

Примерами непрерывных случайных величин, валов, являются: урожай какой-либо зерновой культуры и др.

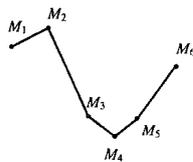


Рис.9.1

Пусть имеются результаты измерений непрерывной случайной величины X , для которой a и b - соответственно наименьшее и наибольшее значение. Отрезок $[a, b]$ разобьем на k элементарных отрезков:

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (x_0 = a, x_k = b),$$

Обозначим через n_i число значений величины X , принадлежащих интервалу (x_{i-1}, x_i) . Построим табл. 9.1. Эта таблица называется **интервальным вариационным рядом**. Относительной частотой, соответствующей i -му интервалу, называется отношение частоты n_i к объему выборки n , где

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^k n_i / n = 1$

Значения признака	Частота
(x_0, x_1)	n_1
(x_1, x_2)	n_2
...	...
(x_{k-1}, x_k)	n_k
Сумма	n (объем выборки)

Разности $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_{k-1}$ называются **интервальными разностями**. Разность между наибольшим и наименьшим значением признаков X , т.е. $x_k - x_0$ (или $b - a$), называется **размахом вариации**. Плотностью распределения частот на интервале (x_{i-1}, x_i) называется частное

$$n_i / (x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (9.6)$$

Интервальный вариационный ряд будет наиболее простым, когда все интервальные разности равны между собой, т.е. $x_i - x_{i-1} = h$ ($i = 1, 2, \dots, k$), плотность распределения частот на i -м интервале в этом случае равна n_i / h_i .

Если статистическое распределение задано перечнем интервалов и соответствующих им частот, то строят гистограмму частот.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $h_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами $\frac{n_i}{h_i}$. В случае равенства интервальных разностей все прямоугольники имеют одно и то же основание h , их высоты равны $\frac{n_i}{h}$. На оси абсцисс откладывают частичные интервалы длины h , над i -м интервалом строят прямоугольник высоты $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Отметим, что площадь S гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки. Действительно, если s_i - площадь i -го прямоугольника, то

$$s_i = h_i \frac{n_i}{h_i} = n_i, S = \sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

Частичный интервал длины $h=4$	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
Сумма частот вариантов частичного интервала n_i	10	20	50	12	8
Плотность частоты n_i/h	2,5	5	12,5	3	2

На рис. 9.2 изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, указанного в таблице

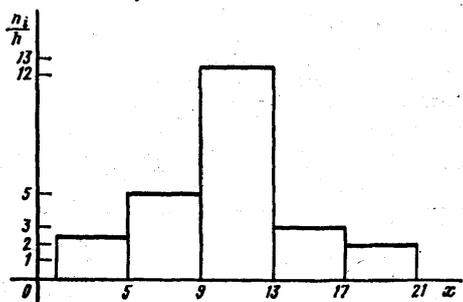


Рис.9.2

Аналогично строится гистограмма относительных частот, т.е. ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h_i (h_i —

длина каждого частичного интервала), а высоты — n_i/h_i (это отношение называется плотностью относительной частоты).

Очевидно, площадь s гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот, т.е. единице. В самом деле, если s_i — площадь i -го прямоугольника, то

$$s_i = h_i \frac{\omega_i}{h_i} = \omega_i, S = \sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k \omega_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = 1.$$

9.3. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения, или **функцией распределения выборки**, называется функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Обозначим эмпирическую функцию распределения через $F^*(x)$; если n_x — число вариантов, меньших x , n — объем выборки, то по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}. \quad (9.7)$$

Из определения эмпирической функции следует, что $F^*(x)$ обладает следующими свойствами: 1) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$; 2) $F^*(x)$ — неубывающая функция; 3) если a — наименьшая, b — наибольшая варианты, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq a$; $F^*(x) = 1$ при $x > b$. Функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности, в отличие от эмпирической функции $F^*(x)$ распределения выборки, называют **теоретической функцией распределения**. Различие между эмпирической и теоретической функцией распределения состоит в том, что первая

определяет относительную частоту события $X < x$, а вторая - вероятность того же события.

Пример.

Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки :

варианты x_i	6	8	12	15
частоты n_i	2	3	10	5

Объем выборки $\sum_{i=1}^4 n_i = 2 + 3 + 10 + 5 = 20$. Наименьшая варианта $x_1 = 6$, поэтому $F^*(x) = 0$, если $x \leq 6$. Значение $X < 8$, т.е. $x_1 = 6$, наблюдалось 2 раза, поэтому $F^*(x) = \frac{2}{20} = 0,1$, если $6 < x \leq 8$. Значения $X < 12$, т.е. $x_1 = 6, x_2 = 8$, наблюдались $2 + 3 = 5$ раз, поэтому $F^*(x) = 5/20 = 0,25$, если $8 < x \leq 12$. Значения $X < 15$, т.е. $x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 12$, наблюдались $2 + 3 + 10 = 15$ раз, поэтому $F^*(x) = \frac{15}{20} = 0,75$, если $12 < x \leq 15$. Поскольку $x_4 = 15$ - наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$, если $x > 15$. Итак, искомая эмпирическая функция определяется формулами

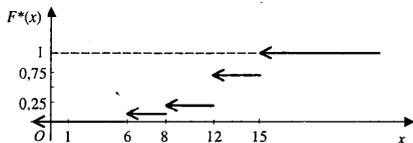


Рис. 9.3

9.4 Оценка параметров по выборке.

Понятие несмещенности, состоятельности и эффективности оценки

Пусть случайная величина X имеет распределение $F(x, a)$, содержащее неизвестный параметр. Требуется оценить параметр a , т.е. приближенно определить его значение по некоторой выборке x_1, \dots, x_n . Оценку параметра a , обозначим через \tilde{a} ; очевидно, \tilde{a} зависит от x_1, \dots, x_n , т.е.

$$\tilde{a} = \tilde{a}(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{9.8}$$

Отметим, что \tilde{a} является случайной величиной, так как в i -й серии из n испытаний \tilde{a} принимает некоторое значение \tilde{a}_i . Следовательно, можно говорить о распределении этой величины и о числовых характеристиках распределения.

Чтобы оценка \tilde{a} неизвестного параметра a имела практическую ценность, к ней предъявляются некоторые требования.

Оценка параметра a называется *несмещенной*, если математическое ожидание \tilde{a} равно a , т.е.

$$M(\tilde{a}) = a, \tag{9.9}$$

и *смещенной*, если

$$M(\tilde{a}) \neq a. \tag{9.10}$$

Оценка \tilde{a} параметра a называется *состоятельной*, если при любом $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{a} - a| < \epsilon) = 1 \tag{9.11}$$

Очевидно равенство (9.11) выполняется, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\tilde{a}) = 0 \tag{9.12}$$

Это следует из неравенства Чебышева (см. (9.1)).

Оценка \tilde{a} называется *эффективной*, если при заданном n она имеет *наименьшую дисперсию*, т.е.

$$D(\tilde{\alpha}) = D_{min}. \quad (9.13)$$

Желательно, чтобы полученные из опыта оценки характеристик генеральной совокупности удовлетворяли требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности.

9.5. Генеральная средняя. Выборочная средняя.

Пусть требуется изучить дискретную генеральную совокупность относительно количественного признака X .

Генеральной средней называется среднее арифметическое значений признака X генеральной совокупности. Обозначим генеральную среднюю через x_G . Если все значения x_1, x_2, \dots, x_N признака генеральной совокупности объема N являются различными, то

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}, \quad x_G = \frac{1}{N} \overset{N}{\underset{i=1}{\mathop{\text{a}}}} x_i \quad (9.14)$$

Поскольку признак X можно рассматривать как случайную величину, возможные значения которой x_1, x_2, \dots, x_N имеют одну и ту же вероятность $P = 1/N$, математическое ожидание этой величины определяется формулой

$$M(X) = x_1 / N + \dots + x_N / N = (1/N) \overset{N}{\underset{i=1}{\mathop{\text{a}}}} x_i = x_G \quad (9.15)$$

Если значения x_1, x_2, \dots, x_m имеют соответственно частоты

N_1, N_2, \dots, N_m , причем $\overset{m}{\underset{i=1}{\mathop{\text{a}}}} N_i = N$, то

$$x_G = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_m N_m}{N}, \quad x_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i N_i \quad (9.16)$$

Отметим, что формула (9.15) справедлива и для этого случая. При непрерывном распределении признака X по определению полагают

$$x_G = M(X). \quad (9.17)$$

Предположим, что для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X из нее извлечена выборка объема n .

Выборочной средней x_B называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности. Если все значения x_1, x_2, \dots, x_n различны, то

$$x_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_B = \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{i=1}{\mathop{\text{a}}}} x_i \quad (9.18)$$

Если значения x_1, x_2, \dots, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, \dots, n_k , причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$\text{, то } x_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}, \quad x_B = \frac{1}{n} \overset{k}{\underset{i=1}{\mathop{\text{a}}}} n_i x_i \quad (9.19)$$

Так как каждой выборке объема n , извлеченной из генеральной совокупности, соответствует некоторое число x_B , определяемое формулой (9.18) или (9.19), то выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину X_B .

Выборочную среднюю принимают в качестве оценки генеральной средней. Покажем, что эта оценка является несмещенной и состоятельной, т.е. $M(X_B) = x_G$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_B - x_G| < \varepsilon) = 1$. Не уменьшая общности рассуждений, предполагаем, что все значения x_1, x_2, \dots, x_n различны. Будем рассматривать эти значения как независимые, одинаково распределенные случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n ; они имеют одинаковые числовые характеристики, в частности, одно и то же математическое ожидание a . Учитывая свойства математического ожидания, получаем

$$M(X_B) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = a \quad (9.20)$$

$$M(X_B) = a \quad (9.21)$$

Поскольку каждая из величин X_1, X_2, \dots, X_n имеет то же распределение, что и генеральная совокупность, математическое ожидание признака X генеральной совокупности также равно a , т.е. $M(X) = a$.

Из формул (9.15), (9.20) и (9.21) следует, что

$$M(X_B) = x_T \quad (9.22)$$

Это равенство означает, что выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней. Предполагая, что дисперсии случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n ограничены, на основании следствия из теоремы Чебышева (частный случай) получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_B - a| < \varepsilon) = 1$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_B - x_T| < \varepsilon) = 1$.

так как $a = x_T$ в силу равенств (9.15) и (9.21). Следовательно, при неограниченном увеличении объема выборки выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней. Последнее равенство означает, что выборочная средняя будет состоятельной оценкой генеральной средней.

Из предыдущего следует, что выборочные средние, найденные по нескольким выборкам достаточно большого объема из некоторой генеральной совокупности, приближенно равны между собой. Это утверждение выражает свойство устойчивости выборочных средних.

9.6. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия. Эмпирическая дисперсия

Для характеристики рассеяния значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения служат понятия генеральной дисперсии и генерального среднего квадратического отклонения.

Генеральной дисперсией D_T называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений признака X генеральной совокупности от их среднего значения x_T . Если все

значения x_1, x_2, \dots, x_n признака генеральной совокупности объема N являются различными, то

$$D_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_T)^2 \quad (9.23)$$

Если значения x_1, x_2, \dots, x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, \dots, N_k причем

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = N, \text{ то}$$

$$D_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i (x_i - x_T)^2 \quad (9.24)$$

Генеральным средним квадратическим отклонением σ_T называется корень квадратный из генеральной дисперсии, т.е.

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \quad (9.25)$$

Для характеристики рассеяния значений количественного признака выборки вокруг среднего значения x_B вводят понятия выборочной дисперсии и выборочного среднего квадратического отклонения

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения x_B .

Если все значения x_1, x_2, \dots, x_n признака выборки объема n различны, то

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_B)^2 \quad (9.26)$$

Если значения x_1, x_2, \dots, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, \dots, n_k причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - x_B)^2 \quad (9.27)$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$ определяется формулой

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D_{\bar{x}}} \quad (9.28)$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно пользоваться формулой

$$D_B = \bar{x}^2 - (\bar{x}_{\bar{x}})^2, \quad (9.29)$$

где

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad \bar{x}_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 \quad (9.30)$$

Докажем формулу (9.29). Преобразуя формулу (9.27), получаем

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x}_B)^2$$

Из формулы (9.24) аналогично находим $D_G = \bar{x}_G^2 - (\bar{x}_G)^2$. Следовательно, для обоих случаев

$$D = \bar{x} - (\bar{x})^2 \quad (9.31)$$

где \bar{x}^2 – среднее квадратов значение; $(\bar{x})^2$ – квадрат общей средней.

Можно доказать, что

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_G \quad (9.32)$$

Так как $M(D_B) \neq D_G$, то выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой генеральной дисперсии D_G . Чтобы получить несмещенную оценку генеральной дисперсии D_G , вводят понятие так называемой эмпирической (или исправленной) дисперсии s^2 .

Эмпирическая, или *исправленная*, дисперсия s^2 определяется формулой

$$s^2 = \frac{n-1}{n} D_B = \frac{n}{(n-1)n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \quad (9.33)$$

Исправленная дисперсия (9.33) является несмещенной оценкой генеральной дисперсии, так как

$$M(s^2) = M\left(\frac{n-1}{n} D_B\right) = \frac{n}{n-1} M(D_B) = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n} D_G = D_G$$

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности служит «исправленное» среднее квадратическое отклонение, или эмпирический стандарт

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2} \quad (9.34)$$

В случае, когда все значения x_1, x_2, \dots, x_n различны, т.е. все $n_i=1$ и $k=n$, формулы

(9.33) и (9.34) принимают вид

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 \quad (9.35)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2} \quad (9.36)$$

9.7. Доверительная вероятность. Доверительный интервал

Оценка, определяемая одним числом, называется *точечной*. При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от истинного значения неизвестного параметра. Вследствие этого пользуются интервальными оценками.

Оценка, определяемая двумя числами – концами интервалов, называется *интервальной*.

Пусть \tilde{a} - оценка неизвестного параметра a , полученная по данным выборки. Очевидно оценка тем точнее, чем меньше модуль разности $\tilde{a} - a$. Если $d > 0$ и $|\tilde{a} - a| < d$, то чем меньше d , тем точнее оценка \tilde{a} ; число d характеризует точность оценки.

Доверительной вероятностью, или **надежностью**, оценки \tilde{a} параметра a называется вероятность g , с которой осуществляется неравенство $|\tilde{a} - a| < d$, т.е.

$$P(|\tilde{a} - a| < d) = g \quad (9.37)$$

Обычно надежность g задается заранее, в качестве g берут число, близкое к единице. Так как неравенство $|\tilde{a} - a| < d$ равносильно неравенствам $-d < \tilde{a} - a < d$ или $\tilde{a} - d < a < \tilde{a} + d$, то формулу (9.37) можно записать в виде

$$P(\tilde{a} - d < a < \tilde{a} + d) = g \quad (9.38)$$

Эта формула означает следующее: вероятность того, что интервал $(\tilde{a} - d, \tilde{a} + d)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр a , равна g . Интервал $(\tilde{a} - d, \tilde{a} + d)$, который покрывает неизвестный параметр a с заданной надежностью g , называется **доверительным интервалом**. Концы доверительного интервала называют **доверительными границами**. Доверительные границы являются случайными величинами (они изменяются от выборки к выборке).

Рассмотрим вопрос о построении доверительного интервала для оценки математического ожидания a нормального распределения при известном значении среднего квадратического отклонения s .

Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение с заданным s и неизвестным a . Оценим неизвестный параметр a выборочной средней x_g ; найдем доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью g . Так как выборочное среднее x_g меняется от выборки к выборке, его можно рассматривать как

случайную величину x_g . Выборочные значения x_1, x_2, \dots, x_n также меняются от выборки к выборке. Будем рассматривать их, как одинаково распределенные случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n (математическое ожидание каждой из этих величин равно a , среднее квадратическое отклонение равно s). В соответствии с формулами п. 9.3 (см. (9.31) и (9.33)) имеем

$$M(X_g) = a, \quad s(X_g) = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (9.39)$$

Потребуем, чтобы

$$P(|X_g - a| < d) = g \quad (9.40)$$

Поскольку случайная величина X_g также имеет нормальное распределение, то, применяя формулу (см. п. 9.9)

$$P(|X - a| < d) = 2\Phi\left(\frac{d}{s}\right) - 1$$

к величинам X_g и $s(X_g) = \frac{s}{\sqrt{n}}$, находим

$$P(|X_g - a| < d) = 2\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{s}\right) - 1 = 2\Phi(t), \quad (9.41)$$

где

$$t = \frac{d\sqrt{n}}{s}, \quad (9.42)$$

Из последнего равенства определим $s = t \frac{s}{\sqrt{n}}$ и подставим в формулу (9.41):

$$P(|X_g - a| < \frac{ts}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) \quad (9.43)$$

или

$$P(x_a - \frac{tS}{\sqrt{n}} < a < x_b + \frac{tS}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) ,$$

где x_b - выборочное среднее.

Поскольку вероятность P задана и равна g , т.е.

$$P(x_a - \frac{tS}{\sqrt{n}} < a < x_b + \frac{tS}{\sqrt{n}}) = g, \quad (9.44)$$

то последнее означает, что доверительный интервал

$$(x_a - \frac{tS}{\sqrt{n}}, x_b + \frac{tS}{\sqrt{n}}) \quad (9.45)$$

покрывает неизвестный параметр a с надежностью g . Из формулы (9.42) находим точность оценки

$$d = \frac{tS}{\sqrt{n}} \quad (9.46)$$

Отметим, что число t определяется равенством

$$2\Phi(t) = g, \quad (9.47)$$

получающимся из (9.43) и (9.44); значение t находится с помощью таблиц функции Лапласа.

10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Методы теории вероятностей и математической статистики широко применяются при изучении различных явлений и обработке результатов эксперимента. Изучение явления, как правило, начинается с наблюдений. Под наблюдением имеют в виду регистрацию некоторых (случайных) событий, связанных с изучаемым явлением. Результаты наблюдений делятся на качественные и количественные. К качественным резуль-

татам относится появление некоторых событий (зажигание контрольной лампочки, выпадение осадка в растворе и т.п.). Количественные результаты получают при соответствующих подсчетах и измерениях.

10. 1. Измерения и их погрешности. Применение методов математической статистики к обработке результатов наблюдений

Под измерением понимают сравнение некоторой величины с другой (однородной) величиной, принятой за единицу. Различают прямые и косвенные измерения. При прямых измерениях исследуемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или с помощью измерительного прибора (например, измерения длин линейкой, масс на весах и т.п.). При косвенных измерениях величины ее значения определяются по результатам прямых измерений других величин, связанных с рассматриваемой величиной заданной функциональной зависимостью (например, измерения плотности тела по измерениям его массы и объема).

В результате измерений получают приближенные значения величины, а не ее точное значение. При измерениях неизбежны погрешности. **Погрешностью**, или **ошибкой**, измерения называется разность $x - a$ между результатом измерения x и точным значением a измеряемой величины. (Отметим, что погрешности измерений обычно неизвестны, так как неизвестно и точное значение измеряемой величины). Различают следующие виды погрешностей (ошибок) измерений: **грубые**, **систематические**, **случайные**. К грубым ошибкам (или промахам) относят ошибки, сделанные вследствие неверной записи показаний прибора, неправильно прочитанного отсчета и т.п. Систематические погрешности - погрешности, связанные с ограниченной точностью изготовления прибора, неправильной его установкой или некоторыми другими факторами. Они вызываются вполне определенными причинами, и их ве-

личина при всех измерениях остается постоянной (как в случае смещения нуля шкалы прибора) либо изменяется по определенному закону (как в случае неравномерной шкалы). Систематические ошибки можно устранить путем введения соответствующих поправок. Случайные погрешности вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и заранее не может быть учтено. Случайные погрешности являются неустранимыми. Хотя их нельзя исключить, но с помощью методов теории вероятностей можно учесть влияние случайных погрешностей на оценку точного значения измеряемой величины. В теоретико-вероятностной модели случайные погрешности $z = x - a$ (и сами результаты измерений $x = a + z$) рассматривают как случайную величину с некоторым законом распределения ее вероятностей. В качестве закона распределения случайных погрешностей измерения чаще всего принимается нормальный закон распределения.

Замечание.

Нормальное распределение случайных погрешностей обычно достаточно хорошо согласуется с опытом. В частности, это распределение отражает следующие два свойства случайных погрешностей: 1) симметрии (равные по модулю и противоположные по знаку погрешности встречаются почти одинаково часто) и 2) концентрации (малые по модулю случайные погрешности встречаются чаще, чем большие). При каждом измерении фиксируется один количественный результат. Результаты любой серии из n измерений будут случайным образом колебаться вокруг точного значения измеряемой величины. Следовательно, с этим точным значением связана некоторая случайная величина X . В итоге n независимых измерений получается n ее возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n . Если все возможные значения случайной величины X считать генеральной совокупностью, то полученные при n измерениях значения x_1, x_2, \dots, x_n образуют выборку. По этой выборке и необходимо определить распределение случайной

величины X (распределение генеральной совокупности). Таким образом, проведение измерений является частным случаем выборочного метода, когда в качестве генеральной совокупности рассматриваются все возможные значения указанной случайной величины X и исследуется распределение этой величины по выборке (результатами измерений) на основе теории, изложенной в предыдущих главах.

10. 2. Оценка точного значения измеряемой величины

Пусть в итоге n независимых измерений некоторой величины X получены следующие результаты:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{10.1}$$

Будем предполагать, что эти результаты свободны от грубых и систематических ошибок (неверные результаты отброшены, на систематические ошибки введены поправки). Оценить точное значение a измеряемой величины - это значит:

- а) определить функцию $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которая обеспечивает достаточно близкое приближение к значению a ;
- б) указать границы интервала $(a - d_1, a + d_2)$, который с заданной вероятностью g покрывает истинное значение a (эта оценка называется доверительной оценкой, вероятность g - доверительной вероятностью, или надежностью оценки, интервал $(a - d_1, a + d_2)$ - доверительным интервалом, а его границы - доверительными границами). Оценка $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ должна (по возможности) обладать следующими свойствами: несмещенности, состоятельности и эффективности (см. п. 9.4).

Введем среднее арифметическое значение (среднее значение) x результатов (10.1), среднее квадратическое отклонение s^* этих результатов от их среднего значения x и эмпирический стандарт s соответственно по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x = \frac{1}{n} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\mathbf{a}}} x_i \quad (10.2)$$

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\mathbf{a}}} (x_i - x)^2}; \quad (10.3)$$

$$s = s^* \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\mathbf{a}}} (x_i - x)^2}. \quad (10.4)$$

Если все измерения произведены с одинаковой точностью, то в качестве оценки точного значения a измеряемой величины принимают среднее арифметическое значение результатов (10.1):

$$a \approx x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad a \approx \frac{1}{n} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\mathbf{a}}} x_i. \quad (10.5)$$

Как было показано (см. п. 9.5), эта оценка является несмещенной и состоятельной. Введенная оценка оказывается и эффективной при дополнительном предположении о том, что случайные ошибки измерений подчинены нормальному закону распределения. Такое предположение имеется в виду и в дальнейшем. Отметим, что оценка (10.5) относится к числу точечных оценок.

Переходим к **доверительным** оценкам. Будем рассматривать симметрические доверительные оценки, т.е. оценки вида

$$|a - x| < d (d > 0) \quad (10.6)$$

или

$$x - d < a < x + d, \quad (10.7)$$

где x - среднее значение (см. (10.2)). Величина d (точность оценки) определяется по заданной доверительной вероятности g (надежности оценки); g обычно задается в виде одного из трех значений: $g = 0,95$, $g = 0,99$, $g = 0,999$.

Доверительная оценка при известной точности измерений.

Если известно среднее квадратическое отклонение s , то доверительная оценка (10.6) имеет вид

$$|a - x| < \frac{ts}{\sqrt{n}}, \quad (10.8)$$

где n - число измерений, а значение $t = t(g)$ определяется по заданной доверительной вероятности g из условия $2\Phi(t) = g$ и находится с помощью таблиц. Точность оценки d в этом случае выражается формулой

$$d = \frac{ts}{\sqrt{n}}. \quad (10.9)$$

Доверительная оценка при неизвестной точности измерений.

Если средняя квадратическая погрешность s заранее неизвестна, то вместо нее применяют эмпирический стандарт s (см. п. 9.6), который служит оценкой параметра s . Доверительная оценка (10.6) принимает вид

$$|a - x| < \frac{ts}{\sqrt{n}}, \quad (10.10)$$

или

$$|a - x| < \frac{ts^*}{\sqrt{k}} \quad (k = n - 1), \quad (10.11)$$

где s^* и s определяются соответственно формулами (10.3) и (10.4), а множитель $t = t(g, k)$ зависит не только от доверительной вероятности g , но и от числа измерений n ($k = n - 1$). Значения этого множителя находят по таблицам.

Замечание.

Соответствующие таблицы составлены с помощью распределения

Стьюдента, т.е. распределения вероятностей отношения

$(x - a)\sqrt{n}/s$; значения $t = t(g, k)$

определены из условия

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - a}{s/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = g.$$

Распределение Стьюдента зависит от одного параметра k , называемого числом степеней свободы; в данном случае этот параметр связан с числом измерений формулой $k=n-1$

Правило трех сигм.

Поскольку надежность доверительной оценки выбирается заранее, в практике математической обработки экспериментальных данных широко применяется правило трех сигм: отклонение истинного значения измеряемой величины от среднего арифметического результатов измерений не превосходит утроенной средней квадратической погрешности этого среднего значения.

Следовательно, правило трех сигм представляет собой доверительную оценку

$$|a - \bar{x}| < \frac{3s}{\sqrt{n}} \quad (10.12)$$

при известной величине s или доверительную оценку

$$|a - \bar{x}| < \frac{3s}{\sqrt{n}} \quad (10.13)$$

при неизвестной величине s (s – эмпирический стандарт).

Оценка (10.12) имеет надежность $2\Phi(3)=0,9973$ независимо от числа измерений. Оценка (10.13) зависит от n -числа измерений (зависимость эта указывается с помощью соответствующих таблиц).

10.3. Оценки точности измерений

Здесь предполагается, что измерения являются независимыми и равноточными (с одной и той же дисперсией), а их погрешности – случайными, причем распределены они по нормальному закону. В качестве показателя точности измере-

ний оценивается дисперсия этого закона S^2 или средняя квадратическая погрешность $s = \sqrt{S^2}$.

Точечные оценки дисперсии.

1. Если измеряют известную величину a , то в качестве эффективной оценки дисперсии S^2 применяют квадрат среднего квадратического отклонения s^* результатов измерений (10.1) от значения a :

$$s^2 \gg s^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2. \quad (10.14)$$

2. При измерениях неизвестной величины в качестве оценки дисперсии a^2 применяют эмпирическую дисперсию s^2 :

$$s^2 \gg s^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (10.15)$$

где \bar{x} – среднее арифметическое значений x_1, x_2, \dots, x_n . Оценка (10.15) является несмещенной и состоятельной, но не является эффективной (она асимптотически эффективна, т.е. ее дисперсия стремится к наименьшему значению при неограниченном увеличении числа измерений n).

3. Если производится m серий измерений некоторой величины и известны количества измерений x_1, x_2, \dots, x_m , а также средние арифметические результаты $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ в каждой серии, то в качестве оценки дисперсии применяют эмпирическую дисперсию s^2 из средних:

$$s^2 \gg s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad (10.16)$$

где

$$x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i, \quad N = n_1 + n_2 + \dots + n_m. \quad (10.17)$$

Эта оценка является несмещенной, состоятельной (и асимптотически эффективной при $m \rightarrow \infty$).

Доверительные оценки средней квадратической погрешности.

При большом числе измерений доверительную оценку средней квадратической погрешности S записывают в виде оценки относительного отклонения оцениваемого значения S от эмпирического стандарта s (или s^* , или \bar{s}). Эта оценка имеет вид

$$\left| \frac{S - s}{s} \right| < q, \quad (10.18)$$

или

$$s(1 - q) < S < s(1 + q), \quad (10.19)$$

Коэффициент $q = q(g, k)$ находится с помощью соответствующих таблиц в зависимости от доверительной вероятности g (надежности оценки) и числа степеней свободы k ($k = 1$ в случае 1, $k = n - 1$ в случае 2, $k = m - 1$ в случае 3).

При малом числе измерений симметричная оценка (10.19) приводит к неоправданно большому доверительным интервалам; в этом случае применяют асимметричные доверительные оценки вида

$$sz_1 < S < sz_2, \quad (10.20)$$

где s - эмпирический стандарт; значения коэффициентов $z_1 = z_1(y, k)$, $z_2 = z_2(y, k)$, находятся по таблицам.

10.4. Метод наименьших квадратов

При обработке опытных данных часто встречаются с задачей об определении параметров функциональной зависимости между переменными величинами X и Y посредством фор-

мулы $y = f(x)$. Эта задача решается с помощью метода наименьших квадратов, сущность которого состоит в следующем. При измерении двух величин x и y получены следующие данные:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
Y	y_1	y_2	\dots	y_n

Известен также вид функциональной зависимости, т.е.

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = j(x) \quad (10.21)$$

где f - заданная функция; a_0, a_1, \dots, a_m - параметры, значения которых требуется определить. Значения, полученные из формулы (10.21) при заданных значениях x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), как правило, не совпадают с экспериментальными значениями y_i приведенными в указанной таблице, т.е. разность $y_i - j(x_i)$ отлична от нуля для всех или некоторых точек x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Для каждого i эту разность обозначим через e_i и назовем **погрешностью**:

$$y_i - j(x_i) = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.22)$$

Значения параметров a_k ($k = 0, 1, \dots, m$) функции (10.21) требуется выбрать так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей, т.е. так, чтобы функция

$$u = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - j(x_i))^2 \quad (10.23)$$

принимала наименьшее значение. Поскольку эта функция - сумма квадратов некоторых чисел, она принимает неотрицательные значения (каждое слагаемое суммы неотрицательно).

Функция (10.23) является функцией $m+1$ переменных a_0, a_1, K, a_m , т.е

$$u = u(a_0, a_1, K, a_m) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 \quad (10.24)$$

Если функция $u = u(a_0, a_1, K, a_m)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, то необходимое условие ее минимума выражается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial u}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial a_m} = 0. \quad (10.25)$$

Из этой системы $m+1$ уравнений находят искомые значения параметров a_0, a_1, K, a_m . Во многих случаях функция (10.21) определяется формулой

$$y = \sum_{k=0}^m a_k f_k(x), \quad (10.26)$$

где $f_0(x), f_1(x), K, f_m(x)$ - известные функции, например, $f_k(x) = x^k, f_k(x) = \sin kx, f_k(x) = \cos kx$ и т.д. Функция (10.24) в таких случаях принимает вид

$$u = \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k f_k(x_i))^2, \quad (10.27)$$

а система (10.25) запишется так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k f_k(x_i)) \cdot f_0(x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k f_k(x_i)) \cdot f_1(x_i) &= 0 \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k f_k(x_i)) \cdot f_m(x_i) &= 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

Решение этой системы может быть получено с помощью метода Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Если $f_k(x) = x^k$ ($k=0, 1, 2, \dots, m$), то

$$f(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (10.29)$$

и система (10.28) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \dots & \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{aligned} \quad (10.30)$$

Частные случаи ($m=1, m=2$) последней задачи ($f_k(x) = x^k$) были рассмотрены ранее.

Пример 10.1

Получены следующие результаты измерений величин x и y :

x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
y	2,10	2,20	2,70	2,80	2,85

Установить зависимость между этими величинами и определить параметры эмпирической формулы методом наименьших квадратов.

Будем считать, что соответствующие пары значений (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, 4, 5$) являются прямоугольными де-

картовыми координатами точек на плоскости. Построив точки $A(1;2;1)$, $B(1,5;2,2)$, $C(2;2,7)$, $D(2,5;2,8)$, $E(3;2,85)$, обнаружим, что они незначительно отклонятся от некоторой прямой. Следовательно, можно предположить, что между величинами x и y существует приближенная линейная зависимость, т.е. $y=ax+b$, где a и b пока неизвестны. Методом наименьших квадратов определим параметры a и b эмпирической формулы $y=ax+b$. Чтобы решить систему (10.30), необходимо подсчитать входящие в нее коэффициенты. Для подсчета коэффициентов составим таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1,00	2,10	2,10	1,00
2	1,50	2,20	2,30	2,25
3	2,00	2,70	5,40	4,00
4	2,00	2,80	7,00	6,25
5	3,00	2,85	8,55	9,00
\bar{a}	10,00	12,65	26,35	22,50

В последней строке таблицы получены коэффициенты системы уравнений (10.30). Решая эту систему, находим $a=0,42$, $b=1,69$. Следовательно, зависимость между величинами x и y выражается приближенной формулой $y=0,42x+1,69$.

Пример 10.2

Найти параметры a , b , c эмпирической формулы $y=ax^2+bx+c$ по результатам измерений:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1,4	-4,3	-5,2	-4,1	-1,1	4,2

Результаты измерений и итоги их обработке представим в таблице:

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$y_i x_i^2$
1	-3	9	-27	81	-1,4	4,2	-12,6
2	-2	4	-8	16	-4,3	8,6	-17,2
3	-1	1	-1	1	-5,2	5,2	-5,2
4	0	0	0	0	-4,1	0	0
5	1	1	1	1	-1,1	-1,1	-1,1
6	2	4	8	16	4,2	8,4	16,8
\bar{a}	-3	19	-27	115	-11,9	25,3	-19,3

Система уравнений (10.30) в данном случае принимает вид

$115a-27b+19c=19,3$; $-27a+19b-3c=25,3$; $19a-3b+6c=-11,9$. Решив эту систему, получим $a=1011$; $b=2,116$; $c=-4,126$. Следовательно, $y=1011x^2+2,116x-4,126$.

Пример 10.3

В «Основах химии» Д.И. Менделеев приводит данные о растворимости азотно-натриевой соли NaNO_3 в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее количество условных частей NaNO_3 (y) при температуре (x):

x	0	4	1	15	21	29	36	51	68
y	67	71	76	80,6	85,7	93	99,4	113,6	125

Д.И. Менделеев указывает, что зависимость между x и y можно выразить формулой $y=0,87x+67,5$.

Произведем вычисления, необходимые для проверки этого утверждения. Можно показать, что между x и y существует линейная зависимость.

Результаты измерений и итоги их обработки представим в таблице:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0	67	0	0
2	4	71	284,0	16
3	10	76	763,0	100
4	15	80,6	1209,0	225
5	21	85,7	1799,7	441
6	29	93	2694,1	841
7	36	99,4	3578,4	1296
8	51	113,6	5793,6	2601
9	68	125	8506,8	4624
\hat{a}	234	811,3	24628,6	10144

Система уравнений (10.30) в этом случае имеет вид $10144a + 234b = 2428,6$; $234a + 9b = 811,3$. Из этой системы находим $a = 0,87$, $b = 67,5$, т.е. зависимость между x и y выражается приближенной формулой $y = 0,87x + 67,5$.

11. ПРОЦЕСС ПУАССОНА. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ.

Основные понятия.

Практические задачи часто бывают связаны с изучением случайных величин, изменяющихся во времени. Например, помехи радиоприема случайны и зависят от времени, этим же свойством обладают отклонения управляемого объекта от расчетной траектории. Математической абстракцией подобных процессов является понятие случайного процесса или случайной функции $X(t)$. Случайный процесс $X(t)$ характеризуется следующими чертами:

1) при каждом значении времени $t = t_0$ определена случайная величина $X(t_0)$ со своим законом распределения

$f(x)$. Случайная величина $X(t_0)$ называется сечением случайного процесса $X(t)$ в точке t_0 ;

2) случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$, как правило, зависимы, в особенности, если t_1 и t_2 близки (т.е. при малых $|t_1 - t_2|$). Если рассмотреть последовательность моментов времени

$$t_1, t_2, \dots, t_n \quad (|t_i - t_{i-1}| = \Delta) \quad (11.1)$$

и соответствующие им случайные величины

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n) \quad (11.2)$$

- сечения процесса $X(t)$, то можно говорить о совместном распределении этих случайных величин.

Функции

$$F_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\} \quad (11.3)$$

Называются n -мерными конечномерными функциями распределения случайного процесса ($n = 1, 2, \dots$).

Функции $p_k(t_1, t_2, \dots, t_k; x_1, x_2, \dots, x_k)$ называются k -мерными дифференциальными конечномерными функциями распределения случайного процесса. Справедлива формула

$$p_k(t_1, t_2, \dots, t_k; x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\mathbb{1}^k F_k(t_1, t_2, \dots, t_k; x_1, x_2, \dots, x_k)}{\mathbb{1}x_1 \mathbb{1}x_2 \dots \mathbb{1}x_k} \quad (11.4)$$

Функция

$$p(t_1, t_2, \dots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m / t_{m+1}, \dots, t_n; x_{m+1}, \dots, x_n)$$

для каждого набора аргументов задает вероятность (в случае ДСВ) или плотность вероятности (в случае НСВ) события $X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_m) = x_m$ при условии, что наступило событие $X(t_{m+1}) = x_{m+1}, \dots, X(t_n) = x_n$.

Изложенная точка зрения на случайную функцию показывает, что это понятие является весьма сложным. Все же в

некоторых случаях бывает полезным рассматривать совместное распределение величин (11.2).

Рассмотрим другую точку зрения на описание случайного процесса. Будем рассматривать $X(t)$ как опыт, результатом которого является функция $\varphi(t)$ из некоторого заданного класса L (в большинстве прикладных задач L состоит из непрерывных функций или функций, обладающих той или иной степенью гладкости). Для количественного описания случайного процесса $X(t)$ нужно уметь вычислять вероятности $P(\Omega)$ того, что заданная функция $\varphi(t)$ – результат испытания, проведенного над $X(t)$, – принадлежит тому или иному подмножеству Ω множества L . При этом должны выполняться условия:

- 1) $0 \leq P(\Omega) \leq 1$
- 2) $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2)$. (11.5)

Последнее равенство справедливо для любых двух непересекающихся Ω_1 и Ω_2 . Такие функции $\varphi(t)$ называют **мерами** в множестве L . Функция $\varphi(t)$, полученная в результате испытания, называется **реализацией** (или **траекторией**) случайного процесса (случайной функции) $X(t)$. Сама функция $\varphi(t)$ является неслучайной.

Определение 11.1. Математическим ожиданием случайного процесса (случайной функции) $X(t)$ называется неслучайная функция $M(X(t))$, значение которой в каждой точке t_0 равно математическому ожиданию случайной величины $X(t_0)$ – сечения случайного процесса $X(t)$.

Определение 11.2. Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D(X(t))$, значение которой в каждой точке t_0 равно дисперсии случайной величины $X(t_0)$ – сечения случайного процесса $X(t)$.

По определению **среднеквадратическое отклонение** $s X(t)$ случайного процесса $X(t)$ равно квадратному корню из его дисперсии, т.е. $s X(t) = \sqrt{D(X(t))}$.

Определение 11.3. Ковариационной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $cov(s, t)$, значение которой в точке (s_0, t_0) равно ковариации случайных величин $X(s_0)$ и $X(t_0)$ – сечений случайного процесса $X(t)$ в точках s_0 и t_0 .

Нормированной ковариационной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $r_x(s, t)$, значение которой в каждой точке (s_0, t_0) равно коэффициенту корреляции случайных величин $X(s_0)$ и $X(t_0)$ – сечений случайного процесса $X(t)$ в точках s_0 и t_0 . Справедлива формула:

$$r_x(s, t) = \frac{cov(st)}{sX(s)sX(t)} = \frac{M[(X(s) - MX(s))(X(t) - MX(t))]}{sX(s)sX(t)}. \quad (11.6)$$

Рассматривают так же ковариационную функцию $cov_{XY}(s, t)$ и нормированную ковариационную функцию $r_{XY}(s, t)$ пары случайных процессов X и Y . По определению $cov_{XY}(s, t) = M[X(s) - Y(t)] - MX(s)MY(t)$, (11.7)

$$r_{XY}(s, t) = \frac{cov(s, t)}{sX(s)sY(t)}. \quad (11.8)$$

При этом справедливы отношения:

$$r_{XY}(s, t) = \frac{M[(X(s) - MX(s))(Y(t) - MY(t))]}{sX(s)sY(t)}, \quad (11.9)$$

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1, \quad DX(s) = cov_{XX}(s, s),$$

$$DY(t) = cov_{YY}(t, t).$$

Значения функций $cov_{XY}(s, t)$ и $r_{XY}(s, t)$ измеряют степень линейной зависимости сечений $X(t)$ и $Y(t)$. В связи с этим ковариационную и нормированную ковариационную функции случайного процесса $X(t)$ называют иногда соответствен-

но автоковариационной и нормированной автоковариационной функцией.

Стационарные случайные процессы

В приложениях теории вероятностей часто встречаются так называемые стационарные случайные процессы.

Определение 11.4. Случайный процесс называется *стационарным*, если для всех его n конечных функций распределения при любом t_0 справедливо равенство

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = F_n(t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0; x_1, \dots, x_n). \quad (11.10)$$

Свойство стационарного процесса, выраженного формулой (11.10), означает *инвариантность*, т.е. независимость конечных распределений относительно сдвига во времени на величину t_0 . В частности, это означает, что все сечения случайного процесса $X(t)$ одинаково распределены и ковариационная функция $\text{cov}(s, t)$ обладает следующим свойством: для любых s_1, s_2, t_1, t_2 таких, что $t_1 - s_1 = t_2 - s_2$ справедливо равенство $\text{cov}(s_1, t_1) = \text{cov}(s_2, t_2)$. Из последнего условия следует, что $\text{cov}(s, t)$ будучи функцией двух переменных s и t , фактически зависит от разности $(s - t)$, т.е. существует функция $x(t)$ одной переменной t , обладающая свойством $\text{cov}(s, t) = x(t)$, где $t = s - t$.

Если $X(t)$ – случайный процесс, описывающий отклонение управляемого объекта от расчетной траектории, то этот процесс является стационарным тогда, когда факторы, вызывающие отклонение, не меняются со временем (установившийся режим полета).

Определение 11.5. функция $R_X(s, t) = M[X(s) \times X(t)]$ – математическое ожидание произведения случайных величин $X(s)$ и $X(t)$, называется *корреляционной функцией* случайного процесса $X(t)$.

Рассмотрим также корреляционную функцию $R_{XY}(s, t)$ пары случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$. По определению:

$$R_{XY}(s, t) = M[X(s) \times Y(t)]. \quad (11.11)$$

Приведем свойства корреляционной функции пары случайных процессов.

- 1) Корреляционная и ковариационная функции связаны соотношением:

$$\text{cov}_{XY}(s, t) = R_{XY}(s, t) - M[X(t)] \times M[Y(s)].$$
- 2) Если $X = Y$, то равенство (11) примет вид:

$$R_{XX}(t, t) = M[X(t)]^2.$$
- 3) Для стационарного случайного процесса корреляционная функция $R_{XX}(s, t) = R_X(s, t)$ является функцией одной переменной $t = s - t$, при этом употребляют обозначение $R_X(t) = M[X(t) \times X(t + t)]$. Тогда $R_X(0) = M[X(t)]^2$, где $M[X(t)]^2$ – это математическое ожидание случайной величины $X^2(t)$, не зависящее от t .

Среди всевозможных случайных процессов естественно выделить те, для которых n -е конечномерные функции распределений имеют простой вид. Иногда все m -е конечномерные функции определяются n -ми функциями ($m > n$). Говорят, что случайный процесс имеет *порядок n* , если все его конечномерные функции распределения выражаются через n -мерные функции, но не выражаются через $(n - 1)$ -мерные функции распределения.

Рассмотрим, например, процесс, который определен семейством попарно независимых случайных величин. Он называется *чисто случайным процессом*. Первая конечномерная функция распределения $F_{(1)}(t_1, x_1)$ совпадает с функцией распределения сечения $X(t_1)$; вторая конечномерная функция распределения $F_{(2)}(t_1, t_2; x_1, x_2) = F_{(1)}(t_1; x_1) \times F_{(1)}(t_2; x_2)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для n -ой дифференциальной функции распределения:

$$F_{(n)}(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = F_{(1)}(t_1; x_1) \times F_{(1)}(t_2; x_2) \times \dots \times F_{(1)}(t_n; x_n).$$

Таким образом, чисто случайный процесс является **процессом первого порядка**. Замети, что реализации (траектории) такого процесса не могут быть непрерывными функциями. Поэтому для всякого чисто случайного процесса, характеризующего какое-либо физическое явление, случайные величины $X(t)$ должны быть дискретными.

Марковские случайные процессы

Марковские случайные процессы характеризуются следующими свойствами: их основные конечномерные функции распределения

$$P(t_n; x_n / t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_{n-1}, x_{n-1}) = P(t_n; x_n / t_{n-1}, x_{n-1}), \quad (11.12)$$

т.е. условное распределение $X(t_n) = x_{n-1}$ и не зависит от остальных условий при любых t_1, t_2, \dots, t_{n-2} . Марковский процесс вполне определяется своей второй конечномерной функцией $F(t_1, t_2; x_1, x_2)$ или первой конечной функцией распределения $F(t_1, x_1)$ совместно с "вероятностями перехода"

$P(t_2, x_2 / t_1, x_1), t_2 > t_1$. Марковский случайный процесс является процессом 2-го порядка.

Процесс Пуассона

Важным частным случаем Марковского процесса является процесс Пуассона. Типичным примером процесса Пуассона служит процесс, описывающий работу телефонной станции; реализация (траектория) такого процесса есть функция, равная количеству вызовов, поступивших на станцию за время t . Общий же случай, так же как и приведенный пример, характеризуется тем, что сечения процесса представляют собой

дискретные величины, а реализация процесса – неубывающая функция. Кроме условий, которые определяют Марковский процесс, для пуассоновского процесса предполагается выполнение дополнительных условий. А именно, вторая конечномерная функция распределения должна обладать свойствами:

$$P(t_2, x_2 / t_1, x_1) = \begin{cases} 0, & \text{при } x_2 < x_1 \\ 1 - a \Delta t + o(\Delta t) & \text{при } x_2 = x_1 \\ a \Delta t + o(\Delta t) & \text{при } x_2 = x_1 + 1 \\ 0, & \text{при } x_2 > x_1 + 1 \end{cases} \quad (11.13)$$

Здесь a – некоторая положительная постоянная (параметр распределения Пуассона), $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\Delta t = t_2 - t_1$, т.е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Вероятность $P(t_2, x_2 / t_1, x_1)$ можно вычислить в явном виде. А именно, оказывается, что функция $P(t_2, x_2 / t_1, x_1)$ зависит только от $(x_2 - x_1)$ и $(t_2 - t_1)$, т.е. имеет вид

$$P(t_2, x_2 / t_1, x_1) = j(k, t).$$

При этом

$$j(k, t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.14)$$

Случайные процессы с независимыми приращениями

Пусть дано однопараметрическое семейство $X(t)$ случайных величин такое, что для любого конечного множества вещественных чисел $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ приращения

$X(t_{k+1}) - X(t_k)$ попарно независимы. Это свойство определяет случайный процесс, который называется **случайным процессом с независимыми приращениями**. Примером такого процесса является описанный выше пуассоновский процесс.

Определение 6. Случайный процесс с независимыми приращениями называется процессом со *стационарными приращениями*, если распределение $X(t+s) - X(t)$ зависит только от s и не зависит от t .

Случайные процессы со стационарными независимыми приращениями обладают рядом интересных свойств и описывают важные в практическом отношении реальные случайные процессы. Главным свойством процесса с независимыми приращениями является следующее: пусть числовой интервал $(s, s+t)$ разбит на n равных частей точками

$t_0 = s < t_1 < t_2 < \dots < t_n = s + t$. Рассмотрим случайные величины $X_{k,n} = X(t_k) - X(t_{k-1})$. Приращение случайного процесса $X(t+s) - X(t)$ является суммой n независимых случайных величин $X_{k,n}$: $X(t+s) - X(t) = \sum_{k=1}^n X_{k,n}$. (11.15)

Если процесс стационарен, то все случайные величины $X_{k,n}$ распределены одинаково.

Случайная величина X (а так же ее интегральная и дифференциальная функции распределения) называются *безгранично делимой*, если для всякого $n \geq 1$ существуют такие n независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , что $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Из последней формулы следует, что приращение случайного процесса со стационарными приращениями является безгранично делимым распределением.

12. ПОНЯТИЕ О НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Основные понятия

В том случае, когда гипотеза линейной зависимости функции отклика y от фактора x не выполняется или когда при графическом изображении точек нелинейность явно про-

сматривается «на глаз», нужно использовать нелинейную формулу парной зависимости. Следует только помнить, что речь идет о зависимости, нелинейной по фактору x . По параметрам зависимость должна оставаться линейной. Модель нелинейной парной регрессии имеет вид

$$y = b_0 j_0(x) + b_1 j_1(x) + \dots + b_m j_m(x), \quad (12.1)$$

где $j_j(x)$ - заданные функции, b_j - неизвестные *коэффициенты уравнения регрессии* (параметры модели). Матрицу F с элементами $f_{ij} = j_j(x_i)$, равными значению j -й функции в i -м опыте, называют *регрессивной матрицей*:

$$F = \begin{pmatrix} j_0(x_1) & j_1(x_1) & \dots & j_m(x_1) \\ j_0(x_2) & j_1(x_2) & \dots & j_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_0(x_n) & j_1(x_n) & \dots & j_m(x_n) \end{pmatrix}$$

Оценки параметров модели вычисляются по формуле

$$B = (F^T F)^{-1} F^T Y, \quad (12.2)$$

где $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - матрица-столбец опытных значений функции отклика, n - число опытов, $B = (b_0, b_1, \dots, b_m)^T$ - матрица-столбец оценок коэффициентов модели b_j . В результате расчетов получим *эмпирическое уравнение регрессии*

$$\tilde{y} = b_0 j_0(x) + b_1 j_1(x) + \dots + b_m j_m(x) \quad (12.3)$$

Значимость коэффициентов регрессии b_j проверяют по критерию Стьюдента:

$$t = \frac{|b_j|}{s_{b_j}} \sqrt{t_p(n-m-1)}, \quad (12.4)$$

где $p = 1 - \alpha / 2$ - доверительная вероятность, α - уровень значимости, погрешность коэффициента регрессии

$$s_{b_j} = \sqrt{s_{оцм}^2 a_{jj}^{-1}}, \quad (12.5)$$

Остаточная дисперсия

$$s_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}(x_i))^2}{n - m - 1}, \quad (12.6)$$

a_{ij}^{-1} - элемент матрицы $(F^T F)^{-1}$.

Доверительный интервал для коэффициентов регрессии:

$$b_j - t_p(n - m - 1) \times s_{b_j} \leq b_j \leq b_j + t_p(n - m - 1) \times s_{b_j}. \quad (12.7)$$

Если доверительный интервал покрывает нуль, то соответствующий коэффициент считается незначимым.

Для того чтобы выбрать лучшую формулу связи с точки зрения предсказания результатов опытов, необходимо проверить все известные функции $j_j(x)$. Это нереальная задача, поэтому на практике проверяют ряд моделей: $y = b_0 + b_1/x$, $y = b_0 + b_1 e^x$, $y = b_0 + b_1 \lg x$, $y = b_0 + b_1 x^n$ и т.д. Выбор оптимальной модели осуществляется по наименьшей остаточной дисперсии. Чаще всего используют **полиномиальную** модель регрессии:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \quad (12.8)$$

При этом проверку начинают с линейной модели, а затем постепенно увеличивают порядок уравнения регрессии. С некоторого момента при повышении порядка остаточная дисперсия вместо того, чтобы уменьшиться, может увеличиваться. Это, как правило, и является условием прекращения счета. Недостатком этого метода является то, что с ростом степени приходится заново вычислять все коэффициенты. Этот недостаток можно устранить, используя **ортгональные полиномы**. В этом случае аппроксимирующий многочлен строится в виде суммы повышающих степеней

$$\tilde{y} = a_0 j_0(x) + a_1 j_1(x) + \dots + a_m j_m(x),$$

причем добавления нового

слагаемого $a_{m+1} j_{m+1}(x)$ не изменяет вычисленных ранее коэффициентов.

На практике при анализе результатов исследований часто имеет место ситуация, когда количественное изменение изучаемого явления (функции отклика) зависит не от одной, а от нескольких причин (факторов). В этом случае модель имеет вид (**модель нелинейной множественной регрессии**)

$$y = b_0 j_0(\vec{x}) + b_1 j_1(\vec{x}) + \dots + b_m j_m(\vec{x}), \quad (12.9)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ - вектор факторов. Регрессионная матрица будет выглядеть следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} j_0(\vec{x}_1) & j_1(\vec{x}_1) & \dots & j_m(\vec{x}_1) \\ j_0(\vec{x}_2) & j_1(\vec{x}_2) & \dots & j_m(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_0(\vec{x}_n) & j_1(\vec{x}_n) & \dots & j_m(\vec{x}_n) \end{pmatrix}$$

где \vec{x}_i - значение факторов в i -м опыте. Оценки параметров модели (12.9) вычисляются по формуле (12.2). Значимость коэффициентов регрессии определяется по формулам (12.4)-(12.7), где вместо x_i используется \vec{x}_i . Чаще всего множественный нелинейный регрессионный анализ начинают с определения оценок коэффициентов квадратичной модели

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^k b_{ij} x_i x_j. \quad (12.10)$$

Затем рассматривается кубичная модель и т.д. Степень модели можно повышать до тех пор, пока уменьшается остаточная дисперсия. Для практических целей, как правило, ограничиваются квадратичной формой (12.10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены решения типовых задач по теории вероятностей и математической статистики.

Данная работа, которая содержит четкое и краткое изложение теории, большое количество задач и разобранных примеров, существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по вышеуказанным разделам математики, особенно при использовании учебного пособия в качестве задачника.

Издание рекомендуется для работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных заданий по указанным темам.

Считаем, что данное пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами учебного материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса по курсу «Математика» для студентов ускоренной формы обучения инженерно-технических специальностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

$$\text{Значения функции } P(m; l) = \frac{l^m \cdot e^{-l}}{m!}$$

m	l									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	l									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	0842	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Таблица П.2

Значения функции $j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-x^2/2}$

X	Сотые доли X									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0.1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0.3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0.8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0.9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1.1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1.4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1.6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	9893	9728	9566
1.7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2.3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2.5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
X	Десятые доли x									
	0	2	4	6	8					
3.0	0,00443	00238	00123	00061	00029					
4.0	00013	00006	00002	00001						

Таблица П.3

Значения интеграла Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

X	Сотые доли X									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
X	Десятые доли x									
	0	2	4	6	8					
3.0	0,49865	49931	49966	49984	49993					
4.0	49997	49999								

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зарубин В.С. Математика в техническом университете. Теория вероятностей / В.С. Зарубин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 1999. Вып. XVI
2. Гусак А.А. Высшая математика.; учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. Минск: Изд. Тетраси - стем, 2004. Т.2
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман .М.: Высш. шк., 2007.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	6
1.1. Пространство элементарных исходов	7
1.2. События, действия над ними	9
1.3. Сигма-алгебра событий	17
1.4. Решение типовых примеров	20
2. ВЕРОЯТНОСТЬ	27
2.1. Классическое определение вероятности	28
2.2. Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики	30
2.3. Геометрическое определение вероятности	40
2.4. Статистическое определение вероятности	42
2.5. Аксиоматическое определение вероятности	44
2.6. Решение типовых примеров	50
3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ	61
3.1. Определение условной вероятности	62
3.2. Формула умножения вероятностей	68
3.3. Независимые и зависимые события	70
3.4. Формула полной вероятности	75
3.5. Формула Байеса	79
3.6. Схема Бернулли	81
3.7. Решение типовых примеров	93
4. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	105
4.1. Определение случайной величины	105
4.2. Функция распределения случайной величины	107
4.3. Дискретные случайные величины	110
4.4. Некоторые дискретные случайные величины	112
4.5. Непрерывные случайные величины	115
4.6. Некоторые непрерывные случайные величины	120
4.7. Решение типовых примеров	130

5. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	142
5.1. Многомерная случайная величина. Совместная функция распределения	142
5.2. Дискретные двумерные случайные величины	144
5.3. Непрерывные случайные величины	146
5.4. Независимые случайные величины	148
6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	153
6.1. Математическое ожидание случайной величины	154
6.2. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания	156
6.3. Дисперсия. Моменты высших порядков	158
6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин	162
6.5. Решение типовых примеров	167
7. УСЛОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	168
7.1. Условные распределения	168
7.2. Условные числовые характеристики	173
8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	177
8.1. Сходимость последовательности случайных величин	178
8.2. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел	179
9. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	183
9.1. Выборочный метод. Основные понятия	183
9.2. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма	185
9.3. Эмпирическая функция распределения	190
9.4. Оценка параметров по выборке. Понятие несмещенности, состоятельности и Эффективности оценки	192
9.5. Генеральная средняя. Выборочная средняя	193
9.6. Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия. Эмпирическая дисперсия	195

9.7. Доверительная вероятность. Доверительный интервал	198
10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ	201
10.1. Измерения и их погрешности. Применение методов математической статистики к обработке результатов наблюдений	202
10.2. Оценка точного значения измеряемой величины	204
10.3. Оценки точности измерений	207
10.4. Метод наименьших квадратов	209
11. ПРОЦЕСС ПУАССОНА. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ.	215
12. ПОНЯТИЕ О НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ	223
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	227
ПРИЛОЖЕНИЕ	228
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	231

Справочник магнитного диска

Катрахова Алла Анатольевна.
Купцов Валерий Семенович
Купцов Андрей Валериевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

В авторской редакции.

Компьютерный набор: А.А. Катраховой,
В.С. Купцова
А.В. Купцова

Подписано в печать 26.10.2011

Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 250 экз.

Зак. №

ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14