МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
(профиль «Промышленная теплоэнергетика»)
заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук А. В. Ряжских
канд. техн. наук О. А. Соколова

Математика: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (профиль «Промышленная теплоэнергетика») заочной формы обучения» / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. В. Ряжских, О. А. Соколова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 43 с.

Приводится последовательность проведения практических занятий по курсу «Математика», разбираются опорные задачи, усвоение материала контролируется задачами для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (профиль «Промышленная теплоэнергетика») заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ПР_математика_13.03.01.pdf.

Ил. 10. Табл. 3. Библиогр.: 2 назв.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Рецензент *– А. А. Хвостов, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

I СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Матрица A размера $m\times n-$ совокупность чисел, записанная в виде прямоугольной таблицы $A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 1. Найти матричный многочлен $AB+3C\text{-}2E$, где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому умножение матрицы A на матрицу B корректно. По формуле перемножения матриц находим:

$$\mathrm{d}_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}=7\cdot 1+1\cdot 4+3\cdot 0+6\cdot 2=23;$$

$$\mathrm{d}_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}=7\cdot 5+1\cdot 1+3\cdot(-8)+6\cdot 4=36;$$

$$\mathrm{d}_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}=9\cdot 1+4\cdot 4+7\cdot 0+7\cdot 2=39;$$

$$\mathrm{d}_{22}=9\cdot 5+4\cdot 1+7\cdot(-8)+7\cdot 4=21.$$

Следовательно: $D=AB\ =\begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}$.

Матрица $3C=3\cdot\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $2E=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Получаем матричный многочлен

$$AB+3C\text{-}2E=\begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 42 \\ 42 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу $2A+5B$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу AB, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ответ. $AB=\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, используя правило треугольников.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}) =$$

$$= 4\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 - (1\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1) = 24 + 1 + 3 - (6 + 4 + 3) = 15.$$

Задача для самостоятельного решения. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Ответ. –73.

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить обратную матрицу A^{-1}.

Решение. Вычислим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 - 3\cdot 14 + 0 = -22.$$

Найдем алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ элементов a_{ij} матрицы A, где минор M_{ij} представляет собой определитель второго порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца, содержащих элемент a_{ij} в определителе матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 6 - 2\cdot(-8) = 10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 31;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 10 & -18 & 6 \\ -14 & 12 & -4 \\ -27 & 31 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{27}{22} & -\frac{31}{22} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить системы уравнений методом обратной матрицы $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$.

Решение: Вычислим определитель системы Δ разложением по первой строке $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} == -18 + 8 + 51 = 41.$$

Поскольку определитель системы отличен от нуля, то можно вычислить обратную матрицу A^{-1}. Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Вычислим матрицу-столбец неизвестных согласно формуле $X = A^{-1}\cdot B$, где $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$.

$$X = \frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} -108+99+50 \\ 24-63+80 \\ 102+9-70 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix} 41 \\ 41 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений имеет вид x=1, y=1, z=1.

Задача для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Ответ. (1;2;2).

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2y = 10 \end{cases}$.

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 10 \end{array}\right)$. Умножаем каждый элемент 1-й строки на (–4) и складываем со 2-й строкой. Умножаем каждый элемент 1-й строки на (–3) и складываем с 3-й строкой. Получаем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -8 & -15 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$. Умножаем каждый элемент 2-й строки на $\left(-\frac{1}{7}\right)$ и складываем с 3-й строкой. Получаем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{7} & -\frac{41}{7} \end{pmatrix}$.

Тогда r(*A*) = r(*A/B*) =3 – система совместна. Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -7y-8z=-15 \\ -\frac{41}{7}z=-\frac{41}{7} \end{cases}$, откуда обратным ходом получаем

$z = 1$; $y=1$; $x=1$.

Задачи для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом Гаусса

1. $\begin{cases} x-3y+6z=10 \\ 2x+y+2z=7 \\ x-y+z=2 \end{cases}$. Ответ. (1;1;2)

2. $\begin{cases} x+3y-4z=-9 \\ 2x-y-z=-1 \\ 4x+y+3z=5 \end{cases}$. Ответ. (1;-2;1).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вектор. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Плоскость. Уравнение прямой в пространстве, на плоскости.

Пусть координаты точек начала и конца вектора $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

Длина вектора $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Разложение вектора по декартовому базису $\vec{d}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, где $\vec{i}=\{1,0,0\}$, $\vec{j}=\{0,1,0\}$, $\vec{k}=\{0,0,1\}$ - единичные базисные вектора, x, y, z – декартовые прямоугольные координаты $\vec{d}$.

Пример 1. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,3,4)$, $B(4,7,3)$, $C(1, 2,2)$, $D(-2,0,-1)$. Вычислить:

а) площадь грани *ABC*;

б) объем пирамиды *ABCD*;

в) угол *ABC*;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Решение.

а) Площадь треугольника *ABC* находится как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}=\{2,4,-1\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-1,-1,-2\}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Находим векторное произведение векторов в координатном представлении $\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$. Найдем половину длины векторного произведения $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{(-9)^2+5^2+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{110}}{2}$.

б) Сначала находим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\{2,4,-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,-1,-2\}$ и $\overrightarrow{AD}=\{-4,-3,-5\}$, равный модулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение находим по формуле $\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=10-3+32+4-12-20=11$.

Объем пирамиды V_{ABCD} соответствует шестой части модуля смешанного произведения трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{ABCD}=\frac{11}{6}$.

в) Косинус угла *ABC* находится по формуле $\cos(ABC)=\frac{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$. Имеем

$$\cos(ABC)=\frac{-2\cdot(-3)-4\cdot(-5)+1\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-1)^2}}=\frac{25}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}}\approx 0{,}92.$$

По таблицам находим соответствующий угол $\arccos(0{,}92)=23^0$.

г) Проверим выполнение условия компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ $\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{BC}\right)=0$.

Вычисляем смешанное произведение

$$\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -3 & -5 & -1\end{vmatrix}=2+24-5+3-20-4=0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,5,4)$, $B(5,8,6)$, $C(1,9,9)$, $D(6,4,8)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Уравнение плоскости, содержащей заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и расположенной перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}=\{A;B;C\}$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно направляющему вектору $\vec{q}=\{l;m;n\}$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Пример 2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4;7;8)$, $B(-1;13;0)$, $C(2;4;9)$ и $D(1;8;9)$.

Составить:

а) уравнения ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) уравнения высоты DE;

г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.

Вычислить:

е) длину ребра BC;

ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC;

Решение.

а) Уравнения ребра AB могут быть получены как уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(4,7,8)$ и $B(-1,13,0)$

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-7}{13-7}=\frac{z-8}{0-8} \text{ или } \frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}.$$

б) уравнение грани ABC получается как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$ и $C(2,4,9)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим $6x-7y-9z+97=0$ – уравнение грани ABC.

в) Для получения уравнений высоты DE воспользуемся координатами точки $D(1,8,9)$. В качестве направляющего вектора для DE используем вектор нормали $\vec{N}=\{6,-7,-9\}$ для плоскости ABC. Уравнения высоты DE запишутся в виде $\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}$.

г) Для получения уравнений прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB воспользуемся направляющим вектором $\vec{q}=\{-5,6,-8\}$ для прямой AB $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-8}{6}=\frac{z-9}{-8}$.

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку $D(1,8,9)$ перпендикулярно ребру AB записывается при использовании вектора $\overrightarrow{AB}=\{-5,6,-8\}$, как вектора нормали $-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0$ или $-5x+6y-8-29=0$.

е) Длину ребра BC находим как расстояние между точками $B(-1,13,0)$ и $C(2,4,9)$: $BC=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-13)^2+(9-0)^2}=\sqrt{171}$.

ж) Для нахождения угла между ребром CD и плоскостью основания ABC найдем $sin\varphi$ (φ – угол между вектором $\overrightarrow{CD}=\{-1,4,0\}$) и нормалью $\overrightarrow{N}=\{6,-7,-9\}$ к плоскости ABC)

$$\sin\varphi=\frac{|-1\cdot 6+4\cdot(-7)+0\cdot(-9)|}{\sqrt{(6)^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(4)^2+(0)^2}}=\frac{|-34|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{166}}\approx 0{,}64.$$

$$\varphi=\arcsin(0{,}64)=39^0.$$

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $C(4,2,0)$ и $D(1,2,6)$.

Составить:

а) уравнения ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) уравнения высоты DE;

г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.

Вычислить:

е) длину ребра BC;

ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(4,3)$, $B(-3, -3)$, $C(2,7)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB,

б) уравнение высоты CH,

в) уравнение медианы AM,

г) угол ABC,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB,

е) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

а) Уравнение AB запишем как уравнение прямой, походящей через две заданные точки A(4,3) и B(-3,-3):

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},\ 6(x-4)=7(y-3),\ 6x-7y-3=0.$$

б) Уравнение высоты CH, как перпендикуляра к стороне AB, запишем как каноническое уравнение прямой, проходящей через точку C(2,7) и имеющей в качестве направляющего вектора нормаль к AB:

$$\vec{N}_{AB}=\{6,-7\},\ \frac{x-2}{6}=\frac{y-7}{-7}\ \text{ или }\ 7x+6y-56=0.$$

в) Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. Найдем координаты точки M – середины отрезка BC: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2$.

Для медианы AM запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{y-3}{2-3}$, $2x-9y+19=0$.

г) Угол ABC можно искать его как угол между векторами $\overrightarrow{BA}=\{4-(-3),3-(-3)\}=\{7,6\}$ и $\overrightarrow{BC}=\{2-(-3),7-(-3)\}=\{5,10\}$:

$$\cos(ABC)=\frac{7\cdot5+6\cdot(10)}{\sqrt{6^2+7^2}\cdot\sqrt{5^2+10^2}}=\frac{95}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{125}}=\frac{19}{\sqrt{425}},\qquad \varphi=\arccos(\frac{19}{\sqrt{425}}).$$

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB ($6x-7y-3=0$), то проекции вектора нормали к AB можно взять те же

$$6(x-2)-7(y-7)=0\ \text{ или }\ 6x-7y+37=0.$$

е) Расстояние от точки C(2,7) до прямой AB

$$d=\left|\frac{6\cdot x_c-7\cdot y_c-3}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}\right|=\left|\frac{6\cdot2-7\cdot7-3}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}\right|=\frac{40}{\sqrt{85}}.$$

Задача для самостоятельного решения. Даны вершины треугольника A(10,–9), B(–2,–4), C(4,4).

Найти:

а) уравнение стороны AB,

б) уравнение высоты CH,

в) уравнение медианы AM,

г) угол ABC,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB,

е) расстояние от точки C до прямой AB.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Вычисление пределов функций.

Если при вычислении пределов алгебраической суммы, произведения или частного от деления функций сами функции стремятся к некоторым константам, не равным одновременно нулю в случае деления функций, то вычисление пределов не вызывает затруднения.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{7x^2+2x}{3x^4-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(7x^2+2x\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^4-1\right)}=\frac{7\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2\right)+2\lim\limits_{x\to 1}(x)}{3\lim\limits_{x\to 1}\left(x^4\right)-\lim\limits_{x\to 1}(1)}=\frac{9}{2}.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0.$

Пределы отношения бесконечно малых величин, отношения бесконечно больших величин, произведения бесконечно малой и бесконечно большой величины называются *неопределенностями* и могут принимать различные значения или даже не существовать.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+2x+1}{3x^3+4x^2-6x-8}$.

Решение. Предел содержит неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия выносим старшие степени в числителе и знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+2x+1}{3x^3+4x^2-6x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{7}{3}.$$

Здесь было использовано, что при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}$ стремятся к нулю и могут быть опущены рядом с ненулевыми константами.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x+2}$.

Решение. Для выделения бесконечно малых разложим числитель и знаменатель на множители и сократим бесконечно малые множители (x–2):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{2x-1}=\frac{7}{3}.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+4x-5}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x+1)-4}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x+5)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{6\cdot(2+2)}=\frac{1}{8}.$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$.

Решение. Данный предел содержит неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin^2 5x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{7x}{2}\right)\cdot\left(\frac{7x}{2}\right)^2\cdot}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin^2 5x}{25x^2}\right)\cdot 25x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)x}{\left(\frac{7x}{2}\right)}\right)^2\cdot\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\cdot\left(\frac{49x^2}{4\cdot 25x^2}\right)=\frac{49}{50}.$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности 1^∞ преобразуем дробь и показатель степени так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+3}{7x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1+4}{7x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{7x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{7x-1}\right)^{\frac{(7x-1)(x+3)4}{4(7x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+3)}{(7x-1)}}=e^{\frac{4}{7}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. Ответ. 9.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. Ответ. $-\dfrac{2}{5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. Ответ. $\dfrac{4}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$. Ответ. 0.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/3)}{x^2}$. Ответ. $\dfrac{1}{9}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$. Ответ. $\dfrac{2}{5}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Для дифференцирования функции потребуется напомнить основные формулы и правила дифференцирования.

Формулы производных основных элементарных функций:

$(C)' = 0$, где $C - const$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(arcctgx)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования:

1. $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$.

2. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.

(Следствие: $\left(C\cdot u(x)\right)' = C\cdot u'(x)$)

3. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

4. $y = f(u), u = \varphi(x), \quad y' = f_u'(u)\cdot\varphi_x'(x)$.

5. $\begin{cases} y = f(x) \\ x = \varphi(y) \end{cases}, \qquad f'_x(x) = \dfrac{1}{x'_y}$.

Рассмотрим производную функции одной переменной.

Пример 1. Найти производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования дроби

$$y' = \frac{x\cdot(\arcsin x)' - \arcsin x\cdot(x)'}{x^2} = = \frac{x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x\cdot - \arcsin x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{\cos(7x-2)}{x^2}$.

Решение. В этом примере необходимо применять формулы для производной частного двух функций и для производной функции от функции (производной сложной функции), то есть, если $y = f(\varphi(x))$, то $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

$$\left(\frac{\cos(7x-2)}{x^2}\right)' = \frac{(\cos(7x-2))' x^2 - \cos(7x-2)(x^2)'}{x^4} =$$

$$\frac{-\sin(7x-2)(7x-2)' x^2 - 2x\cos(7x-2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-7x^2 \cdot \sin(7x-2) - 2x \cdot \cos(7x-2)}{x^4} = \frac{-7x \cdot \sin(7x-2) - 2\cos(7x-2)}{x^3}.$$

Пример 3. Найти производную сложной функции $y = (2x^3+5)^4$.

Решение. Обозначим $(2x^3+5) = u.$ Тогда $y = u^4.$ По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y' = (u^4)'_u (2x^3+5)'_x = 4u^3(6x^2) = 24x^2(2x^3+5)^3.$

Пример 4. Найти производную сложной функции $y = \sin^2\left(\sqrt{x+1}\right).$

Решение. $y' = 2\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\cos\left(\sqrt{x+1}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}.$

Пример 5. Найти производную функции $y = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$

Решение. Применяя формулу для производной сложной функции получим:

$$\left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{-2}{\sin^3 x}\right) \cdot (\sin x)' = -2 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}$.

Решение. Используя правило дифференцирования произведения и правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\left(e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}\right)' = \left(e^{-x}\right)' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)' =$$

$$= e^{-x} \cdot (-x)' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \left(1+e^{2x}\right)' = -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot (2x)' =$$

$$= -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \sqrt[4]{1+\cos^3 x}$.

Решение. $\left(\sqrt[4]{1+\cos^3 x}\right)' = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot \left(1+\cos^3 x\right)' = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot \left(3\cos^2 x\right) \cdot (\cos x)' =$

$$= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}} \cdot \cdot \left(3\cos^2 x\right) \cdot (-\sin x).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y = \ln^2(x^3 - \sin x)$. **Ответ.** $y' = 2\ln(x^3 - \sin x)\dfrac{3x^2 - \cos x}{(x^3 - \sin x)}$.

2. $y = \sin\dfrac{x}{2}\sin 2x.$ **Ответ.** $y' = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

Пример 8. Найти производную функции $y=(\cos x)^{\sin x}$.

Решение. Так как в этом примере основание и показатель степени зависят от x(то есть нельзя использовать ни строку с производной показательной функции, ни строку с производной степенной функции), то применим *способ логарифмического дифференцирования*. Прологарифмируем исходную функцию $\ln y(x)=\ln\left((\cos x)^{\sin x}\right)=\sin x\cdot\ln\cos x$.

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства

$$\frac{y'}{y}=(\sin x)'\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot(\ln\cos x)'=\cos x\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=$$

$=\cos x\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)$ и окончательно получим:

$$y'=y(x)\cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

Пример 9. Найти производную неявно заданной функции $\arccos(2x\cdot y)=2^x$.

Решение. Это уравнение не разрешимо относительно y, следовательно, функция $y(x)$ задана неявно. В общем виде это записывается так: $F(x,y)=0$. Чтобы найти производную $y'(x)$, нужно обе части уравнения $F(x,y)=0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x. А потом из полученного уравнения выражаем искомую производную y':

$$(\arccos(2x\cdot y))'=(2^x)'; \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-(2xy)^2}}\cdot(2xy)'=2^x\cdot\ln 2;$$

$$-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2y^2}}\cdot(y+xy')=2^x\cdot\ln 2; \quad -\frac{2xy'}{\sqrt{1-4x^2y^2}}=\frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}}+2^x\cdot\ln 2;$$

$$y'=-\frac{y}{x}-\frac{2^x\cdot\ln 2\sqrt{1-4x^2y^2}}{2x}.$$

Пример 10. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases}x=2\sin t^2\\ y=3\cos t^2\end{cases}$.

Решение. Если функция задана параметрически $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx}=\frac{(y'_t)'_t}{x'_t}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

$$y'_x=\frac{(3\cos t^2)'_t}{(2\sin t^2)'_t}=\frac{-3\sin t^2\cdot(t^2)'}{2\cos t^2\cdot(t^2)'}=\frac{-3\sin t^2\cdot 2t}{2\cos t^2\cdot 2t}=-\frac{3\sin t^2}{2\cos t^2}=-\frac{3}{2}tg(t^2).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную функций

1. $y=x^{\ln x}$. Ответ. $y'=2x^{\ln x-1}\ln x$.

2. $y=(\ln x)^x$. Ответ. $y'=(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

3. $x=1-t^2, \quad y=t-t^3$. Ответ. $y'=\frac{3t^2-1}{2t}$.

4. $x=\ln(1+t^2), \quad y=t-arctgt$. Ответ. $y'=\frac{t}{2}$.

Пример 11. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$. Следовательно, $D(f)=(\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$.

2. Определим точки пересечения графика с координатными осями. Единственной такой точкой будет $O(0,0)$.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность. Имеем $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-f(x)$, следовательно, $f(x)$ – нечетная.

При исследовании функции можно ограничиться значениями $x\geq 0$, а затем продолжить функцию, пользуясь свойством нечетности (график симметричен относительно начала координат).

4. Исследуем функцию на наличие у ее графика асимптот.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x=\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=0.$$

Таким образом, прямая $y=x$ – наклонная асимптота.

5. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}=0.$$

Критическая точка первого рода: $x_1=0$.

Точки $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$ не могут быть точками экстремума, так как они не входят в область определения функции.

6. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную.

$$f''(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)''=\left(\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}\right)'=\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}=0.$$

Существует одна критическая точка второго рода: $x_1 = 0$.

Найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости, и точки перегиба.

Результаты исследования оформим в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

Таблица

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не сущ.	–	0	–	Не сущ.	–	0	+
$f''(x)$	–	–	–	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	+	+	+
$f(x)$	Возр. вып.	Max y_{max} = -4,5	Убыв., вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Точка перег. y_{mn}=0	Убыв вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Min y_{min} =4,5	Возр., вогн.

Используя полученные результаты, строим график, функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

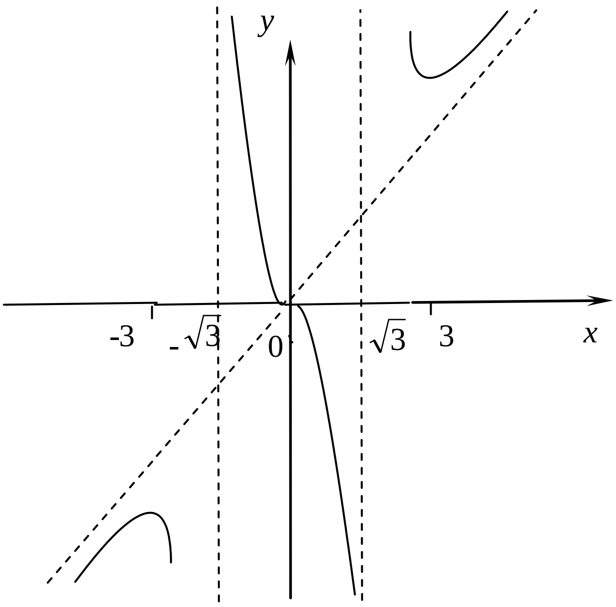

Рис. 1.

II СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ (a \neq -1$,	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$,
2. $\int \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$,	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$,
3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$,	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$,
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$,	13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$,
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ (a > 0; a \neq$,	14. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$,
6. $\int e^x dx = e^x + c$,	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right.$,
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$,	16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$,
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$,	17. $\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$,
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$,	18. $\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u=\varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

7. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

8. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Пример 1. Найти $\int \cos(x+3)dx$.

Решение. $\int \cos(x+3)dx = \int \cos(x+3)d(x+3) = \sin(x+3) + C$.

Пример 2. Найти $\int \cos(2x)dx$.

Решение. $\int\cos(2x)dx=\int\cos(2x)\frac{d(2x)}{2}=\frac{1}{2}\sin(2x)+C$.

Пример 3. Найти $\int\cos(4x+5)dx$.

Решение. $\int\cos(4x+5)dx=\int\cos(4x+5)\frac{d(4x+5)}{4}=\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C$.

Пример 4. Найти $\int\frac{1}{6x+1}dx$.

Решение. $\int\frac{1}{6x+1}dx=\frac{1}{6}\ln(6x+1)+C$.

Пример 5. Проинтегрировать $\int e^{\sin 3x}\cos 3x\,dx$.

Решение. Введем новую переменную интегрирования: $t=\sin 3x$, и $dt=3\cos 3x\,dx$. Проведем замену переменной интегрирования в неопределенном интеграле:

$$\int e^{\sin 3x}\cos 3x\,dx=\left|\begin{matrix} t=\sin 3x \\ dt=3\cos 3x dx\end{matrix}\right|=\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{e^t}{3}+C=\frac{e^{\sin 3x}}{3}+C.$$

Еще один вариант замены переменной t определяется соотношением $x=\psi(t)$ Тогда $dx=\psi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

Пример 6. Проинтегрировать $\int\frac{dx}{e^{2x-1}+4}$.

Решение. Введем новую переменную интегрирования: $e^{2x-1}=t$ или $x=\frac{1+\ln t}{2}$. Проведем замену переменной:

$$\int\frac{dx}{e^{2x-1}+4}=\left|\begin{matrix} x=\frac{1}{2}(\ln t+1) \\ dx=\frac{dt}{2t}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+4)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(t+2)-2}{(t+2)+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2x-1}}{e^{2x-1}+4}\right|+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде $x+2=(2x+2)\frac{1}{2}+1$. Тогда $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

В первом интеграле сделаем замену переменной $x^2+2x+5=t$, $2(x+1)dx=dt$. Получим

$$\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+2^2$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменной

1. $\int \frac{3^{1/x}dx}{x^2}$. 2. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}dx$. 3. $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$. 4. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

5. $\int e^{\cos x}\sin x dx$. 6. $\int e^{-x^3}x^2 dx$. 7. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}dx$. 8. $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}dx$. 9. $\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Ответы: 1. $-\frac{3^{1/x}}{\ln 3}+C$. 2. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101}+C$. 3. $\frac{1}{3}\ln|3+\sin 3x|+C$. 4. $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$.

5. $-e^{\cos x}+C$. 6. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$. 7. $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

8. $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$. 9. $2\sin\sqrt{x}+C$.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)}dx$.

Решение. Учитывая, что знаменатель имеет однократный действительный (простой) корень $x_1=-1$, а так же множитель $(x^2+6x+10)$ с отрицательным дискриминантом (с двумя комплексно-сопряженными корнями), разлагаем на простейшие дроби $\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+10} = \frac{A(x^2+6x+10)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2+6x+10)}$.

Приравняем числители: $A(x^2+6x+10)+B(x^2+x)+C(x+1)=x^2-2x+3$.

Из тождественности следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|l|l} x^2 & A+B=1 & \\ x^1 & 6A+B+C=-2 & B=1-A,\ C=3-A,\ A+1-A+3-A=-2, \\ x^0 & 10A+C=3 & \end{array}.$$

$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5},\ C=-9.$

Подставим найденные коэффициенты в разложение рациональной функции $\frac{1}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \frac{\frac{6}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{x}{5}-9}{x^2+6x+10}$.

Окончательно получим:

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)}dx=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{5}-9}{x^2+6x+10}dx=\frac{6}{5}\ln|x+1|+\int\frac{(-\frac{x}{5}-9)dx}{x^2+6x+9+1}=\frac{6}{5}\ln|x+1|+$$

$$+\int\frac{\left(-\frac{1}{5}(x+3)+\frac{3}{5}-9\right)dx}{(x+3)^2+1}=\frac{6}{5}\ln|x+1|+\int\frac{\left(-\frac{x+3}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1}++\int\frac{\left(-\frac{42}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1}=\frac{6}{5}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{1}{10}\int\frac{d\left((x+3)^2+1\right)}{(x+3)^2+1}-\frac{42}{5}\cdot arctg(x+3)=\frac{6}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln\left(x^2+3x+10\right)$$

$$-\frac{42}{5}arctg(x+3)+C\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл

1. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$ Ответ. $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$

2. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$ Ответ. $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$

3. $\int\frac{dx}{1-x^3}.$ Ответ. $-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

Пример 10. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 3x+4\sin 3x\cos 3x-5\cos^2 3x}$.

Решение. $\int\frac{1}{\sin^2 3x+4\sin 3x\cos 3x-5\cos^2 3x}dx=\left|\begin{matrix} tg3x=t \\ 3dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{4t}{t^2+1}-\frac{5}{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+4t-5}=\frac{1}{3}\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-9}=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(t+2)-3}{(t+2)+3}\right|+C=$$

$$\frac{1}{18}\ln\left|\frac{tg3x-1}{tg3x+5}\right|+C.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{\sin^2 xdx}{1+\cos^2 x}$. Ответ. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)-x+C.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вычисление неопределенного интеграла по частям. Вычисление определенного интеграла.

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Пример 1. Проинтегрировать по частям $\int (5x+2)\cos 7x\, dx$.

Решение.

$$\int (5x+2)\cos 7x dx = \left| \begin{matrix} u=5x+2; & du=5dx \\ dv=\cos 7x\, dx; & v=\dfrac{\sin 7x}{7} \end{matrix} \right| = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} dx =$$

$$= \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} d(3x) = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} + \frac{5\cos 7x}{49} + C .$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^4 \ln x dx$.

Решение:

$$\int x^4 \ln x dx = \begin{pmatrix} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^4 dx,\ v=\dfrac{x^5}{5} \end{pmatrix} = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{5}\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C .$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенный интеграл

1. $\int x e^{5x} dx$. Ответ. $\frac{1}{25}(5x-1)e^{5x} + C$.
2. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ Ответ. $\frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C$.
3. $\int \arcsin x dx$. Ответ. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
4. $\int x \ln(3x+2) dx$. Ответ. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\right)\ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C$.

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int_e^{4e} \frac{\ln x\, dx}{x}$.

Решение. Воспользуемся методом введения новой функции под знак дифференциала. В данном случае $\ln x$ выступает в качестве новой переменной интегрирования, по которой легко указать первообразную

$$\int_e^{4e} \frac{\ln x\, dx}{x} = \int_e^{4e} \ln x\, d(\ln x) = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_e^{4e} = \frac{1}{2}\left((\ln 4e)^2 - (\ln e)^2\right) = \frac{1}{2}\left((\ln 4 + 1)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\ln^2 4 + 2\ln 4\right).$$

Пример 4. Вычислить определённый интеграл $\int_0^2 \frac{arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$.

Решение. Выполним замену переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^2 \frac{arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = arctg\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4}, \\ x_1 = 0,\ t_1 = 0, \\ x_2 = 2,\ t_2 = \frac{\pi}{4}. \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^3 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^4}{2048}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x\, arctgx\, dx.$

Решение. Проинтегрируем по частям

$$\int_0^1 x\, arctgx\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx, & du = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2 arctgx}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.
2. $\int_1^{e1} \ln^2 x dx$. Ответ: $e-2$.
3. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.
4. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$. Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$.
5. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$. Ответ: $\frac{e^2-5}{e}$.

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{x}{x^2+1},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3.$

Решение: $S = \int_1^3 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 10 - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln 5.$

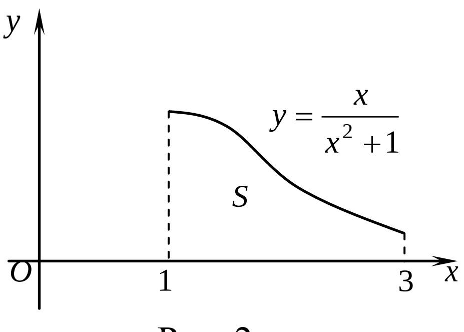

Рис. 2.

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Объём тела вращения равен

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7}\left(x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y^2 = 9x,\ y = 3x$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
2. $y = x^2,\ y = 2 - x^2$. Ответ: $\frac{8}{3}$.

Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

1. $y^2 = 4x,\ x = 4$. Ответ: 32π.
2. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$. Ответ: $\frac{3\pi}{10}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Дифференциальное исчисление функции двух переменных. Комплексные числа. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Пример 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = tg\left(x^2 - xy + 5y^2\right)$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \cdot (x^2 - xy + 5y^2)'_x = \frac{(2x - y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \cdot (x^2 - xy + 5y^2)'_y = \frac{(-x + 10y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Пример 2. Найти частные производные первого порядка функции $z = e^{\frac{x}{y+1}}$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y+1}} \cdot \left(\frac{x}{y+1}\right)'_x = e^{\frac{x}{y+1}} \cdot \left(\frac{1}{y+1}\right) = \frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{x}{y+1}\right)'_y=e^{\frac{x}{y+1}}\left(x\cdot(y+1)^{-1}\right)'_y=\frac{-x\cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}.$$

Пример 3. Найти производные второго порядка функции $z=x^4+x^5y^3+y^3+16$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+5x^4y^3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^5y^2+3y^2$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+20x^3y^3$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^5y+6y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=15x^4y^2$ ($\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$).

Задачи для самостоятельного решения

Найти частные производные первого порядка функций:

1. $z=arctg(xy)$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$.

2. $z=x^{y+2}$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=(y+2)x^{y+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y+2}\ln x$.

3. $z=\arcsin(x-y)$. Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$.

Пример 4. Даны: функция $z=2xy+3y^2$, точка $A(1,–2)$ и вектор $\vec{l}=\{9,-12\}$. Найти: 1) градиент функции $z=6xy+8y^2$ в точке $A(1,–2)$, 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l}=\{9,-12\}$.

Решение. Вычислим частные производные функции в точке $A(1,–2)$:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2y,\quad \frac{\partial z(1,-2)}{\partial x}=-4,\quad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2x+6y,\quad \frac{\partial z(1,-2)}{\partial y}=2-12=-10.$$

Градиент функции z имеет вид

$$\overrightarrow{grad\, z}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}=(2y)\vec{i}+(2x+6y)\vec{j},$$

$$\overrightarrow{grad\, z(A)}=(-4)\vec{i}+(2+6\cdot(-2))\vec{j}=-4\vec{i}-10\vec{j}.$$

Найдем косинусы направляющих углов, перейдя от вектора $\vec{l}=\{9,-12\}$ к соответствующему орту

$$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{\frac{9}{\sqrt{9^2+(-12)^2}},\frac{-12}{\sqrt{9^2+12^2}}\right\}=\left\{\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right\}.$$

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M равна

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=-4\cdot\frac{3}{5}-10\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{52}{5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $z=5x^2-3x-y-1$ в точке $M(2,1)$ в направлении вектора $\vec{l}=\{3,4\}$. Ответ. 9,4.

2. Найти градиент и его модуль для функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M (1;2;2). Ответ. $\overline{gradu}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$; $\left|\overline{gradu}\right|=1$.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид $P(x)\cdot dx+Q(y)\cdot dy=0$.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $(1+x^2)dy+ydx=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (уравнению с разделёнными переменными) $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получаем $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2+1}$ или $\ln|y|=-arctgx+C$. Общее решение можно записать в виде $y=e^{C-arctgx}$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'=tgx\cdot tgy$.

Решение. Разделяя переменные, приходим к уравнению $ctgy\ dy=tgx\ dx$.

Интегрируем $\int ctgy\,dy=\int tgx\,dx$, $\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+\ln C$.

Постоянная интегрирования выбрана в виде $\ln C$ для упрощения представления ответа. Далее находим общий интеграл $\sin y=\frac{C}{\cos x}$ или $\sin y\cdot\cos x=C$.

Задача для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x^2y'=y^2+4$.

Ответ. $\frac{1}{2}arctg\frac{y}{2}=-\frac{1}{x}+c$.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции или постоянные.

Пример 7. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Ищем решение $y(x)$ в виде $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. Поскольку $y'=u'v+uv'$, то уравнение принимает вид

$$u'v+v'u-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3 \text{ или } u'v+u(v'-\frac{2v}{x+1})=(x+1)^3.$$

Для нахождения частного решения $v(x)$ решаем уравнение

$$v'-\frac{2v}{x+1}=0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, находим

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1} \text{ или } \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}.$$

После интегрирования обеих частей равенства, получим $\ln|v|=2\ln|x+1|+C$. Так как достаточно найти хотя бы одно отличное от нуля решение, то положим $C=0$ и опустим модули. Тогда $v(x)=(x+1)^2$. Подставляя найденное значение $v(x)$ в исходное уравнение и учитывая, что $v'-\frac{2v}{x+1}=0$, запишем $u'(x+1)^2=(x+1)^3$ или $\frac{du}{dx}=x+1$, откуда после интегрирования получим $u(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+C$. Общее решение запишется $y=uv=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Имеем $y(0)=\frac{1}{2}+C=1$, откуда $C=\frac{1}{2}$. Тогда частное решение (решение задачи Коши) запишется в виде $y=\frac{(x+1)^4+(x+1)^2}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y'+\frac{y}{x}=-x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=1$.

Ответ. $y=-\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3x}$.

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y'-y=e^x$.

Ответ. $y=(x+C)e^x$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае имеет вид $F(x,y,y',y'')=0$.

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида $y''+py'+qy=f(x)$..

Пример 1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка со специальной правой частью $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$.

Решение. Общее решение будет иметь вид $y=y_{oo}+y_{чн}$. Для нахождения общего решения y_{oo} соответствующего однородного уравнения $y''-7y'+6y=0$

составляется характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$ и находятся его корни: $k_1=1$, $k_2=6$.

Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения приобретает вид $y_{oo}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}$ рассмотрим правую часть $(x-2)e^x$. Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $P_1(x)e^x$ и характеризуется параметром правой части $\alpha\pm i\beta=1\pm0i$ (алгебраическая форма представления комплексного числа: $z=x+iy$, где i – мнимая единица, $i^2=-1$).

Так как параметр правой части $\alpha\pm i\beta=1\pm0i=1$ совпадает с простым корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $y_{чн}=xe^x(Ax+B)$. Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx)]e^x=(x-2)e^x$$

или $\quad (-10Ax-5B+2A)e^x=(x-2)e^x.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях xe^x, e^x, получим $\begin{cases}-10A=1,\\ 2A-5B=-2,\end{cases}$ откуда $A=-\frac{1}{10}$, $B=\frac{9}{25}$. Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн}=xe^x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)$. Общее решение $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+e^x\left(-\frac{1}{10}x^2+\frac{9}{25}x\right)$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+5y=\cos2x.$

Решение.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2+4k+5=0$, $k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$, $k_{1,2}=-2\pm\sqrt{-1}=-2\pm i$. При наличии комплексных корней характеристического уравнения общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo}=e^{-2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$.

Правая часть неоднородного уравнения $\cos2x$ имеет вид $P_0(x)\sin2x+Q_0(x)\cos2x$, где $P_0(x)=0$ и $Q_0(x)=1$– многочлены нулевой степени. Правая часть неоднородного уравнения описывается параметром $\alpha+i\beta=0+2\cdot i$, не совпадающим с корнями характеристического уравнения. Частное решение $y_{чн}$ ищется в виде, подобном правой части (без домножения на x^l и с коэффициентами, подлежащими определению)

$$y_{чн}=A\sin2x+B\cos2x.$$

Коэффициенты A и B находятся из результата подстановки $y_{чн}$ в исходное уравнение

$$\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)'' + 4\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)' + 5\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) = \cos 2x,$$

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 4\left(2A\cos 2x - 2B\sin 2x\right) + 5\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) = \cos 2x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях $\sin 2x$ и $\cos 2x$ слева и справа для вычисления A и B.

$$\begin{cases} -4A - 8B + 5A = 0 \\ -4B + 8A + 5B = 1 \end{cases} \begin{cases} A - 8B = 0 \\ B + 8A = 1 \end{cases} \quad A = 8B,\ B + 64B = 1,\ B = \frac{1}{65},\ A = \frac{8}{65}.$$

Частное решение неоднородного уравнения равно $y_{чн} = \frac{8}{65}\sin 2x + \frac{1}{65}\cos 2x$, а общее решение равно $y = e^{-2x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + \frac{8}{65}\sin 2x + \frac{1}{65}\cos 2x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения со специальной правой частью:

1. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1{,}5)$.
2. $y'' + y' + y = 3\cos 2x$. Ответ. $y = e^{-x/2}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{6}{13}\sin 2x - \frac{9}{13}\cos 2x$.

Пример 3. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2 + k - 2 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -2$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения $\cos x + 3\sin x$ имеет вид $e^{ox}(P\cos x + Q\sin x)$. Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 1i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{чн} = (A\cos x + B\sin x)$. Подставляя это выражение вместе с производными $y' = (-A\sin x + B\cos x)$, $y'' = (-A\cos x - B\sin x)$ в заданное уравнение, будем иметь

$$(B - 3A)\cos x + (-A - 3B)\sin x = \cos x - 3\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases}$ откуда $A = 0,\ B = 1$. Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн} = \sin x$.

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x$.

Найдем C_1, C_2, используя начальные условия,

$$\begin{cases} C_1e^0 + C_2e^0 + \sin 0 = 1; \\ C_1e^0 - 2C_2e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда C_1=1, C_2=0. В итоге получаем решение задачи Коши $y = e^x + \sin x$.

Пример 4. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y'' + y' = e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2 + k = 0,\ k(k+1) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения e^x имеет вид $e^x(1 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x))$. Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{чн} = Ae^x$. Подставляя это выражение вместе с производными $y' = Ae^x$, $y'' = Ae^x$ в заданное уравнение, будем иметь $Ae^x + Ae^x = e^x$.

Приравнивая коэффициенты при e^x, получим $2A = 1$, $A = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн} = \dfrac{e^x}{2}$.

Общее решение: $y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$.

Найдем C_1, C_2, используя начальные условия, $\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{2} = 0; \\ -C_2 + \dfrac{1}{2} = 1. \end{cases}$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{1}{2}$.

В итоге получаем решение задачи Коши $y = -\dfrac{e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x}{2}$.

Задача для самостоятельного решения. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y\big|_{x=0} = 3$, $y'\big|_{x=0} = -5{,}5$.

Ответ. $y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{5}{2}x}$.

III СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Числовые и функциональные ряды.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-4}{3n+2}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-4}{3n+2}$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7n-4}{3n+2}=\frac{7}{3}\neq 0$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Пример 2. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$.

Решение. Общий член ряда $u_n=\frac{n^2}{(3n)!}$, тогда $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(3n+3)!}$. Применяя признак Даламбера, вычислим

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(3n)!}{(3n+3)!n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0<1.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-9}{5n+3}\right)^n$.

Решение: Применим радикальный признак Коши. Вычислим

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-9}{5n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-9}{5n+3}=\frac{2}{5}<1.$$

По радикальному признаку Коши исходный ряд сходится.

Пример 4. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Решение. Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$, удовлетворяющую условиям $f(n)=\frac{1}{n\ln^2 n}$. Отметим, что эта функция положительная, непрерывная и убывающая при $x\geq 2$. Воспользуемся интегральным признаком Коши. Для этого вычислим

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln b}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость числовых рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$, **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2 2^n}$, **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$, **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$,

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$, **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$, **8.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$,

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}$, **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)^3}$, **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$, **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Ответы. **1.** Расходится. **2.** Расходится. **3.** Расходится. **4.** Сходится.
5. Сходится. **6.** Расходится. **7.** Сходится. **8.** Расходится.
9. Сходится. **10.** Сходится. **11.** Сходится. **12.** Сходится.

Пример 5. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n n^2}x^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{5^n n^2}=5$.

Ряд сходится на интервале $-5<x<5$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках. При $x=5$ и $x=-5$ из данного ряда получаем соответственно числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Эти ряды сходятся абсолютно, поэтому областью сходимости данного ряда является промежуток $[-5,5]$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите область сходимости степенного ряда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$, **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-2}x^n$.

Ответы. **1.** $[-1;1]$. **2.** $(-1;1)$.

Разложение функции по степеням x в ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Пример 6. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$, взяв шесть первых слагаемых разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена и затем проинтегрировав их почленно.

Решение. Пользуясь рядом Маклорена $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$, заменяя в нем x на $\sqrt{x}$, имеем $\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\frac{x^5}{10!}+\ldots$ $(x\geq 0)$. Интегрируя в указанных пределах, получим $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx \left(x-\frac{x^2}{2!\,2}+\frac{x^3}{4!\,3}-\frac{x^4}{6!\,4}+\frac{x^5}{8!\,5}-\frac{x^6}{10!\,6}\right)\Bigg|_0^1=$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}+\frac{1}{201600}-\frac{1}{21772800}\approx$$

$$\approx 1-0{,}25+0{,}01388889-0{,}00034722+0{,}00000496-0{,}00000005=0{,}76354658.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0.001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав его почленно.

1. $\int\limits_{0.01}^{0.1}\frac{e^{-x}}{x}dx$, 2. $\int\limits_{0}^{0.5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$,

Ответы. **1.** 2.215. **2.** 0.248.

Рассмотрим разложение функции в ряд Фурье $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где коэффициенты Фурье находятся по формулам $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$.

Пример 7. Разложить функцию $f(x)=x$, где $-\pi<x\leq\pi$ в ряд Фурье.

Решение. По условию имеем периодическую функцию с периодом 2π. Эта функция кусочно монотонная и ограниченная, следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье. Найдем коэффициенты ряда Фурье

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$; $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=0$ (вычисляется методом интегрирования по частям); $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$.

Тогда $f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\mathrm{K}+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\mathrm{K}\right]$.

Пример 8. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-2,0],\\ 2, & x\in(0,2)\end{cases}$ в ряд Фурье.

Решение. График периодического продолжения заданной функции на всю числовую ось с периодом $2\,l=4$ имеет вид, изображенный на рис.3.

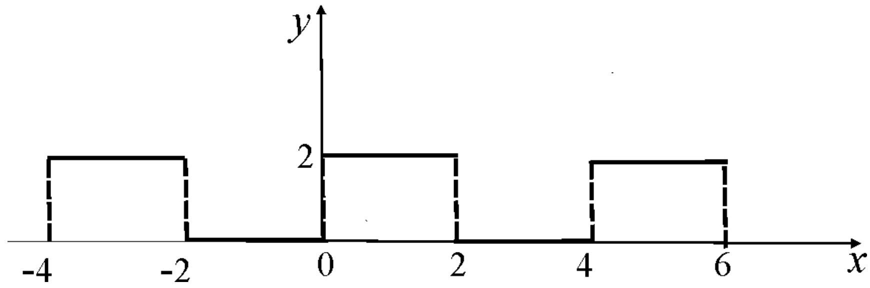

Рис. 3.

Определяем коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx\right) = x\ \Big|_0^2 = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\cos\frac{\pi n x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\ \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n}\ (\sin\pi n - \sin 0) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\sin\frac{\pi n x}{2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\ \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi n}\ (-\cos\pi n + 1) = \frac{2}{\pi n}\ [(-1)^{n+1} + 1] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Получаем ряд Фурье

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2} + \ldots\right).$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Вычисление кратных и криволинейных интегралов.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования:

$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D: x=1, x=2, y=x; y=2x.

Решение.

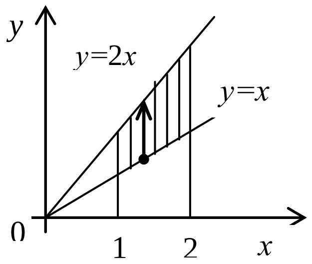

Рис. 4.

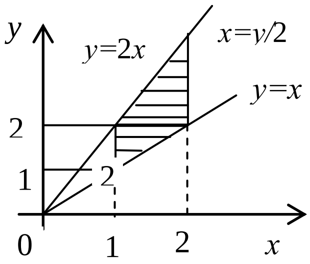

Рис. 5.

$$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy=\iint\limits_{D_1}\;+\iint\limits_{D_2}\;=$$

$$=\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^y f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy$.

Решение. Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования *D*: $x=0$, $x=1$, $y=2\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{x}$ и построим их (рис. 6). Область *D* располагается в полосе $0\le x\le 1$ и ограничена сверху и снизу соответствующими ветвями параболы $y^2=4x$.

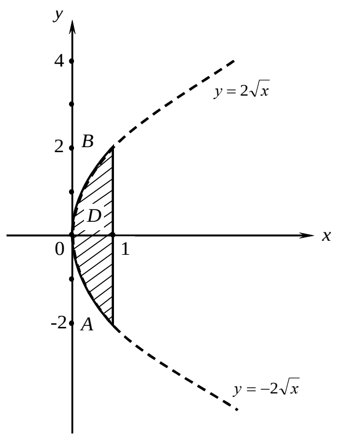

Рис. 6.

Найдем новые пределы внешнего (по *y*) и внутреннего (по *x*) интегрирования. Так как область *D* проецируется на ось *Oy* в отрезок *AB*, то пределами внешнего интегрирования являются ординаты точек *A* и *B*, т. е. $y=-2$ и $y=2$ соответственно. Левой границей области является кривая $x=\dfrac{y^2}{4}$ (уравнение параболы $y^2=4x$ разрешено относительно *x*), а правой – прямая $x=1$. Таким образом, двойной интеграл I с измененным порядком интегрирования запишется в виде $I=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{1}f(x,y)dx$.

Пример 3. Определить пределы интегрирования интеграла $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$, если область интегрирования S (рис. 7) ограничена гиперболой $y^2-x^2=1$ и двумя прямыми $x=2$ и $x=-2$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

Решение. Область интегрирования $ABCD$ (рис. 7) ограничена прямыми $x=2$ и $x=-2$ и двумя ветвями параболы: $y=\sqrt{1+x^2}$ и $y=-\sqrt{1+x^2}$.

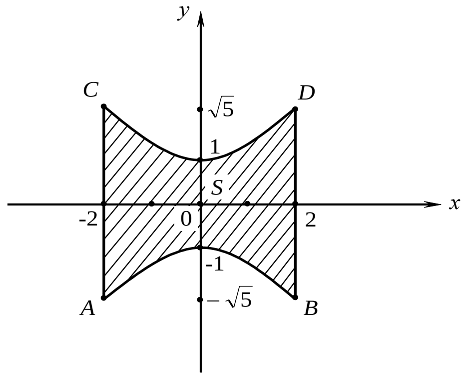

Рис. 7.

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}f(x,y)dy$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, где D – прямоугольник: $0\le x\le 1;0\le y\le 2$

Решение.

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 e^{x+y}dy=\int\limits_0^1\left[e^{x+y}\right]_0^2dx=\int\limits_0^1\left[e^{x+2}-e^x\right]dx=\left[e^{x+2}-e^x\right]_0^1=$$

$$=e^{1+2}-e^1-e^2+e^0=e^3-e^2$$

Пример 5. Вычислить двойной интеграл: $I=\iint\limits_D xy^2dxdy,$ где D – треугольник $y=0,\ x=2;\ y=\frac{x}{2}$ (рис.8).

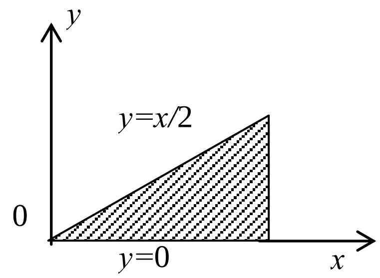

Рис. 8.

Решение. $I=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\frac{x}{2}} xy^2dy=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\frac{x}{2}} y^2dy$

$$=\int\limits_0^2 x\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{x}{2}}dx=\int\limits_0^2 x\frac{x^3}{24}dx=$$

$$=\frac{1}{24}\int\limits_0^2 x^4dx=\frac{1}{24}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{4}{15}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 (x+y)\,dy$.

Решение.

$$I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1(x+y)\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 xdy+\int\limits_x^1 ydy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x\int\limits_x^1 dy+\int\limits_x^1 ydy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^1\right)dx=\int\limits_0^1\left(x-x^2+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_0^1 xdx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx=\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить двойные интегралы по областям G, ограниченным указанными линиями:

1. $\iint\limits_G \frac{3y^2dxdy}{1+x^2}$; $0\le x\le 1, 0\le y\le 1.$ **2.** $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x-y)^2}$; $1\le x\le 2, 3\le y\le 4.$

3. $\iint\limits_G (x-y)dxdy$; $x=0,\ y=0,\ x+y=2.$ **4.** $\iint\limits_G xydxdy$; $y=0,\ y=x,\ x=1.$

5. $\iint\limits_G xydxdy$; $y=x^2,\ y^2=x.$ **6.** $\iint\limits_G xdxdy$; $y=x^3,\ x+y=2,\ x=0.$

Ответы. **1.** $\frac{\pi}{4}$. **2.** $\ln\frac{4}{3}$. **3.** 0. **4.** $1/8$. **5.** $1/12$. **6.** $7/15$.

Пример 7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0;\ z=1-x^2-y^2;\ y=x;\ y=x\sqrt{3}$ и расположенного в первом октанте.

Решение. Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D - круговой сектор, ограниченный дугой окружностью $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$, и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Следовательно, $V=\iint\limits_D(1-x^2-y^2)dxdy$.

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, целесообразно перейти к полярным координатам. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, θ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ в этих координатах примет вид $\rho=1$, подынтегральная функция равна $1-\rho^2$, а пределы интегрирования по θ определяем из уравнений прямых: $\mathrm{tg}\theta_1=1$, т.е. $\theta_1=\frac{\pi}{4}$; $\mathrm{tg}\theta_2=\sqrt{3}$, т.е. $\theta_2=\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, имеем $V=\iint\limits_D (1-\rho^2)\rho d\rho d\theta = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int\limits_0^1 (\rho-\rho^2)\rho d\rho =$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]\Bigg|_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{48}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy;$ $G-$половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в области $y \ge 0$.

2. $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy;$ $G-$четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в первом квадранте.

3. $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy;$ $G-$круг радиуса R с центром в начале координат

Ответы. **1.** $\pi R^4/4$. **2.** $\frac{\pi}{4}(e-1)$. **3.** $2\pi\left(e^{R^2}-1\right)$.

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=1;\quad z=2-x^2;\quad y=x^2;\quad y=1-2x^2.$$

Решение. Если область определена неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, то объем тела V находится по формуле $V=\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz.$

Для определения пределов интегрирования сделаем чертеж данного тела и его проекции на плоскость XOY (рис. 9 и 10).

Следует обратить внимание на то, что для переменной x границами являются наибольшее и наименьшее значения в заданной области, то есть $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

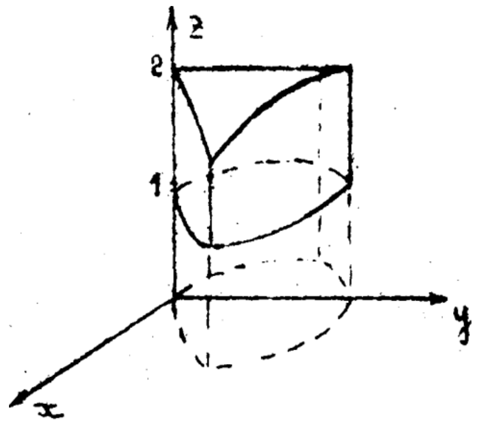

Рис. 9.

Переменная y является функцией переменной x. На рисунке видно, что область D ограничена снизу кривой $y = x^2$, а сверху – кривой $y = 1 - 2x^2$. Следовательно, $x^2 \le y \le 1 - 2x^2$.

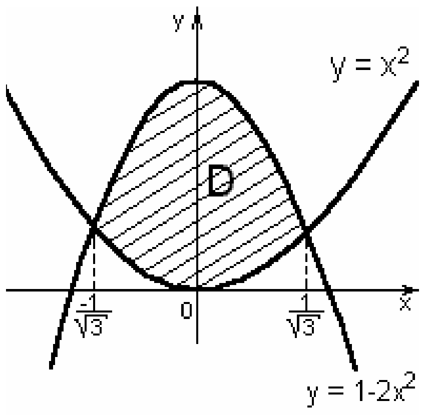

Рис. 10.

Аналогично, из рисунка тела видно, что оно снизу ограничено плоскостью $z = 1$, а сверху поверхностью $z = 2 - x^2$. Таким образом, переменная z является функцией двух переменных x и y, и $1 \le z \le 2 - x^2$

$$V=\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}dx\int\limits_{x^2}^{1-2x^2}dy\int\limits_{1}^{2-x^2}dz=\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}dx\int\limits_{x^2}^{1-2x^2}z\Big|_1^{2-x^2}dy=$$

$$\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}dx\int\limits_{x^2}^{1-2x^2}(1-x^2)dy= \quad =\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}(1-x^2)(y)\Big|_{x^2}^{1-2x^2}dx=$$

$$\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}(1-x^2)(1-3x^2)dx=(x-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^5}{5})\Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}=\frac{56\sqrt{3}}{135}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

1. $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz;\ x=-1,\ x=+1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2.$

2. $\iiint\limits_V zdxdydz;\quad x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

3. $\iiint\limits_V xdxdydz;\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=1,\ x+z=1.$

Ответы. **1.**–2. **2.** 1/24. **3.** 1/6.

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy$ вдоль 1) ломаной $L=ABC$ от точки $A(1;0)$ до точки $C(2;5)$, где $B(2;3)$; 2) дуги эллипса $x=3\cos t,\quad y=2\sin t\quad \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right).$

Решение. Пусть кривая L задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$. Пусть точкам M и P этой кривой соответствуют значения параметра t α *и* β соответственно. Тогда $\int\limits_{(M)}^{(P)} X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\{X[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Y[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$ Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, причем точке M соответствует $x=a$, а точке P - $x=b$, то

$$\int\limits_{(M)}^{(P)} X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int\limits_a^b\{X[x,f(x)]+Y[x,f(x)]f'(x)\}dx.$$

1) Криволинейный интеграл вдоль ломаной L можно разбить на сумму двух интегралов: вдоль отрезков AB и BC. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки A и B $\quad AB:\ \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{3-0};\quad\Rightarrow\quad y=3(x-1).$

Найдем производную $y'=3$.

Уравнение отрезка BC имеет вид $x=2$. В этом случае $dx=0,\quad 3\le y\le 5$. Таким образом,

$$\int\limits_{(A)}^{(C)}(x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy=\int\limits_{(A)}^{(B)}(x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy+$$

$$\int\limits_{(B)}^{(C)}(y^2x+2y)dy=\int\limits_1^2\left\{x^2(x-1)3-3x+\left[9(x-1)^2x+6(x-1)\right]3\right\}dx+$$

$$+\int\limits_3^5(2y^2+2y)dy=3\int\limits_1^2(10x^3-19x^2+14x-6)dx+\left(\frac{2}{3}y^3+y^2\right)\Big|_3^5=$$

$$=8\frac{1}{6}+81\frac{2}{6}=89.5$$

1) Кривая задана в параметрическом виде. Найдем производные

$$x'_t=-3\sin t;\qquad y'_t=2\cos t\,.$$

Тогда

$$\int\limits_L(x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(9\cos^2t\cdot 2\sin t-9\cos t)(-3\sin t)+\right.$$

$$\left.+(4\sin^2t3\cos t+4\sin t)2\cos t)\right\}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{27}{2}\sin 2t(\sin 2t-1)+4\sin 2t\left(\frac{3}{2}\sin 2t+1\right)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{15}{2}\sin^2 2t+\frac{35}{2}\sin 2t\right)dt==\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{15}{4}(1-\cos 4t)+\frac{35}{2}\sin 2t\right]dt=$$

$$=-\frac{15}{8}\pi+\frac{35}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int\limits_{AB}xdy-ydx$ по кривой $y=x^3$ от точки (0,0) до точки (2,8).

2. $\int\limits_{AB}\sqrt{x}dx+\sqrt{y}dy$ по кривой $y=x^2$ от точки (0,0) до точки (1,1).

3. $\int\limits_{AB}x^2dx+y^2dy$ по кривой $y=\sqrt{x}$ от точки (0,0) до точки (1,1).

4. $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dx+xydy$ по кривой $y=e^x$ от точки (0,1) до точки $(1,e)$.

Ответы: **1.** 8. **2.** 4/3. **3.** 2/3. **4.** $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1999. Ч. 1. 415 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1977. Т. 1,2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ
для студентов направления подготовки
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
(профиль «Промышленная теплоэнергетика»)
заочной формы обучения

Составители:
Ряжских Александр Викторович
Соколова Ольга Анатольевна

Компьютерный набор О. А. Соколовой

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 12.10.2022.
Уч.-изд. л. 2,3.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84