ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра системного анализа и управления в медицинских системах

456-2015

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторной работы № 4
по дисциплине «Основы моделирования биологических
процессов и систем» для студентов направления
12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»
(профили «Биотехнические и медицинские аппараты и системы»,
«Менеджмент и управление качеством в здравоохранении»)
очной формы обучения

Воронеж 2015

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Исследование системы массового обслуживания с отказами.
2. Расчет показателей системы массового обслуживания с отказами.
3. Выбор оптимальных параметров системы массового обслуживания с отказами.

2. СОСТАВ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Используемые программно-аппаратные средства: персональное ЭВМ класса IBMPC стандартной конфигурации, Microsoft Office

3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

3.1. Системы массового обслуживания, их классы

Для СМО потоки событий - это потоки заявок, потоки «обслуживании» заявок и т. д.

Основные классы СМО следующие.

1) *Системы с отказами (с потерями)*. В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

2) *Системы с ожиданием (с очередью)*. В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов. Когда канал освобождается, одна из заявок, стоящих в очереди, принимается к обслуживанию.

Обслуживание (дисциплина очереди) в системе с ожиданием может быть *упорядоченным* (заявки обслуживаются в порядке поступления), *неупорядоченным* (заявки обслуживаются в случайном порядке) или *стековым* (первой из очереди выбирается последняя заявка). Кроме того, в некоторых СМО применяется так называемое *обслуживание с приоритетом,* когда некоторые заявки обслуживаются в первую очередь, предпочтительно перед другими. Здесь также различаются системы со *статическими* и *динамическими приоритетами* (в последнем случае приоритет может, например, увеличиваться с длительностью ожидания заявки).

Системы с очередью делятся на системы с *неограниченным* и с *ограниченным* ожиданием.

В системах с неограниченным ожиданием каждая заявка, поступившая в момент, когда нет свободных каналов, становится в очередь и «терпеливо» ждет освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Любая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена.

В системах с ограниченным ожиданием на пребывание заявки в очереди накладываются те или другие ограничения. Эти ограничения могут касаться как *длины очереди* (числа заявок, одновременно находящихся в очереди - *система с ограниченной длиной очереди),* так и времени пребывания заявки в очереди (после какого-то срока пребывания в очереди заявка покидает очередь и уходит - *система с ограниченным временем ожидания),* либо общего времени пребывания заявки в СМО и т. д.

В зависимости от типа СМО при оценке ее эффективности могут применяться те или другие величины (показатели эффективности). Например, для СМО с отказами одной из важнейших характеристик ее продуктивности является так называемая *абсолютная пропускная способность* - среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Наряду с абсолютной часто рассматривается *относительная пропускная способность* СМО - средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой (отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок).

Помимо абсолютной и относительной пропускной способностей при анализе СМО с отказами могут, в зависимости от задачи исследования, интересовать и другие характеристики, например:

• среднее число занятых каналов;

• среднее относительное время простоя системы в целом и отдельного канала и т. д.

СМО с ожиданием имеют несколько другие характеристики. Очевидно, для СМО с неограниченным ожиданием как абсолютная, так и относительная пропускная способность теряют смысл, так как каждая поступившая заявка рано или поздно будет обслужена. Зато для такой СМО весьма важными характеристиками являются:

• среднее число заявок в очереди;

• среднее число заявок в системе (в очереди и под обслуживанием);

• среднее время ожидания заявки в очереди;

• среднее время пребывания заявки в системе (в очереди и под обслуживанием);

• и другие характеристики ожидания.

Для СМО с ограниченным ожиданием интерес представляют обе группы характеристик: как абсолютная и относительная пропускная способности, так и характеристики ожидания.

Для анализа процесса, протекающего в СМО, существенно знать основные параметры системы: число каналов *n*, интенсивность потока заявок λ, производительность каждого канала (среднее число заявок μ, обслуживаемое каналом в единицу времени), условия образования очереди (ограничения, если они есть).

В зависимости от значений этих параметров выражаются характеристики эффективности работы СМО.

Далее, чтобы не оговаривать это всякий раз будем считать все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, пуассоновскими.

3.2. Системы массового обслуживания с отказами

3.2.1. Одноканальная СМО с отказами

Простейшей из всех задач теории массового обслуживания является модель одноканальной СМО с отказами (потерями).

При этом система массового обслуживания состоит только из одного канала ($n=1$) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, зависящей, в общем случае, от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему. Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени $T_{об}$, распределенного по показательному закону с параметром μ:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (t > 0). \tag{1}$$

Из этого следует, что «поток обслуживания» - простейший, с интенсивностью μ. Чтобы представить себе этот поток, вообразим один непрерывно занятый канал, который будет выдавать обслуженные заявки потоком с интенсивностью μ.

Требуется найти:

1) абсолютную пропускную способность СМО (A);

2) относительную пропускную способность СМО (q).

Рассмотрим единственный канал обслуживания как физическую систему, которая может находиться в одном из двух состояний: S_0 - свободен, S_1 - занят.

ГСП системы показан на рис. 1 *а*.

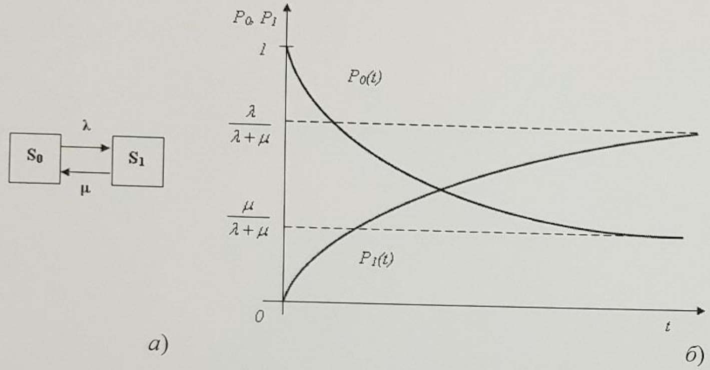

Рис. 1. ГСП для одноканальной СМО с отказами (*а*); график решения уравнения (*б*)

Из состояния S_0 в S_1 систему, переводит поток заявок с интенсивностью λ; из S_1 в S_0 - «поток обслуживания» с интенсивностью μ.

Вероятности состояний: $p_0(t)$ и $p_1(t)$. Для любого момента t:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \qquad (2)$$

Составим дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний согласно правилу, данному выше:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1; \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\mu p_1 + \lambda p_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Из двух уравнений (3) одно является лишним, так как p_0 и p_1 связаны соотношением (2). Учитывая это, отбросим второе уравнение, а в первое подставим вместо p_1 выражение $(1\text{-}p_0)$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu(1 - p_0)$$

или

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\mu + \lambda)p_0 + \mu. \qquad (4)$$

Поскольку в начальный момент канал свободен, уравнение следует решать при начальных условиях: $p_0(0)=1$, $p_0(0)=0$.

Линейное дифференциальное уравнение (4) с одной неизвестной функцией p_0 легко может быть решено не только для простейшего потока заявок (k=const), но и для случая, когда, интенсивность этого потока со временем меняется.

Для первого случая решение есть:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Зависимость величины p_0 от времени имеет вид, изображенный на рис. 1 *б*. В начальный момент (при $t=0$) канал заведомо свободен ($p_0(0)=1$). С увеличением t вероятность p_0 уменьшается и в пределе (при $t \to \infty$) равна $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$. Величина $p_1(t)$, дополняющая $p_0(t)$ до единицы, изменяется так, как показано на том же рисунке.

Для одноканальной СМО с отказами вероятность p_0 это *относительная пропускная способность q*. Т. к., p_0 есть вероятность того, что в момент t канал свободен, или вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет обслужена. Следовательно, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно p_0 ($q=p_0$).

В пределе, при $t \to \infty$, когда процесс обслуживания уже установится, предельное значение относительной пропускной способности будет равно:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{5}$$

Зная относительную пропускную способность q, легко найти абсолютную A. Они связаны соотношением:

$$A = \lambda q.$$

В пределе, при $t \to \infty$, абсолютная пропускная способность тоже установится и будет равна

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \tag{6}$$

Зная относительную пропускную способность системы q (вероятность того, что пришедшая в момент t заявка будет обслужена), легко найти вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q \tag{7}$$

или среднюю часть необслуженных заявок среди поданных. При $t \to \infty$

$$P_{отк} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

3.2.2. Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим n-канальную СМО с отказами. Будем нумеровать состояния системы по числу занятых каналов (или, что в данном случае то же, по числу заявок, находящихся в системе или связанных с системой). Состояния системы:

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - занят ровно один канал, остальные свободны;

....

S_k - заняты ровно k каналов, остальные свободны;

....

S_n - заняты все n каналы.

ГСП СМО представлен на рис. 2. Около стрелок поставлены интенсивности соответствующих потоков событий. По стрелкам *слева направо* систему переводит один и тот же поток - поток заявок с интенсивностью λ. Если система находится в состоянии S_k (занято k каналов) и пришла новая заявка, то система переходит в состояние S_{k+1}.

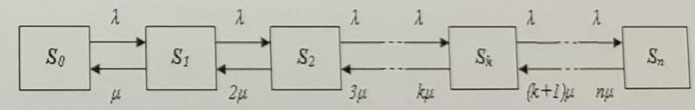

Рис. 2. ГСП для многоканальной СМО с отказами

Определим интенсивности потоков событий, переводящих систему по стрелкам *справа налево*. Пусть система находится в состоянии S_1 (занят один канал). Тогда, как только закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал, система перейдет в S_0; значит, поток событий, переводящий систему по стрелке S_1-S_0, имеет интенсивность μ. Очевидно, если обслуживанием занято два канала, а не один, поток обслуживания, переводящий систему по стрелке S_2-S_1 будет вдвое интенсивнее (2μ); если занято k каналов - в k раз интенсивнее ($k\mu$). Соответствующие интенсивности указаны у стрелок, ведущих справа налево.

Из рис. 2 видно, что процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса размножения и гибели, рассмотренного выше.

Приведенная интенсивность потока заявок (ρ) представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (8)$$

С учетом этого обозначения:

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0; \quad (k = 1, \quad 2, \quad \dots, \quad n); \\ p_0 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \dots + \dfrac{\rho^n}{n!}} = \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \dots + \dfrac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \approx e^{-\rho}. \end{cases} \qquad (9)$$

Соотношения (9) называются *формулами Эрланга.* Они выражают предельные вероятности всех состояний системы в зависимости от параметров λ, μ и n.

Имея вероятности состояний p_0, p_1, p_2, ..., p_k, ..., p_n, можно найти характеристики эффективности СМО: относительную пропускную способность q, абсолютную пропускную способность A и вероятность отказа $P_{отк}$.

Вероятность отказа. Заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все n каналов заняты. Вероятность этого равна

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (10)$$

Относительная пропускная способность. Вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (относительная пропускная способность q), дополняет $P_{отк}$ до единицы:

$$q = 1 - p_n. \qquad (11)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q = \lambda(1 - p_n). \qquad (12)$$

Среднее число заявок в системе. Одной из важных характеристик СМО с отказами является *среднее число занятых каналов* (в данном случае оно совпадает со *средним числом заявок,* находящихся в системе). Обозначим это среднее число $\bar{k}$. Величину $\bar{k}$ можно вычислить через вероятности p_0, p_1, p_2, ..., p_k, ..., p_n по формуле

$$\bar{k} = 0p_0 + 1p_1 + \dots + np_n \qquad (13)$$

как математическое ожидание дискретной случайной величины, однако проще выразить среднее число занятых каналов через абсолютную пропускную способность A, которая уже известна. Действительно, A есть не что иное, как среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; один занятый канал обслуживает в среднем за единицу времени μ заявок; среднее число занятых каналов получится делением A на μ:

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu}$$

или, переходя к обозначению $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$,

$$\bar{k} = \rho(1 - p_n). \qquad (14)$$

3.3. Системы массового обслуживания с ожиданием

3.3.1. Одноканальная СМО с ожиданием

Рассмотрим простейшую СМО с ожиданием - одноканальную систему ($n=1$), в которую поступает поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать λ/μ обслуженных заявок в единицу времени). Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

3.3.1.1. Система с ограниченной длиной очереди

Предположим сначала, что количество мест в очереди ограничено числом m, т. е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, она покидает систему необслуженной. В дальнейшем, устремив m к бесконечности, мы получим характеристики одноканальной СМО без ограничений длины очереди.

Будем нумеровать состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе (как обслуживаемых, так и ожидающих обслуживания):

S_0 - канал свободен;

S_1 - канал занят, очереди нет;

S_2 - канал занят, одна заявка стоит в очереди;

....

S_k - канал занят, k-1 заявок стоят в очереди;

S_{k+1} - канал занят, m заявок стоят в очереди.

ГСП показан на рис. 3. Все интенсивности потоков событий, переводящих в систему по стрелкам слева направо, равны λ, а справа налево - μ. Действительно, по стрелкам слева направо систему переводит поток заявок (как только придет заявка, система переходит в следующее состояние), справа же налево - поток «освобождений» занятого канала, имеющий интенсивность μ (как только будет обслужена очередная заявка, канал либо освободится, либо уменьшится число заявок в очереди).

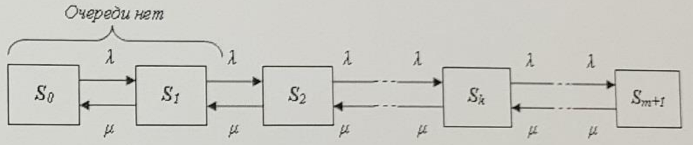

Рис. 3. Одноканальная СМО с ожиданием

Изображенная на рис. 3 схема представляет собой схему размножения и гибели.

$$p_0 = \frac{1}{(1-\rho^{m+2})/(1-\rho)} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \qquad (15)$$

предельные вероятности имеют вид:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \\ p_1 = \rho p_0; \\ p_2 = \rho^2 p_0; \\ \dots \\ p_k = \rho^k p_0; \\ \dots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0. \end{cases} \qquad (16)$$

Выражение (15) справедливо только при $\rho<1$ (при $\rho=1$ она дает неопределенность вида 0/0). Сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\rho=1$ равна $m+2$, и в этом случае

$$p_0 = \frac{1}{m-2}.$$

Основными характеристики СМО, в данном случае являются: вероятность отказа $p_{отк}$, относительная пропускная способность q, абсолютная пропускная способность A, средняя длина очереди $\bar{r}$, среднее число заявок, связанных с системой $\bar{k}$, среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_{ож}$, среднее время пребывания заявки в СМО $\bar{t}_{смо}$.

Вероятность отказа. Заявка получает отказ только в случае, когда канал занят и все m мест в очереди тоже:

$$p_{отк} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (17)$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (18)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda q. \qquad (19)$$

Средняя длина очереди:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1-(m+1-m\rho)\rho^m)}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}. \qquad (20)$$

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$\bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (21)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{ож} = p_1\frac{1}{\mu} + p_2\frac{2}{\mu} + \ldots + p_k\frac{k}{\mu} + \ldots + p_m\frac{m}{\mu},$$

если подставить сюда выражения для вероятностей (4.49), получим:

$$\bar{t}_{ож} = p_0\rho\frac{1}{\mu} + p_0\rho^2\frac{2}{\mu} + \ldots + p_0\rho^k\frac{k}{\mu} + \ldots + p_0\rho^m\frac{m}{\mu} =$$

$$= \frac{p_0\rho}{\mu}\frac{(1-(m+1-m\rho)\rho^m)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{(1-(m+1-m\rho)\rho^m)}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}. \qquad (22)$$

Здесь использованы соотношения (19), (20) (производная геометрической прогрессии), а также p_0 из (16).

Сравнивая это выражение с (20), замечаем, что

$$\bar{t}_{ож} = \frac{1}{\rho\mu}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \qquad (23)$$

т.о., среднее время ожидания равно среднему числу заявок в очереди, деленному на интенсивность потока заявок.

Среднее время пребывания заявки в системе. Обозначим $\bar{t}_{смо}$ матожидание случайной величины - время пребывания заявки в СМО, которое складывается из среднего времени ожидания в очереди ($\bar{t}_{ож}$) и среднего времени обслуживания ($\bar{t}_{обсл}$). Если загрузка системы составляет 100 %, то $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$, в противном же случае

$$\bar{t}_{обсл} = \frac{q}{\mu}. \qquad (24)$$

Отсюда

$$\bar{t}_{смо} = \bar{t}_{ож} + \bar{t}_{обсл} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu} \qquad (25)$$

количество мест в очереди ограничено числом m

4. ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Рассмотреть одноканальную СМО с ожиданием (количество мест в очереди ограничено числом m). Время поступления заявок в СМО, время обслуживание канала и m приведены в таблице.

Входные параметры СМО

вари-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t заявок	6±2	5±4	6±5	8±7	6±5	7±6	8±6	7±5	8±7	5±4	3±2	4±3
t канала	5±2	6±4	7±6	10±8	8±6	8±7	10±7	8±7	10±5	10±8	6±5	10±8
m	10	12	14	8	15	16	12	8	20	25	28	30
вари-ант	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
t заявок	5±4	6±5	6±4	5±2	6±5	3±2	3±2	4±3	6±5	8±6	10±3	18±10
t канала	8±6	7±6	8±7	7±6	10±8	10±7	12±10	8±5	8±6	9±8	7±4	12±5
m	35	16	18	22	25	26	30	16	20	16	12	20

Найти:

1) интенсивность потока заявок λ; интенсивность обслуживания μ,

2) вероятность отказа,
3) относительную пропускную способность,
4) абсолютную пропускную способность,
5) среднюю длину очереди,
6) среднее число заявок, находящихся в системе,
7) среднее время ожидания заявки в очереди,
8) среднее время пребывания заявки в системе.

5. УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по лабораторной работе должен содержать:
- наименование и цель работы,
- краткие теоретические сведения,
- описание процесса проведения измерений,
- полученные результаты,
- выводы по полученным результатам.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Дайте определение СМО.
2. Что включает элементарный прибор обслуживания?
3. Приведите классификацию СМО.
4. Назовите характеристики СМО.
5. Какие алгоритмы необходимо задать для функционирования СМО?
6. Какие виды приоритетов обслуживания заявок? Поясните.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новикова Е.И. Моделирование биомедицинских систем: учеб. пособие / Е.И. Новикова, О.В. Родионов. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2008. 196 с.

2. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания / В.В. Романцев, С.А. Яковлев.– СПб.: Поликом, 1995.

3. Советов Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев // Практикум. – М.: Высш. шк., 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители: д-р техн. наук О.В. Родионов,
канд. техн. наук Е.И. Новикова

УДК 681.3

Методические указания к выполнению лабораторной работы № 4 по дисциплине «Основы моделирования биологических процессов и систем» для студентов направления 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (профили «Биотехнические и медицинские аппараты и системы», «Менеджмент и управление качеством в здравоохранении») очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Родионов, Е.И. Новикова. Воронеж, 2015. 17 с.

Методические указания предназначены для проведения лабораторной работы по дисциплине «Основы моделирования биологических процессов и систем».

Предназначены для студентов 3 курса.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Е.Н. Коровин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. О.В. Родионов

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета