РГР №1
Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАНИЯ

Первая задача: Определители и системы уравнений. Вычисление определителей второго, третьего, … $n^{го}$ порядка, а также решение систем уравнений с использованием методов Крамера и Гаусса.

Вторая задача: Элементы векторной алгебры. Нахождение площади треугольника, объема пирамиды, проекции одного вектора на направление другого, нахождение угла между векторами, проверка компланарности векторов.

Третья задача: Аналитическая геометрия на плоскости. Нахождение уравнений стороны, высоты, медианы и биссектрисы треугольника. Нахождение уравнений прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно основанию. Вычисление внутреннего угла треугольника, нахождение расстояния от точки до прямой. Нахождение координат центра описанной окружности.

Четвертая задача: Кривые второго порядка. Приведение уравнений кривых к каноническому виду с помощью выделения полного квадрата, построение кривых. Составление уравнения линии, каждая точка которой удовлетворяет заданным условиям.

Пятая задача: Полярная система координат. Построение точек в полярной системе координат. Связь между прямоугольными и полярными координатами. Построение кривой в полярной системе координат.

Шестая задача: Аналитическая геометрия в пространстве. Нахождение уравнений грани, ребра, высоты пирамиды, уравнения прямой, параллельной одному из ребер и плоскости перпендикулярной ребру.

Седьмая задача: Поверхности второго порядка. Определение и построение поверхности методом сечений.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ

1. Определители и системы уравнений.

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, составленным из элементов матрицы А называется число, определенное равенством:

$$\Delta=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Например:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2-5\cdot(-3)=2+15=17.$$

Определитель третьего порядка, из элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ есть также число, определяемое равенством:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Следовательно, определитель третьего порядка – это число, состоящее из суммы шести слагаемых, три из которых взяты со знаком плюс, а три – со знаком минус. Схематически вычисление определителя третьего порядка может быть представлено так называемым правилом треугольников (рис.1):

Произведения со знаком "+" Произведения со знаком "—"

Рис. 1.

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 4\cdot(-3)+1\cdot 0\cdot 5-5\cdot 3\cdot(-3)-4\cdot 0\cdot 2-(-1)\cdot 1\cdot(-2)=$$

$$=-12+12+0+45-0-2=43.$$

Определители третьего, четвертого и т.д. порядков можно вычислить другим способом, разлагая определитель по элементам некоторой строки (или столбца).

В определителе n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель ***(n-1)***-го порядка, который получится, если вычеркнуть ***i***-ю строку и ***j***-й столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} находится по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где ***i*** – номер строки, а ***j*** – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Определитель ***n***-го порядка можно вычислить как сумму парных произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Если выбрать ***i***-ю строку, то

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in}. \tag{1.2}$$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам четвертой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = 3\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -3(-12+6+8-20) -$$

$$-1(8-4-2-12) - 3(6+4+2-20) = 54+10+24 = 88.$$

Вычисление упрощается, если воспользоваться элементами второго столбца, т.к. там есть два нуля. Но еще проще будет, если третью строку умножить на (-2) и сложить с первой строкой, "сделав" нуль вместо двойки. Тогда, разлагая определитель по элементам второго столбца будем иметь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -7 & -23 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -23 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 92 = 88.$$

Одним из методов решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

является метод Крамера, при котором неизвестные можно найти по формулам:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},\tag{1.4}$$

где Δ – главный определитель системы (1.3). Он составляется из коэффициентов при неизвестных системы. Δ_x, Δ_y, Δ_z – дополнительные определители. Они получаются из главного определителя заменой первого, второго и третьего столбцов соответственно столбцом свободных членов.

При решении системы возможны три случая:

1) Если $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение;

2) Если $\Delta=0$, но хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z не равен нулю, то система не имеет решений;

3) Если $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$, то система имеет множество решений.

Система называется однородной, если $b_1=0$, $b_2=0$, $b_3=0$.

Если при решении такой системы окажется, что

1) $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение $x=0$, $y=0$, $z=0$, т.к. $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, $\Delta_z=0$;

2) $\Delta=0$, то система имеет отличные от нулевого решения.

Другим способом решения системы является метод Гаусса. Он заключается в последовательном исключении неизвестных. Методом Гаусса система приводится к треугольному виду. Первое уравнение системы содержит три переменные, второе – две, третье – одну переменную. Из третьего уравнения находится переменная, подставляется во второе и т.д.

Примеры. Решить системы уравнений двумя способами: Методом Крамера и методом Гаусса.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}5x-y+2z=-2,\\2x+3y-4z=19,\\x+2y+3z=1.\end{cases}$$

А. Решение методом Крамера

Найдем главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-1&2\\2&3&-4\\1&2&3\end{vmatrix}=45+8+4-6+40+6=97\neq0\,.$$

Т.к. $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение.

Дополнительные определители:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2&-1&2\\19&3&-4\\1&2&3\end{vmatrix}=97,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}5&-2&2\\2&19&-4\\1&1&3\end{vmatrix}=291,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}5&-1&-2\\2&3&19\\1&2&1\end{vmatrix}=-194.$$

Тогда $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{97}{97}=1$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{291}{97}=3$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-194}{97}=-2$.

Б. <u>Решение методом Гаусса</u>

Т.к. в третьем уравнении первый коэффициент при x равен единице, то записав это уравнение на первом месте, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1, & (-2) \quad (-5) \\ 2x+3y-4z=19, & + \quad + \\ 5x-y+2z=-2, & \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=1, \\ -y-10z=17, \\ -11y-13z=-7, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=1, \\ y+10z=-17, & (-11) \\ 11y+13z=7. & + \end{cases}$$

Чтобы исключить x из второго уравнения, первое уравнение умножим на (-2) и сложим со вторым. Затем первое умножим на (-5) и сложим с третьим, исключив тем самым x из третьего. После этого второе умножим на (-11), сложим с третьим, исключая y, получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ y+10z=17, \\ -97z=194, \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2, \\ y=-17+20, \\ x=-2y+6+1, \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2, \\ y=3, \\ x=-6+6+1, \end{cases} \quad \begin{cases} z=-1, \\ y=3, \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3; -2).

<u>Пример 2.</u> Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y+z=1, \\ x+2y-3z=3, \\ x-3y+2z=-1. \end{cases}$$

А. <u>Решение методом Крамера</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=12-3+12-2-27+8=32-32=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=4-9-12+2-9+24=30-30=0,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=18-1-3-3-9-2=18-18=0,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-6-3-12-2+27-4=27-27=0,$$

т.к. все определители равны нулю, то система имеет множество решений. Чтобы найти эти решения, заметим, что определитель $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0.$

Предположим, что $z=C$, $C\in R$. Отбросим последнее уравнение, оно получилось сложением первых двух и делением на 2. Получим:

$$\begin{cases} 3x-4y+C=1, \\ x+2y-3C=3, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-4y=1-C, \\ x+2y=3+3C, \end{cases}$$

Продолжаем решать методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6+4=10,\ \ \Delta_x=\begin{vmatrix}1-C & -4\\ 3+3C & 2\end{vmatrix}=2-2C+12+12C=10C+14,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 1-C\\ 1 & 3+3C\end{vmatrix}=9+9C-1+C=10C+8,$$

Следовательно,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{10C+14}{10}=C+1{,}4,\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{10C+8}{10}=C+0{,}8,\ \ z=C,\ \ C\in R.$$

Б. Решение методом Гаусса

$$\begin{cases}3x-4y+z=1,\\ x+2y-3z=3,\\ x-3y+2z=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x+2y-3z=3, \quad (-3) \quad (-1)\\ 3x-4y+z=1, \quad +\\ x-3y+2z=-1, \quad +\end{cases}\quad \begin{cases}x+2y-3z=3,\\ -10y+10z=-8, \quad :(-2)\\ -5y+5z=-4 \quad +\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y-3z=3,\\ -10y+10z=-8,\\ 0=0,\end{cases}\quad \begin{cases}z=C,\\ x+2y=3+3C,\\ y=C+0{,}8,\end{cases}\quad \begin{cases}z=C,\\ y=C+0{,}8,\\ x=-2(C+0{,}8)+3+3C,\end{cases}\quad \begin{cases}z=C,\\ y=C+0{,}8,\\ x=C+1{,}4.\end{cases}$$

Ответ: $(C+1{,}4;\ C+0{,}8;\ C),\ C\in R.$

<u>Пример 3</u>. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y+z=1,\\ 2x+y-3z=3,\\ 3x-y-2z=-2.\end{cases}$$

А. Решение методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2-2+18-3-3-8=18-18=0,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2-3-12+2-3-12=2-32\neq 0,$$

Т.к. $\Delta_x\neq 0$, то находить Δ_y и Δ_z нет смысла, т.к. система не имеет решений.

Б. Решение методом Гаусса

$$\begin{cases}x-2y+z=1, \quad (-2) \quad (-3)\\ 2x+y-3z=3. \quad + \quad +\\ 3x-y-2z=-2,\end{cases}\quad \begin{cases}x-2y+z=1,\\ 5y-5z=1, \quad (-1)\\ 5y-5z=-5, \quad +\end{cases}\quad \begin{cases}x-2y+z=1,\\ 5y-5z=1,\\ 0=-6.\end{cases}$$

Т.к. последнее равенство не является верным, то система не имеет решений.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-5y+3z=0, \\ 2x+y-z=0, \\ x-y+2z=0. \end{cases}$$

А. Решение методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2-6+5-3-1+20=27-10=17\neq 0,$$

$\Delta_x=0,\ \ \Delta_y=0,\ \ \Delta_z=0.$ Следовательно, $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$

Б. Решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x-5y+3z=0, & (-2)\ \ (-1) \\ 2x+y-z=0, & +\ \ \ + \\ x-y+2z=0, & \end{cases} \qquad \begin{cases} x-5y+3z=0, \\ 11y-7z=0, & (-1) \\ 4y-z=0, & + \end{cases} \qquad \begin{cases} x-5y+3z=0, \\ 4y-z=0, & (-7) \\ 11y-7z=0, & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5y+3z=0, \\ 4y-z=0, \\ -17y=0. \end{cases}$$

Откуда $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$ Ответ: $(0;0;0)$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-5z=0, \\ 3x-5y+z=0, \\ 2x-7y+6z=0. \end{cases}$$

А. Решение методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-30+105+4-50+7-36=116-116=0,$$

$\Delta_x=0,\ \ \Delta_y=0,\ \ \Delta_z=0.$

Пусть $z=C,\ \ C\in R,$ последнее уравнение отбросим, система примет вид:

$$\begin{cases} x+2y=5C, \\ 3x-5y=-C. \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-5-6=-11,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5C & 2 \\ -C & -5 \end{vmatrix}=-25C+2C=-23C, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 5C \\ 3 & -C \end{vmatrix}=-C-15C=-16C.$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-23C}{-11}=\frac{23}{11}C, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-16C}{-11}=\frac{16}{11}C, \quad z=C, \quad C\in R.$$

Б. Решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y-5z=0, & (-3)\ \ \ (-2) \\ 3x-5y+z=0, & +\ \ \ \ \ + \\ 2x-7y+6z=0, & \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-5z=0, \\ -11y+16z=0, & (-1) \\ -11y+16z=0, & + \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-5z=0, \\ -11y+16z=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = C, \\ y = \dfrac{16}{11}C, \\ x = \dfrac{23}{11}C. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{23}{11}C;\ \frac{16}{11}C;\ C\right)$, $C \in R$.

2. Элементы векторной алгебры.

Вектором называется отрезок, имеющий определенную длину и направление. Два вектора считаются равными, если равны их длины, они параллельны и направлены в одну сторону.

Вектор, идущий из точки A в точку B, обозначается $\overline{AB}$. Длина этого вектора обозначается $|\overline{AB}|$ и называется модулем вектора.

Может быть и другая символика: $\overline{a}$ – вектор, $|\overline{a}|$ – длина вектора. Любой вектор можно разложить на три слагаемых по осям координат:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} \tag{2.1}$$

Здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат или, что тоже, координаты вектора $\overline{a}$, $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы или орты, $a_x\overline{i}, a_y\overline{j}, a_z\overline{k}$ – компоненты.

Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$ по известным координатам точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, которая является началом вектора, и точки $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, являющейся концом вектора, надо из координат конца вычесть координаты начала, т.е.

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{2.2}$$

Длина вектора находится по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.3}$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}). \tag{2.4}$$

Скалярное произведение двух векторов с известными координатами равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.5}$$

В формуле (2.4) произведение $|\overline{b}|\cos(\overline{a} \wedge \overline{b})$ есть проекция вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$. Учитывая этот факт, можно записать: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}$.

Откуда следует:

$$\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}. \qquad (2.6)$$

Векторным произведением двух векторов называется третий вектор, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в ту сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора ко второму вокруг полученного третьего вектора из его конца был виден против движения часовой стрелки. Из определения следует:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}, \qquad |\bar{c}| = |\bar{a}\times\bar{b}| = S_{параллелограмма}. \qquad (2.7)$$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}(a_x, a_y, a_z), \bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, то векторное произведение можно найти при помощи определителя третьего порядка

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (2.8)$$

Векторно-скалярное или смешанное произведение $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ трех некомпланарных векторов есть число, абсолютная величина которого выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, как на ребрах. Знак произведения положителен, если вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют систему одноименную с основной (правой).

Если векторы заданы проекциями, то их смешанное произведение равно значению определителя третьего порядка

$$(\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, если их смешанное произведение равно нулю и наоборот, если смешанное произведение $(\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}) = 0$, (2.10) то три вектора компланарны.

Примеры. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$.

Пример 1. Вычислить площадь грани ABC.

Решение. Из определения векторного произведения следует, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле (2.2): $\overline{AB}(2,4,-1)$, $\overline{AC}(-1,-1,-2)$. Находим векторное произведение по формуле (2.8)

$$\overline{C}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9\overline{i}+5\overline{j}+2\overline{k}.$$

Длину полученного вектора $\overline{C}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ найдем по формуле (2.3) $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{9^2+5^2+2^2}=\sqrt{110}$. Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{110}$ (кв.ед).

Пример 2. Вычислить объем пирамиды.

Решение. Объем пирамиды определяется как $\frac{1}{6}$ часть объема параллелепипеда, т.е. $\frac{1}{6}$ часть модуля смешанного произведения трех векторов $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$, причем координаты вектора $\overline{AD}(-4,-3,-5)$. Смешанное произведение находим по формуле (2.9)

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=10-3+32+4-12-20=46-35=11.$$

$V_{пир}=\frac{11}{6}$ (куб.ед).

Пример 3. Найти проекцию вектора $\overline{AC}$ на направление $\overline{BD}$.

Решение. Координаты вектора $\overline{BD}$ ищем по формуле (2.2): $\overline{BD}=(-6,-7,-4)$. Координаты $\overline{AC}$ известны $\overline{AC}(-1,-1,-2)$. Проекцию находим применяя формулу (2.6).

$$\text{Пр}_{\overline{BD}}\overline{AC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\left|\overline{BD}\right|}=\frac{(-1)(-6)+(-1)(-7)+(-2)(-4)}{\sqrt{(-6)^2+(-7)^2+(-4)^2}}=\frac{21}{\sqrt{101}}\approx 2{,}1.$$

Пример 4. Найти угол *ABC*.

Решение. Используя формулу скалярного произведения (2.4), найдем

$$\cos(\angle ABC)=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

Определим координаты векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, имеющих общее начало в точке *B*: $\overline{BA}=(-2,-4,1),\overline{BC}=(-3,-5,-1)$.

$\overline{BA}\cdot\overline{BC}=(-2)(-3)+(-4)(-5)+1\cdot(-1)=6+20-1=25.$

$\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21},\quad \left|\overline{BC}\right|=\sqrt{9+25+1}=\sqrt{35}.$

Следовательно, $\cos(\angle ABC)=\frac{25}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}}=\frac{25}{7\sqrt{15}}\approx 0{,}92.$

$\angle ABC=\arccos 0{,}92=23^0.$

Пример 5. Проверить компланарность векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

Решение. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю. Условие (2.10).

$$\left(\overline{AB}\times\overline{BC}\cdot\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=20-3+4+5-2-24=29-29=0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

3. Аналитическая геометрия на плоскости.

Вначале рассмотрим различные виды уравнений прямой линии на плоскости. Определения прямой линии нет. Прямая линия не имеет ни толщины, ни высоты, она не ограничена. В качестве прямой линии можно представить бесконечную туго натянутую упругую нить.

Если на прямой известны координаты двух точек $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, то можно найти расстояние между этими двумя точками по формуле

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \tag{3.1}$$

Координаты точки $C(x_c, y_c)$, лежащей между точками A и B (рис. 2)

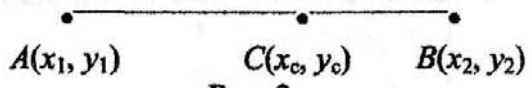

Рис. 2.

Находятся следующим образом

$$x_C=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y_C=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{3.2}$$

где $\lambda=\dfrac{|AC|}{|BC|}$, $\lambda>0$, если т. $C(x_c, y_c)$ лежит между A и B.

Если т. C_1 лежит вне AB (рис. 3), то x_{C_1} и y_{C_1} находятся по формулам (3.2), но $\lambda<0$ и равно $\lambda=-\dfrac{|AC_1|}{|BC_1|}$.

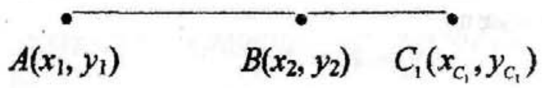

Рис. 3

Если т. C делит отрезок AB пополам, то

$$x_C=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_C=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{3.3}$$

Уравнение одной и той же прямой можно записать различными способами:

А. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом.

$$y=kx+b, \qquad (3.4)$$

где $k=\operatorname{tg}\varphi$ – угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона φ прямой к оси OX, b – отрезок, отсекаемый прямой по оси OY (рис. 4)

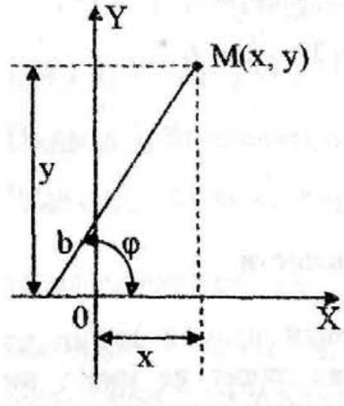

Рис. 4

Величина k характеризует направление прямой. Если k=0, то прямая параллельна оси OX. Если k >0, то угол наклона прямой к оси OX будет острым, при k <0 - тупым. Прямая, перпендикулярная к оси OX не имеет углового коэффициента.

Б. Уравнение прямой в общем виде.

$$Ax+By+C=0. \qquad (3.5)$$

Здесь A, B и C – произвольные числа. Числа A и B геометрически представляют координаты вектора $\bar{n}(A, B)$ перпендикулярного этой прямой. Угловой коэффициент находится из формулы (3.5) приведением этого уравнения к виду (3.4) $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}, \Rightarrow k=-\dfrac{A}{B}.$ (3.6)

В. Уравнение прямой линии в отрезках.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.7)$$

В уравнении (3.7) величины a и b характеризуют отрезки, отсекаемые прямой соответственно на осях OX и OY.

Г. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Если известны координаты какой-либо точки $A(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент k, определяющий направление прямой линии, то уравнение прямой можно записать в виде:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (3.8)$$

Д. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Уравнение прямой, проходящей через две известные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, лежащие на одной прямой имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (3.9)$$

Е. <u>Уравнение прямой в нормальном виде.</u>

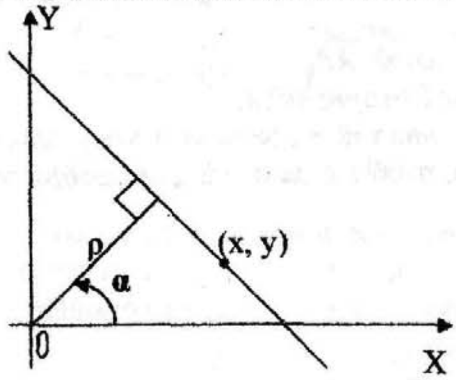

Рис. 5

Если известно расстояние p от начала координат до данной прямой и угол α между перпендикуляром к прямой, проведенным через начало координат и осью OX (рис.5), то уравнение в нормальном виде имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) характеризуется двумя условиями:

1) его свободный член не положителен $\qquad -p \le 0, \qquad (3.11)$

2) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad (3.12)$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ находится по формулам:

Если уравнение прямой записано в виде (3.10), то

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \qquad (3.13)$$

Если же уравнение прямой записано в виде (3.5), то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.14)$$

Угол между прямыми с известными угловыми коэффициентами k_1 и k_2 находятся по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.15)$$

где k_1- угловой коэффициент той прямой, которую надо повернуть против хода часовой стрелки на угол φ так, чтобы она совпала с прямой, имеющей угловой коэффициент k_2.

Если две прямые <u>параллельны</u>, то их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2. \qquad (3.16)$$

В случае <u>перпендикулярности</u> двух прямых произведение их угловых коэффициентов равно -1.

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (3.17)$$

<u>**Примеры**</u>. Даны вершины треугольника (рис.6) $A(4,3)$, $B(-3,-3)$, $C(2,7)$.

<u>Найти</u>: А. Уравнение стороны AB.

Б. Уравнение высоты CH.

В. Уравнение медианы AM.

Г. Уравнение одной из биссектрис.

Д. Угол ABC.

Е. Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

Ж. Расстояние от точки C до прямой AB.

З. Координаты центра описанной окружности.

Прежде, чем приступить к решению, надо построить этот треугольник в декартовой системе координат, для того, чтобы в дальнейшем изображать все найденные линии (рис. 6).

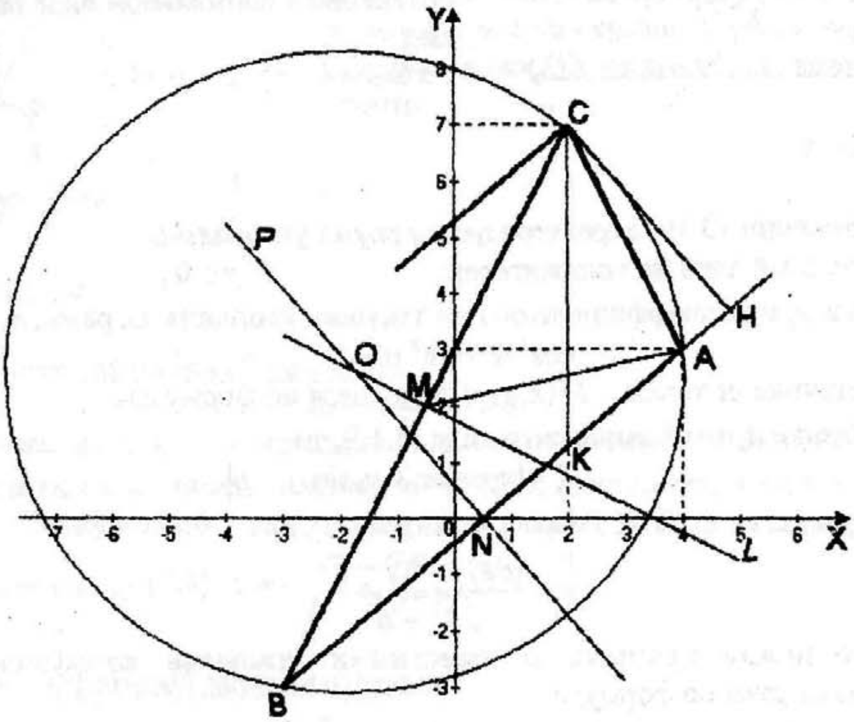

Рис. 6

<u>Решение:</u>

А. Так как известны координаты точек A и B, то воспользуемся формулой (3.9)

$\dfrac{y-3}{-3-3}=\dfrac{x-4}{-3-4}$, откуда $6(x-4)=7(y-3)$.

Окончательно уравнение запишется в общем виде

$$6x-7y-3=0.$$

По формуле (3.6) $k_{AB}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{6}{-7}=\dfrac{6}{7}$.

Б. Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону. Так как прямые AB и CH перпендикулярны, то по условию(3.17)

$$k_{CH}\cdot k_{AB}=-1,\ \text{тогда}\quad k_{CH}=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{-1}{6/7}=-\frac{7}{6}.$$

Кроме k_{CH} известны координаты точки $C(2,\ 7)$. Воспользуемся уравнением прямой (3.8)

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2)\quad \text{или}\quad 7x+6y-56=0.$$

В. Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. Поэтому, координаты точки М найдем по формулам (3.3):

$$X_M=\frac{X_B+X_C}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2},\quad Y_M=\frac{Y_B+Y_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2.$$

По известным координатам точек M и A по формуле (3.9) составим уравнение медианы AM:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3}\quad \text{или}\quad 2x-9y+19=0.$$

Г. Биссектрисой внутреннего угла треугольника называется отрезок прямой, который делит этот угол пополам. Чтобы найти биссектрису какого-нибудь угла, найдем длины всех сторон треугольника.

$$|AB|=\sqrt{85},\ |BC|=\sqrt{125},\ |AC|=\sqrt{20}.$$

Отношение $\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{20}}=\dfrac{5}{2}$ не содержит корней, следовательно найдем уравнение биссектрисы CK. Координаты точки K найдем по формулам (3.2), в которых $\lambda=\dfrac{|BK|}{|AK|}$. Но эти длины не известны. Воспользовавшись свойством биссектрисы внутреннего угла треугольника заменим это отношение уже известным $\dfrac{|BK|}{|AK|}=\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{5}{2}$, следовательно: $\lambda=\dfrac{5}{2}$.

Тогда

$$x_K=\frac{x_B+\lambda x_A}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{5}{2}\cdot 4}{1+\frac{5}{2}}=2,\qquad y_K=\frac{y_B+\lambda y_A}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{5}{2}\cdot 3}{1+\frac{5}{2}}=\frac{9}{7}.$$

Уравнение биссектрисы находим по формуле (3.9), используя точки $C(2,7)$ и $K\left(2,9/7\right)$

$$\frac{y-7}{9/7-7}=\frac{x-2}{2-2}\ \Rightarrow\ x=2\text{ - уравнение биссектрисы } CK.$$

Д. Для нахождения угла ABC в качестве k_1 надо взять угловой коэффициент прямой AB, он нам уже известен, $k_{AB} = \frac{6}{7}$. Угловой коэффициент k_2 прямой найдем по формуле $k_2 = k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7+3}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$.

Воспользуемся формулой (3.15), найдем

$$tg\varphi = \frac{2 - 6/7}{1 + 2 \cdot 6/7} = \frac{14-6}{7+12} = \frac{8}{19} = 0{,}421, \text{ следовательно } \varphi = 22^0 50'.$$

Е. Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны (условие параллельности (3.16)). Следовательно, $k = \frac{6}{7}$. Координаты точки $C(2,7)$. Воспользуемся уравнением (3.8).

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x-2) \Rightarrow 6x - 7y + 37 = 0.$$

Ж. Расстояние от точки $C(2,7)$ до прямой AB вычисляем по формуле (3.14)

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} = \frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

З. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении срединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Достаточно найти уравнения двух срединных перпендикуляров. Один из них проходит через точку $M(-1/2, 2)$, т.к. она делит BC пополам. Так как $k_{BC} = 2$, то угловой коэффициент искомого перпендикуляра ML можно найти из условия перпендикулярности: $k_{ML} = -\frac{1}{2}$. Уравнение ML найдем по формуле (3.8):

$$y - 2 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x + 4y - 7 = 0.$$

Координаты точки N, которая делит AB пополам, находим по формуле (3.3):

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}, \qquad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-3}{2} = 0.$$

Так как $k_{AB} = \frac{6}{7}$, то $k_{PN} = -\frac{7}{6}$. Уравнение PN найдем по формуле (3.8):

$$y - 0 = -\frac{7}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 14x + 12y - 7 = 0.$$

Координаты центра описанной окружности найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+4y-7=0, \\ 14x+12y-7=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y=7, & (-7) \\ 14x+12y=7, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y=7, \\ -16y=-42, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-7/4, \\ y=21/8. \end{cases}$$

Итак, координаты центра окружности $O\left(-7/4, 21/8\right)$.

4. Кривые второго порядка.

Линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (4.1)$$

называются линиями (кривыми) второго порядка. В уравнении (4.1) хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. В зависимости от коэффициентов A и C уравнение (4.1) определяет окружность, эллипс, гиперболу или параболу.

а) Если $A=C$, то уравнение определяет окружность, которая изображена на рис. 7. Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (4.2)$$

В уравнении (4.2) x_0 и y_0 – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

б) Если A и C одинакового знака, т.е. $A\cdot C>0$, то уравнение определяет эллипс, изображенный на рис. 8. Каноническое уравнение этого эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (4.3)$$

Величины a и b называются большой и малой полуосями соответственно. Центр эллипса находится в точке $O_1(x_0, y_0)$.

в) Если A и C разного знака, т.е. $A\cdot C<0$, то уравнение определяет гиперболу, изображенную на рис. 9. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (4.4)$$

Величина a называется действительной полуосью, b – мнимой. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

г) Если $A=C$, $C\neq 0$ или $A\neq 0$, $C=0$, то уравнение определяет параболу.

При $A=0$ каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \qquad (4.5)$$

Величина p называется параметром параболы. Вершина параболы находится в точке $O_1(x_0, y_0)$. Парабола, заданная уравнением (4.5) изображена на рис.10.

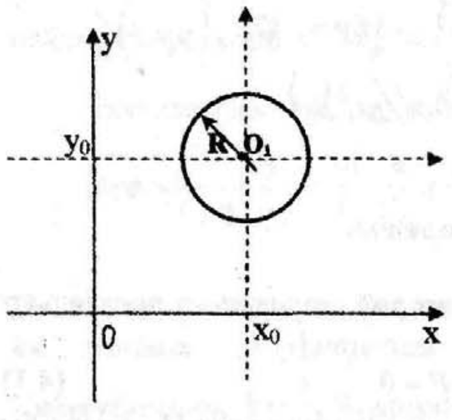

Рис. 7

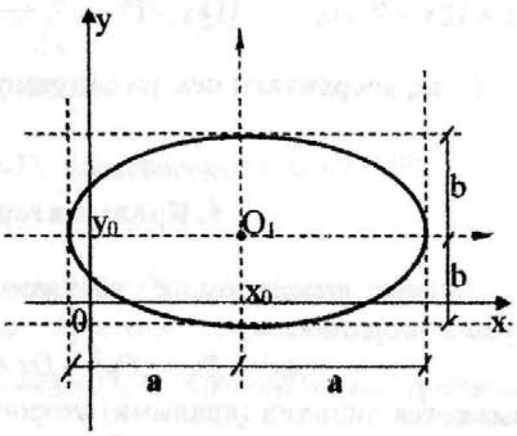

Рис. 8

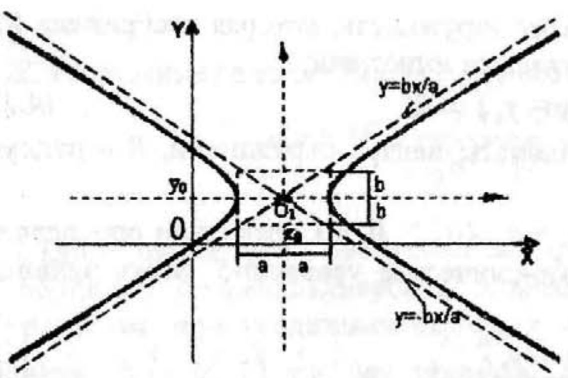

Рис. 10

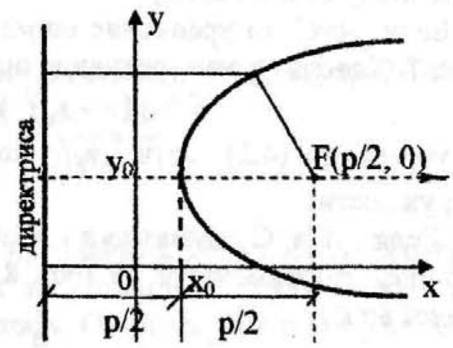

Рис. 9

<u>Пример 1.</u> Привести уравнение к каноническому виду, определить вид кривой и построить кривую

$$4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0.$$

<u>Решение.</u> Так как A=4, C=9, $A \cdot C > 0$, то заданное уравнение определяет эллипс. Приводить к каноническому виду будем выделением полных квадратов с использованием формулы

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Группируем члены, содержащие одинаковую переменную, вынося коэффициенты при x^2 и y^2 за скобки

$$4(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 6y) + 109 = 0,$$

$$4(x^2 + 8x + 16 - 16) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 109 = 0,$$

$$4((x+4)^2 - 16) + 9((y-3)^2 - 9) + 109 = 0,$$

$$4(x+4)^2 - 64 + 9(y-3)^2 - 81 + 109 = 0,$$

$$4(x+4)^2+9(y-3)^2=36 \quad \vert : 36$$
$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Из канонического уравнения видно, что a=3, b=2, $x_0=-4$, $y_0=3$. По этим данным построим эллипс.

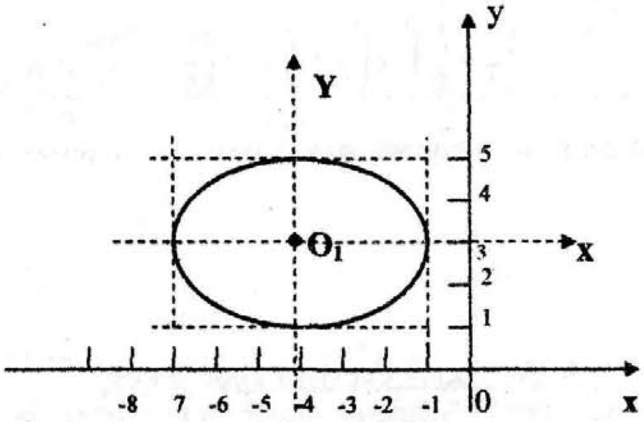

Рис. 11

Пример 2. Составить уравнение линии, каждая точка $M(x, y)$ которой отстоит от точки $A(3, 2)$ на расстоянии, в три раза большим, чем от точки $B(-1, 0)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ любая точка искомой линии. Рис. 12.

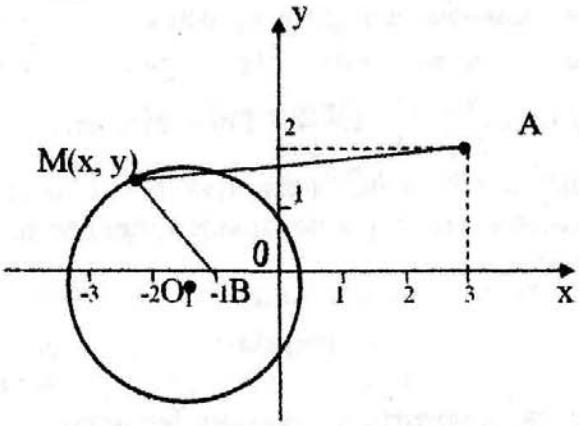

Рис. 12

По условию задачи $\qquad |AM| = 3|BM| \qquad$ (4.6)

$$|AM|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}, \qquad |BM|=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \tag{4.7}$$

Подставим (4.7) в (4.6), получим

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2} \tag{4.8}$$

Возведем уравнение (4.8) в квадрат:

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=9x^2+18x+9+9y^2.$$

Приведем подобные члены:

$$8x^2+24x+8y^2+4y-4=0.$$

Приведем к каноническому виду, выделив полный квадрат

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16}. \qquad (4.9)$$

Уравнение (4.9) определяет окружность с центром в точке $O_1\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$ и радиусом $R=\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

5. Полярная система координат.

В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $|OM|=r$ от полюса O (r – полярный радиус – вектор точки) и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью. Угол φ считается положительным при повороте радиус-вектора вокруг полюса против часовой стрелки. Для построения точки $M(r,\varphi)$ в полярной системе координат через полюс проводят под углом φ к полярной оси вспомогательную ось, на которой затем откладывают от полюса отрезок длины $|r|$ в положительном направлении оси если $r>0$, и в отрицательном направлении оси, если $r<0$. На рис.13 изображены точки $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(-2;\frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{-\pi}{3}\right)$, $D\left(-3;\frac{-\pi}{3}\right)$. Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, полярную ось с осью OX (рис.14), то прямоугольные координаты x, y и полярные координаты r,φ точки M будут связаны формулами:

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi \\ y&=r\sin\varphi \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Из формул (5.1) можно получить следующие формулы:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (5.2)$$

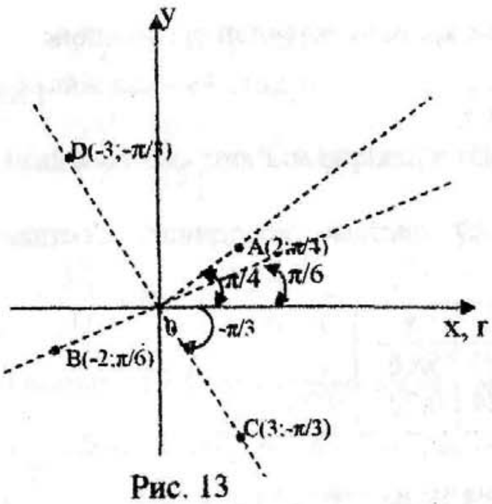

Рис. 13

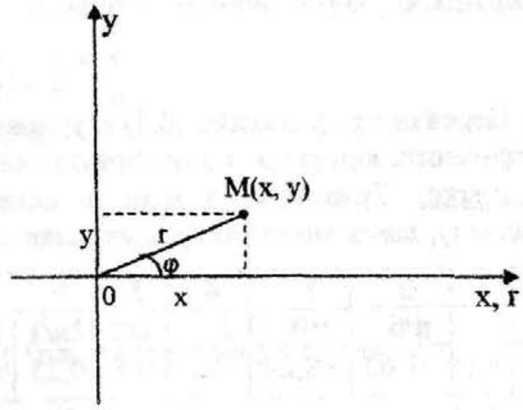

Рис. 14

Пример 1. Построить график кривой $(x^2+y^2)^2 = 2xy$.

В силу трудности исследования этого уравнения и построения графика в декартовой системе координат, перейдем по формулам (5.1) к полярным координатам, получим

$$r^4 = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi \quad \text{или} \quad r^2 = \sin 2\varphi, \quad \text{или} \quad r = \sqrt{\sin 2\varphi}$$

т.к $r^2 \ge 0$ то $\sin 2\varphi \ge 0 \Rightarrow 2\pi n \le 2\varphi \le \pi + 2\pi n$

т.е $\pi n \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

При $n=0$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ – первая четверть

При $n=1$, $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$ – третья четверть

При $n=2$, опять будет первая четверть и т.д. Самое большое значение $r=1$ будет при $\sin 2\varphi = 1$, т.е. при $2\varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\Rightarrow$ $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Можно взять еще несколько дополнительных точек, составив таблицу

φ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$3\pi/8$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	0	0,707	0,84	0,93	1	0,93	0,84	0,707	0

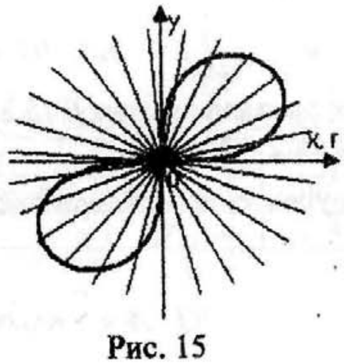

Рис. 15

Учитывая, что график симметричен относительно начала координат, достаточно построить его в первой четверти, а затем симметрично отобразить в третью. График линии в первой четверти изображается с учетом исследований и таблицы (см. рис. 15).

Пример 2. а) Изобразить несколько точек кривой, заданной уравнением

$$r = \frac{1}{2 - 3\cos\varphi} \qquad (5.3)$$

б) Перейти от уравнения (5.3) к уравнению в декартовой системе координат, определить вид кривой и изобразить ее.

Решение. Уравнение задано в полярной системе координат. Составим таблицу, давая значения φ, вычисляя r:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	-1	$-1{,}67$	$-8{,}24$	2	0,5	0,23	0,24	0,22	0,2

Табл. 1

Изобразим точки и последовательно соединим их (рис.16).

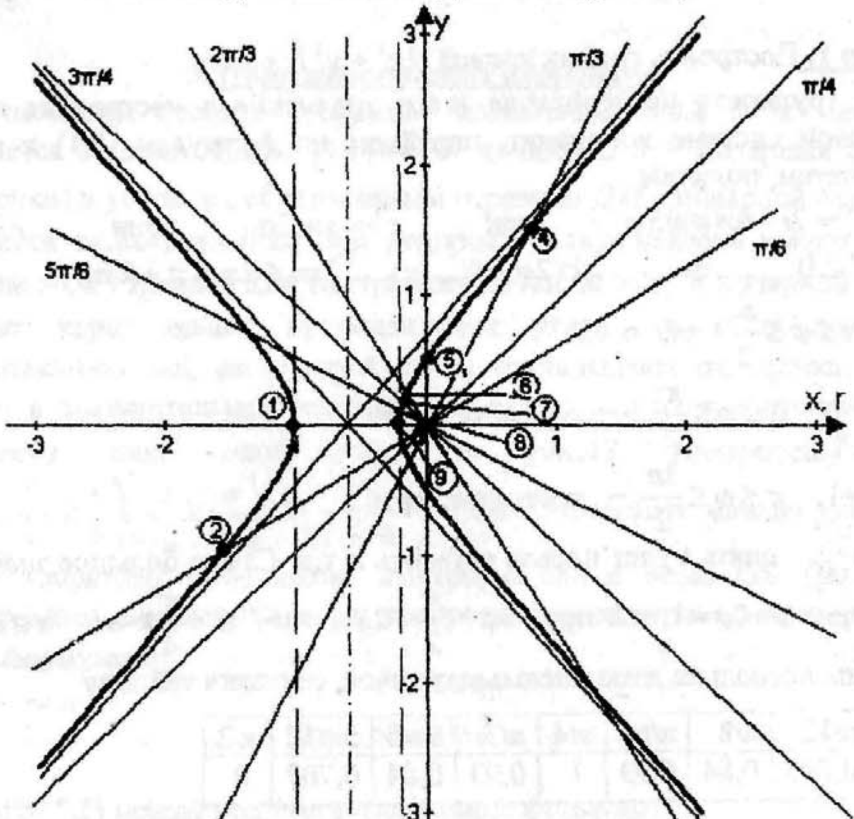

Рис. 16

Для перехода к декартовым координатам перепишем уравнение кривой (5.3) в виде $2r - 3r\cos\varphi = 1$ (для этого умножим обе части на $2 - 3\cos\varphi$).

Заменив r на $\sqrt{x^2 + y^2}$ и $r\cos\varphi$ на x, получим уравнение в декартовых координатах

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 3x$$

Возведем обе части в квадрат

$$4\left(x^2+y^2\right)=\left(1+3x\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 4x^2+4y^2=1+6x+9x^2 \quad\Rightarrow\quad 5x^2+6x-4y^2+1=0.$$

Выделим полный квадрат

$$5\left[\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}\right]-4y^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad 5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{5}-4y^2+1=0 \quad\Rightarrow$$

$$5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2-4y^2=\frac{4}{5}\Big|:\frac{4}{5} \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2}{4/25}-\frac{y^2}{1/5}=1 \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) есть уравнение гиперболы с центром в точке $(-0{,}6;\ 0)$; $a=\frac{2}{5}=0{,}4$; $b=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}45$. Вершины гиперболы находятся в точках $(-1;\ 0)$, $(-0{,}2;\ 0)$. Эта гипербола изображена на рис. 16. Заметим, что точки 1 – 9 принадлежат этой гиперболе.

<u>Пример 3.</u> Изобразить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат $r=2-3\cos\varphi$.

<u>Решение.</u> Исследуем эту кривую.

а) $r=0$ при $\cos\varphi=\frac{2}{3}$ и $\varphi=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$;

б) $r=-1$ при $\cos\varphi=1$ и $\varphi=2\pi n,\quad n\in Z$, т.е. при $\varphi=0, 2\pi,\ldots$

в) $r=5$ при $\cos\varphi=-1$ и $\varphi=\pi+2\pi n,\quad n\in Z$, т.е. при $\varphi=\pi, 3\pi, 5\pi,\ldots$

г) $r<0$ если $2-3\cos\varphi<0$, т.е. $\cos\varphi>\frac{2}{3}$, или

$-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n<\varphi<\arccos\frac{2}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. Для этих углов точки будут откладываться в отрицательном направлении оси, в остальных случаях – в положительном.

д) Так как $\cos(\pm\varphi)=\cos\varphi$ функция четная, то график симметричен относительно полярной оси OX. Достаточно составить таблицу для $0\le\varphi\le\pi$, построить часть графика, а затем отобразить симметрично относительно оси OX. Можно дополнительно построить график функции $y=2-3\cos x$ для $x\in\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ (рис. 17). На рисунке четко видно, что $y\le 0$ для $x\in\left[-\arccos\frac{2}{3};\arccos\frac{2}{3}\right]$. Чем больше точек возьмем, тем точнее будет построение (см. табл. 2 и рис. 18).

φ	0	π/12	π/6	π/4	arccos2/3	π/3	5π/12	π/2	7π/12	2π/3	3π/4	π/5	π
cosφ	1	0,97	0,866	0,77	0,666	0,5	0,259	0	-0,26	-0,5	-0,77	-0,866	-1
r	-1	-0,9	-0,6	-0,3	0	0,5	1,223	2	2,777	3,5	4,31	4,598	5

$\arccos\frac{2}{3}\approx 48^0 42'$.

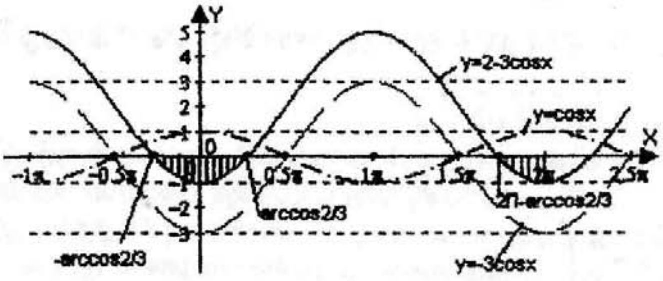

Рис. 17

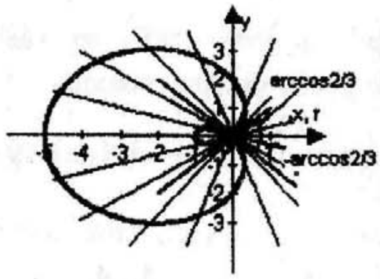

Рис.18

6. Аналитическая геометрия в пространстве.

а) Плоскость

Уравнение плоскости в общем виде.

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (6.1)$$

где A, B и C координаты какого-нибудь вектора, перпендикулярного данной плоскости. Он называется нормальным вектором и обозначается $\overline{n}\{A; B; C\}$.

Уравнение плоскости в отрезках.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (6.2)$$

где a, b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью соответственно на осях OX, OY, OZ.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (6.3)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.4)$$

Уравнение плоскости в нормальном виде.

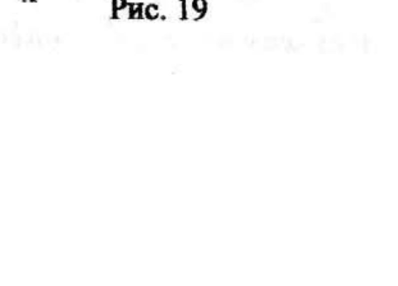

Рис. 19

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (6.5)$$

$M(x, y, z)$ – координаты любой точки M, лежащей на плоскости, где $\overline{n}_0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$–единичный вектор, перпендикулярный плоскости, p – величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость.

Расстояние от точки до плоскости.

Если уравнение плоскости задано в виде (6.5), то расстояние от т. $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости находится по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|. \qquad (6.6)$$

Если уравнение плоскости задано в общем виде (6.1), то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6.7)$$

Угол между двумя плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ **и** $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **находится по формуле**

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}, \qquad (6.8)$$

где $\overline{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$.

Условие параллельности двух плоскостей: $\overline{n}_1 \| \overline{n}_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.9)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей: $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (6.10)$$

б) Прямая линия в пространстве.

Положение прямой линии в пространстве будет определено, если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой и какой-нибудь(не нулевой) вектор $\overline{S}(m, n, p)$, параллельный этой прямой, называемый направляющим вектором прямой. Уравнение прямой задается следующими видами:

Каноническое уравнение прямой линии

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (6.11)$$

где, $M(x_0, y_0, z_0)$ - точка, лежащая на прямой, $\overline{S}(m, n, p)$ - направляющий вектор.

Прямая, как линия пересечения двух не параллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.12)$$

Уравнение прямой проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (6.13)$$

Уравнение прямой в векторном виде

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s} \qquad (6.14)$$

$\bar{r}$ - радиус-вектор с координатами $\bar{r}\{x, y, z\}$

$\bar{r}_0$ - радиус-вектор с координатами $\bar{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$

$\bar{s}$ - направляющий вектор $\bar{s}\{m, n, p\}$

t - переменный параметр.

Угол между двумя прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} \qquad (6.15)$$

Условие перпендикулярности двух прямых

Если $\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$ то $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0 \Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ (6.16)

Условие параллельности двух прямых

$$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (6.17)$$

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{s} \cdot \bar{n}|}{|\bar{s}| \cdot |\bar{n}|} \qquad (6.18)$$

где $\bar{s}\{m, n, p\}$- направляющий вектор прямой.

$\bar{n}\{A, B, C\}$- нормальный вектор плоскости.

Если прямая и плоскость параллельны то $\bar{s} \perp \bar{n}$ и, следовательно $\bar{s} \cdot \bar{n} = 0$.

Условие параллельности примет вид: $Am+Bn+Cp=0$ (6.19)

Если прямая и плоскость перпендикулярны, то $\bar{s} \parallel \bar{n}$.

Условие перпендикулярности можно записать в виде:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \qquad (6.20)$$

Пример. Даны вершины пирамиды $A(4,7,8)$; $B(-1,13,0)$; $C(2,4,9)$; $D(1,8,9)$ (рис.20) составить : а) уравнение ребра AB, б) уравнение грани ABC, в) уравнение высоты DE, г) уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB. Вычислить: е) длину ребра BC, ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC, з) угол между координатной плоскостью OXY и плоскостью ABC.

Решение:

а) т.к. известны координаты точек A и B, то воспользуемся уравнением (6.13)

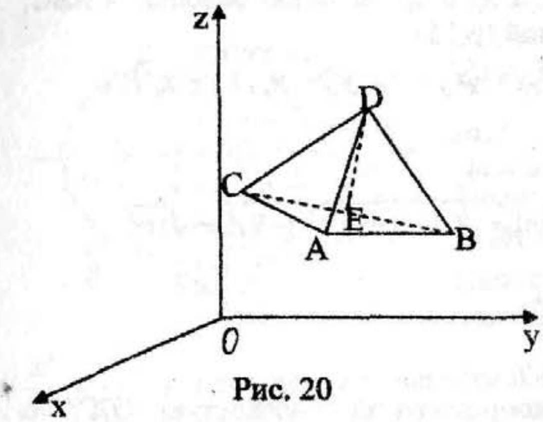

Рис. 20

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-7}{13-7}=\frac{z-8}{0-8}$$ или
$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}$$

б) т.к. известны координаты трех точек, то воспользуемся уравнением (6.4)

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получим $6x-7y-9z+97=0$ – уравнение грани ABC.

в) Высота DE перпендикулярна плоскости ABC.

Направляющий вектор $\bar{s}(m,n,p)$ этой прямой параллелен нормальному вектору плоскости $\bar{n}\{6;-7;-9\}$. Так как в качестве вектора $\bar{s}$ надо взять любой вектор параллельный DE, то в качестве этого вектора берем вектор $\bar{n}$, т.е. $\bar{s}\{6;-7;-9\}$. По известной точке $D(1;8;9)$ и $\bar{s}\{6;-7;-9\}$ по формуле (6.11) уравнение высоты DE запишется в виде:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}.$$

г) Направляющий вектор $\bar{s}\{-5;6;-8\}$ прямой АВ будет являться направляющим вектором искомой прямой в силу их параллельности, уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-8}.$$

д) Ребро AB имеет направляющий вектор $\bar{s}\{-5;6;-8\}$. Вектор $\bar{s}$ перпендикулярен искомой плоскости, значит параллелен $\bar{n}\{A,B,C\}$ нормальному вектору искомой плоскости. Следовательно, в качестве нормального вектора $\bar{n}$ можно взять вектор $\bar{s}$, т.е. $\bar{n}\{-5;6;-8\}$.

Используя уравнение плоскости (6.3) имеем

$$-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0$$

или

$$5x-6y+8z-29=0.$$

е) Для нахождения длины ребра BC воспользуемся формулой

$$|BC|=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}$$

$$|BC|=\sqrt{(2+1)^2+(4-13)^2+(9-0)^2}=\sqrt{9+81+81}=\sqrt{171}.$$

ж) Для нахождения угла между ребром CD и плоскостью основания ABC, найдем $\sin\varphi$, воспользовавшись формулой (6.15)

$\overline{S}_{CD}$ – направляющий вектор ребра CD, $\overline{S}_{CD} = \{x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C\}$,

$\overline{S}_{CD} = \{-1; 4; 0\}$, $\overline{n} = \{6; -7; -9\}$.

$\overline{S}_{CD} \cdot \overline{n} = -1 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) + 0 \cdot (-9) = -6 - 28 = -34$

$|\overline{S}_{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$, $\quad |\overline{n}| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{166}$

$$\sin\varphi = \frac{|-34|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{166}} = \frac{34}{\sqrt{2822}} \approx \frac{34}{53{,}122} \approx 0{,}64,$$

$\varphi = \arcsin 0{,}64$.

з) Вычислим косинус угла между координатной плоскостью OXY и плоскостью основания ABC пирамиды.

Воспользуемся формулой (6.8)

$\overline{n}_1\{6; -7; -9\}$ – нормальный вектор грани ABC

$\overline{n}_2\{0; 0; 1\}$ – нормальный вектор плоскости OXY

$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 6 \cdot 0 - 7 \cdot 0 - 9 \cdot 1 = -9$,

$|\overline{n}_1| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{166}$, $\quad |\overline{n}_2| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$,

$$\cos\varphi = \frac{-9}{\sqrt{166}} = -0{,}7, \qquad \varphi = \pi - \arccos 0{,}7.$$

7. Поверхности второго порядка.

Основным предметом изучения в пространственной аналитической геометрии являются поверхности, определяемые алгебраическими уравнениями вида:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \qquad (7.1)$$

Здесь A, B, C, D, E… некоторые фиксированные числа. Уравнение (7.1) называется общим уравнением второго порядка. Для того, чтобы уравнение (7.1) определяло поверхность, необходимо, чтобы не все из шести коэффициентов A, B, C, D, E, F были равны нулю. В зависимости от коэффициентов и в результате преобразования уравнения (7.1) получаются канонические уравнения различных поверхностей. Форма и свойства этих поверхностей устанавливаются с помощью метода параллельных сечений: поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, затем по уравнениям получаемых в сечении линий делается вывод о форме самой поверхности. Существует девять классов невырожденных поверхностей, заданных следующими каноническими уравнениями.

__Эллипсоид.__

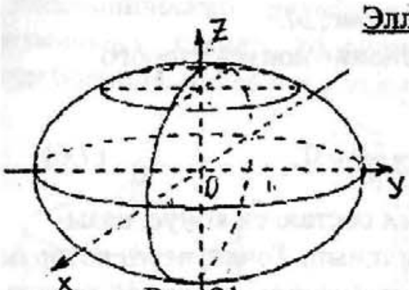

Рис. 21

Эллипсоид изображен на рис.21. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ (7.2)

Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если $a=b>c$, то имеем *сплющенный* эллипсоид вращения, получающийся при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, лежащего в плоскости 0XZ вокруг оси 0Z.

Если $a=b<c$, то имеем вытянутый эллипсоид вращения, который получается при вращении лежащего в плоскости 0XZ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, вокруг оси 0Z.

При $a=b=c$ уравнение (7.2) превращается в уравнение, определяющее __сферу__:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (7.3)$$

__Однополостный гиперболоид.__

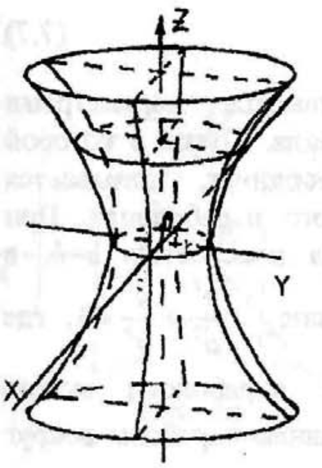

Рис. 22

Гиперболоид изображен на рис.22. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (7.4)$$

a и b – действительные полуоси, c – мнимая полуось. В случае $a=b$ уравнение (7.4) определяет поверхность, образованную вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси OZ.

__Двуполостный гиперболоид__

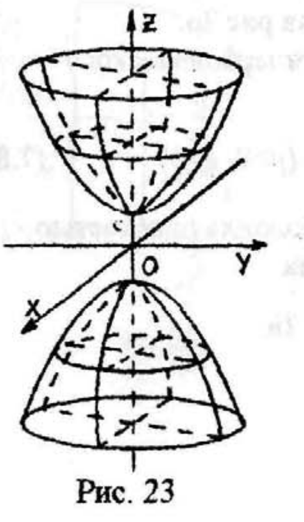

Рис. 23

Гиперболоид изображен на рис.23. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (7.5)$$

a и b – мнимые полуоси, c – действительная полуось. В случае $a=b$ уравнение (7.5) определяет поверхность, образованную вращением гиперболы $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ вокруг оси OZ.

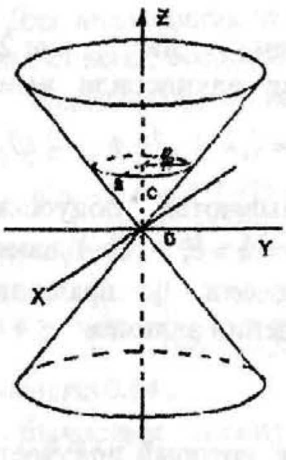

Рис. 24

Конус

Конус изображен на рис.24.

Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (7.6)$$

Прямые, из которых составлен конус, называются его образующими. Точка, через которую все они проходят, называется вершиной конуса. a и b – полуоси эллипса, получаемого в сечении конуса плоскостью $Z=C$.

Если $a=b$, то конус называется круговым.

Эллиптический параболоид

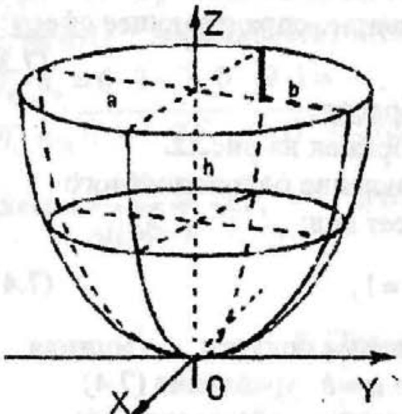

Рис. 25

Параболоид изображен на рис.25.

Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{g}=2z, \qquad (7.7)$$

Числа p и g называются параметрами эллиптического параболоида. Точка, с которой совмещено начало координат, называется вершиной эллиптического параболоида. При пересечении параболоида плоскостью $z=h$, в сечении получится эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a=\sqrt{2hp}$, $b=\sqrt{2hg}$. При $p=g$, эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси.

Гиперболический параболоид

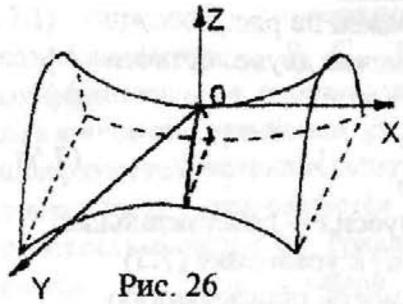

Рис. 26

Параболоид изображен на рис.26.

Простейшее уравнение гиперболического параболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{g}=2z, \quad (p>0,\ g>0) \qquad (7.8)$$

При пересечении гиперболоида плоскостью $z=h$, получится гипербола

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{g}=2h.$$

Гиперболический параболоид имеет форму седла. Точка с которой совмещено начало координат, называется вершиной гиперболического параболоида; числа p и g называются его параметрами.

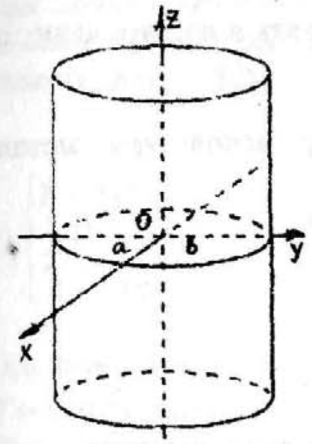

Рис. 27

Эллиптический цилиндр

Цилиндр изображен на рис.27.

Каноническое уравнение эллиптического цилиндра имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7.9)$$

Так как уравнение (7.9) не содержит z, то оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси oz, направляющей является эллипс. В сечении этого цилиндра плоскостями $z=h$, будут эллипсы, называется круговым, его уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

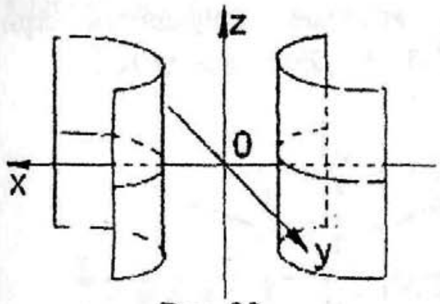

Рис. 28

Гиперболический цилиндр

Цилиндр изображен на рис.28.

Каноническое уравнение гиперболического цилиндра имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7.10)$$

Уравнение (7.10) определяет уравнение гиперболы, полученной пересечением параболического цилиндра плоскостью $z=h$.

Параболический цилиндр

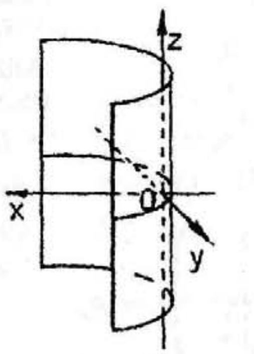

Рис. 29

Цилиндр изображен на рис.29.

Каноническое уравнение параболического цилиндра имеет вид:

$$y^2=2px. \qquad (7.11)$$

Уравнение (7.11) определяет параболу, которая получается при пересечении цилиндра плоскостью $z=h$.

Пример 1. Уравнение поверхности задано в общем виде

$$25x^2 - 50x - y^2 - 2y + 4z^2 - 76 = 0.$$

Привести это уравнение к каноническому виду, изобразить и назвать данную поверхность.

Решение. Для приведения к каноническому виду используем метод выделения полного квадрата

$$25(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 2y + 1 - 1) + 4z^2 - 76 = 0,$$

$$25(x-1)^2 - (y+1)^2 + 4z^2 = 100 \;\Big|:100$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{100} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Здесь $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$, $a = 2$, $b = 10$, $c = 5$.

Перейдем к новым координатам $x - 1 = X$, $y + 1 = Y$, $z = Z$, получим

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{10^2} + \frac{Z^2}{5^2} = 1. \qquad (7.12)$$

Уравнение (7.12) определяет однополостный гиперболоид. Методом параллельных сечений определим линии, которые получаются при пересечении этой поверхности плоскостями X=0, Y=0, Z=0, $Y = \pm 10\sqrt{3}$.

а) $\begin{cases} X = 0 \\ \dfrac{Z^2}{5^2} - \dfrac{Y^2}{10^2} = 1 \end{cases}$

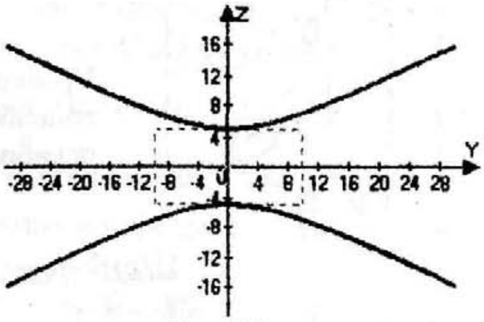

Рис. 30

При пересечении поверхности плоскостью X=0, получилась гипербола (рис. 30).

б) $\begin{cases} Y = 0 \\ \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{Z^2}{5^2} = 1 \end{cases}$

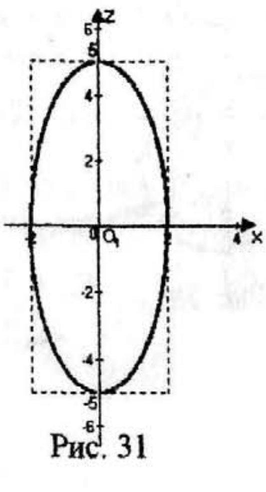

Рис. 31

При пересечении поверхности плоскостью Y=0, получился эллипс (рис. 31).

в) $\begin{cases} Z = 0 \\ \dfrac{X^2}{2^2} - \dfrac{Y^2}{10^2} = 1 \end{cases}$

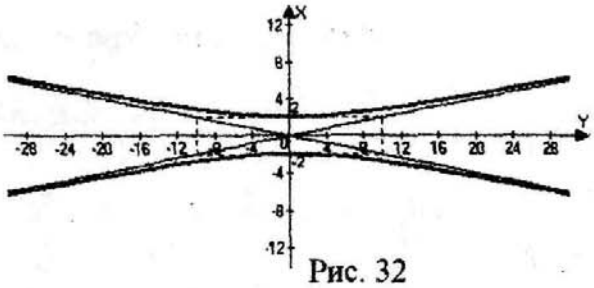

Рис. 32

При пересечении поверхности плоскостью Z=0, получилась гипербола (рис. 32).

г) $\begin{cases} Y = \pm 10\sqrt{3} \\ \dfrac{X^2}{4^2} + \dfrac{Z^2}{10^2} = 1 \end{cases}$

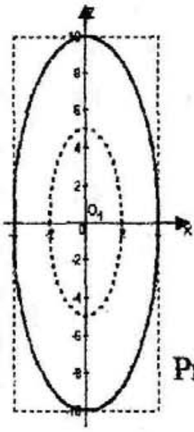

Рис. 33

При пересечении поверхности плоскостями $Y = \pm 10\sqrt{3}$, получаются эллипсы (рис. 33). Пунктирной линией изображен эллипс в сечении плоскостью Y=0.

Изобразив все полученные линии в пространстве, получим однополостный гиперболоид (рис. 34).

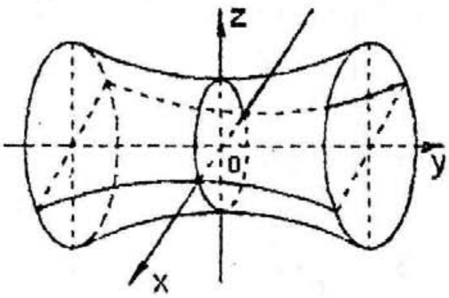

Рис. 34

Пример 2. Привести уравнение $x^2 - 4x + 8z + 12 = 0$ к каноническому виду, назвать поверхность и изобразить ее.

Решение. Так как отсутствует y, то уравнение определяет цилиндр. Приведем уравнение к каноническому виду

$x^2 - 4x + 4 = -8z - 8$ или $(x-2)^2 = -8(z+1)$, $x_0 = 2$, $z_0 = -1$.

Перейдем к другой системе координат, сделав замену $x - 2 = X$, $z + 1 = Z$, получим $X^2 = -8Z$. Это уравнение определяет параболический цилиндр (рис. 35).

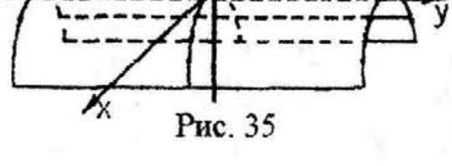

Рис. 35

Варианты контрольных заданий

Вычислить определители

1. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Решить системы уравнений методом Крамера и Гаусса

1. $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x+y+2z=23 \\ x+2y+4z=37 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y+z=-11 \\ 5x+y+2z=8 \\ x+2y+4z=16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+y+z=-4 \\ -3x+5y+6z=36 \\ x-4y-2z=-19 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \\ x+5y+z=-3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ x+y+4z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-y+3z=-4 \\ x+3y-z=11 \\ x-2y+2z=-7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x+y+2z=8 \\ 4x+y-4z=-1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 5y+4z=-20 \\ 3x-2y+5z=-22 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ 7x-5y+z=-33 \\ 4x+z=-7 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x+3y+4z=33 \\ 7x-5y=24 \\ 4x+11z=39 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x+y-3z=9 \\ x+y-z=-2 \\ 8x+3y-6z=12 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ x+2y+5z=-3 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x-3y+2z=1 \end{cases}$

Векторная алгебра

Вершины пирамиды находятся в точках ***A, B, C*** и ***D***.

Вычислить:

а) площадь грани ***ABC***;

б) объем пирамиды ***ABCD***;

в) проекцию вектора $\overline{AC}$ на направление $\overline{BD}$;

г) угол ***ABC***;

д) Проверить, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ компланарны.

1. ***A***(2, -3, -3);	***B***(0, 2, 2);	***C***(0, -2, -4);	***D***(-3, -2, 2).
2. ***A***(4, 6, 5);	***B***(6, 9, 4);	***C***(2, 10, 10);	***D***(7, 5, 9).
3. ***A***(10, 6, 6);	***B***(-2, 8, 2);	***C***(6, 8, 9);	***D***(7, 10, 3).
4. ***A***(1, 8, 2);	***B***(5, 2, 6);	***C***(5, 7, 4);	***D***(4, 10, 9).
5. ***A***(7, 2, 2);	***B***(5, 7, 7);	***C***(5, 3, 1) ;	***D***(2, 3, 7).
6. ***A***(3, 1, 4);	***B***(-1, 6, 1);	***C***(-1, 1, 6) ;	***D***(0, 4, -1).
7. ***A***(3, 5, 4);	***B***(5, 8, 6);	***C***(1, 9, 9) ;	***D***(6, 4, 8).
8. ***A***(9, 5, 5);	***B***(-3, 7, 1);	***C***(5, 7, 8) ;	***D***(6, 9, 7).
9. ***A***(0, 7, 1);	***B***(4, 1, 5);	***C***(4, 6, 3) ;	***D***(3, 9, 8).
10. ***A***(6, 1, 1);	***B***(4, 6, 6);	***C***(4, 2, 0) ;	***D***(1, 2, 6).
11. ***A***(2, 0, 3);	***B***(-2, 5, 0);	***C***(-2, 0, 5) ;	***D***(-1, 3, -2).
12. ***A***(2, 4, 3);	***B***(4, 7, 2);	***C***(0, 8, 8) ;	***D***(5, 3, 7).
13. ***A***(8, 4, 4);	***B***(-4, 6, 0);	***C***(4, 6, 7) ;	***D***(5, 8, 1).
14. ***A***(-1, 6, 0);	***B***(3, 0, 4);	***C***(3, 5,2) ;	***D***(2, 8, 7).
15. ***A***(5, 0, 0);	***B***(3, 5, 5);	***C***(3, 1, -1) ;	***D***(0, 1, 5).
16. ***A***(1, -1, 2);	***B***(-3, 4, -1);	***C***(-3,-1, 4) ;	***D***(-2, 2, -3).
17. ***A***(1, 3, 2);	***B***(3, 6, 1);	***C***(-1, 7, 7) ;	***D***(4, 2, 6).
18. ***A***(7, 3, 3);	***B***(-5, 5, 1);	***C***(3, 5, 6) ;	***D***(4, 7, 0).
19. ***A***(-2, 5, -1);	***B***(2, -1, 3);	***C***(2, 4, 1) ;	***D***(1, 7, 6).
20. ***A***(4, -1, -1);	***B***(2, 4, 4);	***C***(2, 0, 2) ;	***D***(-1, 0, 4).
21. ***A***(0, -2, 1);	***B***(-4, 3, -2);	***C***(-4, -2, 3) ;	***D***(-3, 1, -4).
22. ***A***(0, 2, 1);	***B***(2, 5, 0);	***C***(-2, 6, 6) ;	***D***(3, 1, 5).
23. ***A***(5, 4, -4);	***B***(3, 2, 0);	***C***(-2, 1, 8) ;	***D***(0, -3, 1).
24. ***A***(0, 7, 1);	***B***(5, 4, -3);	***C***(1, 2, -5) ;	***D***(7. 3, 2).

Аналитическая геометрия на плоскости

Даны вершины треугольника ***ABC***: ***A***, ***B***, ***C***.

Найти: а) уравнение стороны ***AB***;

б) уравнение высоты ***CH***;

в) уравнение медианы ***AM***;

г) уравнение одной из биссектрис;

д) угол ***ABC***;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину ***C*** параллельно стороне ***AB***;

ж) расстояние от точки ***C*** до прямой ***AB***;

з) координаты центра описанной окружности.

1. ***A***(11,-15);	***B***(6,-3);	***C***(-2,-9).
2. ***A***(9,-9);	***B***(4, 3);	***C***(-2,-5).
3. ***A***(19,-2);	***B***(7, 3);	***C***(-1,-3).
4. ***A***(7,-8);	***B***(2, 4);	***C***(-6,-2).
5. ***A***(11,-7);	***B***(-1,-2);	***C***(5, 6).
6. ***A***(14,-1);	***B***(2, 4);	***C***(-4,-4).
7. ***A***(11,-10);	***B***(6, 2);	***C***(0,-6).
8. ***A***(13,-11);	***B***(1,-6);	***C***(-7,-12).
9. ***A***(8,-7);	***B***(3, 5);	***C***(-5,-1).
10. ***A***(10,-9);	***B***(-2,-4);	***C***(4, 4).
11. ***A***(11,-3);	***B***(-1, 2);	***C***(-7,-6).
12. ***A***(13,-11);	***B***(8, 1);	***C***(2,-7).
13. ***A***(14,-10);	***B***(2,-5);	***C***(-6,-11).
14. ***A***(9,-9);	***B***(4, 3);	***C***(-4,-3).
15. ***A***(9,-11);	***B***(-3,-6);	***C***(3, 2).
16. ***A***(8,-5);	***B***(-4, 0);	***C***(-10,-8).
17. ***A***(15, 12);	***B***(10, 0);	***C***(4,-8).
18. ***A***(15,-9);	***B***(3,-4);	***C***(-5,-10).
19. ***A***(6,-11);	***B***(1, 1);	***C***(-7,-5).
20. ***A***(12,-13);	***B***(0,-8);	***C***(6, 0).
21. ***A***(10,-6);	***B***(-2,-1);	***C***(-8,-9).
22. ***A***(14,-13);	***B***(9,-1);	***C***(3,-9).
23. ***A***(-6,-11);	***B***(14,-10);	***C***(2,-5).
24. ***A***(0,-6);	***B***(11,-10);	***C***(6, 2).

Кривые второго порядка

В задачах а) – г) привести уравнения к каноническому виду, определить вид кривой и изобразить ее.

1. а) $x^2-4x+y=0$. б) $4x^2-y^2+2x-3=0$.

в) $2x^2+x+2y^2=0$. г) $3x^2+2y^2-3y-2=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=-6 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(1, 3)$.

2. а) $x-y^2-4y-5=0$. б) $3x^2-y^2+2y-3=0$

в) $2x^2+2y^2-x=0$. г) $x^2+2y^2+y+x=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=-2 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(4, 0)$.

3. а) $y^2-6x+2y-11=0$. б) $x^2+4y^2+4x=0$.

в) $x^2+y^2-6y+2x=0$. г) $x^2+y^2+x-4=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой y=-2 на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(5, 0)$.

4. а) $x^2-2x+y-2=0$. б) $x^2-4y^2+4x=0$.

в) $x^2+y^2+2x-6y=0$. г) $x^2+y^2+x-4=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой x=8.

5. а) $x^2+5y-4x+14=0$. б) $x^2+y^2-7y-2=0$.

в) $4x^2+3y^2+4x-1=0$. г) $2x^2-y^2-y+7=0$.

д) Составить уравнение линии, сумма квадратов расстояний от точки $\boldsymbol{M}$ до точек $\boldsymbol{A}(4, 0)$ и $\boldsymbol{B}(-2, 2)$ равна 28.

6. а) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$. б) $y^2-y=x$.

в) $4x^2+3y^2+4x-1=0$. г) $2x^2-y^2-y+7=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $\boldsymbol{B}(-2, -1)$.

7. а) $y^2+x-4y+2=0$. б) $x^2+y^2-7y-2=0$.

в) $4x^2+3y^2+4x-1=0$. г) $2x^2-y^2-y+7=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=-5 на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(6, 1)$.

8. а) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$. б) $x=y^2-2y$.

в) $x^2+y^2-7y-2=0$. г) $4x^2+3y^2+4x-1=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой x=-5.

9. а) $x^2-8x-3y+19=0$. б) $x^2+y^2-y-10=0$.

в) $2x^2+3y^2-5x=0$. г) $3x^2-y^2+7y+10=0$.

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой y=7на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(4, -3)$.

10. а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0.$ б) $2x^2-5y^2+x=0.$

в) $y^2+2y+x+1=0.$ г) $x^2-3x+y^2-4y=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *отношение расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(-3, 5)$ *и* $\boldsymbol{B}(4, 2)$ *равно* 1/3.

11. а) $y^2-5x+6y+4=0.$ б) $4x^2+y^2-4=0.$

в) $2x^2-3y^2-2y=0.$ г) $x^2+y^2-4x+3y=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *сумма квадратов расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(-5, -1)$ и $\boldsymbol{B}(3, 2)$ *равна* 40,5.

12. а) $x^2+4y^2-4x-8y-8=0.$ б) $2x^2+x+3y=0.$

в) $x^2+3x+y^2-5=0.$ г) $5x^2-6y^2-7=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(-3, 3)$ на расстоянии в три раза большем, чем от точки $\boldsymbol{B}(5, 1)$.

13. а) $x^2+6x+5y-6=0.$ б) $2x^2+y^2-y-2=0.$

в) $3x^2-2y^2-y+1=0.$ г) $x^2+5x+y^2-7=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=8 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(-1, 7)$.

14. а) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0.$ б) $x^2+y^2-3x-1=0.$

в) $3x^2+4y^2-10=0.$ г) $x^2-2y^2-2y+1=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=9 на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $\boldsymbol{A}(-1, 2)$.

15. а) $y^2+6x-8y+22=0.$ б) $x^2+3y^2+4x-2=0.$

в) $x^2+y^2+x-y=0.$ г) $2x^2-7y^2-x=2.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *отношение расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(2, -4)$ *и* $\boldsymbol{B}(3, 5)$ *равно* 2/3.

16. а) $16x^2+25y^2-32x+5y-359=0.$ б) $x^2+3x-y+1=0.$

в) $x^2+y^2-5y-1=0.$ г) $3x^2-5y^2+3x+4=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *сумма квадратов расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(-3, 3)$ и $\boldsymbol{B}(4, 1)$ *равна* 31.

17. а) $x^2+8x-2y+14=0.$ б) $x^2+3y^2+5x=0.$

в) $x^2+x+y^2-4=0.$ г) $7x^2-9y^2=2.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой x=3.

18. а) $-x^2+2x=y.$ б) $2x^2+y^2+4x-2=0.$

в) $x^2-5y+2=0.$ г) $x^2+y^2-3x+1=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $\boldsymbol{B}(1, 6)$.

19. а) $y^2-3x+10y+16=0.$ б) $x^2+2x-3y^2+6=0.$

в) $3x^2+3y^2-2x=0.$ г) $5x^2+y^2+x-6=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=-7 на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $\boldsymbol{A}(1, 4)$.

20. а) $y^2-2x+4y+2=0.$ б) $x^2+y^2-3x-4=0.$

в) $x^2+5y^2-5y=0.$ г) $x^2-y^2+x=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=14 на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $\boldsymbol{A}(2, 3)$.

21. а) $7x^2-5y^2-14x-20y-22=0.$ б) $x^2+2y^2+2x=2.$

в) $3x^2-y+2x-2=0.$ г) $3x^2+3y^2-2=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *отношение расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(3, -2)$ *и* $\boldsymbol{B}(4, 6)$ *равно* 3/5.

22. а) $4x^2+3y^2+18y+15=0.$ б) $x^2+y^2+3x-1=0.$

в) $y^2+y+x-2=0.$ г) $-3x^2+2y^2+2y=5.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от точки $\boldsymbol{A}(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой x=5.

23. а) $5x^2-10x+y^2-20=0.$ б) $x^2+y^2-5y+\frac{1}{4}=0.$

в) $3x^2-x+y-2=0.$ г) $2x^2-3y^2+y-5=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой удовлетворяет условию: *отношение расстояний от точки* $\boldsymbol{M}$ *до точек* $\boldsymbol{A}(1, 5)$ *и* $\boldsymbol{B}(0, 2)$ *равно* 2.

24. а) $x^2-2y^2+3x+y-5=0.$ б) $8x^2-16x+3y^2-6y-13=0.$

в) $x^2+4x+y^2=0.$ г) $x+2y^2-y+1=0.$

д) Составить уравнение линии, каждая точка $\boldsymbol{M}$ которой отстоит от прямой x=5 на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $\boldsymbol{A}(-1, 1)$.

Полярная система координат

В задаче а) изобразить линию в полярной системе координат. В задаче б) перейти к декартовым координатам, привести к каноническому виду, изобразить линию. В задаче в) перейти от декартовой системы к полярной и изобразить линию.

1. а) $r = \sin 5\varphi + 1$ б) $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$

2. а) $r = \sin 10\varphi$ б) $r = \dfrac{6}{1 - \cos\varphi}$ в) $4(3x^2 - y^2) = x^4$

3. а) $r = 2 + \cos\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{1 + 3\sin\varphi}$ в) $9(y^4 - x^4) = y^6$

4. а) $r = 3 + 4\cos\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{2 + \cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^3 = 25y^4$

5. а) $r = \dfrac{1}{2} + \cos 3\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{2 - \cos\varphi}$ в) $9(x^2 - 3y^2) = x^4$

6. а) $r = \sin 5\varphi$ б) $r = \dfrac{8}{3 - \cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

7. а) $r = 2(1 - \cos\varphi)$ б) $r = \dfrac{5}{6 + 3\cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 9(4x^2 + y^2)$

8. а) $r = 5 - \cos\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{1 + \cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^3 = x^2(4x^2 + 3y^2)$

9. а) $r = \sin 4\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{1 - 2\sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + 2y^2$

10. а) $r = 1 + 3\cos\varphi$ б) $r = \dfrac{4}{2 - 3\sin\varphi}$ в) $4(x^4 - y^4) = x^6$

11. а) $r = 1 + 2\cos\varphi$ б) $r = \dfrac{6}{1 - \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 4(2x^2 + 3y^2)$

12. а) $r = 3\cos 2\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{2 + \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)(3y^2 - x^2) = y^6$

13. а) $r = 1 + \cos\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{2 - \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^5 = x^4y^2$

14. а) $r = 1 - 3\cos\varphi$ б) $r = \dfrac{8}{3 - \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^7 = x^2y^4$

15. а) $r = 4\sin 3\varphi$ б) $r = \dfrac{5}{6 + 3\sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^5 = x^3y$

16. а) $r = 5\sin 2\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{1 + \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 + 2y^2)$

17. а) $r = 1 - 3\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{3 - 2\cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^3 = y^4$

18. а) $r = 1 + 2\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{2}{3 - 2\sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = x^3$

19. а) $r = 1 + 3\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{3}{3 + \cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 5x^2 + 7y^2$

20. а) $r = 3 + 4\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{3}{3 + \sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$

21. а) $r = 1 - 2\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{3}{1 + 2\sin\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

22. а) $r = 1 + \cos 2\varphi$ б) $r = \dfrac{3}{1 + 2\cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^2 = 9xy$

23. а) $r = 3 - 2\cos\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{1 - 2\cos\varphi}$ в) $(x^2 + y^2)^5 = x^2 y^4$

24. а) $r = 3 - 2\sin\varphi$ б) $r = \dfrac{1}{2 + 3\sin\varphi}$ в) $y^6 = y^4 - x^4$

Аналитическая геометрия в пространстве

Вершины пирамиды находятся в точках ***A***, ***B***, ***C*** и ***D***.

Составить:

а) уравнение ребра ***AB***;

б) уравнение грани ***ABC***;

в) уравнение высоты ***DE***;

г) уравнение прямой, проходящей через точку ***D*** параллельно ребру ***AB***;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку ***D*** перпендикулярно ребру ***AB***.

Вычислить:

е) длину ребра ***BC***;

ж) угол между ребром ***CD*** и плоскостью ***ABC***;

з) угол между координатной плоскостью **OXY** и плоскостью ***ABC***.

1. ***A***(2, -3, -3);	***B***(0, 2, 2);	***C***(0, -2, -4);	***D***(-3, -2, 2).
2. ***A***(4, 6, 5);	***B***(6, 9, 4);	***C***(2, 10, 10);	***D***(7, 5, 9).
3. ***A***(10, 6, 6);	***B***(-2, 8, 2);	***C***(6, 8, 9);	***D***(7, 10, 3).
4. ***A***(1, 8, 2);	***B***(5, 2, 6);	***C***(5, 7, 4);	***D***(4, 10, 9).
5. ***A***(7, 2, 2);	***B***(5, 7, 7);	***C***(5, 3, 1) ;	***D***(2, 3, 7).
6. ***A***(3, 1, 4);	***B***(-1, 6, 1);	***C***(-1, 1, 6) ;	***D***(0, 4, -1).
7. ***A***(3, 5, 4);	***B***(5, 8, 6);	***C***(1, 9, 9) ;	***D***(6, 4, 8).
8. ***A***(9, 5, 5);	***B***(-3, 7, 1);	***C***(5, 7, 8) ;	***D***(6, 9, 7).
9. ***A***(0, 7, 1);	***B***(4, 1, 5);	***C***(4, 6, 3) ;	***D***(3, 9, 8).
10. ***A***(6, 1, 1);	***B***(4, 6, 6);	***C***(4, 2, 0) ;	***D***(1, 2, 6).
11. ***A***(2, 0, 3);	***B***(-2, 5, 0);	***C***(-2, 0, 5) ;	***D***(-1, 3, -2).
12. ***A***(2, 4, 3);	***B***(4, 7, 2);	***C***(0, 8, 8) ;	***D***(5, 3, 7).
13. ***A***(8, 4, 4);	***B***(-4, 6, 0);	***C***(4, 6, 7) ;	***D***(5, 8, 1).
14. ***A***(-1, 6, 0);	***B***(3, 0, 4);	***C***(3, 5,2) ;	***D***(2, 8, 7).
15. ***A***(5, 0, 0);	***B***(3, 5, 5);	***C***(3, 1, -1) ;	***D***(0, 1, 5).
16. ***A***(1, -1, 2);	***B***(-3, 4, -1);	***C***(-3,-1, 4) ;	***D***(-2, 2, -3).
17. ***A***(1, 3, 2);	***B***(3, 6, 1);	***C***(-1, 7, 7) ;	***D***(4, 2, 6).
18. ***A***(7, 3, 3);	***B***(-5, 5, 1);	***C***(3, 5, 6) ;	***D***(4, 7, 0).
19. ***A***(-2, 5, -1);	***B***(2, -1, 3);	***C***(2, 4, 1) ;	***D***(1, 7, 6).
20. ***A***(4, -1, -1);	***B***(2, 4, 4);	***C***(2, 0, 2) ;	***D***(-1, 0, 4).
21. ***A***(0, -2, 1);	***B***(-4, 3, -2);	***C***(-4, -2, 3) ;	***D***(-3, 1, -4).
22. ***A***(0, 2, 1);	***B***(2, 5, 0);	***C***(-2, 6, 6) ;	***D***(3, 1, 5).
23. ***A***(5, 4, -4);	***B***(3, 2, 0);	***C***(-2, 1, 8) ;	***D***(0, -3, 1).
24. ***A***(0, 7, 1);	***B***(5, 4, -3);	***C***(1, 2, -5) ;	***D***(7, 3, 2).

Поверхности второго порядка

1. $9y^2 + 4x^2 - 36 = 0$.
2. $4x^2 + 36y - 9z^2 - 36 = 0$.
3. $4x^2 + y^2 - 16z - 36 = 0$.
4. $9x^2 - y^2 + 36z^2 + 36 = 0$.
5. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.
6. $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 36 = 0$.
7. $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.
8. $(x-3)^2 + (z-1)^2 = 16$.
9. $4y^2 + 9z^2 - 36x = 0$.
10. $y^2 + 2x + 2 = 0$.
11. $100x^2 + 4y^2 - 25z + 100 = 0$.
12. $25x^2 + 4y^2 + 100z^2 - 100 = 0$.
13. $100x^2 - 25y^2 - 4z^2 + 100 = 0$.
14. $(y+1)^2 + (z-3)^2 - 9 = 0$.
15. $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$.
16. $z^2 - 4x + 8 = 0$.
17. $4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 144 = 0$.
18. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$.
19. $z^2 - 4y + 12 = 0$.
20. $25x^2 + 4y^2 - 100z^2 - 100 = 0$.
21. $25x^2 + 4y^2 - 100z^2 = 0$.
22. $x^2 + 4y - 8 = 0$.
23. $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$.
24. $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$.