняется условие следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функции* $g_1(x_1, x_2)$ *и* $g_2(x_1, x_2)$ *- правые части уравнений (1.12) – непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутом прямоугольнике (1.15) и выполнены два условия:*

1) норма матрицы Якоби-функций $g_1(x_1, x_2)$ *и* $g_2(x_1, x_2)$ *не превосходит единицы для любого вектора* $X \in D$*;*

2) значения вектор-функции $g(x)$ *принадлежат прямоугольнику D для любого вектора* $X \in D$.

Тогда при любом выборе начального приближения $X^{(0)} \in D$ *процесс итераций сходится к единственному корню* ξ *уравнения (1.14) в прямоугольнике D.*

Оценка погрешности *k*-го приближения $X^{(k)}$ к корню ξ такова:

$$\left\|\xi - X^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|, \qquad (1.19)$$

где

$$q = \max_{X \in D}\left\|J(X)\right\|.$$

Замечание 1. Для определенности в качестве нормы вектора X и соответствующею нормы матрицы Якоби *J(X)* функций $g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$, т.е. для $J(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$,

возьмем *m*-нормы:

$$\|X\| = \|X\|_m = \max_{X \in D}\left\{|x_1|;\ |x_2|\right\};$$

$$\|J(X)\| = \|J(X)\|_m = \max_{X \in D}\left\{\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|;\ \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|\right\}. \qquad (1.20)$$

Замечание 2. При решении методом итераций системы нелинейных уравнений (1.11) областью D (в условиях теоремы) можно считать множество точек вблизи точки пересечения кривых, определяемых уравнениями $f_1(x_1,x_2)=0$ и $f_2(x_1,x_2)=0$.

Замечание 3. Для практической оценки погрешности k-го приближения можно пользоваться неравенствами, аналогичными (1.7а) – (1.7б):

$$\left\|\xi - X^{(k)}\right\| \le \begin{cases} \left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon \quad \textbf{при} \quad 0<q<\dfrac{1}{2}; & (2.21\textbf{а}) \\ 10\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon \quad \textbf{при} \quad \dfrac{1}{2}<q<1. & (2.21\textbf{б}) \end{cases}$$

Укажем способ преобразования системы (1.11) к системе (1.12), допускающий применение метода итераций. Преобразуем систему (1.11) так, чтобы в окрестности начальной точки $X^{(0)}$, близкой к искомому решению, выполнялось условие теоремы 1 о достаточных условиях сходимости итераций к решению, т.е.

$$\left\|J(X)\right\| < 1. \qquad (1.22)$$

Представим правые части уравнений (1.12) в виде

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2) &= x_1 + \lambda_{11} f_1(x_1,x_2) + \lambda_{12} f_2(x_1,x_2), \\ g_2(x_1,x_2) &= x_2 + \lambda_{21} f_1(x_1,x_2) + \lambda_{22} f_2(x_1,x_2). \end{aligned} \qquad (1.23)$$

Здесь $f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$ - правые части уравнений системы (1.11), по предположению, непрерывно дифференцируемые функции в прямоугольнике D. Система уравнений (1.11) равносильна системе (1.12) с правыми частями (1.23) при условии, что определитель, составленный из постоянных λ_{ij} $(i,\ j=1,2)$, отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\cdot\lambda_{22} - \lambda_{12}\cdot\lambda_{21} \ne 0.$$

Для вычисления постоянных $\lambda_{i\,j}$ предположим, что норма матрицы Якоби равна нулю в точке $X^{(0)}$; тогда, в силу непрерывности компонент матрицы, найдется окрестность точки $X^{(0)}$, где $\|J(X)\| < 1$, и условие 1 теоремы будет удовлетворено.

Равенство $\|J(X^{(0)})\| = 0$ в соответствии с формулой (1.20) означает, что матрица $J(X^{(0)})$ - нулевая, т.е.

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} = 0\,. \qquad (1.24)$$

Используя формулы (1.23), перепишем соотношения (1.24) в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1+\lambda_{11}\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} + \lambda_{12}\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = 0, \\ \quad\ \lambda_{11}\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} + \lambda_{12}\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} = 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \quad\ \lambda_{21}\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} + \lambda_{22}\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = 0, \\ 1+\lambda_{21}\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} + \lambda_{22}\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (1.25)$$

В результате получим систему из четырех линейных уравнений относительно неизвестных $\lambda_{i\,j}$ $(i, j = 1, 2)$ которая эквивалентна двум независимо решаемым системам с одной и той же матрицей

$$\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} \\ \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} \end{pmatrix}.$$

и разными правыми частями.

Пример. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_2(x_1-1)-1=0, & (i_1) \\ x_1^2-x_2^2-1=0. & (i_2) \end{cases} \tag{1.26}$$

Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ ее решение, расположенное в первой четверти плоскости $0x_1x_2$.

Решение. Кривые, определяемые уравнениями (1.26), изображены на рис. 3. Эти кривые пересекаются в двух точках ξ_1 и ξ_2. Приведем систему (1.26) к виду, удобному для итераций (1.23), и найдем решение ξ_1 с заданной точностью.

Возьмем в качестве начального значения (графическое решение) $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ и для определения коэффициентов λ_{ij} будем решать систему уравнений (1.25).

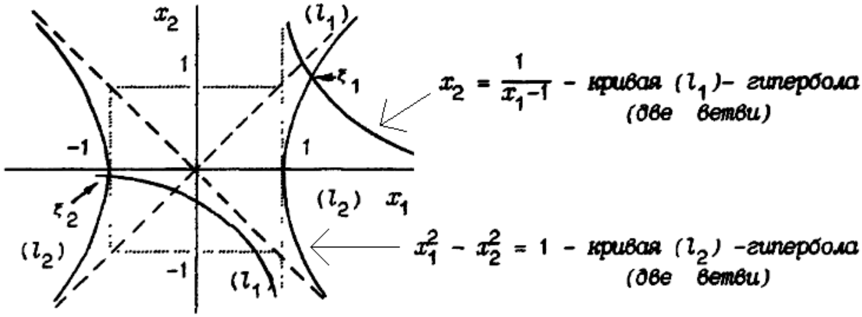


Рис. 3 – Кривые, определяемые уравнениями (1.26)

Вычислим частные производные функций

$$f_1(x_1, x_2) = x_2(x_1 - 1) - 1, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^1 - 1$$

в точке $x^{(0)}$:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = x_2\big|_{X^{(0)}} = 1{,}5; \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{X^{(0)}} = 2x_1\big|_{X^{(0)}} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} = (x_1 - 1)\big|_{X^{(0)}} = 0{,}5; \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{X^{(0)}} = -2x_2\big|_{X^{(0)}} = -3.$$

Решив систему

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 + 1{,}5\lambda_{11} + 3\lambda_{12} = 0, \\ 0{,}5\lambda_{11} - 3\lambda_{12} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1{,}5\lambda_{21} + 3\lambda_{22} = 0, \\ 1 + 0{,}5\lambda_{21} - 3\lambda_{22} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

найдем $\lambda_{11} = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda_{12} = -\dfrac{1}{12}$, $\lambda_{21} = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda_{22} = \dfrac{1}{4}$.

Условие $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \neq 0$ выполнено. Приведенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 - \dfrac{1}{2}(x_2(x_1 - 1) - 1) - \dfrac{1}{12}(x_1^2 - x_2^2 - 1), \\ x_2 = g_2(x_1, x_2) = x_2 - \dfrac{1}{2}(x_2(x_1 - 1) - 1) + \dfrac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2 - 1). \end{cases} \tag{1.27}$$

Используя полученные представления (1.27) для функций $g_1(x_1, x_2)$ и $g_2(x_1, x_2)$, найдем векторы последовательных приближений по формулам (1.17). Оценку погрешности каждого приближения будем определять расстоянием между векторами двух последовательных итераций по m-норме

$$d_k = \left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| = \max\left\{ \left| x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \right|, \left| x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \right| \right\}.$$

Тогда получим

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ g_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1{,}5; 1{,}5) \\ g_2(1{,}5; 1{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}70833 \\ 1{,}37500 \end{pmatrix},$$

$d_1 = 0{,}20833;$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \\ g_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1{,}70833; 1{,}37500) \\ g_2(1{,}70833; 1{,}37500) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}71904 \\ 1{,}39497 \end{pmatrix},$$

$d_2 = 0{,}01997;$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \\ g_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1{,}71904; 1{,}39497) \\ g_2(1{,}71904; 1{,}39497) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}71676 \\ 1{,}39574 \end{pmatrix},$$

$d_3 = 0{,}00281;$

$$X^{(4)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) \\ g_2(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1{,}71676; 1{,}39574) \\ g_2(1{,}71676; 1{,}39574) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}71662 \\ 1{,}39533 \end{pmatrix},$$

$d_4 = 0{,}00041;$

$$X^{(5)} = \begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) \\ g_2(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1{,}71662; 1{,}39533) \\ g_2(1{,}71662; 1{,}39533) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}71667 \\ 1{,}39533 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\left\| X^{(5)} - X^{(4)} \right\| = 0.00005$. Так как по условию $\varepsilon = 10^{-3}$, то согласно оценке (1.21б) можно взять в качестве решения пятое приближение $\xi = X^{(5)} = \begin{pmatrix} 1{,}7167 \\ 1{,}3953 \end{pmatrix}$.

Приложение к параграфу 1.2.

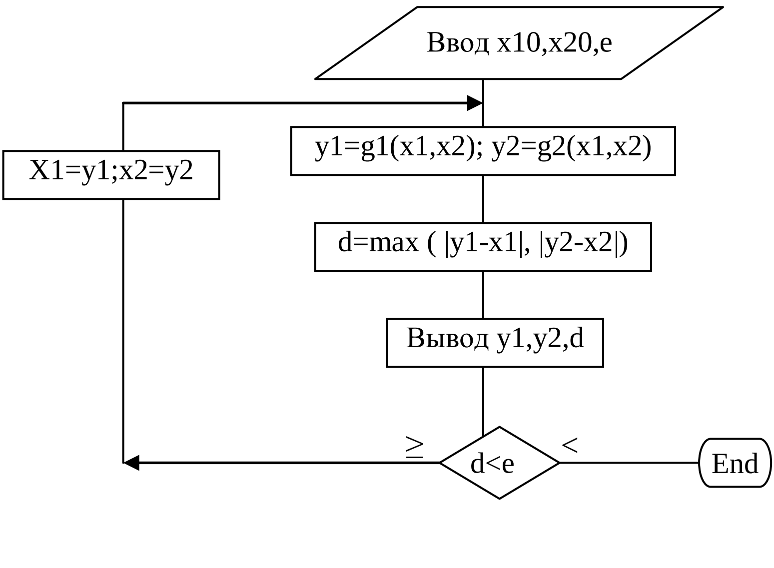
Блок-схема численного решения системы нелинейных уравнений методом итераций

Система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_{1,} x_2) = 0, \\ f_2(x_{1,} x_2) = 0 \end{cases}$$

должна быть предварительно преобразована к виду

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_{1,} x_2), \\ x_2 = g_2(x_{1,} x_2) = 0. \end{cases}.$$



2. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений переменных x и y:

x_i	x_1	x_2	....	x_m
y_i	y_1	y_2	....	y_m

Можно поставить задачу об отыскании аналитической зависимости между x и y, т.е. некоторой формулы $y = f(x)$, явным образом выражающей y как функцию x. Естественно требовать, чтобы график искомой функции $y = f(x)$ изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек (x_i, y_i). Поиск такой функциональной зависимости называют «сглаживанием» экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решать, используя метод наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов указывается вид эмпирической формулы

$$y = Q(x, a_0, a_1, ..., a_n), \qquad (2.1)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ - числовые параметры.

Наилучшими значениями параметров $a_0, a_1, ..., a_n$ (которые обозначим $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$) считаются те, для которых сумма квадратов уклонения функции $Q(x, a_0, a_1, ..., a_n)$ от экспериментальных точек (x_i, y_i) $(i = 1,2,...., m)$ является минимальной, т.е. функция

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} (Q(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n) - y_i)^2 \qquad (2.2)$$

в точке $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ достигает минимума. Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем систему уравнений для определения параметров $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (2.3)$$

Если система (2.3) имеет единственное решение $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, то оно является искомым и аналитическая зависимость между экспериментальными данными определяется формулой

$$y = f(x) = Q(x, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n).$$

Заметим, что в общем случае система (2.3) – нелинейная.

Рассмотрим подробнее аппроксимирующие зависимости (2.1) с двумя параметрами: $y = Q(x, \alpha, \beta)$. Используя соотношения (2.3) и опуская несложные выкладки, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными α и β:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \left[Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i\right] \dfrac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \left[Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i\right] \dfrac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

В частном случае аппроксимация экспериментальных данных с помощью линейной функции имеем

$$y = Q(x,k,b) = kx + b,\ \ \frac{\partial Q}{\partial k} = x,\ \ \frac{\partial Q}{\partial b} = 1.$$

Система (2.4) для этого случая является линейной относительно неизвестных k и b:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\left[(kx_i + b) - y_i\right] = 0, \\ \sum_{i=1}^{m}\left[(kx_i + b) - y_i\right]x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bn + k\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ b\sum_{i=1}^{m} x_i + k\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Пусть для переменных x и y соответствующие значения экспериментальных данных (x_i, y_i) не располагаются вблизи прямой. Тогда выбирают новые переменные

$$X = \varphi(x,y) \quad Y = \varphi(x,y) \qquad (2.6)$$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные

$$X = \varphi(x_i, y_i) \quad Y = \varphi(x_i, y_i) \qquad (2.7)$$

в новой системе координат (X, Y) давали точки (X_i, Y_i), менее уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой

$$Y = kX + b \qquad (2.8)$$

числа k и b можно определить из уравнений (2.5), где вместо x_i и y_i подставляют соответствующие значения X_i и Y_i. Нахождение зависимостей (2.6) называют **выравниванием экспериментальных данных.**

Функциональная зависимость $y = f(x)$ определена неявно уравнением $\varphi(x,y) = k\varphi(x,y) - b$, разрешим относительно y в частных случаях.

Пример 1. Установить вид эмпирической формулы $y = f(x)$, используя аппроксимирующие зависимости (2.1) с двумя параметрами α и β, и определить наилучшие зависимости параметров, если опытные данные представлены таблицей

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

Решение. Здесь экспериментальные точки (x_i, y_i) не располагаются вблизи прямой. Положим $X = \ln x$, $Y = \ln y$ и составим таблицу экспериментальных данных в новых переменных X_i и Y_i:

X_i	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
Y_i	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки (X_i, Y_i) лежат приблизительно на прямой (рис. 4). Наилучшее значение параметров k и b эмпирической зависимости $Y = kX + b$ (в новых переменных) находятся из системы уравнений (2.5):

$$\begin{cases} bn + k\sum\limits_{i=1}^{m} X_i = \sum\limits_{i=1}^{m} Y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{m} X_i + k\sum\limits_{i=1}^{m} X_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i Y_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + 4{,}787k = 19{,}196, \\ 4{,}787b + 6{,}200k = 21{,}535. \end{cases}$$

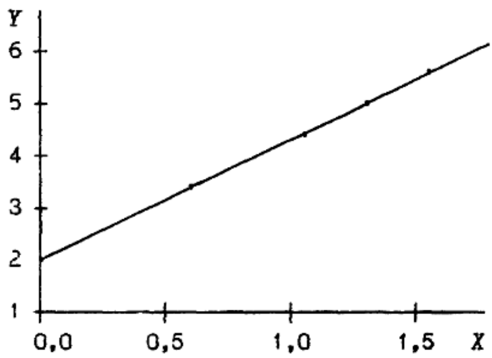


Рис. 4 – Точки (X_i, Y_i)

Решив эту систему, $b = 1{,}97$, $k = 1{,}95$. Неявное уравнение, выражающее связь между переменными x и y, имеет вид

$$\ln y = 1{,}95 \ln x + 1{,}97.$$

Легко получить явную зависимость между x и y в виде степеней функции

$$y = e^{1{,}97} x^{1{,}95} = 7{,}16 x^{1{,}95}. \qquad (2.9)$$

Сравнение экспериментальных данных с результатами вычислений по эмпирической формуле (2.9) в соответствующих точках представлено в виде таблицы

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161
$y = 7{,}16x^{1{,}95}$	7,16	27,703	61,081	107,04	165,39

Формула (2.9) является частным случаем аппроксимирующей зависимости с двумя параметрами, имеющей вид

$$Q(x, \alpha, \beta) = \alpha x^{\beta}.$$

Параметры α и β этой зависимости можно было бы найти из нелинейных уравнений (2.4) непосредственно. Однако применение способа выравнивания существенно упрощает вычисления параметров. В данном случае $\alpha = e^b$, $\beta = k$.

Рекомендации по выравниванию экспериментальных данных и аппроксимирующей зависимости с двумя параметрами приведены в таблице ниже.

Одну из шести предложенных формул преобразования к переменным (X, Y) следует выбирать одновременно с проверкой применения линейной зависимости к исходным данным (x_i, y_i) $(i = 1, 2, ..., m)$. Условие выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой.

№	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X = x,\ Y = xy$	$y = \alpha + \dfrac{\beta}{x},\ \alpha = k,\ \beta = b$
2	$X = x,\ Y = \dfrac{1}{y}$	$y = \dfrac{1}{\alpha x + \beta},\ \alpha = k,\ \beta = b$
3	$X = x,\ Y = \dfrac{x}{y}$	$y = \dfrac{x}{\alpha x + \beta},\ \alpha = k,\ \beta = b$
4	$X = x,\ Y = \ln y$	$y = \alpha\beta^x,\ \alpha = e^b,\ \beta = e^k$
5	$X = \ln x,\ Y = y$	$y = \alpha \ln x + \beta,\ \alpha = k,\ \beta = b$
6	$X = \ln x,\ Y = \ln y$	$y = \alpha x^\beta,\ \alpha = e^b,\ \beta = k$

Уклонение данных от прямой в каждом варианте выравнивания данных будем определять величиной

$$d_j = \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - k_j X_i - b_j)^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для наилучшей эмпирической формулы величина d является наименьшей, т.е. $d = \min\limits_{0 \le j \le 6} \{d_j\}$ ($j = 0$ для случая, когда $X_i = x_i$ и $Y_i = y_i$).

Естественно, что если не удается удовлетворительно построить функциональную зависимость, используя вид эмпирической формулы с двумя параметрами, то можно продолжать поиски среди формул с большим числом параметров.

Пример 2. Опытные данные определены таблицей

x_i	0	1	3	4
y_i	4	0	1	2

Установить вид эмпирической формулы $y = f(x)$, используя аппроксимирующую зависимость с тремя параметрами a, b и c, имеющую вид

$$Q(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Здесь соотношение (31) примет вид

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{m} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Для нахождения a, b и c составим систему уравнений вида (2.3): $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial c} = 0$. Отсюда получаем систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}(ax_i^2+bx_i+c-x_i)x_i^2=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{4}y_ix_i^2,\\ a\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{4}x_i=\sum\limits_{i=1}^{4}y_ix_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{4}x_i+c\cdot 4=\sum\limits_{i=1}^{4}y_i\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a\cdot 338+b\cdot 92+c\cdot 26=41,\\ a\cdot 92+b\cdot 26+c\cdot 8=11,\\ a\cdot 26+b\cdot 8+c\cdot 4=7.\end{cases}$$

Решением этой системы являются числа $a=\frac{5}{6},\ b=-\frac{109}{30},\ c=\frac{18}{5}$. Эмпирическая формула представляет собой функцию

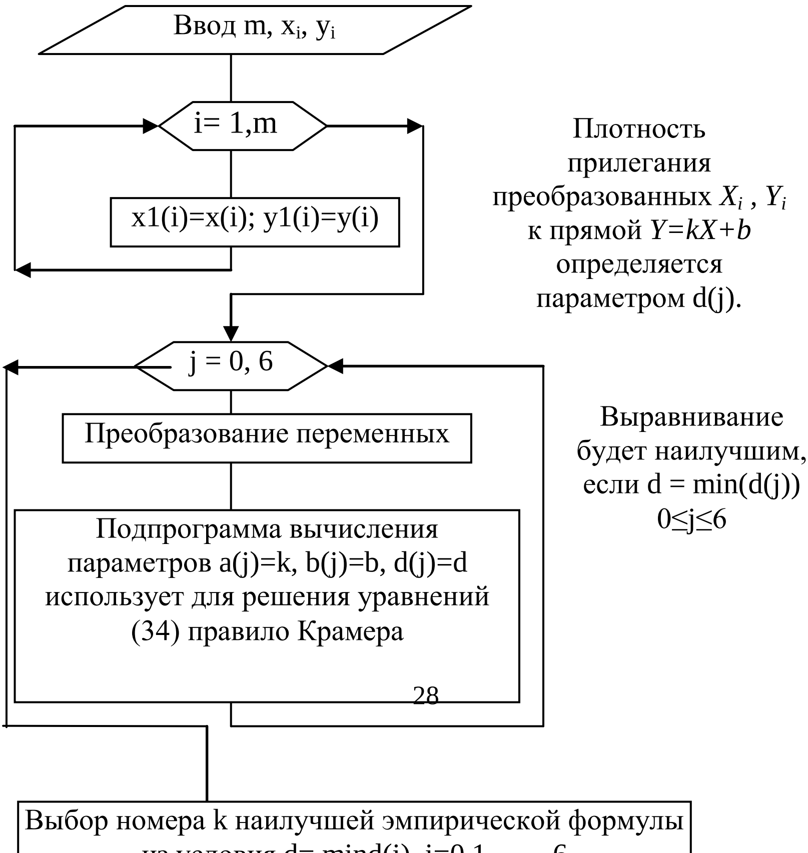
$$y=f(x)=\frac{5}{6}x^2-\frac{109}{30}x+\frac{18}{5},$$

совпадающую с алгебраическим многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения $Q_2(x)$ на множестве точек $\{0,1,3,4\}$.

Приложение к главе 2.

Блок-схема определения параметров эмпирической формулы *с двумя параметрами методом наименьших квадратов*

Пусть результаты некоторого эксперимента представлены в виде множества пар чисел $\{(x_i, y_i)\}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. Используя метод наименьших квадратов и выравнивание экспериментальных данных, нужно выбрать наилучший вариант эмпирической формулы с двумя параметрами $y = Q(x, y, \beta)$ среди семи, шесть из которых представлены в таблице на странице ?. Нулевой вариант – зависимость $y=kx+b$. Для упрощения программ полагаем, что $x_i > 0, y_i > 0$. Кроме того, при выводе результатов вычислений на экран, указывается только номер в таблице, соответствующий наилучшей аппроксимирующей формуле и значения параметров k и b эмпирической зависимости $Y=kX+b$ *в новых переменных* X *и* Y.



3. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

3.1. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_0	x_1	……….	x_n
y_i	y_0	y_1	……….	y_n

Значения аргументов $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, ..., n)$ будем называть **узлами интерполяции**.

Задачей интерполяции является построение многочлена $L(x)$, значения которого в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям заданной функции, т.е.

$$L(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, ..., n).$$

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен $L(x)$ в виде

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, p_i(x), \tag{3.1}$$

где $p_i(x)$ - многочлен степени n, принимающий значение, равное единице в узле x_i и нулю в остальных узлах x_k $(k \neq i)$ $(i,\ k = 0,\ 1,....,\ n)$, и имеющий вид

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Многочлен $L(x)$ называют **интерполяционным многочленом Лагранжа.** Заметим, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n.

Пример 1. Пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, составить уравнение прямой, проходящей через точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$, если $x_0 = -1,\ y_0 = -3,\ \ x_1 = 2,\ y_1 = 4$.

Решение. В данном случае многочлен Лагранжа примет вид

$$L(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -3\frac{x-2}{-1-2} + 4\frac{x+1}{2+1} = \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Уравнение искомой прямой есть $y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_n]$. Возьмем на этом отрезке множество точек $\{x_i\}$ $(i = 0,\ 1,....,\ n)$ и выберем их в качестве узлов интерполяции. Построив многочлен Лагранжа $L(x)$ для системы узлов $\{x_i\}$, положим

$$f(x) \approx L(x) \quad \forall\, x \in [x_0, x_n].$$

При этом в узлах интерполяции имеем

$$f(x_i) = L(x_i) \quad (i = 0,\, 1, \ldots,\, n).$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ имеет непрерывные производные до *(n+1)* – го порядка включительно, то погрешность интерполяционной формулы в каждой точке этого отрезка оценивается неравенством

$$\left| f(x) - L(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \mathbf{\Pi}_{n+1}(x) \right|, \qquad (3.2)$$

где

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|, \ \mathbf{\Pi}_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Пример 2. Построить многочлен Лагранжа второй степени, аппроксимирующий функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, если заданы значения функции в трех узлах интерполяции:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi / 6 = 0{,}523598$	$x_2 = \pi / 4 = 0{,}7853982$
$y = \sin x$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}5$	$y_2 = 0{,}7071068$

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближенное значение $\sin \frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность результата вычислений.

Решение. Многочлен Лагранжа для трех узлов интерполяции запишется так:

$$L(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

или

$$L(x) = 0{,}5 \frac{x(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{6}(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} + 0{,}707 \frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = -2{,}064 \frac{x^2}{\pi^2} + 3{,}344 \frac{x}{\pi}.$$

При $x = \frac{\pi}{12} = 0{,}2617994$ получим $L(\frac{\pi}{12}) = 0{,}264298$.

С помощью неравенства (3.2) находим оценку погрешности. Имеем

$$\left|\sin(\frac{\pi}{12}) - L(\frac{\pi}{12})\right| \le \frac{M_3}{3!}\left|\mathbf{\Pi}_3(\frac{\pi}{12})\right|,$$

где $\mathbf{\Pi}_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})$ и $\mathbf{\Pi}_3(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{12}(-\frac{\pi}{12})(-\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\pi}{12})^3.$

Так как

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

то

$$M_3 = \max_{0 \le x \le \frac{\pi}{4}} |f'''(x)| = \max_{0 \le x \le \frac{\pi}{4}} |-\cos x| = 1$$

и, следовательно,

$$\left|\sin(\frac{\pi}{12}) - L(\frac{\pi}{12})\right| \le \frac{1}{3}(\frac{\pi}{12})^3 \approx 0{,}006.$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{12} \approx 0{,}264 \pm 0{,}006$. Заметим, что это значение с шестью верными цифрами есть $\sin\frac{\pi}{12} = 0{,}258819$.

Замечание. В процессе решения задачи 1 могут возникнуть трудности при оценке величины $M_3 = \max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} \left|f'''(x)\right|$.

Проведем эту оценку в задаче 1а, где $f(x) = \cos x^2$. Строгое вычисление величины $\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} \left|f'''(x)\right|$ требует нахождение точек экстремума функции $f'''(x)$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, вычисления значений функции в точках экстремума и на концах отрезка и, наконец, выбор необходимого значения M_3.

Для этого вычислим производные функции $f(x)$ вплоть до четвертого порядка:

$$f'(x) = -2x\sin x^2,\quad f''(x) = -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2),\quad f'''(x) =$$

$$= -4x(3\cos x^2 - 2x^2\sin x^2),$$

$$f^{(4)}(x) = -4(3\cos x^2 - 4x^4\cos x^2 - 12x^2\sin x^2).$$

Точки экстремума функции $f'''(x)$ являются корнями уравнения $f^{(4)}(x)=0$, $4(3\cos x^2 - 4x^4 \cos x^2 - 12x^2 \sin x^2) = 0$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Эти корни находятся с помощью численных методов, изложенных в главе 2.

Завышенную, но вполне удовлетворительную оценку величины M_3 получим с помощью следующих более простых преобразований.

На отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ справедливы неравенства

$$x\cos x^2 \ge 0,\ \ x^3 \sin x^2 \ge 0,\ \ 3x\cos x^2 \ge 2x^3 \sin x^2.$$

Поэтому

$$M_3 = \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} \left| f'''(x) \right| = 4 \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} (3x\cos x^2 - 2x^3 \sin x^2) \le$$

$$\le 4(\max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} 3x\cos x^2 - \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} 2x^3 \sin x^2) =$$

$$= 12 \max_{0\le x\le\frac{\pi}{4}} x\cos x^2 < 3\pi.$$

Итак, получена несколько завышенная оценка $M_3 < 3\pi$.

Приложение к параграфу 3.1.

Блок-схема построения интерполяционного многочлена Лагранжа

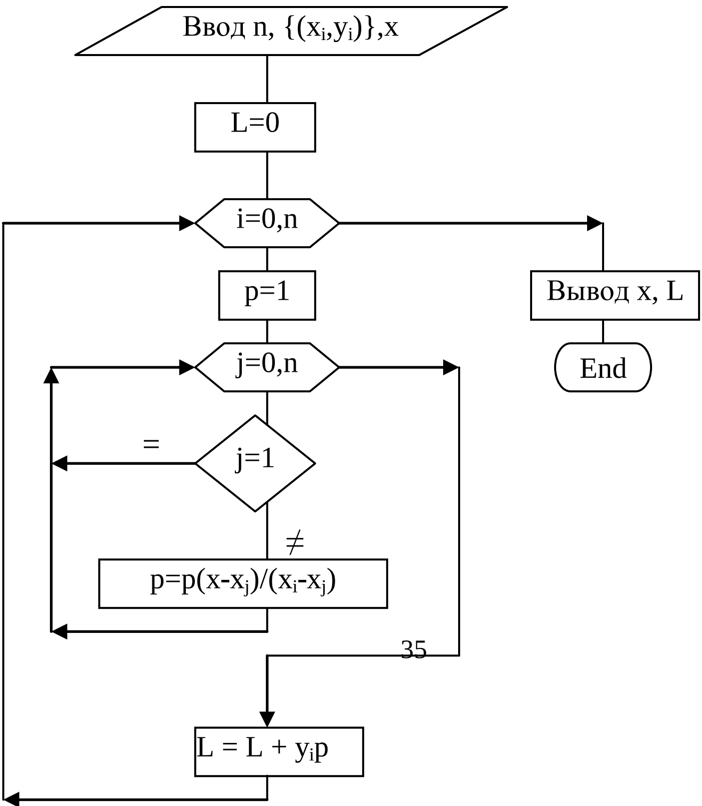
По определенным значениям y_i некоторой функции в точках x_i $\left(i = 0,1,2,\ldots,n\right)$ требуется составить программу вычисления значения многочлена Лагранжа *L(x)* в точке $x \in \left[x_0, x_n\right]$.

Для построения многочлена используются рекуррентные соотношения

$$P_{i0}{}^{(x)} = 1, P_{i,j}{}^{(x)} = P_{i,(j-1)}{}^{(x)} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad j \neq i,$$

$$\left(j = 0,1,2,\ldots i-1, i+1,\ldots n\right);$$

$$L_0(x) = 0, \quad L_{i+1}(x) = L_i(x) + y_i P_{in} \quad \left(i = 0,1,2,\ldots n\right).$$



3.2. Интерполирование функций кубическими сплайнами

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n частей точками $\{x_i\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_n = b$.

Сплайном k-й степени называется функция, представляющая собой многочлен на выше k-й степени на каждом из последовательно примыкающих друг к другу интервалов (x_{i-1}, x_i) $(i = 1,\ 2, ..., n)$, причем в точках стыка двух интервалов x_i $(i = 1, ..., n-1)$ функция непрерывна вместе со своими производными до порядка не выше k.

Например, непрерывная кусочно-линейная функция (ломаная) является сплайном первой степени с производной, терпящей разрыв в точках излома.

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$, значение которой в точках x_i равны $y_i = f(x_i)$.

Задача интерполяции функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ **кубическим сплайном** (сплайном третьей степени) состоит в нахождении функции $S(x)$, равной многочлену третьей степени $S_i(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,\ 2, ..., n)$, т.е.

$$S(x) = S(x_i) = a_0^i x^3 + a_1^i x^2 + a_2^i x + a_3^i, \quad x \in [x_{i-1},\ x_i], \qquad (3.3)$$

причем значения сплайна в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям функции y_i и сплайн-функция непрерывна в узлах интерполяции вместе с производными первого и второго порядков:

$$S(x_i)=S_{i+1}(x_i)=y_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,...,\ n-1),\quad S(x_n)=S_n(x_n)=y_n, \tag{3.4}$$

$$S_i(x_i)=S_{i+1}(x_i) \quad (i=1,\ 2,...,\ n-1), \tag{3.5}$$

$$S'_i(x_i)=S'_{i+1}(x_i) \quad (i=1,\ 2,...,\ n-1), \tag{3.6}$$

$$S''_i(x_i)=S''_{i+1}(x_i) \quad (i=1,\ 2,...,\ n-1). \tag{3.7}$$

Условия (3.4) - (3.7) дают $4n-2$ линейных алгебраических уравнений для определения $4n$ неизвестных коэффициентов a_p^i $(p=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ i=1,\ 2,....,\ n)$ при соответствующих степенях x в многочленах $S_i(x)$.

Можно показать, что интерполяционный кубический сплайн для функции $y=f(x)$ существует и является единственным, если вместе с уравнениями (3.4) - (3.7) удовлетворяется какая-либо пара дополнительных условий (краевые условия) следующего типа:

1. $S'(a)=f'(a),\ S'(b)=f'(b);$
2. $S''(a)=f''(a),\ S''(b)=f''(b);$
3. $S'(a)=S'(b),\ S''(a)=S''(b).$

Рассмотрим случай разбиения отрезка $[a,b]$ на n равных частей с шагом h, для которого $x_0=a,\ x_1=x_0+h,...,\ x_{i+1}=x_i+h,...,\ x_n=b$ и $h=(b-a)/n$. Разберем построение интерполяционного кубического сплайна отдельно для условий 1 и 2 типов.

При построении сплайна, удовлетворяющего краевым условиям первого типа, введем величины $m_i=S'(x_i)$, называемые иногда наклонами сплайна в точках (узлах) x_i $(i=0,\ 1,...,\ n)$.

Интерполяционный кубический сплайн вида

$$S(x)=S_i(x)=y_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h)}{h^3}+$$

$$+\,y_i\frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h)}{h^3}+$$

$$+m_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h^2}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h^2},$$

$$x\in\left[x_{i-1},x_i\right]\quad(i=1,\ 2,...,\ n) \tag{3.8}$$

удовлетворяет условиям (3.4), (3.5), (3.6) для любых m_i. Из условий (3.7) и краевых условий первого типа можно определить $n+1$ параметр m_i.

Действительно, легко проверить, что $S(x_{i-1})=S_i(x_{i-1})=y_{i-1}$, $S(x_i)=S_i(x_i)=y_i$ $(i=1,\ 2,...,\ n)$. Кроме того, вычисления показывают, что

$$S'(x_i)=S'_i(x_i)=m_i,$$
$$S'(x_i)=S'_{i+1}(x_i)=m_i\quad(i=1,\ 2,...,\ n).$$

Если учесть, что

$$S''_i(x_i)=\frac{2m_{i-1}}{h}+\frac{4m_i}{h}-6\frac{y_i-y_{i-1}}{h^2}\quad(i=1,\ 2,...,\ n-1),$$

$$S''_{i+1}(x_i)=\frac{4m_i}{h}-\frac{2m_{i+1}}{h}-6\frac{y_{i+1}-y_i}{h^2}\quad(i=1,\ 2,...,\ n-1),$$

а также краевые условия первого типа и условия (3.7), то получим систему из $n+1$ линейных уравнений относительно неизвестных m_i:

$$\begin{cases} m_0=b_0=f'(a), \\ m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=b_i\ \dfrac{3(y_{i+1}-y_{i-1})}{h}\quad(i=1,\ 2,...,\ n-1), \\ m_n=b_n=f'(b). \end{cases} \tag{3.9}$$

Решение этой системы позволяет найти значения неизвестных m_i и определить интерполяционный сплайн в виде соотношения (3.8).

Матрица А системы (3.9) имеет порядок $n+1$ и является трехдиагональной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных) для системы (3.9) значительно упрощается и носит название **метода прогонки**. Прямой прогонкой находятся так называемые **прогоночные коэффициенты**:

$$L_0 = 0,\ M_0 = b_0,\ L_i = \frac{-1}{L_{i-1}+4},\ M_i = L_i(M_{i-1} - b_i)\ \ (i = 1,\ 2, \dots,\ n-1).$$

Обратной прогонкой последовательно определяют неизвестные m_i:

$$\begin{cases} m_n = b_n, \\ m_i = L_i m_{i+1} + M_i \quad (i = n-1,\ n-2, \dots,\ 0). \end{cases}$$

Пример 1. На отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ построить кубический сплайн с шагом $h = \frac{\pi}{2}$, удовлетворяющий на концах отрезка краевым условиям первого типа и интерполирующий функцию

$y = \sin x$. С помощью интерполяционной формулы вычислить приближенное значение $\sin\frac{\pi}{6}$ и сравнить его с точным.

Решение. Будем искать кубическую параболу $y = S(x)$, удовлетворяющую следующим условиям не концах отрезка $x_0 = 0$ и $x_1 = h = \frac{\pi}{2}$:

$$y_0 = S(x_0) = \sin x_0 = 0, \qquad y_1 = S(h) = \sinh = 1,$$

$$m_0 = S'(x_0) = \sin' x_0 = \cos x_0 = 1, \qquad m_1 = S'(h) = \sin' h = \cosh = 0.$$

Подставим значения h, y_0, y_1, m_0, m_1 в формулу (3.8) и получим сплайн вида

$$S(x) = S_1(x) = \frac{x^2(2(h-x)+h)}{h^3} + \frac{(x-h)^2 x}{h^2}, \quad x \in [0,\ h];$$

$$S(x) = x - \frac{4(\pi-3)^2}{\pi^2}x^2 - \frac{4(4-\pi)}{\pi^3}x^3 = x - 0{,}057385x^2 - 0{,}11074x^3.$$

Тогда $\sin\frac{\pi}{6} \approx S(\frac{\pi}{6}) = 0{,}49196983$ (точное значение равно 0,5).

Пример 2. На отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ построить кубический сплайн с шагом $h = \frac{\pi}{4}$, интерполирующий функцию $y = \sin x$, если заданы значения функции в трех узлах интерполяции:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/4 = 0{,}7853982$	$x_2 = \pi/2 = 1{,}570796$
$\sin x$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}7071068$	$y_2 = 1$

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближенное значение $\sin\frac{\pi}{6}$ ($\frac{\pi}{6} = 0{,}5235988$) и сравнить с точным значением 0,5.

Решение. Представим сплайн в виде (3.8):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & 0 \le x \le \pi/4; \\ S_2(x), & \pi/4 \le x \le \pi/2. \end{cases}$$

При таком представлении должны удовлетворяться уравнения (3.9):

$$\begin{cases} m_0 = \sin' x_0 = \cos x_0 = 1, \\ m_0 + 4m_1 + m_2 = \dfrac{3(y_2 - y_0)}{h} = \dfrac{3}{h}, \\ m_2 = \sin' x_2 = \cos x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда учитывается, что $1 + 4m_1 = \dfrac{12}{\pi}$ или

$$m_1 = \frac{12-\pi}{4\pi} = 0{,}70493,$$

$$S_1(x) = y_1 \frac{x^2(2(h-x)+h)}{h^3} + \frac{(x-h)^2 x}{h^2} + m_1 \frac{x^2(x-h)}{h^2}, \quad 0 \le x \le h;$$

$$S_2(x) = y_1 \frac{(x-2h)^2(2(x-h)+h)}{h^3} + \frac{(x-h)^2(2(2h-x)+h)}{h^3} +$$

$$+ m_1 \frac{(x-2h)^2(x-h)}{h^2}, \quad h \le x \le 2h,$$

получим, в частности, выражение для функции $S_1(x)$:

$$S_1(x) = y_1 \frac{x^2(2(h-x)+h)}{h^3} + \frac{(x-h)^2 x}{h^2} + m_1 \frac{x^2(x-h)}{h^2} =$$

$$= x - 0{,}0050683975x^2 - 0{,}15514782x^3, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

Значение $\sin\dfrac{\pi}{6} \approx S_1(\dfrac{\pi}{6}) = 0{,}499938.$

При построении сплайна, удовлетворяющего краевым условиям второго типа, введем величину $\tilde{m}_i = S''(x_i)$ - значение второй производной сплайна в узле x_i $(i = 0, 1, ..., n)$.

Уравнения (3.4), (3.5), (3.7) будут удовлетворены, если интерполяционный кубический сплайн представить в виде

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1}\frac{(x_i - x)}{h} + y_i\frac{(x - x_{i-1})}{h} + \tilde{m}_{i-1}\frac{(x_i - x)^3 - h^2(x_i - x)}{6h} +$$

$$+\tilde{m}_i\frac{(x - x_{i-1})^3 - h^2(x - x_{i-1})}{6h}$$

$$x \in [x_{i-1},\ x_i] \quad (i = 1,\ 2, ...,\ n). \tag{3.10}$$

Учитывая, что

$$S_i(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{h\tilde{m}_i + 2h\tilde{m}_i}{6} \quad (i = 1,\ 2, ...,\ n-1),$$

$$S'_{i+1}(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{2h\tilde{m}_i + h\tilde{m}_{i+1}}{6} \quad (i = 1,\ 2, ...,\ n-1),$$

и используя краевые условия второго типа и условия (3.6), получим систему из $n+1$ линейных уравнений относительно неизвестных $\tilde{m}_i$:

$$\begin{cases} \tilde{m}_0 = f''(a), \\ \tilde{m}_{i-1} + 4\tilde{m}_i + \tilde{m}_{i+1} = \dfrac{6(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{h^2} \quad (i = 1,\ 2, ...,\ n-1), \\ \tilde{m}_n = f''(b). \end{cases} \tag{3.11}$$

Системы (3.9) и (3.11) являются частными случаями системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} u_0 = b_0, \\ u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1} = b_i \quad (i = 1,\ 2, ...,\ n-1), \\ u_n = b_n. \end{cases} \tag{3.12}$$

Для функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные до третьего порядка включительно, точность интерполяции ее кубическим сплайном $S(x)$ по точкам равномерного разбиения отрезка с шагом h при любых указанных ранее краевых условиях оценивается следующим неравенством для любых x на отрезке $[a,b]$:

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{5}{2} M_3 h^3, \; M_3 = \max_{a \le x \le b} |f'''(x)|. \qquad (3.13)$$

Неравенство (3.13) дает завышенную оценку точности приближения функции сплайном в точке.

Приложение к параграфу 3.2.

Блок-схема построения кубического сплайна

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n равных частей и в точках x_i $(i = 0,1,2,...n;\ x_o = a,\ x_b = n)$ некоторая функция принимает значения y_i. Для переменной x, принадлежащей части разбиения $\{x_{i-1,} x_i\}$ $(i = 1,...n)$, определена функция (кубический многочлен):

$$S_i(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_i)^2 (2(x - x_{i-1}) + h)}{h^3} + y_i \frac{(x - x_{i-1})^2 (2(x_i - x) + h)}{h^3} +$$
$$+ m_{i-1} \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i-1})}{h^2} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)}{h^2}.$$

Здесь $h = \dfrac{b - a}{n}$ - шаг разбиения отрезка. Неизвестные m_i определяются рекуррентными соотношениями

$$m_0 = A; \quad m_n = B; \quad m_i = L_i m_{i+1} + M_i \qquad (i = 1,2,...n - 1)$$

после предварительного вычисления вспомогательных величин M_i, L_i по рекуррентным формулам

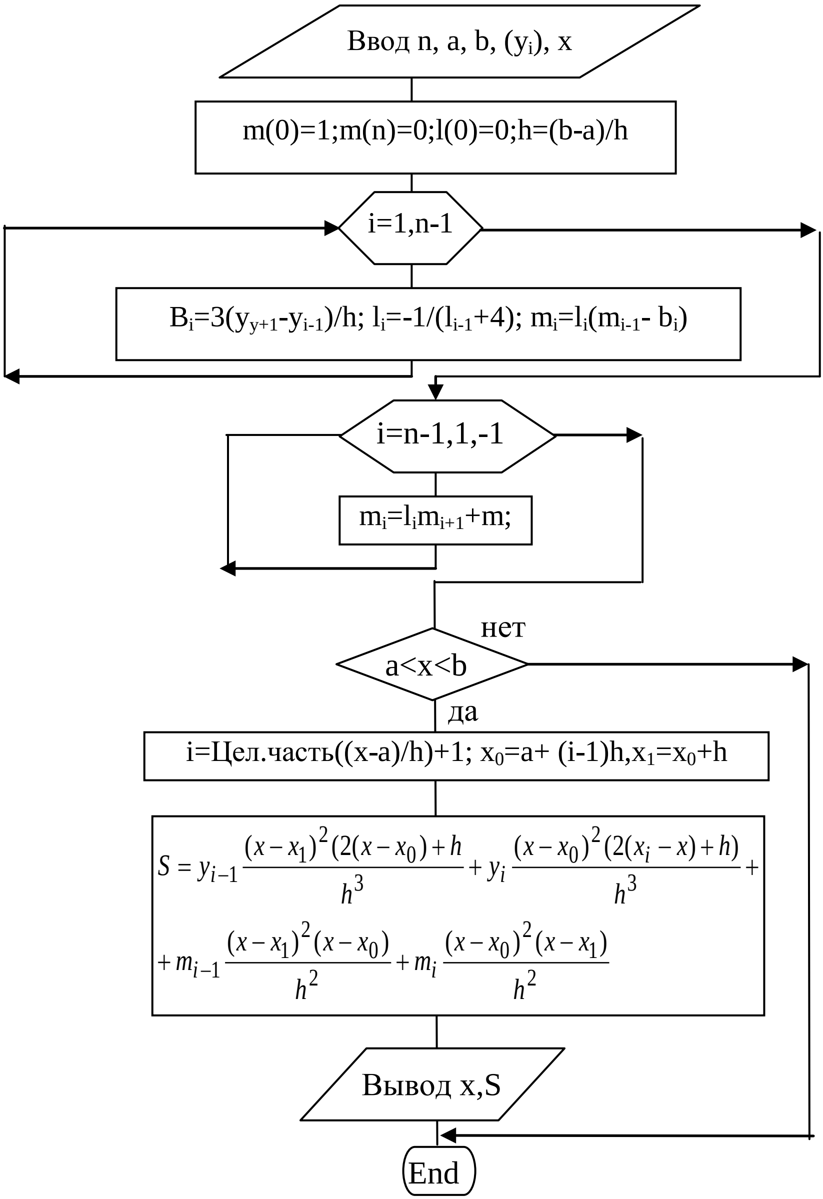
$$L_0 = 0, M_0 = m_0, L_i = \frac{-1}{L_{i-1} + 4}, M_i = L_i(M_{i-1} - b_i) \quad (i = 1,2,....n-1),$$

где $b_i = \dfrac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h}$.

Величины A и B должны быть заданы. При построении кубического сплайна, интерполирующего дифференцируемую функцию *y=f(x)*, по системе точек, полагают $A = f'(a), B = f'(b)$ (краевые условия I типа). Выбор необходимой формулы $S_i(x)$ для заданного значения переменной *x* определяется целым числом *t*:

$$t = \text{целая часть}\left(\frac{x\text{-}a}{h}\right) + 1$$

Работа программ проверяется на примерах 1 и 2 из параграфа 4.2. В соответствии с условиями задач в программах принято $m_0 = 1, m_n = 0$.


Ввод n, a, b, (y_i), x
m(0)=1;m(n)=0;l(0)=0;h=(b-a)/h
i=1,n-1
$B_i=3(y_{y+1}-y_{i-1})/h$; $l_i=-1/(l_{i-1}+4)$; $m_i=l_i(m_{i-1}-b_i)$
i=n-1,1,-1
$m_i=l_i m_{i+1}+m$;
нет
a<x<b
да
i=Цел.часть((x-a)/h)+1; x_0=a+ (i-1)h,$x_1=x_0$+h
$S=y_{i-1}\frac{(x-x_1)^2(2(x-x_0)+h}{h^3}+y_i\frac{(x-x_0)^2(2(x_i-x)+h)}{h^3}+$
$+m_{i-1}\frac{(x-x_1)^2(x-x_0)}{h^2}+m_i\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2}$
Вывод x,S
End

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для проведения практических занятий по дисциплине
«Методы математического моделирования»
для студентов специальности 160700.65,
24.05.02 «Проектирование авиационных и
ракетных двигателей» очной формы обучения

Составители: Гуртовой Андрей Александрович
Демьяненко Юрий Васильевич
Кретинин Александр Валентинович
Сушков Алексей Михайлович

В авторской редакции

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский пр., 14