

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
(профиль «Промышленная теплоэнергетика»)
заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Составители:

*канд. физ.-мат. наук А. В. Ряжских
канд. техн. наук О. А. Соколова*

Математика: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (профиль «Промышленная теплоэнергетика») заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. В. Ряжских, О. А. Соколова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 43 с.

Приводится последовательность проведения практических занятий по курсу «Математика», разбираются опорные задачи, усвоение материала контролируется задачами для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (профиль «Промышленная теплоэнергетика») заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ПР_математика_13.03.01.pdf.

Ил. 10. Табл. 3. Библиогр.: 2 назв.

**УДК 51(07)
ББК 22.1я7**

***Рецензент** – А. А. Хвостов, д-р физ.-мат. наук, проф.
кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

І СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Матрица A размера $m \times n$ – совокупность чисел, записанная в виде прямо-

угольной таблицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 1. Найти матричный многочлен $AB + 3C - 2E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , поэтому умножение матрицы A на матрицу B корректно. По формуле перемножения матриц находим:

$$d_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 2 = 23;$$

$$d_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-8) + 6 \cdot 4 = 36;$$

$$d_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} = 9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 39;$$

$$d_{22} = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot (-8) + 7 \cdot 4 = 21.$$

Следовательно: $D = AB = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}$.

$$\text{Матрица } 3C = 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем матричный многочлен

$$AB + 3C - 2E = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 42 \\ 42 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу $2A + 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, используя

правило треугольников.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 24 + 1 + 3 - (6 + 4 + 3) = 15.$$

Задача для самостоятельного решения. Вычислить определитель третьего

порядка $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Ответ. -73 .

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить обратную матрицу A^{-1} .

Решение. Вычислим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 14 + 0 = -22.$$

Найдем алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ элементов a_{ij} матрицы A , где минор M_{ij} представляет собой определитель второго порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент a_{ij} в определителе матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - 2 \cdot (-8) = 10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 31;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 10 & -18 & 6 \\ -14 & 12 & -4 \\ -27 & 31 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{11}{22} & -\frac{31}{22} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

Решение: Вычислим определитель системы Δ разложением по первой

строке
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -18 + 8 + 51 = 41.$$

Поскольку определитель системы отличен от нуля, то можно вычислить обратную матрицу A^{-1} . Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Вычислим матрицу-столбец неизвестных согласно формуле $X = A^{-1} \cdot B$,

где
$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

$$X = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -108+99+50 \\ 24-63+80 \\ 102+9-70 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 41 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений имеет вид $x=1, y=1, z=1$.

Задача для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{Ответ. (1;2;2).}$$

Пример 5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$
 Умно-

ножаем каждый элемент 1-й строки на (-4) и складываем со 2-й строкой. Умно-

ножаем каждый элемент 1-й строки на (-3) и складываем с 3-й строкой. Полу-

чаем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -8 & -15 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$. Умножаем каждый элемент 2-й строки на $\left(-\frac{1}{7}\right)$ и скла-

дываем с 3-й строкой. Получаем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{7} & -\frac{41}{7} \end{pmatrix}$.

Тогда $r(A) = r(A/B) = 3$ – система совместна. Полученной матрице соответ-

ствует система $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 8z = -15 \\ -\frac{41}{7}z = -\frac{41}{7} \end{cases}$, откуда обратным ходом получаем

$z = 1; y = 1; x = 1$.

Задачи для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом Гаусса

$$1. \begin{cases} x - 3y + 6z = 10 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \text{Ответ. } (1; 1; 2)$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 4z = -9 \\ 2x - y - z = -1 \\ 4x + y + 3z = 5 \end{cases} \quad \text{Ответ. } (1; -2; 1).$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вектор. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Плоскость. Уравнение прямой в пространстве, на плоскости.

Пусть координаты точек начала и конца вектора $A(x_1, y_1, z_1); B(x_2, y_2, z_2)$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Длина вектора $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Разложение вектора по декартовому базису $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$, $\vec{j} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ – единичные базисные вектора, x, y, z – декартовы прямоугольные координаты \vec{d} .

Пример 1. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC ;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC ;

г) Проверить, что векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} компланарны.

Решение.

а) Площадь треугольника ABC находится как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB} = \{2, 4, -1\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, -2\}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right|.$$

Находим векторное произведение векторов в координатном представлении $\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$. Найдем половину длины векторного

произведения $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{\sqrt{(-9)^2 + 5^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{110}}{2}$.

б) Сначала находим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \{2, 4, -1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, -2\}$ и $\overrightarrow{AD} = \{-4, -3, -5\}$, равный модулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение находим по формуле $\left(\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 3 + 32 + 4 - 12 - 20 = 11$.

Объем пирамиды V_{ABCD} соответствует шестой части модуля смешанного произведения трех векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} : $V_{ABCD} = \frac{11}{6}$.

в) Косинус угла ABC находится по формуле $\cos(ABC) = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$. Имеем

$$\cos(ABC) = \frac{-2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{25}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}} \approx 0,92.$$

По таблицам находим соответствующий угол $\arccos(0,92) = 23^\circ$.

г) Проверим выполнение условия компланарности векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} $\left(\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{BC} \right) = 0$.

Вычисляем смешанное произведение

$$\left(\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{BC} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 24 - 5 + 3 - 20 - 4 = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,5,4)$, $B(5,8,6)$, $C(1,9,9)$, $D(6,4,8)$. Вычислить:

- а) площадь грани ABC ;
- б) объем пирамиды $ABCD$;
- в) угол ABC ;
- г) Проверить, что векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} компланарны.

Уравнение плоскости, содержащей заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и расположенной перпендикулярно вектору нормали $\vec{N} = \{A; B; C\}$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно направляющему вектору $\vec{q} = \{l; m; n\}$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Пример 2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4;7;8)$, $B(-1;13;0)$, $C(2;4;9)$ и $D(1;8;9)$.

Составить:

- а) уравнения ребра AB ;
- б) уравнение грани ABC ;
- в) уравнения высоты DE ;
- г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB ;
- д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB .

Вычислить:

- е) длину ребра BC ;
- ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC ;

Решение.

а) Уравнения ребра AB могут быть получены как уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(4,7,8)$ и $B(-1,13,0)$

$$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-7}{13-7} = \frac{z-8}{0-8} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{-5} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-8}{-8}.$$

б) уравнение грани ABC получается как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$ и $C(2,4,9)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим $6x - 7y - 9z + 97 = 0$ – уравнение грани ABC .

в) Для получения уравнений высоты DE воспользуемся координатами точки $D(1, 8, 9)$. В качестве направляющего вектора для DE используем вектор нормали $\vec{N} = \{6, -7, -9\}$ для плоскости ABC . Уравнения высоты DE запишутся в виде $\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}$.

г) Для получения уравнений прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB воспользуемся направляющим вектором $\vec{q} = \{-5, 6, -8\}$ для прямой AB $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-8}{6} = \frac{z-9}{-8}$.

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку $D(1, 8, 9)$ перпендикулярно ребру AB записывается при использовании вектора $\vec{AB} = \{-5, 6, -8\}$, как вектора нормали $-5(x-1) + 6(y-8) - 8(z-9) = 0$ или $-5x + 6y - 8z - 29 = 0$.

е) Длину ребра BC находим как расстояние между точками $B(-1, 13, 0)$ и $C(2, 4, 9)$: $BC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 13)^2 + (9 - 0)^2} = \sqrt{171}$.

ж) Для нахождения угла между ребром CD и плоскостью основания ABC найдем $\sin \varphi$ (φ – угол между вектором $\vec{CD} = \{-1, 4, 0\}$) и нормалью $\vec{N} = \{6, -7, -9\}$ к плоскости ABC)

$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) + 0 \cdot (-9)|}{\sqrt{(6)^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (0)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{166}} \approx 0,64.$$

$$\varphi = \arcsin(0,64) = 39^\circ.$$

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(6, 1, 1)$, $B(4, 6, 6)$, $C(4, 2, 0)$ и $D(1, 2, 6)$.

Составить:

- уравнения ребра AB ;
- уравнение грани ABC ;
- уравнения высоты DE ;
- уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB ;
- уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB .

Вычислить:

- длину ребра BC ;
- угол между ребром CD и плоскостью ABC .

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \text{ на плоскости } \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(4, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(2, 7)$.

Найти:

- уравнение стороны AB ,
- уравнение высоты CH ,
- уравнение медианы AM ,

г) угол ABC ,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ,

е) расстояние от точки C до прямой AB .

Решение.

а) Уравнение AB запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(4,3)$ и $B(-3,-3)$:

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}, \quad 6(x-4) = 7(y-3), \quad 6x-7y-3=0.$$

б) Уравнение высоты CH , как перпендикуляра к стороне AB , запишем как каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $C(2,7)$ и имеющей в качестве направляющего вектора нормаль к AB :

$$\vec{N}_{AB} = \{6, -7\}, \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y-7}{-7} \quad \text{или} \quad 7x+6y-56=0.$$

в) Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ей стороны. Найдем координаты точки M – середины отрезка BC : $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$.

Для медианы AM запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(4,3)$ и $M(-\frac{1}{2}, 2)$: $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3}$, $2x-9y+19=0$.

г) Угол ABC можно искать его как угол между векторами $\vec{BA} = \{4 - (-3), 3 - (-3)\} = \{7, 6\}$ и $\vec{BC} = \{2 - (-3), 7 - (-3)\} = \{5, 10\}$:

$$\cos(ABC) = \frac{7 \cdot 5 + 6 \cdot 10}{\sqrt{6^2 + 7^2} \cdot \sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{85} \cdot \sqrt{125}} = \frac{19}{\sqrt{425}}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{425}}\right).$$

д) Так как прямая, проходящая через вершину C , параллельна стороне AB ($6x-7y-3=0$), то проекции вектора нормали к AB можно взять те же

$$6(x-2) - 7(y-7) = 0 \quad \text{или} \quad 6x - 7y + 37 = 0.$$

е) Расстояние от точки $C(2,7)$ до прямой AB

$$d = \frac{|6 \cdot x_c - 7 \cdot y_c - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}}.$$

Задача для самостоятельного решения. Даны вершины треугольника $A(10,-9)$, $B(-2,-4)$, $C(4,4)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB ,

б) уравнение высоты CH ,

в) уравнение медианы AM ,

г) угол ABC ,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ,

е) расстояние от точки C до прямой AB .

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Вычисление пределов функций.

Если при вычислении пределов алгебраической суммы, произведения или частного от деления функций сами функции стремятся к некоторым константам, не равным одновременно нулю в случае деления функций, то вычисление пределов не вызывает затруднения.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 2x}{3x^4 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (7x^2 + 2x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 1)} = \frac{7 \lim_{x \rightarrow 1} (x^2) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x)}{3 \lim_{x \rightarrow 1} (x^4) - \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{9}{2}.$$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$

Пределы отношения бесконечно малых величин, отношения бесконечно больших величин, произведения бесконечно малой и бесконечно большой величины называются *неопределенностями* и могут принимать различные значения или даже не существовать.

Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8}.$

Решение. Предел содержит неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия выносим старшие степени в числителе и знаменателе:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(7 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(7 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right)} = \frac{7}{3}.$$

Здесь было использовано, что при $x \rightarrow \infty$ величины $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ стремятся к нулю и могут быть опущены рядом с ненулевыми константами.

Пример 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 5x + 2}.$

Решение. Для выделения бесконечно малых разложим числитель и знаменатель на множители и сократим бесконечно малые множители $(x-2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{2(x-2) \left(x - \frac{1}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{2x-1} = \frac{7}{3}.$$

Пример 6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 + 4x - 5}.$

Решение. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+4x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)-4}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+5)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{6 \cdot (2+2)} = \frac{1}{8}.$

Пример 7. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\sin^2 5x}.$

Решение. Данный предел содержит неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться 1-м замечательным пределом $\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1:$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\sin^2 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{7x}{2} \right)}{\sin^2 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{7x}{2} \right) \cdot \left(\frac{7x}{2} \right)^2}{\left(\frac{7x}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin^2 5x}{25x^2} \right) \cdot 25x^2} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \left(\frac{7x}{2} \right) x}{\left(\frac{7x}{2} \right)} \right)^2 \cdot \left(\frac{5x}{\sin 5x} \right)^2 \cdot \left(\frac{49x^2}{4 \cdot 25x^2} \right) = \frac{49}{50}.$$

Пример 8. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+3}{7x-1} \right)^{x+3}.$

Решение. Для раскрытия неопределенности 1^∞ преобразуем дробь и показатель степени так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e:$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+3}{7x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-1+4}{7x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{7x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{7x-1} \right)^{\frac{(7x-1)(x+3)^4}{4(7x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x+3)}{(7x-1)}} = e^{\frac{4}{7}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

- | | | | |
|--|-----------------------|---|------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}.$ | Ответ. 9. | 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$ | Ответ. $-\frac{2}{5}.$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}.$ | Ответ. $\frac{4}{3}.$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}.$ | Ответ. $\frac{1}{2}.$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}.$ | Ответ. 0. | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/3)}{x^2}.$ | Ответ. $\frac{1}{9}.$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}.$ | Ответ. $\frac{2}{5}.$ | | |

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Для дифференцирования функции потребуется напомнить основные формулы и правила дифференцирования.

Формулы производных основных элементарных функций:

$(C)' = 0$, где $C - const$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования:

1. $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

2. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

(Следствие: $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$)

3. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

4. $y = f(u), u = \varphi(x), \quad y' = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$.

5. $\begin{cases} y = f(x) \\ x = \varphi(y) \end{cases}, \quad f'_x(x) = \frac{1}{x'_y}$.

Рассмотрим производную функции одной переменной.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования дроби

$$y' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x \cdot \arcsin x \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{\cos(7x-2)}{x^2}$.

Решение. В этом примере необходимо применять формулы для производной частного двух функций и для производной функции от функции (производной сложной функции), то есть, если $y = f(\varphi(x))$, то $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos(7x-2)}{x^2} \right)' &= \frac{(\cos(7x-2))'x^2 - \cos(7x-2)(x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{-\sin(7x-2)(7x-2)'x^2 - 2x \cos(7x-2)}{x^4} = \\ &= \frac{-7x^2 \cdot \sin(7x-2) - 2x \cdot \cos(7x-2)}{x^4} = \frac{-7x \cdot \sin(7x-2) - 2 \cos(7x-2)}{x^3}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти производную сложной функции $y = (2x^3 + 5)^4$.

Решение. Обозначим $(2x^3 + 5) = u$. Тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y' = (u^4)'_u (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3$.

Пример 4. Найти производную сложной функции $y = \sin^2(\sqrt{x+1})$.

Решение. $y' = 2 \sin(\sqrt{x+1}) \cos(\sqrt{x+1}) \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Пример 5. Найти производную функции $y = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение. Применяя формулу для производной сложной функции получим: $\left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{-2}{\sin^3 x} \right) \cdot (\sin x)' = -2 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}$.

Пример 6. Найти производную функции $y = e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}$.

Решение. Используя правило дифференцирования произведения и правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\begin{aligned} \left(e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} \right)' &= (e^{-x})' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot (\sqrt{1+e^{2x}})' = \\ &= e^{-x} \cdot (-x)' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (1+e^{2x})' = -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot (2x)' = \\ &= -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \sqrt[4]{1+\cos^3 x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \left(\sqrt[4]{1+\cos^3 x} \right)' &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot (1+\cos^3 x)' = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot (3 \cos^2 x) \cdot (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot (3 \cos^2 x) \cdot (-\sin x). \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y = \ln^2(x^3 - \sin x)$. Ответ. $y' = 2 \ln(x^3 - \sin x) \frac{3x^2 - \cos x}{(x^3 - \sin x)}$.

2. $y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x$. Ответ. $y' = 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \sin 2x$.

Пример 8. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Решение. Так как в этом примере основание и показатель степени зависят от x (то есть нельзя использовать ни строку с производной показательной функции, ни строку с производной степенной функции), то применим способ логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем исходную функцию $\ln y(x) = \ln((\cos x)^{\sin x}) = \sin x \cdot \ln \cos x$.

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot (\ln \cos x)' = \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \\ = \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \text{ и окончательно получим:}$$

$$y' = y(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right).$$

Пример 9. Найти производную неявно заданной функции $\arccos(2x \cdot y) = 2^x$.

Решение. Это уравнение не разрешимо относительно y , следовательно, функция $y(x)$ задана неявно. В общем виде это записывается так: $F(x, y) = 0$. Чтобы найти производную $y'(x)$, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x , рассматривая y как функцию от x . А потом из полученного уравнения выражаем искомую производную y' :

$$(\arccos(2x \cdot y))' = (2^x)'; \quad -\frac{1}{\sqrt{1-(2xy)^2}} \cdot (2xy)' = 2^x \cdot \ln 2; \\ -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2y^2}} \cdot (y + xy') = 2^x \cdot \ln 2; \quad -\frac{2xy'}{\sqrt{1-4x^2y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}} + 2^x \cdot \ln 2; \\ y' = -\frac{y}{x} - \frac{2^x \cdot \ln 2 \sqrt{1-4x^2y^2}}{2x}.$$

Пример 10. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = 2 \sin t^2 \\ y = 3 \cos t^2 \end{cases}$.

Решение. Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}. \\ y'_x = \frac{(3 \cos t^2)'_t}{(2 \sin t^2)'_t} = \frac{-3 \sin t^2 \cdot (t^2)'}{2 \cos t^2 \cdot (t^2)'} = \frac{-3 \sin t^2 \cdot 2t}{2 \cos t^2 \cdot 2t} = -\frac{3 \sin t^2}{2 \cos t^2} = -\frac{3}{2} \operatorname{tg}(t^2).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную функций

1. $y = x^{\ln x}$. Ответ. $y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x$.

2. $y = (\ln x)^x$. Ответ. $y' = (\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x \right)$.

3. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$. Ответ. $y' = \frac{3t^2 - 1}{2t}$.

4. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctgt}$. Ответ. $y' = \frac{t}{2}$.

Пример 11. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, $D(f) = (\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

2. Определим точки пересечения графика с координатными осями. Единственной такой точкой будет $O(0,0)$.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность. Имеем $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3} = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = -f(x)$, следовательно, $f(x)$ – нечетная.

При исследовании функции можно ограничиться значениями $x \geq 0$, а затем продолжить функцию, пользуясь свойством нечетности (график симметричен относительно начала координат).

4. Исследуем функцию на наличие у ее графика асимптот.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = \sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} - x \right) = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ – наклонная асимптота.

5. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} = 0.$$

Критическая точка первого рода: $x_1 = 0$.

Точки $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ не могут быть точками экстремума, так как они не входят в область определения функции.

6. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную.

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} \right)'' = \left(\frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \right)' = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3} = 0.$$

Существует одна критическая точка второго рода: $x_1 = 0$.

Найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости, и точки перегиба.

Результаты исследования оформим в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

Таблица

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0	-	Не сущ.	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	Не сущ.	+	0	-	Не сущ.	+	+	+
$f(x)$	Возр. вып.	Мах $y_{max} = -4,5$	Убыв., вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Точка перег. $y_{min} = 0$	Убыв вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Мин $y_{min} = -4,5$	Возр., вогн.

Используя полученные результаты, строим график, функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

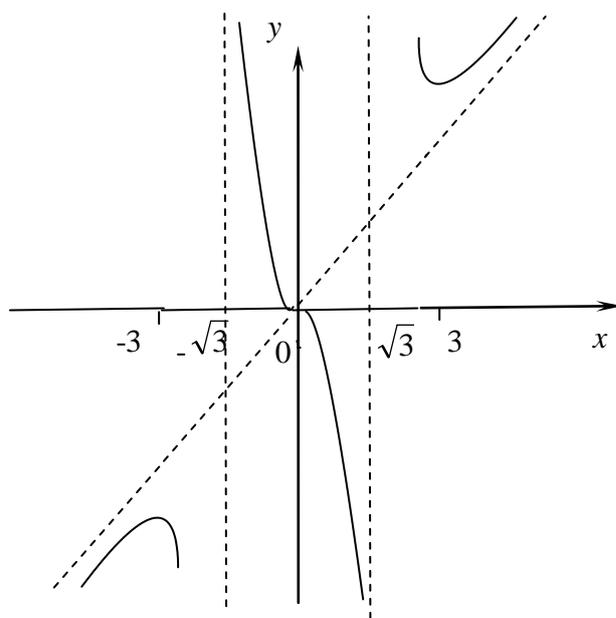


Рис. 1.

II СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ (a \neq -1)$	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$,
2. $\int \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$,	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$,
3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$,	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$,
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$,	13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + c$,
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ (a > 0; a \neq 1)$	14. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + c$,
6. $\int e^x dx = e^x + c$,	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} $
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$,
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$,	17. $\int tgx dx = -\ln \cos x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$,	18. $\int ctg x dx = \ln \sin x + c$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$.

2. $d\int f(x) dx = f(x) dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$.

5. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то и $\int f(u) du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$.

7. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b) dx = F(x+b) + C$.

8. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Пример 1. Найти $\int \cos(x+3) dx$.

Решение. $\int \cos(x+3) dx = \int \cos(x+3) d(x+3) = \sin(x+3) + C$.

Пример 2. Найти $\int \cos(2x) dx$.

Решение. $\int \cos(2x)dx = \int \cos(2x) \frac{d(2x)}{2} = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$.

Пример 3. Найти $\int \cos(4x+5)dx$.

Решение. $\int \cos(4x+5)dx = \int \cos(4x+5) \frac{d(4x+5)}{4} = \frac{1}{4} \sin(4x+5) + C$.

Пример 4. Найти $\int \frac{1}{6x+1} dx$.

Решение. $\int \frac{1}{6x+1} dx = \frac{1}{6} \ln(6x+1) + C$.

Пример 5. Проинтегрировать $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$.

Решение. Введем новую переменную интегрирования: $t = \sin 3x$, и $dt = 3 \cos 3x dx$. Проведем замену переменной интегрирования в неопределенном интеграле:

$$\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 3x \\ dt = 3 \cos 3x dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{\sin 3x}}{3} + C.$$

Еще один вариант замены переменной t определяется соотношением $x = \psi(t)$ Тогда $dx = \psi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

Пример 6. Проинтегрировать $\int \frac{dx}{e^{2x-1} + 4}$.

Решение. Введем новую переменную интегрирования: $e^{2x-1} = t$ или $x = \frac{1 + \ln t}{2}$. Проведем замену переменной:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{2x-1} + 4} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\ln t + 1) \\ dx = \frac{dt}{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+4)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 4} = \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(t+2)-2}{(t+2)+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t}{t+4} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{e^{2x-1}}{e^{2x-1} + 4} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде

$$x+2 = (2x+2) \frac{1}{2} + 1. \text{ Тогда } \int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x^2 + 2x + 5 = t$, $2(x+1)dx = dt$. Получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 2^2$.

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменной

1. $\int \frac{3^{1/x} dx}{x^2}$. 2. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx$. 3. $\int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx$. 4. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.
5. $\int e^{\cos x} \sin x dx$. 6. $\int e^{-x^3} x^2 dx$. 7. $\int \frac{3x+1}{x^2 - 2x + 5} dx$. 8. $\int \frac{5x-1}{x^2 + 3x + 3} dx$. 9. $\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Ответы: 1. $-\frac{3^{1/x}}{\ln 3} + C$. 2. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C$. 3. $\frac{1}{3} \ln|3 + \sin 3x| + C$. 4. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

5. $-e^{\cos x} + C$. 6. $-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$. 7. $\frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$.

8. $\frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 3) - \frac{17}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$. 9. $2 \sin \sqrt{x} + C$.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} dx$.

Решение. Учитывая, что знаменатель имеет однократный действительный (простой) корень $x_1 = -1$, а так же множитель $(x^2 + 6x + 10)$ с отрицательным дискриминантом (с двумя комплексно-сопряженными корнями), разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 6x + 10} = \frac{A(x^2 + 6x + 10) + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)}.$$

Приравняем числители: $A(x^2 + 6x + 10) + B(x^2 + x) + C(x+1) = x^2 - 2x + 3$.

Из тождественности следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 6A + B + C = -2 \\ 10A + C = 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} B = 1 - A, C = 3 - A, \\ A + 1 - A + 3 - A = -2, \end{array} \right.$$

$$A = \frac{6}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = -9.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение рациональной функции

$$\frac{1}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{\frac{6}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{5} - 9}{x^2 + 6x + 10}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} dx = \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{x}{5} - 9}{x^2 + 6x + 10} dx = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{(-\frac{x}{5} - 9) dx}{x^2 + 6x + 9 + 1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| +$$

$$+ \int \frac{\left(-\frac{1}{5}(x+3) + \frac{3}{5} - 9\right) dx}{(x+3)^2 + 1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{\left(-\frac{x+3}{5}\right) dx}{(x+3)^2 + 1} + \int \frac{\left(-\frac{42}{5}\right) dx}{(x+3)^2 + 1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| -$$

$$-\frac{1}{10} \int \frac{d((x+3)^2 + 1)}{(x+3)^2 + 1} - \frac{42}{5} \cdot \operatorname{arctg}(x+3) = \frac{6}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{10} \ln(x^2 + 3x + 10) -$$

$$-\frac{42}{5} \operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл

1. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx$. Ответ. $3 \ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$.

2. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$. Ответ. $-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$.

3. $\int \frac{dx}{1-x^3}$. Ответ. $-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Пример 10. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 3x + 4 \sin 3x \cos 3x - 5 \cos^2 3x}$.

Решение. $\int \frac{1}{\sin^2 3x + 4 \sin 3x \cos 3x - 5 \cos^2 3x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = t \\ 3dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{dt}{t^2 + 1}}{\frac{t^2}{t^2 + 1} + \frac{4t}{t^2 + 1} - \frac{5}{t^2 + 1}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4t - 5} = \frac{1}{3} \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 9} = \frac{1}{18} \ln \left| \frac{(t+2)-3}{(t+2)+3} \right| + C =$$

$$\frac{1}{18} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} 3x - 1}{\operatorname{tg} 3x + 5} \right| + C.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл:

$\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos^2 x}$. Ответ. $\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вычисление неопределенного интеграла по частям. Вычисление определенного интеграла.

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Пример 1. Проинтегрировать по частям $\int (5x+2)\cos 7x dx$.

Решение.

$$\int (5x+2)\cos 7x dx = \left. \begin{array}{l} u = 5x+2; \quad du = 5dx \\ dv = \cos 7x dx; \quad v = \frac{\sin 7x}{7} \end{array} \right| = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5 \int \frac{\sin 7x}{7} dx =$$

$$= \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5 \int \frac{\sin 7x}{7} d(3x) = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} + \frac{5\cos 7x}{49} + C.$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^4 \ln x dx$.

Решение:

$$\int x^4 \ln x dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^4 dx, \quad v = \frac{x^5}{5} \end{array} \right) = \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл

1. $\int x e^{5x} dx$. Ответ. $\frac{1}{25}(5x-1)e^{5x} + C$.

2. $\int x \arctg x dx$ Ответ. $\frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C$.

3. $\int \arcsin x dx$. Ответ. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

4. $\int x \ln(3x+2) dx$. Ответ. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\right) \ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C$.

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int_e^{4e} \frac{\ln x dx}{x}$.

Решение. Воспользуемся методом введения новой функции под знак дифференциала. В данном случае $\ln x$ выступает в качестве новой переменной интегрирования, по которой легко указать первообразную

$$\int_e^{4e} \frac{\ln x dx}{x} = \int_e^{4e} \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_e^{4e} = \frac{1}{2} \left((\ln 4e)^2 - (\ln e)^2 \right) = \frac{1}{2} \left((\ln 4 + 1)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} (\ln^2 4 + 2 \ln 4).$$

Пример 4. Вычислить определённый интеграл $\int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$.

Решение. Выполним замену переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = \arctg\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4}, \\ x_1=0, t_1=0, \\ x_2=2, t_2=\frac{\pi}{4}. \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} t^3 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^4}{2048}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x \arctg x dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям

$$\int_0^1 x \arctg x dx = \left. \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2 \arctg x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.
2. $\int_1^{e^1} \ln^2 x dx$. Ответ: $e-2$.
3. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.
4. $\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx$. Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$.
5. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$. Ответ: $\frac{e^2-5}{e}$.

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=3.$$

Решение: $S = \int_1^3 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 5.$

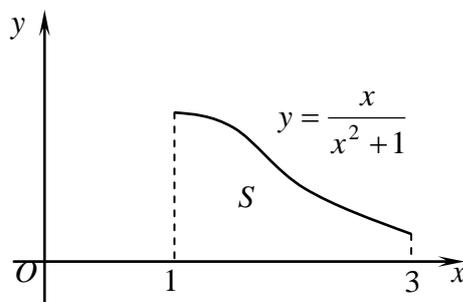


Рис. 2.

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7} (x^7) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y^2 = 9x$, $y = 3x$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. Ответ: $\frac{8}{3}$.

Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

1. $y^2 = 4x$, $x = 4$. Ответ: 32π .

2. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Ответ: $\frac{3\pi}{10}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Комплексные числа. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Пример 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \operatorname{tg}(x^2 - xy + 5y^2)$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \cdot (x^2 - xy + 5y^2)'_x = \frac{(2x - y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \cdot (x^2 - xy + 5y^2)'_y = \frac{(-x + 10y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Пример 2. Найти частные производные первого порядка функции $z = e^{\frac{x}{y+1}}$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y+1}} \cdot \left(\frac{x}{y+1} \right)'_x = e^{\frac{x}{y+1}} \cdot \left(\frac{1}{y+1} \right) = \frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y+1}} \left(\frac{x}{y+1} \right)' = e^{\frac{x}{y+1}} \left(x \cdot (y+1)^{-1} \right)' = \frac{-x \cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}.$$

Пример 3. Найти производные второго порядка функции $z = x^4 + x^5 y^3 + y^3 + 16$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 5x^4 y^3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^5 y^2 + 3y^2$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 20x^3 y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^5 y + 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 15x^4 y^2 \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти частные производные первого порядка функций:

1. $z = \operatorname{arctg}(xy)$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2 y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2 y^2}$.

2. $z = x^{y+2}$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = (y+2)x^{y+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y+2} \ln x$.

3. $z = \arcsin(x-y)$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$.

Пример 4. Даны: функция $z = 2xy + 3y^2$, точка $A(1, -2)$ и вектор $\vec{l} = \{9, -12\}$.

Найти: 1) градиент функции $z = 6xy + 8y^2$ в точке $A(1, -2)$, 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l} = \{9, -12\}$.

Решение. Вычислим частные производные функции в точке $A(1, -2)$:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial z(1, -2)}{\partial x} = -4, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial z(1, -2)}{\partial y} = 2 - 12 = -10.$$

Градиент функции z имеет вид

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad} z} &= \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = (2y) \vec{i} + (2x + 6y) \vec{j}, \\ \overrightarrow{\operatorname{grad} z(A)} &= (-4) \vec{i} + (2 + 6 \cdot (-2)) \vec{j} = -4 \vec{i} - 10 \vec{j}. \end{aligned}$$

Найдем косинусы направляющих углов, перейдя от вектора $\vec{l} = \{9, -12\}$ к соответствующему орту

$$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta\} = \left\{ \frac{9}{\sqrt{9^2 + (-12)^2}}, \frac{-12}{\sqrt{9^2 + 12^2}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}.$$

Производная по направлению вектора \vec{l} в точке M равна

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = -4 \cdot \frac{3}{5} - 10 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{52}{5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точке $M(2, 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{3, 4\}$. Ответ. 9,4.

2. Найти градиент и его модуль для функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(1;2;2)$. Ответ. $\overline{gradu} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$; $|\overline{gradu}| = 1$.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид $P(x) \cdot dx + Q(y) \cdot dy = 0$.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $(1 + x^2)dy + ydx = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (уравнению с разделёнными переменными) $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получаем $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2+1}$ или $\ln|y| = -\arctg x + C$. Общее решение можно записать в виде $y = e^{C-\arctg x}$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y' = \tg x \cdot \tgy$.

Решение. Разделяя переменные, приходим к уравнению $\ctgy dy = \tg x dx$.

Интегрируем $\int \ctgy dy = \int \tg x dx$, $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C$.

Постоянная интегрирования выбрана в виде $\ln C$ для упрощения представления ответа. Далее находим общий интеграл $\sin y = \frac{C}{\cos x}$ или $\sin y \cdot \cos x = C$.

Задача для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x^2 y' = y^2 + 4$.

Ответ. $\frac{1}{2} \arctg \frac{y}{2} = -\frac{1}{x} + c$.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции или постоянные.

Пример 7. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Ищем решение $y(x)$ в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Поскольку $y' = u'v + uv'$, то уравнение принимает вид

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3 \text{ или } u'v + u(v' - \frac{2v}{x+1}) = (x+1)^3.$$

Для нахождения частного решения $v(x)$ решаем уравнение

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, находим

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1} \text{ или } \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}.$$

После интегрирования обеих частей равенства, получим $\ln|v| = 2\ln|x+1| + C$. Так как достаточно найти хотя бы одно отличное от нуля решение, то положим $C = 0$ и опустим модули. Тогда $v(x) = (x+1)^2$. Подставляя найденное значение $v(x)$ в исходное уравнение и учитывая, что $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$, запишем $u'(x+1)^2 = (x+1)^3$ или $\frac{du}{dx} = x+1$, откуда после интегрирования получим $u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$. Общее решение запишется $y = uv = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Имеем $y(0) = \frac{1}{2} + C = 1$, откуда $C = \frac{1}{2}$. Тогда частное решение (решение задачи Коши) запишется в виде $y = \frac{(x+1)^4 + (x+1)^2}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' + \frac{y}{x} = -x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Ответ. $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3x}$.

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - y = e^x$.

Ответ. $y = (x + C)e^x$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$.

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида $y'' + py' + qy = f(x)$.

Пример 1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка со специальной правой частью $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Решение. Общее решение будет иметь вид $y = y_{oo} + y_{ch}$. Для нахождения общего решения y_{oo} соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$

составляется характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$ и находятся его корни: $k_1 = 1, k_2 = 6$.

Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения приобретает вид $y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения y_{ch} рассмотрим правую часть $(x-2)e^x$. Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $P_1(x)e^x$ и характеризуется параметром правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i$ (алгебраическая форма представления комплексного числа: $z = x + iy$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$).

Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$ совпадает с простым корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $y_{ch} = xe^x(Ax + B)$. Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x-2)e^x$$

или $(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях xe^x, e^x , получим

$$\begin{cases} -10A = 1, \\ 2A - 5B = -2, \end{cases} \text{ откуда } A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}. \text{ Следовательно, частное решение будет}$$

иметь вид $y_{ch} = xe^x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right)$. Общее решение $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right)$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 5y = \cos 2x$.

Решение.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$, $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$. При наличии комплексных корней характеристического уравнения общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo} = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

Правая часть неоднородного уравнения $\cos 2x$ имеет вид $P_0(x)\sin 2x + Q_0(x)\cos 2x$, где $P_0(x) = 0$ и $Q_0(x) = 1$ – многочлены нулевой степени. Правая часть неоднородного уравнения описывается параметром $\alpha + i\beta = 0 + 2 \cdot i$, не совпадающим с корнями характеристического уравнения. Частное решение y_{ch} ищется в виде, подобном правой части (без домножения на x^l и с коэффициентами, подлежащими определению)

$$y_{ch} = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Коэффициенты A и B находятся из результата подстановки $y_{\text{чн}}$ в исходное уравнение

$$(A \sin 2x + B \cos 2x)'' + 4(A \sin 2x + B \cos 2x)' + 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = \cos 2x, \\ -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 4(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) + 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = \cos 2x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях $\sin 2x$ и $\cos 2x$ слева и справа для вычисления A и B .

$$\begin{cases} -4A - 8B + 5A = 0 \\ -4B + 8A + 5B = 1 \end{cases} \begin{cases} A - 8B = 0 \\ B + 8A = 1 \end{cases} \quad A = 8B, \quad B + 64B = 1, \quad B = \frac{1}{65}, \quad A = \frac{8}{65}.$$

Частное решение неоднородного уравнения равно $y_{\text{чн}} = \frac{8}{65} \sin 2x + \frac{1}{65} \cos 2x$,

а общее решение равно $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{8}{65} \sin 2x + \frac{1}{65} \cos 2x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью:

1. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1,5)$.

2. $y'' + y' + y = 3 \cos 2x$. Ответ. $y = e^{-x/2} \left(C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{6}{13} \sin 2x - \frac{9}{13} \cos 2x$.

Пример 3. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения,

удовлетворяющее начальным условиям
$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2 + k - 2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения $\cos x + 3 \sin x$ имеет вид $e^{0x}(P \cos x + Q \sin x)$. Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 1i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{\text{чн}} = (A \cos x + B \sin x)$. Подставляя это выражение вместе с производными $y' = (-A \sin x + B \cos x)$, $y'' = (-A \cos x - B \sin x)$ в заданное уравнение, будем иметь

$$(B - 3A) \cos x + (-A - 3B) \sin x = \cos x - 3 \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases} \text{ откуда } A = 0, \quad B = 1. \text{ Следовательно, частное решение будет}$$

иметь вид $y_{\text{чн}} = \sin x$.

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x$.

Найдем C_1 , C_2 , используя начальные условия,

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + \sin 0 = 1; \\ C_1 e^0 - 2C_2 e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=1$, $C_2=0$. В итоге получаем решение задачи Коши $y = e^x + \sin x$.

Пример 4. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения,

$$\text{удовлетворяющее начальным условиям } \begin{cases} y'' + y' = e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2 + k = 0$, $k(k+1) = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{oo} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения e^x имеет вид $e^x(1 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x))$. Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{ch} = Ae^x$. Подставляя это выражение вместе с производными $y' = Ae^x$, $y'' = Ae^x$ в заданное уравнение, будем иметь $Ae^x + Ae^x = e^x$.

Приравнивая коэффициенты при e^x , получим $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{ch} = \frac{e^x}{2}$.

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{e^x}{2}$.

Найдем C_1, C_2 , используя начальные условия, $\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0; \\ -C_2 + \frac{1}{2} = 1. \end{cases}$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

В итоге получаем решение задачи Коши $y = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{2}$.

Задача для самостоятельного решения. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = -5,5$.

Ответ. $y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x}$.

III СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Числовые и функциональные ряды.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{3n+2}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{3n+2}$ расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-4}{3n+2} = \frac{7}{3} \neq 0$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Пример 2. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}$.

Решение. Общий член ряда $u_n = \frac{n^2}{(3n)!}$, тогда $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(3n+3)!}$. Применяя признак Даламбера, вычислим

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 (3n)!}{(3n+3)! n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2 (3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-9}{5n+3} \right)^n$.

Решение: Применим радикальный признак Коши. Вычислим

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-9}{5n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-9}{5n+3} = \frac{2}{5} < 1.$$

По радикальному признаку Коши исходный ряд сходится.

Пример 4. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Решение. Введем функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, удовлетворяющую условиям

$f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$. Отметим, что эта функция положительная, непрерывная и убывающая при $x \geq 2$. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Для этого вычислим

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость числовых рядов.

$$\begin{array}{llll}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+4}, & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}, & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}, & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}, \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}, & 6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, & 8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{\ln n}}, \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}, & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^3}, & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}, & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.
\end{array}$$

Ответы. 1. Расходится. 2. Расходится. 3. Расходится. 4. Сходится.
 5. Сходится. 6. Расходится. 7. Сходится. 8. Расходится.
 9. Сходится. 10. Сходится. 11. Сходится. 12. Сходится.

Пример 5. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n n^2} x^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{5^n n^2} = 5$.

Ряд сходится на интервале $-5 < x < 5$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках. При $x=5$ и $x=-5$ из данного ряда получаем соответственно числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Эти ряды сходятся абсолютно, поэтому областью сходимости данного ряда является промежуток $[-5, 5]$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите область сходимости степенного ряда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2} x^n.$$

Ответы. 1. $[-1; 1]$. 2. $(-1; 1)$.

Разложение функции по степеням x в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Пример 6. Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$, взяв шесть первых слагаемых разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и затем проинтегрировав их почленно.

Решение. Пользуясь рядом Маклорена $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$, заменяя в нем x на \sqrt{x} , имеем $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \frac{x^5}{10!} + \dots$ ($x \geq 0$). Интегрируя в указанных пределах, получим $\int_0^1 \cos\sqrt{x} dx \approx \left(x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} - \frac{x^4}{6! \cdot 4} + \frac{x^5}{8! \cdot 5} - \frac{x^6}{10! \cdot 6} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \frac{1}{201600} - \frac{1}{21772800} \approx 1 - 0,25 + 0,01388889 - 0,00034722 + 0,00000496 - 0,00000005 = 0,76354658$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0.001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно.

$$1. \int_{0.01}^{0.1} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad 2. \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx,$$

Ответы. **1.** 2.215. **2.** 0.248.

Рассмотрим разложение функции в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

где коэффициенты Фурье находятся по формулам $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = x$, где $-\pi < x \leq \pi$ в ряд Фурье.

Решение. По условию имеем периодическую функцию с периодом 2π . Эта функция кусочно монотонная и ограниченная, следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье. Найдем коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nxdx = 0 \quad (\text{вычисляется методом ин-}$$

тегрирования по частям); $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nxdx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$.

$$\text{Тогда } f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right].$$

Пример 8. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 0], \\ 2, & x \in (0, 2) \end{cases}$ в ряд Фурье.

Решение. График периодического продолжения заданной функции на всю числовую ось с периодом $2l = 4$ имеет вид, изображенный на рис.3.

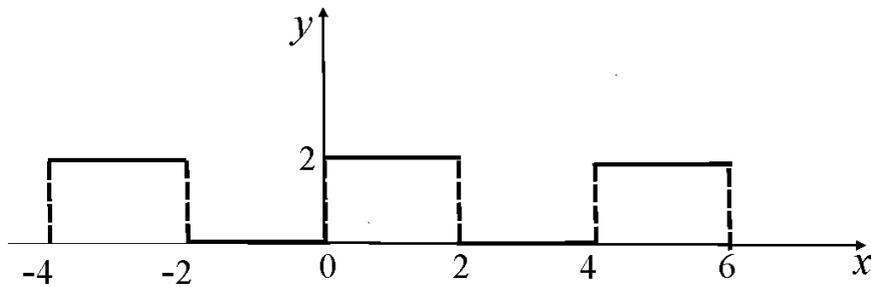


Рис. 3.

Определяем коэффициенты ряда Фурье

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 2 dx \right) = x \Big|_0^2 = 2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n} (\sin \pi n - \sin 0) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n} (-\cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n} [(-1)^{n+1} + 1] = \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 2k - 1 \\ 0, & n = 2k. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Получаем ряд Фурье

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2} + \dots \right).$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вычисление кратных и криволинейных интегралов.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \text{где } D: x=1, x=2, y=x; y=2x.$$

Решение.

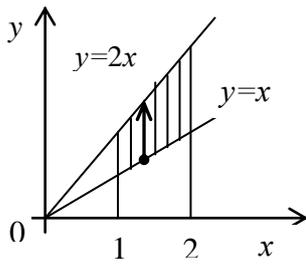


Рис. 4.

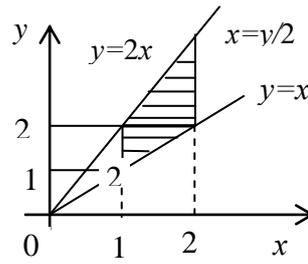


Рис. 5.

$$I = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} =$$

$$= \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

$$I = \int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

Решение. Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования D : $x=0$, $x=1$, $y=2\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{x}$ и построим их (рис. 6). Область D располагается в полосе $0 \leq x \leq 1$ и ограничена сверху и снизу соответствующими ветвями параболы $y^2 = 4x$.

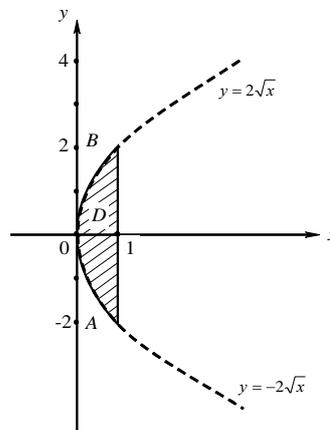


Рис. 6.

Найдем новые пределы внешнего (по y) и внутреннего (по x) интегрирования. Так как область D проецируется на ось Oy в отрезок AB , то пределами внешнего интегрирования являются ординаты точек A и B , т. е. $y=-2$ и $y=2$ соответственно.левой границей области является кривая $x = \frac{y^2}{4}$ (уравнение параболы $y^2 = 4x$ разрешено относительно x), а правой – прямая $x=1$. Таким

образом, двойной интеграл I с измененным порядком интегрирования запишется в виде
$$I = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^1 f(x, y) dx.$$

Пример 3. Определить пределы интегрирования интеграла $\iint_S f(x, y) dx dy$, если область интегрирования S (рис. 7) ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и двумя прямыми $x = 2$ и $x = -2$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

Решение. Область интегрирования $ABCD$ (рис. 7) ограничена прямыми $x = 2$ и $x = -2$ и двумя ветвями параболы: $y = \sqrt{1+x^2}$ и $y = -\sqrt{1+x^2}$.

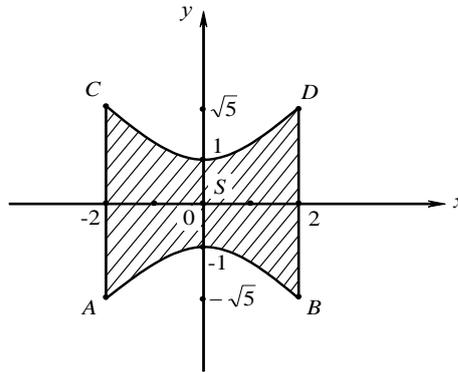


Рис. 7.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D e^{x+y} dx dy$, где D – прямоугольник: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^2 e^{x+y} dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_0^2 dx = \int_0^1 [e^{x+2} - e^x] dx = [e^{x+2} - e^x]_0^1 = \\ &= e^{1+2} - e^1 - e^2 + e^0 = e^3 - e^2 \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл: $I = \iint_D xy^2 dx dy$, где D – треуголь-

ник $y = 0, x = 2; y = \frac{x}{2}$ (рис.8).

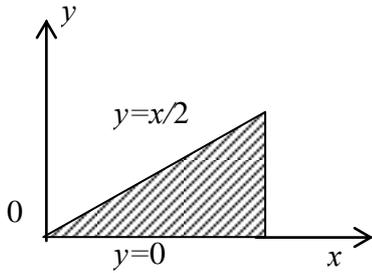


Рис. 8.

Решение.
$$I = \int_0^2 x dx \int_0^{\frac{x}{2}} xy^2 dy = \int_0^2 x dx \int_0^{\frac{x}{2}} y^2 dy$$

$$= \int_0^2 x \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 x \frac{x^3}{24} dx =$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{24} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{4}{15}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy$.

Решение.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x+y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 x dy + \int_x^1 y dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \int_x^1 dy + \int_x^1 y dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx = \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить двойные интегралы по областям G , ограниченным указанными линиями:

1. $\iint_G \frac{3y^2 dx dy}{1+x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

2. $\iint_G \frac{dx dy}{(x-y)^2}; \quad 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4.$

3. $\iint_G (x-y) dx dy; \quad x=0, y=0, x+y=2.$

4. $\iint_G xy dx dy; \quad y=0, y=x, x=1.$

5. $\iint_G xy dx dy; \quad y=x^2, y^2=x.$

6. $\iint_G x dx dy; \quad y=x^3, x+y=2, x=0.$

Ответы. 1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $\ln \frac{4}{3}$. 3. 0. 4. $1/8$. 5. $1/12$. 6. $7/15$.

Пример 7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$; $z=1-x^2-y^2$; $y=x$; $y=x\sqrt{3}$ и расположенного в первом октанте.

Решение. Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D - круговой сектор, ограниченный дугой окружностью $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$, и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Следовательно, $V = \iint_D (1-x^2-y^2) dx dy$.

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от $x^2 + y^2$, целесообразно перейти к полярным координатам. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, θ , связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ в этих координатах примет вид $\rho = 1$, подынтегральная функция равна $1 - \rho^2$, а пределы интегрирования по θ определяем из уравнений прямых: $\operatorname{tg} \theta_1 = 1$, т.е. $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} \theta_2 = \sqrt{3}$, т.е. $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, имеем
$$V = \iint_D (1 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^2) \rho d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right] \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{48}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$; G – половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в области $y \geq 0$.

2. $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy$; G – четверть круга $x^2 + y^2 = 1$, расположенная в первом квадранте.

3. $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy$; G – круг радиуса R с центром в начале координат

Ответы. 1. $\pi R^4 / 4$. 2. $\frac{\pi}{4}(e - 1)$. 3. $2\pi(e^{R^2} - 1)$.

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 1; \quad z = 2 - x^2; \quad y = x^2; \quad y = 1 - 2x^2.$$

Решение. Если область определена неравенствами $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, то объем тела V находится по

формуле
$$V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz.$$

Для определения пределов интегрирования сделаем чертеж данного тела и его проекции на плоскость XOY (рис. 9 и 10).

Следует обратить внимание на то, что для переменной x границами являются наибольшее и наименьшее значения в заданной области, то есть

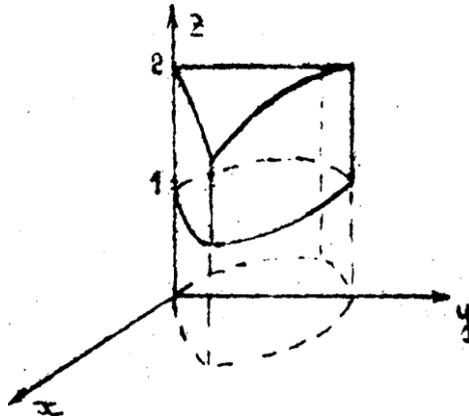
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$


Рис. 9.

Переменная y является функцией переменной x . На рисунке видно, что область D ограничена снизу кривой $y = x^2$, а сверху – кривой $y = 1 - 2x^2$. Следовательно, $x^2 \leq y \leq 1 - 2x^2$.

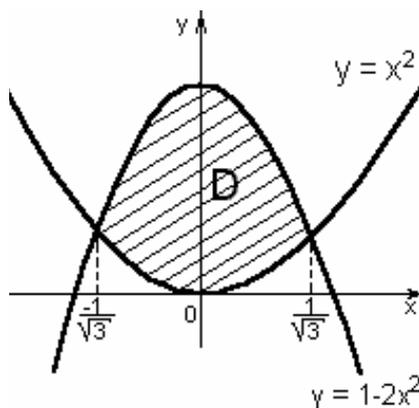


Рис. 10.

Аналогично, из рисунка тела видно, что оно снизу ограничено плоскостью $z = 1$, а сверху поверхностью $z = 2 - x^2$. Таким образом, переменная z является функцией двух переменных x и y , и $1 \leq z \leq 2 - x^2$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{1-2x^2} dy \int_1^{2-x^2} dz = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{1-2x^2} z \Big|_1^{2-x^2} dy = \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{1-2x^2} (1-x^2) dy = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} (1-x^2)(y) \Big|_{x^2}^{1-2x^2} dx = \\
&= \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} (1-x^2)(1-3x^2) dx = \left(x - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} \right) \Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{56\sqrt{3}}{135}.
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить тройные интегралы по областям V , ограниченным указанными поверхностями:

1. $\iiint_V (x+y-z) dx dy dz$; $x = -1, x = +1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2$.

2. $\iiint_V z dx dy dz$; $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

3. $\iiint_V x dx dy dz$; $x = 0, y = 0, z = 0, y = 1, x + z = 1$.

Ответы. 1.-2. 2. 1/24. 3. 1/6.

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy$

вдоль 1) ломаной $L = ABC$ от точки $A(1;0)$ до точки $C(2;5)$, где $B(2;3)$; 2) дуги эллипса $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

Решение. Пусть кривая L задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t), y = \psi(t)$. Пусть точкам M и P этой кривой соответствуют значения параметра t α и β соответственно. Тогда

$$\int_{(M)}^{(P)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt.$$

Если кривая задана

уравнением $y = f(x)$, причем точке M соответствует $x = a$, а точке P - $x = b$, то

$$\int_{(M)}^{(P)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_a^b \{X[x, f(x)] + Y[x, f(x)]f'(x)\} dx.$$

1) Криволинейный интеграл вдоль ломаной L можно разбить на сумму двух интегралов: вдоль отрезков AB и BC . Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки A и B

$$AB: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0}; \Rightarrow y = 3(x-1).$$

Найдем производную $y' = 3$.

Уравнение отрезка BC имеет вид $x = 2$. В этом случае $dx = 0$, $3 \leq y \leq 5$.

Таким образом,

$$\int_{(A)}^{(C)} (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy = \int_{(A)}^{(B)} (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy +$$

$$\int_{(B)}^{(C)} (y^2 x + 2y) dy = \int_1^2 \left\{ x^2(x-1)3 - 3x + \left[9(x-1)^2 x + 6(x-1) \right] \right\} dx +$$

$$+ \int_3^5 (2y^2 + 2y) dy = 3 \int_1^2 (10x^3 - 19x^2 + 14x - 6) dx + \left(\frac{2}{3} y^3 + y^2 \right) \Big|_3^5 =$$

$$= 8 \frac{1}{6} + 81 \frac{2}{6} = 89.5$$

1) Кривая задана в параметрическом виде. Найдем производные

$$x'_t = -3 \sin t; \quad y'_t = 2 \cos t.$$

Тогда

$$\int_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 9 \cos^2 t \cdot 2 \sin t - 9 \cos t \right\} (-3 \sin t) +$$

$$+ (4 \sin^2 t 3 \cos t + 4 \sin t) 2 \cos t \Big\} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{27}{2} \sin 2t (\sin 2t - 1) + 4 \sin 2t \left(\frac{3}{2} \sin 2t + 1 \right) \right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{15}{2} \sin^2 2t + \frac{35}{2} \sin 2t \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{15}{4} (1 - \cos 4t) + \frac{35}{2} \sin 2t \right] dt =$$

$$= -\frac{15}{8} \pi + \frac{35}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int_{AB} x dy - y dx$ по кривой $y = x^3$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,8)$.

2. $\int_{AB} \sqrt{x} dx + \sqrt{y} dy$ по кривой $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

3. $\int_{AB} x^2 dx + y^2 dy$ по кривой $y = \sqrt{x}$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

4. $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx + x y dy$ по кривой $y = e^x$ от точки $(0,1)$ до точки $(1,e)$.

Ответы: 1. 8. 2. 4/3. 3. 2/3. 4. $\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{12}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1999. Ч. 1. 415 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1977. Т. 1,2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I СЕМЕСТР.....	3
Практическое занятие 1.....	3
Практическое занятие 2.....	6
Практическое занятие №3.....	11
Практическое занятие №4.....	13
II СЕМЕСТР.....	17
Практическое занятие №1.....	17
Практическое занятие №2.....	21
Практическое занятие №3.....	24
Практическое занятие №4.....	27
III СЕМЕСТР.....	31
Практическое занятие №1.....	31
Практическое занятие №2.....	34
Библиографический список.....	42

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
(профиль «Промышленная теплоэнергетика»)
заочной формы обучения

Составители:

Ряжских Александр Викторович
Соколова Ольга Анатольевна

Компьютерный набор О. А. Соколовой

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 12.10.2022.
Уч.-изд. л. 2,3.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84