МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

В. И. Ряжских, А. В. Ряжских, Е. А. Соболева, М. Л. Федюнин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Воронеж 2020

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я7
Д503

Рецензенты:
кафедра математического анализа
Воронежского государственного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А. Д. Баев);
д-р техн. наук, проф. С. Ю. Панов

Ряжских, В. И.

Д503 **Дифференциальное и интегральное исчисления**: учебное пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (2,1 Мб) / В. И. Ряжских, А. В. Ряжских, Е. А. Соболева, М. Л. Федюнин. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024×768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-0853-5

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал таких разделов математического анализа, как введение в начало математического анализа, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Изложение теоретического материала сопровождается выводом и доказательством всех разделов.

Издание предназначено для студентов специальности 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения.

Ил. 12. Табл. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я7

Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета

ISBN 978-5-7731-0853-5

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие представляет собой теоретические аспекты математического анализа. Представленный материал служит основой для решения задач рассмотренного курса.

Учебное пособие является концентратором основных положений теоретического характера с подробной иллюстративной и практической направленностью, адаптированной на широкую предметно-ориентированную студенческую аудиторию, обучающуюся по различным образовательным техническим программам специалитета, в том числе аэрокосмической подготовки инженеров высокой квалификации, обладающих глубокими знаниями в использовании математического аппарата как инструментария выполнения проектов повышенной сложности.

Список обозначений:

□ ■ – начало и конец доказательства.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Основные понятия

Определение. Под ***множеством*** будем понимать совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, из которых состоит множество, будем называть его элементами. Будем обозначать $A, B, ..., X, Y$ – множества, $a, b, ..., x, y$ – элементы.

Запись: $x \in X$ – "x принадлежит X";
$x \notin X$ – "x не принадлежит X".

Замечание. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Определение. Множество A называется ***подмножеством*** B, если каждый элемент A является элементом множества B. Обозначение: $A \subset B$.

Определение. Множества A и B ***равны*** $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение. ***Объединением*** (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: $A \cup B$ $(A + B)$.

Определение. ***Пересечением*** (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Обозначение: $A \cap B$ $(A \cdot B)$.

Логические символы: $\alpha \Rightarrow \beta$ – "из α следует β"; $\forall$ – "для любого"; $\exists$ – "существует"; : – "имеет место".

1.2. Числовые множества. Множества действительных чисел

Определение. Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***.

$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – множество натуральных чисел.

$\mathrm{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – множество целых неотрицательных чисел.

$Z=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm n,...\}$ – множество целых чисел.

$Q=\left\{\dfrac{m}{n}: m\in Z, n\in N\right\}$ – множество рациональных чисел.

R – множество действительных чисел.

Справедливо соотношение: $N\subset Z_0\subset Z\subset Q\subset R$.

Замечание. Множество R содержит рациональные и иррациональные числа и обладает следующими свойствами:

1) оно упорядоченное, т.е. $\forall a,b: a\in R,\ b\in R\Rightarrow a<b$ или $a>b$;

2) оно плотное: между a и $b\in R$ содержится бесконечное множество действительных чисел;

3) оно непрерывное.

1.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть $a,b\in R\ (a<b)$.

Определение. ***Числовыми промежутками*** называются подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a,b]=(x: a\le x\le b)$ – отрезок;

$(a,b)=(x: a<x<b)$ – интервал;

$[a,b)=(x: a\le x<b)$, $(a,b]=(x: a<x\le b)$ – полуоткрытые интервалы (или отрезки);

$(-\infty,b), (a,+\infty)$ – символы «$\pm\infty$» обозначают неограниченное удаление чисел вправо или влево.

Определение. Пусть $x_0\in R$. ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал (a,b), содержащий x_0. Если $a=x_0-\varepsilon$, $b=x_0+\varepsilon$, то интервал называется ε – окрестностью (x_0 – центр, ε – радиус).

Записи вида – эквиваленты.

2. ФУНКЦИЯ

2.1. Понятие функции

Понятие функции вводится для установления зависимости между элементами двух множеств.

Определение. Пусть $X, Y \neq \varnothing$. Соответствие *f*, которое каждому $x \in X$ сопоставляет единственный $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$ или $f: X \to Y$. *f* отображает *X* на *Y* .

X – множество – область определения, *Y* – область значений.

2.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть $f: X \to Y$, $X, Y \in$ R, тогда *f* называется числовой функцией, и для краткости будем писать $y = f(x)$, где *x* – аргумент; *y* – функция. Эквивалентно: $y = y(x)$. Если $x = a$, то *f(a)*.

Определение. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ называется множество точек на *Oxy*, для каждой из которых *x* – аргумент, *y* – функция.

Способы задания: аналитический, графический, табличный.

2.3. Основные характеристики функций

Определение. Пусть $y = f(x), x \in D,$ называется ***четной***, если $\forall x \in D: -x \in D$ и $f(-x) = f(x)$, ***нечетной*** $f(-x) = -f(x)$.

Определение. Пусть $y = f(x), x \in D$ и $D_1 \subset D$.

Если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то *f* – ***возрастающая*** на D_1; если $f(x_1) \leq f(x_2)$ – ***неубывающая***; если $f(x_1) > f(x_2)$ – ***убывающая;*** если $f(x_1) \geq f(x_2)$ – ***невозрастающая***.

Определение. Возрастающие, неубывающие, убывающие, невозрастающие функции называются ***монотонными***, а их интервалы – ***интервалами монотонности***.

Определение. $y = f(x), x \in D$ называется ***ограниченной***, если $\exists M > 0, \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M$.

Определение. $y = f(x), x \in D$ называется ***периодической***, если $\exists T > 0, \forall x \in D: (x+T) \in D,\ f(x+T) = f(x),\ T$ – период.

2.4. Обратная функция

Определение. Пусть $y = f(x), x \in D, y \in E$. Если $\forall y \in E \Rightarrow \exists x \in D$, то $x = \varphi(y)$ – ***обратная функция*** для $f(x)$. Также записывают $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Замечание. Взаимно однозначное соответствие возможно только, когда f – строго монотонна.

2.5. Сложная функция

Определение. Пусть $y = f(u), u \in D; u = \varphi(x), x \in D_1$, причем $\forall x \in D_1 \Rightarrow u = \varphi(x) \in D$, тогда на D_1 определена $y = f[\varphi(x)]$ – которая называется ***сложной функцией***.

2.6. Основные элементарные функции

1. Показательная функция: $y = a^x,\ a > 0,\ a \ne 1$.

2. Степенная функция: $y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathrm{R}$.

3. Логарифмическая функция: $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \ne 1$.

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение. Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и построенных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операции взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

Пример неэлементарной функции:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ 1, x < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x \le 0, \\ x, \quad \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + \ldots$$

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Числовая последовательность

Определение. Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем понимать функцию

$$x_n = f(n),\ n \in \mathrm{N}.$$

Обозначение: $\{x_n\},\ x_n,\ n \in \mathrm{N};\ x_n$ – n-ый член последовательности.

Определение. $\{x_n\}$ – ***ограниченная***, если $\exists M > 0$, что $\forall n \in \mathrm{N} \Rightarrow |x_n| \le M$.

Определение. $\{x_n\}$ – ***возрастающая (неубывающая)***, если $\forall\, n \in \mathrm{N}:\ x_{n+1} > x_n,\ (x_{n+1} \ge x_n)$. Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Определение. $\{x_n\}$ – ***постоянная***, если $\forall n \in \mathrm{N}:\ x_n = \mathrm{const}$.

Замечание. Рекуррентный способ задания: $x_n = f(x_{n-1})$.

3.2. Предел числовой последовательности

Определение. a – ***предел последовательности***, если $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N:\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Определение. R дополненное $-\infty$ и $+\infty$ называется ***расширенным***.

Замечание. Имеется взаимно однозначное соответствие между расширенным R и числовой прямой.

Лемма. У расширенного R $\forall a, b \in$ R существуют непересекающиеся окрестности.

□ Покажем, что $\forall a \in$ R и $\forall b \in$ R $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что

$$\left(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right) \cap \left(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2\right) = \varnothing.$$

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = (b-a)/2$, тогда утверждение справедливо. ■

> ***Теорема.*** $\{x_n\} \in$ R, $n \in$ N имеет один предел.

□ Пусть $\exists \{x_n\} \in$ R, у которой $a \neq b \in$ R– пределы $\{x_n\}$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы (см. лемму)

$$\left(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right) \cap \left(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2\right) = \varnothing.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_1 \in$ N, что $\forall n \geq n_1, n \in$ N $\Rightarrow x_n \in \left(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right)$, аналогично:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \exists n_2 \in \text{N, что } \forall n \geq n_2, n \in \text{N} \Rightarrow x_n \in \left(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2\right).$$

Пусть $n_0 = \max(n_1, n_2)$, тогда $\forall n \geq n_0$ будем иметь $x_n \in \left(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right)$ и $x_n \in \left(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2\right)$, т.е. $x_n \in \left[\left(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1\right) \cap \left(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2\right)\right] = \varnothing$. Противоречие! ■

Определение. $\{y_k\}$ называется ***подпоследовательностью*** $\{x_n\}$, если $\forall k \in$ N $\exists n_k \in$ N, что $y_k = x_{n_k}$.

Лемма. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$.

□ Из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_0 \colon n \geq n_0, n \in$ N выполняется $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, но тогда для n_0 $\exists k \in$ N, $\forall k \geq k_0$, $k \in$ N $: n_k \geq n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = a.$$ ■

3.3. Предельный переход в неравенствах

> ***Теорема.*** Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

□ Допустим, что $a > b$. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ выполнены неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т.е.

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$, тогда $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, $\Rightarrow$ $x_n > y_n$, а это противоречит условию $x_n \le y_n$, т.е. $a \le b$. ■

> ***Теорема.*** Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \le z_n \le y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

□ Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists n_1 \in \mathrm{N}$ и $\exists n_2 \in \mathrm{N}$, что $\forall n \ge n_1$:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n \ge n_2 : a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Выберем $n_0 = \max(n_1, n_2)$, тогда вновь будем иметь $\forall n \ge n_0$: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, причем $[x_n, y_n] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Неравенство $x_n \le z_n \le y_n$ означает, что $z_n \in [x_n, y_n] \Rightarrow$ при $n \ge n_0$ $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

3.4. Предел монотонной ограниченной последовательности

Определение. $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если $\exists a : \forall n \in \mathrm{N}\ x_n \le a\ (x_n \ge a)$. Если $\{x_n\}$ ограничена и сверху, и снизу, то $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, т.е. $|x_n| \le a$.

> ***Теорема.*** Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $|x_n| \le b$.

□ Возьмем, например, $\varepsilon = 1$, тогда $\exists n_1$, что $\forall n \ge n_1 : |x_n - a| < 1$.

Пусть $d = \max(1, |x_1 - a|, \ldots, |x_{n-1} - a|)$, тогда $\forall n \in \mathrm{N} : |x_n - a| \le d$. ■

Определение. Число b является ***верхней (нижней) гранью*** для $\{x_n\}, n \in \mathrm{N}$, если: 1) $x_n \leq b \left(x_n \geq b\right)$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$: $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (соответственно $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$).

Обозначение: $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\}$ $\left(\inf\limits_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\}\right)$.

Определение. $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)*** последовательностью, если $\forall n \in \mathrm{N}: x_n \leq x_{n+1} \left(x_n \geq x_{n+1}\right)$. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Теорема Вейерштрасса. Всякая возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный предел, равный $+\infty(-\infty)$, если она не ограничена сверху (снизу), причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\} \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\}\right).$$

□ Пусть $\{x_n\}$: $x_n \leq x_{n+1}$; $|x_n| \leq a$; $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\} = a$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}}\{x_n\} = a \Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}$: $\mathrm{x}_n \leq a$ и $\exists n_\varepsilon$: $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Тогда в силу возрастания $\{x_n\}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ будем иметь: $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a$. Поэтому $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Следствие. Для того чтобы возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.

Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей последовательности.

Пример. Пусть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathrm{N}$. Покажем, что эта последовательность сходится.

Решение. В формуле Бинома Ньютона

$$\left(a+b\right)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left[n-(n-1)\right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot b^n$$

Положим, $a=1; b=\frac{1}{n}$, тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left[n-(n-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Очевидно, что $\{x_n\}$ - возрастающая, при этом $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2.$ Покажем, что она ограниченная. Заменим каждую круглую скобку на 1, тогда правая часть увеличится и поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Еще больше усилим последнее неравенство, заменив 3, 4, 5,… на 2, тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Т.к. в выражении в скобках правой части неравенства – геометрическая прогрессия, то

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2,$$

поэтому

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ имеет предел, и он обозначается через «e», т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045....$$

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. Предел функции в точке

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне).

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если $\forall\{x_n\}$ допустимых значений аргумента $x_n, n \in \mathrm{N}$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 $\left(\text{т.е. } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\right)$, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n), n \in \mathrm{N}$ сходится к числу A $\left(\text{т.е. } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A\right)$.

Записывают так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Определение 2 (на « языке $\varepsilon - \delta$ », или по Коши).

Число A называется ***пределом функции*** в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0,$ что $\forall x \neq x_0$: $|x - x_0| < \delta,$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5.$

Решение. Возьмем $\varepsilon > 0,$ тогда найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x$: $|x-3| < \delta$ выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon,$ т.е. $|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$ Взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, видим, что $\forall x$: $|x-3| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняется неравенство $|(2x-1)-5| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 5.$

Пример. Доказать, что если $f(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

Решение. $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $\forall \delta > 0$, тогда при $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} c = c.$

4.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ считается, что $x \to x_0$ любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0, большим, чем x_0, или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ $x \to x_0$ существенен (будет показано позже), поэтому вводят понятие односторонних пределов.

Определение. Число A_1 называется ***пределом функции y = f(x) слева*** в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

Запись:

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = A_1.$$

Аналогично определяется ***предел функции y = f(x) справа***.

Запись:

$$\lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Пределы справа и слева называются односторонними пределами.

Замечание. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют и односторонние пределы, причем $A = A_1 = A_2$. Справедливо и обратное утверждение.

4.3. Предел функции при $x \to \infty$

Определение. Пусть $y = f(x)$, где $x \in (-\infty, +\infty)$. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M(\varepsilon) > 0$, что $\forall x$: $|x| > M$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись:
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

4.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Определение. *y = f(x)* называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если $\forall M>0\ \exists\delta(M)>0$, что $\forall x>0$: $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

Запись:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

5. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

5.1. Определение и основные теоремы

Определение. *y = f(x)* называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа б.м.ф. есть б.м.ф.

□ Пусть $\alpha(x), \beta(x)-$ б.м.ф. при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ и $\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\delta_1>0$, что $\forall x$: $0<|x-x_0|<\delta_1$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично для $\beta(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, и $|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, тогда $\forall x$: $0<|x-x_0|<\delta$, выполнены $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}-$одновременно, т.е.
$$|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad ■$$

Теорема. Произведение ограниченной функции на б.м.ф. есть б.м.ф.

□ Т.к. $\exists M>0$: $\left|f(x)\right|\le M$, то $\forall x$: $x\in\left(\delta_1-x_0,\delta_1+x_0\right)$ и пусть $\alpha(x)-$ б.м.ф. при $x\to x_0$, тогда $\forall\varepsilon>0$ и $\Rightarrow\ \dfrac{\varepsilon}{M}>0$ $\exists\delta_2>0$, что $\forall x$: $0<\left|x-x_0\right|<\delta_2$, выполнено неравенство $\left|\alpha(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

Пусть $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$, тогда $\forall x$: $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, выполнены

$$\left|f(x)\right|\le M \quad \text{и} \quad \left|\alpha(x)\right|<\frac{\varepsilon}{M}$$

$\Rightarrow\ \left|f(x)\cdot\alpha(x)\right|=\left|f(x)\right|\cdot\left|\alpha(x)\right|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}<\varepsilon,$ а это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\alpha(x)\right]=0.$ ■

Следствие. Т.к. любая б.м.ф. ограничена, то из теоремы вытекает, что произведение двух б.м.ф. есть б.м.ф.

Следствие. Произведение б.м.ф. на число есть б.м.ф.

Теорема. Частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть б.м.ф.

□ Пусть

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0, \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=a\ne 0,$$

тогда $\alpha(x)/f(x)$ может быть представлена как произведение ограниченной функции на б.м.ф.

Покажем, что $1/f(x)-$ ограниченная. Возьмем $\varepsilon<|a|$, тогда $\exists\delta>0$ $\forall x$: $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ выполняется $\left|f(x)-a\right|<\varepsilon$, а т.к. $\varepsilon>\left|f(x)-a\right|=\left|a-f(x)\right|\ge|a|-\left|f(x)\right|$, то $|a|-\left|f(x)\right|<\varepsilon$, т.е. $\left|f(x)\right|>|a|-\varepsilon>0\ \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\frac{1}{\left|f(x)\right|}<\frac{1}{|a|-\varepsilon}=M. \qquad ■$$

Теорема. Если $\alpha(x)-$ б.м.ф. $(\alpha(x)\neq 0)$, то $1/\alpha(x)-$ б.б.ф. и наоборот: если $f(x)-$б.б.ф., то $1/f(x)-$ б.м.ф.

□ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,

тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x$: $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$, т.е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right|>M$, где $M=1/\varepsilon$, а это означает, что $1/\alpha(x)-$ б.б.ф. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Замечание. Указанная теорема справедлива и для случая, когда $x\to\infty$.

Пример. Показать, что функция $f(x)=(x-1)^2\sin^3\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$ является б.м.ф.

Решение. Т.к. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$, то $\varphi(x)=(x-1)^2$ есть б.м.ф. при $x\to 1$. Функция $g(x)=\sin^3\dfrac{1}{x-1}$, $x\neq 1$ ограничена $\left|\sin^3\dfrac{1}{x-1}\right|\leq 1 \Rightarrow$ $f(x)-$б.м.ф.

5.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$ б.м.ф.

□ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x$: $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е.

$|f(x)-A-0|<\varepsilon$, а это значит, что $f(x)-A$ имеет предел, равный 0, т.е. является б.м.ф., которую обозначим $\alpha(x)$ $\Rightarrow f(x)-A=\alpha(x)$ или $f(x)=A+\alpha(x)$. ■

Теорема (обратная). Если $f(x)=A+\alpha(x)$, где A – число, а $\alpha(x)$ – б.м.ф., то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

□ Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\colon\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

а т.к. $f(x)=A+\alpha(x)$,то $\alpha(x)=f(x)-A,$ или

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\colon\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

а это означает $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$ ■

5.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции.

Теорема. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x).$

□ Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$$

тогда $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$, $\alpha(x),\beta(x)$ – б.м.ф. $\Rightarrow$

$$f(x)+\varphi(x)=A+B+\left[\alpha(x)+\beta(x)\right],$$

что означает $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x).$ ■

Замечание. Случай разности доказывается аналогично.

Следствие. *f(x)* может иметь только один предел при $x\to x_0$.

□ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B,$ тогда

$$0=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)=A-B,$$

т.е. $A-B=0$ и $A=B.$ ■

Теорема. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x).$

□ Пусть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$$

т.е. $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$, $\alpha(x),\beta(x)-$ б.м.ф. $\Rightarrow$

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\left[A+\alpha(x)\right]\cdot\left[B+\beta(x)\right]=$$
$$=A\cdot B+\underbrace{\left[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right]}_{\text{б.м.ф.}};$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=A\cdot B.$ ■

Следствие. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x).$

□ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x).$ ■

Следствие. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n,\ n\in\mathrm{N}.$

□ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\lim\limits_{x\to x_0}\underbrace{\left[f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)\right]}_{n}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ldots\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n.$ ■

Теорема. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)},\quad\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$

□ Пусть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$$

тогда $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$, $\alpha(x),\beta(x)-$б.м.ф.,

поэтому $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\dfrac{A}{B}+\left[\dfrac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\dfrac{A}{B}\right]=\dfrac{A}{B}+\dfrac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{\underbrace{B^2+B\beta(x)}_{\text{б.м.ф.}}},$

откуда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}.$ ■

5.4. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, $y = \sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

> ***Теорема (о пределе промежуточной функции).***
> Если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A,\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A,$ и $\varphi(x) \le f(x) \le g(x),$
> то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

□ Из пределов для $\varphi(x)$ и $g(x)$ вытекает, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1, \delta_2 > 0:$
при $|x - x_0| < \delta_1$ и $|x - x_0| < \delta_2$ выполняются неравенства
$|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|g(x) - A| < \varepsilon, |\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|g(x) - A| < \varepsilon,$
т.е. $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$ и $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon.$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда в $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняются оба неравенства, но т.к. из $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ следует, что

$$\varphi(x) - A \le f(x) - A \le g(x) - A,$$

то $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon,$ т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$ ■

> ***Теорема (о пределе монотонной функции).*** Если функция *f(x)* монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$

(Без доказательства)

5.5. Первый и второй замечательные пределы

Определение. Предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

называется ***первым замечательным пределом***.

Определение. Предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

называется ***вторым замечательным пределом***.

6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Сравнение бесконечно малых функций

Ранее было установлено, что сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть б.м.ф. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть б.б.ф., быть б.м.ф. или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Т.о. две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = \lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0,$$

тогда

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0 \ \left(A \in \mathrm{R}\right)$, то α и β – бесконечно малые одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α – бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α – бесконечно малая более низкого порядка, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β – называются несравнимыми бесконечно малыми.

6.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Определение. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β – ***эквивалентные б.м.ф.***

Обозначение: $\alpha\sim\beta$.

Теорема. Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

□ Пусть $\alpha\sim\alpha_1$ и $\beta\sim\beta_1$ при $x\to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha'}{\alpha'}\frac{\beta'}{\beta'}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=1\cdot1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$ ■

Замечание. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta'}$.

Теорема. Разность двух эквивалентных б.м.ф. есть б.м.ф. более высокого порядка, чем каждая из них.

□ Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0,$$

аналогично $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$. ■

Следствие. Если разность б.м.ф. α и β есть б.м.ф. высшего порядка, чем α и β, то $\alpha\sim\beta$.

□ Т.к.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0,$$

то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0$, т.е. $1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, $\alpha\sim\beta$. ■

Теорема. Сумма конечного числа б.м.ф. разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

□ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}+1=0+1=1\ \Rightarrow\ \alpha+\beta\sim\beta \qquad \blacksquare$$

Замечание. Слагаемое, эквивалентное сумме б.м.ф., называется главной частью этой суммы. Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

7.1. Непрерывность функции в точке

Пусть *y=f(x)* определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

Определение. *y=f(x)* называется ***непрерывной в точке*** $\mathbf{x_0}$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Замечание. Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}x=x$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)=f(x_0)$.

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции *f(x)* можно перейти к пределу под знаком функции.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e.$

Дадим другое определение непрерывности функции в точке. Для этого введем в рассмотрение

$$\Delta x=x-x_0 \quad \text{и} \quad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

которые называются соответственно приращениями аргумента и функции.

Определение. *y=f(x)* называется ***непрерывной в точке*** $\mathbf{x_0}$, если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

7.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Определение. Функция *y=f(x)* называется ***непрерывной в интервале (a,b)***, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция *y=f(x)* называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна в *(a,b)*, в точке $x=a$ непрерывна справа, в точке $x=b$ непрерывна слева.

7.3. Точки разрыва функции и их классификация

Определение. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции *y=f(x)*, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$, при этом:

а) если $A_1=A_2$, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***; б) если $A_1\neq A_2$, то точка x_0 называется ***точкой конечного разрыва***, при этом величину $|A_1-A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

7.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

Теорема. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

□ Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на *X*, тогда $\forall x_0\in X$ будем иметь

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)\cdot\varphi(x_0)=F(x_0).\blacksquare$$

Остальные утверждения доказываются аналогично.

Теорема. Пусть $u = f(x)$ непрерывна в точке x_0, $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, тогда $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

□ $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)]. \quad \blacksquare$$

Теорема. Если $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $x\in[a,b]$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ также непрерывна и монотонна на $y\in[c,d]$.

(Без доказательства)

Замечание. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

7.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема (Больцано – Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Следствие. Если функция непрерывна на $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c)=0$.

8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

8.1. Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть $y = f(x),\ x \in (a,b)$. Проделаем следующие операции:

– $x \in (a,b)$ дадим приращение $\Delta x : x + \Delta x \in (a,b)$;

– найдем соответствующие приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\Delta y / \Delta x$;

– найдем этот предел при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают

$$f'_x;\ \ f'(x);\ \ dy/dx;\ \ y'_x.$$

Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке (a,b), называется ***дифференцируемой в этом интервале***.

Значение производной $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается:

$$f'(x_0),\quad y'\big|_{x=x_0},\ \ y'(x_0).$$

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки, которая за время Δt проходит путь ΔS, тогда средняя скорость точки есть

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Значение $V_{\text{ср}}$ будет вычисляться тем точнее, чем меньше Δt, т.е. получим скорость в точке, если $\Delta t \to 0$. Т.о.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Механический смысл производной есть скорость движения материальной точки.

Рассмотрим некоторую кривую L на плоскости, описываемую $y = f(x)$. Возьмем произвольную точку $M \in L$, тогда угловой коэффициент секущей, проходящей через эту точку, есть

$$k_{\text{сек}} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то секущая стремится к касательной к кривой L в точке M, т.е.

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной есть угловой коэффициент касательной, проведенной в данной точке к графику функции.

Т.о. можно записать уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, т.е.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

аналогичным образом можно записать уравнение нормали к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

8.2. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

□ $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф.},$$

тогда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x,$$

т.е. это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad \blacksquare$$

Обратное утверждение неверно! Контрпример: $y = |x|$ в точке $x = 0$.

Определение. Если $y = f(x)$ имеет непрерывную $y' = f'(x)$ в (a,b), то $f(x)$ называется ***гладкой***.

8.3. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в (a,b).

Теорема. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

□ Обозначим $y = u \pm v$, тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'. \qquad \blacksquare$$

Теорема. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

□ Пусть $y = uv$, тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x) + \Delta u\right] \cdot \left[v(x) + \Delta v\right] - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)u(x) + u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u \Delta v - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] =$$

$$= v(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'v + uv'.$$ ■

Теорема. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$

□ Пусть $y = \frac{u}{v}$, тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + v(x)\Delta u - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{\Delta x\left[v(x)+\Delta v\right]v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x\left(v^2 + v\Delta v\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} =$$

$$= \frac{v\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$ ■

8.4. Производная сложной и обратной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f\left[\varphi(x)\right]$ – сложная функция.

Теорема. $y'_x = y'_u \cdot u'_x.$

□ Из того, что $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или $\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u.$

Из того, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x \;\Rightarrow\; \Delta u = u'_x \Delta x + \beta \Delta x,$

тогда

$$\Delta y = y'_u \left(u'_x \Delta x + \beta \Delta x \right) + \alpha \left(u'_x \Delta x + \beta \Delta x \right),$$

т.е.

$$\Delta y = y'_u u'_x \Delta x + y'_u \beta \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha \beta \Delta x$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u u'_x + y'_u \beta + u'_x \alpha + \alpha \beta,$$

откуда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad \blacksquare$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b), причем $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

□ $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, т.е. обратная функция тоже монотонна и непрерывна, и, в силу ее монотонности, ее приращение не равно нулю.

Если $\Delta y \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}, \text{ т.е. } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad \blacksquare$$

8.5. Таблица производных основных элементарных функций

Таблица 1

y	a^x	e^x	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$
y'	$a^x \ln a$	e^x	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$

$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{cth} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

9.1. Неявно заданная функция

Если функция задана в виде $y = f(x)$, то говорят, что она задана в явном виде.

Определение. Под ***неявным заданием*** функции понимаем задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Алгоритм вычисления производной от такой функции следующий: продифференцировать уравнение $F(x, y) = 0$ по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

9.2. Функция, заданная параметрически

Пусть $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ где t – вспомогательная переменная.

Найдем y'_x. Для этого предположим, что $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемы, причем $t=\varphi(x)$, тогда

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Запишем $y = f(x) = f\left[\varphi(x)\right]$, откуда

$$y'_x = f'_t \cdot t'_x \;\Rightarrow\; y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

9.3. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y=u^v$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$, тогда

$$\ln y = v \ln u \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{v}{u} u' \;\Rightarrow$$

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) \;\Rightarrow\; \left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

10. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Определение. ***Производной n-го порядка*** (или n-ой производной) называется производная от производной (n – 1) порядка:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

10.2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть в момент времени t скорость материальной точки V, а в момент $t+\Delta t$ – скорость $V+\Delta V$, тогда $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ – среднее ускорение точки за Δt.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=a-\text{ ускорение в точке,}$$

но

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=V,$$

поэтому

$$S_t''=V_t'=a.$$

Вывод. Вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки.

10.3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Имеем $F(x,y)=0$, тогда, продифференцировав его по x, получим выражение, в которое войдут x, y, y'. Вновь продифференцируем по x как неявную функцию и получим y''.

10.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть $y=y(x)$: $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases}$ тогда $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$.

Найдем вторую производную $y_x''=\left(y_x'\right)_x'=\left(y_x'\right)_t'\cdot t_x'=\dfrac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}$, и т.д.

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

11.1. Понятие дифференциала функции

Пусть $y=f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0,$$

тогда, по теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф., имеем

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\,\Delta x,$$

где $\alpha -$ б.м.ф.

Определение. ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения

$$dy = f'(x)\Delta x,$$

где $dy -$дифференциал первого порядка.

Пусть $y = x$, тогда $dy = dx$, поэтому окончательно

$$dy = f'(x)dx.$$

Отсюда следует

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

11.2. Геометрический смысл дифференциала функции

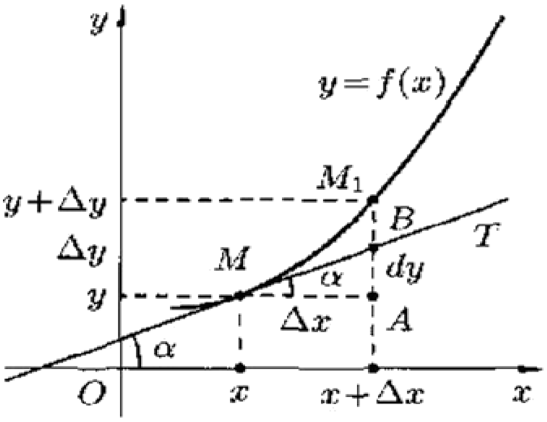

Рис. 1

T – касательная в точке $M(x, y)$.

Из $\Delta MBA \Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x},$$

т.е.

$$|AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x)dx = dy,$$

т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx (рис. 1).

11.3. Основные теоремы о дифференциалах

Теорема.

$d(u+v)=du+dv;$

$d(uv)=v\,du+u\,dv;$

$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\quad (v\neq 0)$

□ $d(uv)=(uv)'\,dx=(u'v+uv')dx=vu'dx+uv'dx=vdu+udv.$ ■

Остальные доказываются аналогично.

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

□ Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, т.е. $y=f\left[\varphi(x)\right]$, тогда $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, но $y'_x dx=y'_u\cdot u'_x dx$, т.е. $dy=y'_u\,du$. ■

11.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y=f(x)$, тогда $dy=f'(x)dx$, поэтому

$$d(dy)=d\left[f'(x)dx\right]\Rightarrow d^2y=d\left[f'(x)\right]dx+f'(x)d(dx)=$$
$$=f''(x)dxdx+\underbrace{f'(x)1'_x dx}_{=0}=f''(x)dx^2.$$

Обобщая этот результат, получим

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n.$$

12. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

12.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b); $f(a)=f(b)$, то $\exists c\in(a,b)$, в которой $f'(c)=0$.

□ Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $M-\max f(x)$, $m-\min f(x)$; $M,m\in[a,b]$ (если $M=m$, то $f(x)=\text{const}\Rightarrow f'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$).
Если $M\neq m$, то M или $m\in(a,b)$ (рис. 2), т.к. $f(a)=f(b)$.

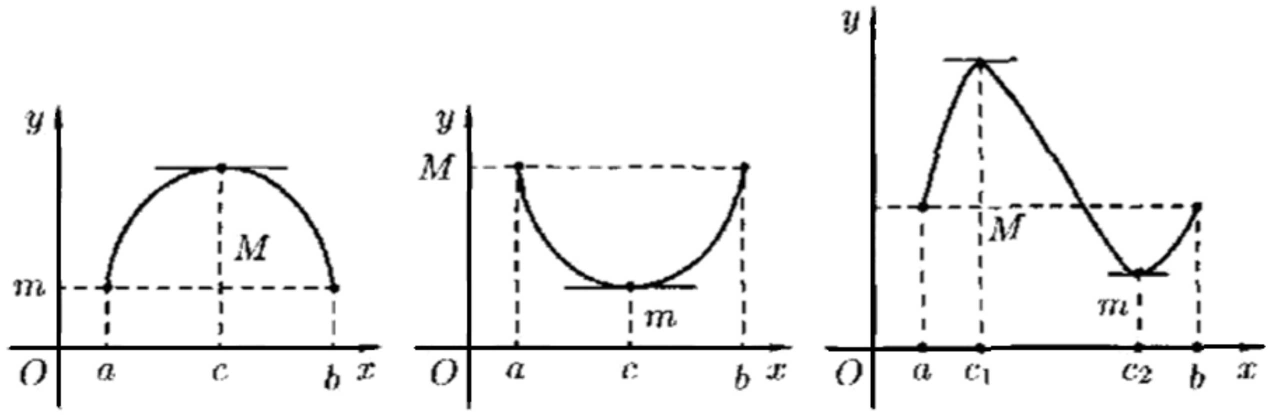

Рис. 2

Пусть, например, M в точке $x=c\in(a,b)$, т.е. $f(c)=M$. Тогда $\forall x\in(a,b)$:

$$f(c)\geq f(x).$$

Найдем $f'(x)$ в точке c:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x},$$

откуда $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$.

Если $\Delta x>0$ (справа точки c), то

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0,\Rightarrow f'(c)\leq 0.$$

Если $\Delta x < 0$ (слева точки c)

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0, \Rightarrow f'(c) \geq 0$$

$\Rightarrow f'(c) = 0.$ ■

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, то $\exists c \in (a,b)$, для которой

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

□ Отметим, что $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, т.к. по теореме Ролля нашлась бы точка c: $\varphi'(c) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

$F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, тогда $\exists c$: $c \in (a,b)$, что $F'(c) = 0$, но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x),$$

$\Rightarrow$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = 0,$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$ ■

Теорема Лагранжа. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), то $\exists c \in (a,b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

□ Положим, $\varphi(x)=x$, тогда, воспользовавшись доказательством теоремы Коши, находим

$$\varphi(b)-\varphi(a)=b-a;\quad \varphi'(x)=1;\quad \varphi'(c)=1,$$

откуда

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$\Rightarrow$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$ ■

Следствие 1. Если $f'(x)=0,\ x\in(a,b)$, то $f(x)=\mathrm{const}$.

□ Пусть $f'(x)=0,\ \forall\in(a,b)$. Возьмем произвольные x_1 и x_2 из (a,b), и пусть $x_1<x_2$, тогда по теореме Лагранжа $\exists c\in(x_1,x_2)$, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

но $f'(x)=0\Rightarrow f'(c)=0$, где $x_1<c<x_2\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0$, т.е. $f(x_2)=f(x_1)$, а т.к. x_1,x_2 – произвольные из (a,b), то $f(x)=\mathrm{const}$. ■

Следствие 2. Пусть $f_1'(x)=f_2'(x),\ x\in(a,b)$, тогда

$$f_2(x)-f_1(x)=\mathrm{const}.$$

□ $\left(f_2(x)-f_1(x)\right)'=f_2'(x)-f_1'(x)=0,\ \Rightarrow$ по сл. 1 $f_2(x)-f_1(x)=\mathrm{const}$. ■

12.2. Правило Лопиталя

Теорема (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

□ Применим к $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для $[x_0, x]$, тогда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, c\in(x_0,x)$$

или, учитывая $f(x_0)=\varphi(x_0)$ (по условию теоремы):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Пусть $x\to x_0$, тогда $c\to x_0$, поэтому $c\to x \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$ ■

Теорема (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ ***).*** Пусть $f(x), \varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= =\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty, \varphi'(x)\neq 0$. Тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

(Без доказательства)

12.3. Возрастание и убывание функций

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема (необходимые условия). Если дифференцируемая на (a,b) $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)\geq 0 \left(f'(x)\leq 0\right) \forall x\in(a,b)$.

□ Пусть $f(x)$ возрастает (a,b). Возьмем x и $x+\Delta x$, $x\in(a,b)$ и $x+\Delta x\in(a,b)$. Рассмотрим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$;

если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$, тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, т.к. числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Аналогично доказывается случай убывания $f(x)$.

Теорема (достаточные условия). Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b).

□ Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{где } c \in (x_1, x_2).$$

Т.к. $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$ $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. ■

12.4. Максимум и минимум функций

Определение. Точка x_0 называется ***точкой максимума*** $y = f(x)$, если существует такая $\delta-$окрестность точки x_0, что $\forall x \neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума***. Максимум и минимум называются ***экстремумом***.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x) = 0$.

□ Пусть точка x_0 – точка максимума, тогда

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x),$$

но $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, если $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, если $\Delta x < 0$.

С другой стороны,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

поэтому $f'(x_0) \geq 0,$ когда $\Delta x > 0$ и $f'(x_0) \leq 0,$ когда $\Delta x < 0,$ $\Rightarrow f'(x) = 0.$ ■

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta-$окрестности точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то x_0 – точка максимума, с "-" на "+", то x_0 – точка минимума.

(Доказательство очевидно)

Вывод. Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее производные.

Теорема. Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 – максимум, если $f''(x_0) < 0$; точка x_0 – минимум, если $f''(x_0) > 0$.

□ Пусть $f''(x_0) > 0$. Т.к.

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Т.о., если $\Delta x < 0,$ то $f'(x_0 + \Delta x) < 0,$

если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0, \Rightarrow$ точка x_0 – точка максимума. ■

12.5. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Сформулируем правило нахождения наибольшего и наименьшего значений $y = f(x)$ на $[a, b]$.

1) найти критические точки функции на (a, b);

2) вычислить значение функции в найденных критических точках;

3) вычислить значение функции при $x=a$ и $x=b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

12.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на (a,b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале, а если ниже – ***выпуклым вверх***. Точка графика, отделяющая части выпуклости, называется ***точкой перегиба*** (см. на рис. 3 точку *M*).

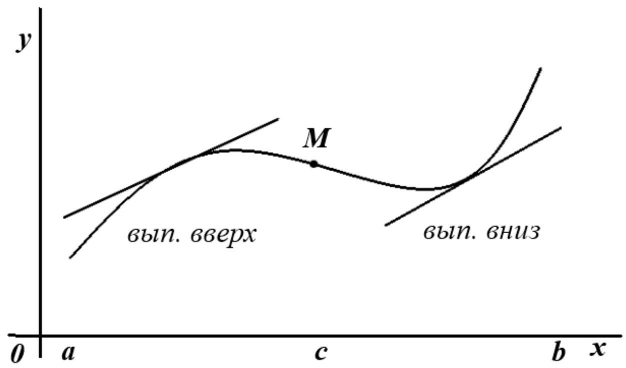

Рис. 3

Теорема. Если $y=f(x)$ на (a,b) имеет $f''(x)<0$, то на (a,b) – выпуклость вверх, если $f''(x)>0$ – выпуклость вниз.

□ Пусть $f''(x_0)<0 \ \forall x\in(a,b)$. Возьмем точку x_0, тогда уравнение касательной

$$y_{\text{кас}}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

или

$$y_{\text{кас}}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Вычтем из $y=f(x)$ почленно уравнение касательной

$$y-y_{\text{кас}}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где $x_0 < c < x$, тогда

$$y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left[f'(c) - f'(x_0) \right](x - x_0).$$

По теореме Лагранжа: $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$, тогда

$$y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Если $x > x_0 \Rightarrow c > x_0 \Rightarrow f''(c_1) < 0 \Rightarrow y - y_{\text{кас}} < 0.$

Если $x < x_0 \Rightarrow c < x_0 \Rightarrow f''(c_1) << 0 \Rightarrow y - y_{\text{кас}} < 0.$ ■

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой $f''(x) = 0$ (или не существует), меняет знак, то точка x_0 – точка перегиба.

□ Пусть $f''(x_0) < 0$ при $x < x_0$, и $f''(x_0) > 0$ при $x > x_0$. Это означает, что слева от точки x_0 – выпуклость вверх, справа – выпуклость вниз $\Rightarrow M\left[x_0, f(x_0)\right]$ – точка перегиба. ■

12.7. Асимптоты графика функции

Определение. ***Асимптотой*** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Прямая $x = a$ – вертикальная асимптота, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \text{ или } \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty, \text{ или } \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty.$$

Рассмотрим вопрос о наклонной асимптоте, имеющей уравнение

$$y = kx + b.$$

Пусть $M(x, y) \in L: \ y = f(x)$, тогда расстояние от точки M до касательной

$$d = \left| \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right|,$$

но из $d \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(kx - y + b) = 0$, т.е.

$$kx - y + b = \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{ б.м.ф.}$$

Запишем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}\right).$$

Т.к. $\dfrac{b}{x} \to 0$, и $\dfrac{\alpha}{x} \to 0$, то

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}, \text{ и } \quad b = \lim_{x\to\infty}(kx - y).$$

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т.е. $y = b -$ горизонтальная асимптота.

12.8. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование $y = f(x)$ проводится в следующей последовательности:

1) найти область определения функции;

2) найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат;

3) найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$);

4) выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида;

5) найти асимптоты графика функции;

6) найти интервалы монотонности функции;

7) найти экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для того чтобы вычислить значения $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n.

13.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$$

Для нахождения $A_0, A_1, \ldots A_n$ продифференцируем $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1};$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2};$$

....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 A_n.$$

Возьмем $x = x_0$, тогда

$$P_n(x_0) = A_0 = P_n(x_0), \qquad P_n'(x_0) = 1!A_1 = P_n'(x_0),$$

$$P_n''(x_0) = 2!A_2 = P_n''(x_0), \qquad P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3 = P_n'''(x_0),$$

....

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 A_n = P_n^{(n)}(x_0),$$

т.е.

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ – формула Тейлора для многочленов.

13.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Теорема. Если $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)-$ го порядка включительно, то $\forall x$ из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0, x)$, такая, что $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$

Это формула Тейлора, а при $x_0 = 0$ – формула Маклорена.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} -$$

остаточный член.

Глава 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал).

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции для $f(x)$ на (a,b), если $\forall x \in (a,b)$:

$$F'(x) = f(x) \quad \left(dF(x) = f'(x)dx\right).$$

Теорема. Если $F(x)-$ первообразная для $f(x)$ на (a,b), то множество всех первообразных задается формулой $F(x)+C$, где $C=\mathrm{const}$.

□ $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)+C'=f(x)$. Пусть теперь $\Phi(x)\neq F(x)$ и $\Phi'(x)=f(x)$, тогда

$$\left[\Phi(x)-F(x)\right]'=f(x)-f(x)=0 \;\Rightarrow\; \Phi(x)=F(x)+C. \qquad \blacksquare$$

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

$f(x)-$ подынтегральная функция, $f(x)dx-$ подынтегральное выражение, $x-$ переменная интегрирования, $\int-$ знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием этой функции***.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Имеет место утверждение: «Всякая непрерывная на (a,b) функция имеет на этом промежутке первообразную».

14.2. Свойства неопределенного интеграла

1) $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,\quad \left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$

□ $d\left[\int f(x)dx\right]=d\left[F(x)+C\right]=dF(x)+dC=F'(x)dx=f(x)dx$

$$\left[\int f(x)dx\right]'=\left[F(x)+C\right]'=F'(x)+C'=f(x). \qquad \blacksquare$$

2) $\int dF(x)=F(x)+C$

□ $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$ ■

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \neq 0 -$ постоянная

□ $\int \alpha f(x)dx = \int \alpha F'(x)dx = \int [\alpha F(x)]' dx = \int d[\alpha F(x)] = \alpha F(x) + C_1 =$

$$= \alpha \left[F(x) + \frac{C_1}{\alpha} \right] = \alpha [F(x) + C] = \alpha \int f(x)dx. \quad ■$$

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

□ Пусть $F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$, тогда

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int [F'(x) \pm G'(x)]dx = \int [F(x) \pm G(x)]' dx =$

$= \int d[F(x) \pm G(x)] = F(x) \pm G(x) + C = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] =$

$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \quad ■$$

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$.

□ Пусть $u = \varphi(x)$, тогда $F(u) = F[\varphi(x)]$, поэтому

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du \quad \Rightarrow$$

$$\int f(u)du = \int d[F(u)] = F(u) + C. \quad ■$$

14.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Таблица 2

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$ $\left(\int dx = x + C\right)$;	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

Окончание табл. 2

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\| + C;$
$\int e^x dx = e^x + C;$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C;$
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$
$\int \cos x dx = \sin x + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\| + C;$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C;$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C;$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C.$

15. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

15.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

15.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)dx.$$

Тогда $x = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

15.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x), v = v(x)$, тогда $d(uv) = udv + vdu.$

Интегрируя

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du, \text{ или } \int u dv = uv - \int v du.$$

– ***формула интегрирования по частям***.

Типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P(x) e^{kx} dx, \int P(x) \sin kx\, dx, \int P(x) \cos kx\, dx,$ где $P(x)$ – многочлен, $k = \text{const}$.

Удобно положить $u = P(x),\ dv$ – остальное.

2. Интегралы вида $\int P(x) \arcsin kx\, dx, \int P(x) \arccos kx\, dx,$ $\int P(x) \operatorname{arctg} kx\, dx, \int P(x) \operatorname{arcctg} kx\, dx, \int P(x) \ln x\, dx.$

Удобно положить $P(x) dx = dv$.

Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx\, dx, \int e^{ax} \cos bx\, dx,\ a, b = \text{const}$.

За $u = e^{ax}$.

16. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

16.1. Понятие о рациональных функциях

Определение. Функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $n \in \mathrm{N},\ a_i \left(i = \overline{0, n}\right)$ – постоянные коэффициенты, называется ***многочленом***, n – степень многочлена.

Определение. ***Корнем многочлена*** называется x_0: $P_n(x_0) = 0$.

Теорема. Если x_1 – корень $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $(x - x_1)$.

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий $P_n(x), n>0$ имеет по крайней мере один корень (действительный или комплексный).

(Без доказательства)

Теорема. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, ...x_n$ – корни многочлена.

□ Пусть $P_n(x)$: $P_n(x_1)=0$, тогда $P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$, но $P_{n-1}(x)$: $P_{n-1}(x_2)=0$, тогда $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)P_{n-2}(x)$ и т.д. Продолжая этот процесс, получим

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n). \qquad ■$$

Определение. Множители вида $(x-x_i)$ будем называть ***линейными***.

Если в разложении $P_n(x)$ линейный множитель встречается k раз, то такой корень называется ***корнем кратности k.***

Теорема. Если $P_n(x)\equiv 0$, то $a_i=0$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$.

Теорема. Если $P_n(x)\equiv Q_n(x)$, то $a_i=b_i$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$.

Теорема. Всякий многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}\times$$
$$\times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}...\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m},$$

при этом $k_1+k_2+...+k_r+2(s_1+s_2+...+s_m)$.

Определение. ***Дробно-рациональной функцией*** (или ***рациональной дробью***) называется функция

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Рациональная дробь называется ***правильной***, если $m<n$, в противном случае – ***неправильной***.

Утверждение. Пусть даны $P_m(x)$ и $Q_n(x)$, $m\ge n$, тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=L_{m-n}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_n(x)},\quad (k<n).$$

Это можно сделать путем деления $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ в столбик.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

$(\mathrm{I})\ \dfrac{A}{x-a}$; $(\mathrm{II})\ \dfrac{A}{(x-a)^k}\ (k\ge 2)$; $(\mathrm{III})\ \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \left(p^2-4q<0\right)$;

$(\mathrm{IV})\ \dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ \left(p^2-4q<0\right)$ называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III, IV*** **типов.**

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}}.$$

Пример.

1) $$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3};$$

2) $$\frac{x^3+1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

3) $$\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

Для нахождения A_1, A_2,…, B_1, B_2,… (см. теорему) можно применить метод сравнения коэффициентов. Суть метода такова:

1. Правую часть приведем к общему знаменателю.
2. Т.к. в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители.
3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему линейных уравнений, из которой и определяются неизвестные коэффициенты разложения.

Пример. Представить дробь

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}$$

в виде суммы простейших дробей.

Решение:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5},\text{ т.е.}$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A\left(x^2-2x+5\right)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)};$$

$\Rightarrow\quad 2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$

т.е. $2x^2-3x-3\equiv(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C),$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} 2 = A + B, \\ -3 = -2A - B + C, \\ -3 = 5A - C, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -1;\ B = 3;\ C = -2$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)\left(x^2 - 2x + 5\right)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}.$$

16.2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

I. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = \frac{A}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C.$$

III. $$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx =$$

$$= \left[x + \frac{p}{2} = t,\ \ x = t - \frac{p}{2},\quad dx = dt;\quad q - \frac{p^2}{4} = a^2 \right] =$$

$$= \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot \ln\left(t^2 + a^2\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot \ln\left(x^2 + px + q^2\right) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

IV. $$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx, \quad k \ge 2, \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Данный интеграл подстановкой $x+\dfrac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k},\quad a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right].$$

Найдем

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\left[\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)= \\ & =\dfrac{1}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Дальнейшие действия очевидны.

17. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

17.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Вычисление неопределенных интегралов типа

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

которая называется ***универсальной***.
Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt,$ поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt.$$

Здесь $R_1(t)$ – рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна по $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $\cos x = t$;

2) если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна по $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $\sin x = t$;

3) если $R(\sin x, \cos x)$ четна по $\sin x$ и $\cos x$, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}.$$

Решение: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, тогда

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{3+3t^2+2t+1-t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2(t^2+t+2)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Решение:

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin^2 x)} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x, \cos x), \text{ то}$$

$$\operatorname{tg} x = t \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}\, \operatorname{tg} x + C.$$

17.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t,$ если $n-$целое положительное нечетное число;

2) подстановка $\cos x = t,$ если $m-$целое положительное нечетное число;

3) формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

если m и $n-$ целые неотрицательные четные числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t,$ если $m+n-$ четное неотрицательное число.

Пример. Найти интеграл

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx.$$

Решение:

$$\sin x = t; \quad x = \arcsin t; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt; \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}, \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int t^4 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt =$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right) \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right) dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\left(\sin 2x\right) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \cos^{-1} x \sin^{-3} x\, dx.$$

Решение: $m+n=-4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = t; \quad x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2};$

$\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, поэтому

$$\int \cos^{-1} x \sin^{-3} x\, dx = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

17.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx$$

вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Пример. Найти интеграл

$$\int\sin 8x\cos 2x\,dx.$$

Решение:

$$\int\sin 8x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 10x)\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C.$$

18. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

18.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\;dx,\quad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

которые называются ***неопределенными интегралами*** от квадратичных иррациональностей.

Эти интегралы вычисляются следующим образом:

1) под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c=$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

и

2) сделать подстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t.$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

Решение: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \left[4x^2+2x+1 = 4\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right]\right] =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} = \left[\begin{array}{c} x+\frac{1}{4}=t \\ x=t-\frac{1}{4};\, dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right| + C.$$

Интегралы типа $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$ где $P_n(x)-$ многочлен степени *n*, можно вычислить, пользуясь формулой

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)-$ многочлен степени *n*-1 с неопределенными коэффициентами, $\lambda-$также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находят из тождества путем дифференцирования предыдущего выражения

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right]' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной *x*, т.е. использовать метод сравнения.

Пример. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx.$$

Решение. Имеем

$$I=\left(Ax+B\right)\sqrt{1-2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

после дифференцирования

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}=A\sqrt{1-2x-x^2}+\left(Ax+B\right)\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

т.е.

$$x^2=A\left(1-2x-x^2\right)+\left(Ax+B\right)\left(-1-x\right)+\lambda;$$

$$x^2=A-2Ax-Ax^2-Ax-Ax^2-B-Bx+\lambda;$$

$$x^2=-2Ax^2+\left(-3A-B\right)x+A-B+\lambda;$$

$$\begin{cases}1=-2A;\\ 0=-3A-B;\\ 0=A-B+\lambda.\end{cases}\qquad\Rightarrow A=-\frac{1}{2};\ B=\frac{3}{2};\ \lambda=2\Rightarrow$$

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-\left(x+1\right)^2}}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+$$

$$+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

18.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right]dx,$ где $a,b,c,d-$ действительные числа, $\alpha,\beta,...,\delta,\gamma-$ натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,$$

где $k-$наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\alpha/\beta,...,\delta/\gamma$.

Действительно, из подстановки следует $x=\dfrac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx=\dfrac{-dkt^{k-1}\left(ct^k-a\right)-\left(b-dt^k\right)ckt^{k-1}}{\left(ct^k-a\right)^2}dt$, т.е. x и dx выражаются через рациональные функции от t.

При этом и каждая степень дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример. Найти интеграл

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)}-\sqrt{x+2}}.$$

Решение. Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{2}$ есть $6 \Rightarrow$

$$x+2=t^6;\quad x=t^6-2;\quad dx=6t^5dt;\quad t=\sqrt[6]{x+2}\quad\Rightarrow$$

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^4-t^3}=6\int\frac{t^2}{t-1}dt=6\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}dt=6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3t^2+6t+$$
$$+6\ln|t-1|+C=3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C.$$

18.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx;\quad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\quad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью тригонометрических подстановок

$$x=a\sin t;\qquad x=a\,\mathrm{tg}\,t;\qquad x=\frac{a}{\sin t}.$$

Пример. Найти интеграл

$$I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$$

Решение. $x=2\sin t;\quad dx=2\cos t\,dt;\quad t=\arcsin\frac{x}{2}.$

$$I=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t\,dt=\int\frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=$$

$$=-\operatorname{ctg}t-t+C=C-\arcsin\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right).$$

18.4. Интегралы типа $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x+\frac{b}{2a}=t,$ интегралы указанного типа можно привести к интегралам вида $\int R\left(t,\sqrt{a^2-t^2}\right)dt;\quad \int R\left(t,\sqrt{a^2+t^2}\right)dt,\quad \int R\left(t,\sqrt{t^2-a^2}\right)dt.$

18.5. Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы типа $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (называются интегралами от дифференциального бинома), где $a,b-$ действительные числа; $m,n,$ $p-$рациональные числа, берутся лишь в случае, когда хотя бы одно из чисел $p,\ \frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым.

Рационализация интеграла в этих случаях осуществляется следующими подстановками:

1) если $p-$ целое число, то $x=t^k$, где $k-$ наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}-$целое число, то $a+bx^n=t^s$, где $s-$знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p-$ целое число, то $a+bx^n=x^n t^s$, где $s-$ знаменатель дроби p.

Пример. Найти

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx.$$

Решение. Т.к.

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx,$$

то $m=-\frac{1}{2};\quad n=\frac{1}{4};\quad p=\frac{1}{3};\quad \frac{m+1}{n}=2\quad\Rightarrow\quad 1+\sqrt[4]{x}=t^3;\quad x=\left(t^3-1\right)^4;$ $dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt;\quad t=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}.$

Т.о.

$$I=\int\frac{t}{\left(t^3-1\right)^2}12t^2\left(t^3-1\right)^3dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=\frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Глава 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

19. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

19.1. Определение интеграла по Риману

Прежде всего введем понятие разбиения τ отрезка $[a,b]$:

$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k=b$ или кратко $\tau=\left\{x_i\right\}_{i=0}^{i=k}$, причем $\left[x_{i-1},x_i\right]-$ отрезок разбиения τ, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Величину

$$\delta_\tau=\max_{i=\overline{1,k}}\Delta x_i$$

будем называть ***мелкостью разбиения*** τ.

Пусть теперь дана $f(x)$, $x \in [a,b]$ и пусть имеется некоторое разбиение τ для $[a,b]$ (рис. 4). Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, тогда составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, ..., \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется ***интегральной суммой Римана***.

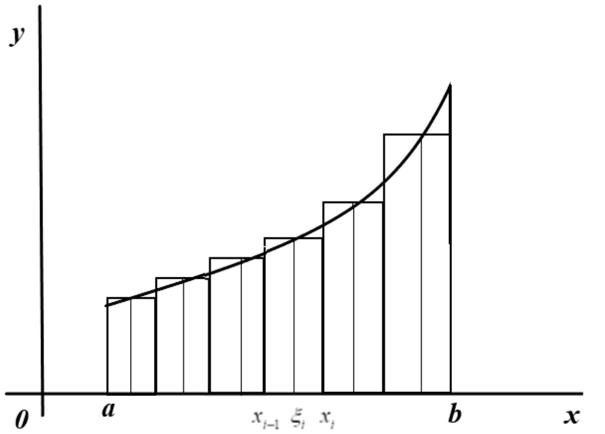

Рис. 4

Если $f(x) \geq 0$, то каждое слагаемое σ_τ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и с высотой $f(\xi_i)$.

Вся сумма σ_τ равна площади ступенчатой фигуры.

Определение. $f(x)$ называется ***интегрируемой (по Риману)*** на $[a,b]$, если $\exists A$; $\forall \tau_n$

$$\tau_n = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{i=k_n}, \ n = 1, 2, ...,$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, и $\forall \xi_i^{(n)}$: $\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\Delta x_i^{(n)} = A,$$

где $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$. При выполнении вышеперечисленных условий число A называется ***(римановым) определенным интегралом*** и обозначается через

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где x – переменная интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция; a, b – нижний и верхний пределы интегрирования; $[a,b]$ – промежуток интегрирования.

19.2. Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

□ Доказательство от противного, т.е. пусть $f(x),\ x\in[a,b]$ не ограничена и пусть

$$\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k},$$

в силу неограниченности $f(x)$ на $[a,b]$, она, по крайней мере, не ограничена на каком-то отрезке разбиения, например, на $[x_0,x_1]$, т.е. $\exists\,\xi_1^{(n)}\in[x_0,x_1];\ n=1,2,...,$ что

$$\lim_{n\to\infty} f\left[\xi_1^{(n)}\right]=\infty.$$

Но, по определению интеграла по Риману, $\sum\limits_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ будет иметь определенное значение $\neq\infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_\tau=\lim_{n\to 2}\left\{f\left[\xi_1^{(n)}\right]\Delta x_1+\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right\}=\infty,$$

а это значит, что $f(x)$ неинтегрируема. ■

Замечание. Обратное утверждение неверно. Контрпримером служит функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Действительно, если ξ_i выбрать рациональными, то $\sigma_\tau=1$, а если ξ_i выбрать иррациональными, то $\sigma_\tau=0$, а это означает, что предела нет.

19.3. Верхние и нижние суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу

Пусть $f(x),\ x\in[a,b]$ и есть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$, тогда, положим,

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x),\qquad m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x);\qquad i=\overline{1,k}.$$

Составим
$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i; \qquad s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i;$$
очевидно, что
$$s_\tau \le S_\tau.$$

Назовем S_τ и s_τ соответственно ***верхней и нижней суммами Дарбу.***

Свойства сумм Дарбу

1. Если $f(x)$ ограничена, то $\forall \tau \quad S_\tau$ и s_τ определены.

□ В силу ограниченности $f(x)$: $M_i, m_i \left(i=\overline{1,k}\right)$ – конечны, и поэтому S_τ и s_τ также конечны. ■

2. Если $\delta_\tau < \delta_{\tau'}$, то $S_{\tau'} < S_\tau$ и $s_\tau < s_{\tau'}$.

□ Пусть
$$\tau = \left\{x_i\right\}_{i=0}^{i=k} \text{ и } \tau' = \left\{x'_j\right\}_{j=0}^{j=k'}, \text{ тогда}$$
$$m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \quad i=\overline{1,k}; \qquad m'_j = \inf_{x'_{j-1}\le x\le x'_j} f(x), \quad j=\overline{1,k'}.$$

Т.к. $\left[x'_{j-1}, x'_j\right] \subset \left[x_{i-1}, x_i\right]$, то $m_i \le m'_j$. Кроме того,
$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i},$$
тогда
$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Аналогично доказывается, что $S_{\tau'} < S_\tau$. ■

Следствие. $\forall \tau_1, \tau_2$: $[a,b] \Rightarrow s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$.

□ Положим, $\tau' = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, и воспользуемся свойством 2.

$\Rightarrow$ суммы Римана и Дарбу связаны неравенствами
$$s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau.$$ ■

3. Если σ_τ – интегральная сумма Римана для τ, то
$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots \xi_k} \sigma_\tau, \qquad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots \xi_k} \sigma_\tau.$$

□ Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ для $[a,b]$ и $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ и пусть X_i – числовые множества, $a_i=\mathrm{const}>0,$ то для множества

$$X=\left\{x\colon\ x=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i,\ \ x_i\in X_i,\ \ i=\overline{1,k}\right\}$$

справедливы равенства

$$\sup X=\sum_{i=1}^{k}a_i\sup X_i;\quad \inf X=\sum_{i=1}^{k}a_i\inf X_i.$$

Поэтому

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{k}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\inf_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}f(\xi_i)\Delta x_i=\inf_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\Delta x_i=\inf_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}\sigma_\tau.$$

Аналогично

$$S_\tau=\sum_{i=1}^{k}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\sup_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}f(\xi_i)\Delta x_i=\sup_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\Delta x_i=\sup_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}\sigma_\tau.$$ ■

4. $S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\Delta x_i$, где $\omega_i(f)-$колебание f на $[x_{i-1},x_i]$.

□ Пусть $X,Y-$ числовые множества и

$$Z=\{z\colon\ z=x-y,\ \ x\in X,\ \ y\in Y\},$$

тогда

$\sup Z=\sup X-\inf Y$. Поэтому

$$M_i-m_i=\sup_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}f(x)-\inf_{x_{i-1}\le\xi_i\le x_i}f(x)=$$

$$=\sup_{\substack{x_{i-1}\le x'\le\xi_i\\ x_{i-1}\le x''\le\xi_i}}\left[f(x'')-f(x')\right]=\omega_i(f),\ \ i=\overline{1,k}\quad\Rightarrow$$

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\omega_i(f)\Delta x_i.$$ ■

Определение. $I_*=\sup\limits_{\tau}s_\tau,\quad I^*=\inf\limits_{\tau}S_\tau$ называются соответственно ***нижним и верхним интегралами Дарбу***, причем $I_*\le I^*$.

19.4. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

Теорема. Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\left(S_\tau - s_\tau\right) = 0.$$

Иными словами, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, что $\forall \tau$: $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|S_\tau - s_\tau\right| < \varepsilon,$$

но т.к. $s_\tau \le S_\tau$, то окончательно $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

□ Доказательство необходимости.

Пусть для $f(x)$ $I = \int_a^b f(x)dx -$ существует, т.е. $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $\delta_\tau < \delta$, то $\left|\sigma_\tau - I\right| < \varepsilon$ или $I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon$. По свойству 2 сумм Дарбу имеем

$$I - \varepsilon \le s_\tau \le S_\tau \le I + \varepsilon$$

или $0 \le S_\tau - s_\tau \le 2\varepsilon$.

Доказательство достаточности.

Пусть для $f(x)$ выполнено условие $\lim_{\delta_\tau \to 0}\left(S_\tau - s_\tau\right) = 0$. Из определения нижней и верхней сумм Дарбу имеем

$$s_\tau \le I_* \le I^* \le S_\tau,$$

откуда $0 \le I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau \quad \Rightarrow \quad I_* = I^* = I$,

поэтому

$$s_\tau \le I \le S_\tau,$$

что равносильно двум неравенствам

$$0 \le I - s_\tau \le S_\tau - s_\tau; \quad 0 \le S_\tau - I \le S_\tau - s_\tau.$$

Поэтому $\lim_{\delta_\tau \to 0}\left(I - s_\tau\right) = \lim_{\delta_\tau \to 0}\left(S_\tau - I\right) = 0$,

т.е. $\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I$, но $s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau \quad \Rightarrow \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = 0.$ ■

19.5. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

Теорема. Функция, определенная и непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на нем.

□ Пусть $f(x),\ x\in[a,b]$ – непрерывна, тогда она ограничена. Возьмем $\forall\varepsilon>0,$ тогда $\exists\delta>0,$ что $\forall\xi\in[a,b]$ и $\forall\eta\in[a,b],$ удовлетворяющих $|\eta-\xi|<\delta$, выполняется неравенство

$$\left|f(\eta)-f(\xi)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k},$ причем $\delta_\tau<\delta;\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1};\ m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x);$ $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x),\ i=\overline{1,k}.$ Т.к. $f(x)$ – непрерывна, то

$$\exists\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\quad \text{и}\quad \exists\eta_i\in[x_{i-1},x_i],$$

что $f(\xi_i)=m_i;\ f(\eta_i)=M_i$, причем $|\eta_i-\xi_i|\le\Delta x_i\le\delta_\tau<\delta$

$$\Rightarrow\quad f(\eta_i)-f(\xi_i)=\left|f(\eta_i)-f(\xi_i)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

На основании этого запишем

$$0\le S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\left[f(\eta_i)-f(\xi_i)\right]\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i=\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\delta_\tau\to0}(S_\tau-s_\tau)=0.$ ■

Теорема. Функция, определенная и монотонная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на этом отрезке.

□ Пусть для определенности $f(x)$ – возрастает монотонно, т.е.

$$f(a)\le f(x)\le f(b),\qquad a\le x\le b,$$

т.е. $f(x)$ – ограниченная. Для $\forall\tau:\ \tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ имеем

$$m_i=f(x_{i-1}),\ M_i=f(x_i),\ i=\overline{1,k},$$

поэтому $S_\tau(f)-s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\Delta x_i\le$

$\le\delta_\tau\sum_{i=1}^{k}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]=\left[f(b)-f(a)\right]\delta_\tau$ (т.к. в сумме уничтожаются все слагаемые, кроме $f(b)$ и $f(a)$) $\Rightarrow$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\left[S_\tau(f)-s_\tau(f)\right]=0. \qquad \blacksquare$$

20. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

20.1. Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b dx=b-a.$

□ $\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i=b-a.$ ■

2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на $\left[a^*,b^*\right]\subset[a,b]$.

□ Пусть

$$m_i^*=\inf_{\left[x_{i-1}^*,x_i^*\right]}f(x);\qquad M_i^*=\sup_{\left[x_{i-1}^*,x_i^*\right]}f(x),\quad \Delta x_i^*=x_i^*-x_{i-1}^*,\quad i=\overline{1,k^*}.$$

Запишем

$$0\le S_{\tau^*}-s_{\tau^*}=\sum_{i=1}^{k^*}\left(M_i^*-m_i^*\right)\Delta x_i^*\le\sum_{i=1}^{k}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i=S_\tau-s_\tau\quad\Rightarrow$$

$\lim_{\delta_{\tau^*}\to 0}\left(S_{\tau^*}-s_{\tau^*}\right)=0.$ ■

3. Пусть $a<c<b.$ Если $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

□ Пусть $\tau \to [a,b]$; $\tau_1 \to [a,c]$; $\tau_2 \to [c,b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$, тогда $0 \le S_\tau - s_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_1} - s_{\tau_2} = \left(S_{\tau_1} - s_{\tau_1}\right) + \left(S_{\tau_2} - s_{\tau_2}\right)$ или, переходя к пределу при $\delta_\tau \to 0$ $\left(\delta_{\tau_1} \to 0, \delta_{\tau_2} \to 0\right)$, получим $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0}\left(S_\tau - s_\tau\right) = 0.$ ■

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)+g(x)$ интегрируема и

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

□ $\sigma_\tau(f+g) = \sum\limits_{i=1}^{k}\left[f(\xi_i)+g(\xi_i)\right]\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g), \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(f+g) = \lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(g), \text{ но}$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(f+g) = \int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)dx, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)dx.$$ ■

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $c = \text{const}$, то $cf(x)$– интегрируема и

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

□ $\sigma_\tau(cf) = \sum\limits_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f) \quad \Rightarrow$

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0}c\sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)dx.$$ ■

6. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)\cdot g(x)$– интегрируема.

(Без доказательства)

7. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx.$$

(Без доказательства)

8. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^a f(x)dx=0,\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

(Без доказательства)

9. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|-$интегрируема и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx,\quad a<b.$$

(Без доказательства)

Замечание. Доказательство приведенных свойств изложено в [1].

20.2. Теорема о среднем значении для определенного интеграла

Теорема. Пусть:

1) $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$;
2) $m\leq f(x)\leq M$, $x\in[a,b]$;
3) $g(x)$ не меняет знака на $[a,b]$, тогда $\exists\,\mu$, что $m\leq\mu\leq M$ и

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx.$$

□ Умножим неравенство $m\leq f(x)\leq M$ на $g(x)$:

при $g(x)\geq 0$ $\quad mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$;

при $g(x)\leq 0$ $\quad mg(x)\geq f(x)g(x)\geq Mg(x)$.

Проинтегрируем полученные неравенства:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx;$$

$$m\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)g(x)dx \ge M\int_a^b g(x)dx.$$

При $\int_a^b g(x)dx = 0 \quad \Rightarrow$ доказательство $\forall \mu$.

Рассмотрим случай $\int_a^b g(x)dx \ne 0$:

если $g(x) \ge 0$, то $\int_a^b g(x)dx > 0$; если $g(x) \le 0$, то $\int_a^b g(x)dx < 0$.

Производя деление неравенств на $\int_a^b g(x)dx$, получим в обоих случаях

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M,$$

тогда, полагая $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. ■

Следствие (Интегральная теорема о среднем). При дополнительном предположении непрерывности $f(x)$ $\exists \xi \in (a,b)$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx,$$

в частности при $g(x) = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

□ Вновь рассмотрим случай, когда $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$ и будем считать для определенности $g(x) \geq 0$, т.е. $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ $\exists \xi \in (a,b)$: что $\mu = f(\xi)$, взяв $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. ■

21. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

21.1. Непрерывность интеграла по верхнему пределу

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, тогда она интегрируема на $[a,x]$, где $a \leq x \leq b$ $\Rightarrow$ имеет смысл функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,$$

которая называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Теорема. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

□ Возьмем $x \in [a,b]$, и пусть $x + \Delta x \in [a,b]$, тогда

$$F(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = F(x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

поэтому

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta x \to 0} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = 0.$$ ■

21.2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу

Теорема. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

□ Нам нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0).$$

Т.к. $\Delta F = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$, то при $x = x_0$ $\quad \Delta F = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt,$

но

$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$ (по теореме о среднем), где $x_0 \le \xi \le x_0 + \Delta x,$ причем при $\Delta x \to 0 \quad \xi \to x_0$.

Т.о.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x_0).$$ ■

21.3. Существование первообразной у непрерывной функции

Теорема. Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна в его внутренних точках, то на этом отрезке существует ее первообразная.

□ Т.к. $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $F(x)$ – интеграл с переменным верхним пределом имеет смысл, а $\Rightarrow F(x)$ и есть первообразная, т.к. $F'(x) = f(x),\ x \in (a,b)$. ■

Из теоремы следует

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x),$$

откуда устанавливается связь между неопределенным и определенным интегралами

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Получим формулу дифференцирования по переменному нижнему пределу:

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad a \le x \le b,$$

тогда, согласно тождеству

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt,$$

имеем

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt - F(x).$$

Продифференцируем полученное соотношение

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Окончательно

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x).$$

21.4. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема (Основная теорема интегрального исчисления). Если $\Phi -$ первообразная непрерывной $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) -$$ формула Ньютона – Лейбница.

□ Т.к. $F(x)-$ первообразная для $f(x)$ и $\Phi(x)-$ первообразная для $f(x)$, то они отличаются друг от друга на const, т.е.

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \le x \le b,$$

или

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C,$$

но при $x = a \quad C = -\Phi(a)$, поэтому

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \text{ а при } x = b \quad \int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad \blacksquare$$

Замечание. Для краткости записи часто употребляется обозначение

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Пример. Найдем $\int\limits_0^1 x^2 dx.$

Решение. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \;\Rightarrow\quad F(x) = \frac{1}{3}x^3$, поэтому

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

22. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

22.1. Замена переменной

Теорема. Пусть:

1) $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$;

2) $\varphi(t)$ – определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на (α,β), причем $\forall t \in (\alpha,\beta)$ выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$, тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha,\beta)$, $\beta_0 \in (\alpha,\beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, то

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

□ Пусть $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$, $x \in (a,b)$, тогда для $t \in (\alpha,\beta)$ имеет смысл сложная функция $\Phi\left[\varphi(t)\right]$, которая является первообразной для $f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{a_0}^{b_0} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \Phi\left[\varphi(\beta_0)\right] - \Phi\left[\varphi(\alpha_0)\right] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

Правые части этих соотношений равны $\Rightarrow$ равны и левые части. ■

Вывод. При замене переменного $x = \varphi(t)$ в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx$$

следует всюду формально заменить x на $\varphi(t)$ и соответственным образом изменить пределы интегрирования.

Пример. Вычислить $\int_0^2 e^{x^2} xdx.$

Решение. $\int_0^2 e^{x^2} xdx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t\Big|_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}.$

22.2. Интегрирование по частям

Теорема. Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a,b]$, то

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$ – формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

□ Имеем

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du,$$

но, согласно формуле Ньютона – Лейбница,

$$\int_a^b (uv)' dx = (uv)\Big|_a^b,$$

откуда сразу следует доказательство теоремы. ■

Пример. Найти $\int_1^2 \ln x dx.$

Решение:

$$\int_1^2 \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & du = x^{-1}dx \\ dv = dx; & v = x \end{bmatrix} = (x \ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

23. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

23.1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах с помощью определенного интеграла

Т.к. $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x) dx,$ то это означает, что, если $f(x) \geq 0$, определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Если $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то и $S \leq 0$, и поэтому, если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a,b]$, то площадь под (над) кривой $y = f(x)$ необходимо находить по формуле (рис. 5)

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

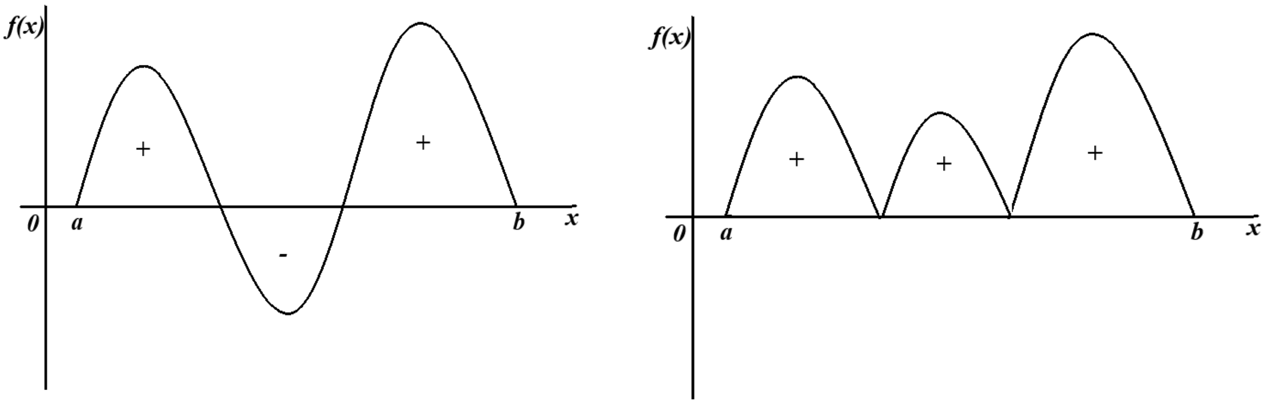

Рис. 5

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и осью *Ox*, при $0\le x\le 2\pi$.

Решение. Т.к. $\sin x\ge 0$ при $0\le x\le \pi$, и $\sin x\le 0$ при $\pi<x\le 2\pi$ (рис. 6), то

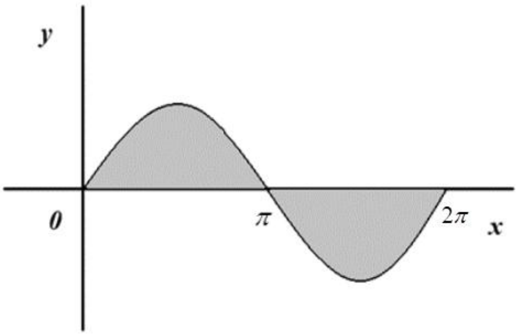

Рис. 6

$$S=\int_0^{2\pi}\left|\sin x\right|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\left(\cos\pi-\cos 0\right)+$$

$$+\left(\cos 2\pi-\cos\pi\right)=\left(-1-1\right)+\left(1+1\right)=4.$$

23.2. Вычисление площади с помощью определенного интеграла при задании функции в параметрической форме

Пусть $y=f\left(x\right)$ задана в параметрической форме:

$$x=\varphi\left(t\right),\quad y=\psi\left(t\right),$$

где $\alpha\le t\le\beta,\quad \varphi\left(\alpha\right)=a,\quad \varphi\left(\beta\right)=b.$

$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx=\begin{bmatrix} x=\varphi\left(t\right) \\ dx=\varphi'\left(t\right)dt \end{bmatrix}=\int_{\alpha}^{\beta}\psi\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt.$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь $x \in [-a, a] \Rightarrow t \in [\pi, 0]$.

$$S = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-\mathrm{a}\sin t)\,dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi ab.$$

23.3. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах с помощью определенного интеграла

Пусть в полярной системе координат задана кривая $r = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ (рис. 7).

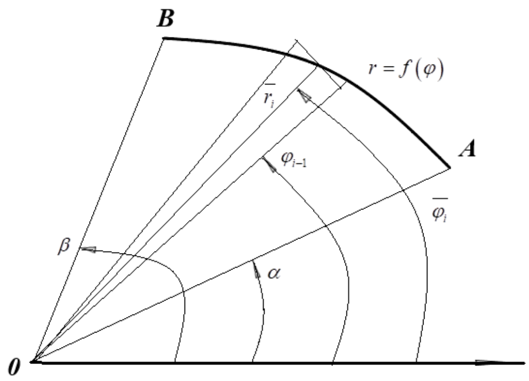

Рис. 7

Выберем

$$\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=n}.$$

Пусть

$$\varphi_{i-1} < \overline{\varphi_i} < \varphi_i.$$

Обозначим через $\overline{r_i}$ – радиус-вектор, соответствующий $\overline{\varphi_i}$.

Площадь кругового сектора

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\overline{r_i}^2\Delta\varphi_i.$$

Составим Риманову сумму

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{r_i}^2\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\overline{\varphi_i}\right)\Delta\varphi_i.$$

В силу непрерывности $f(\varphi)$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Решение. Радиус-вектор опишет область с площадью, равной четверти искомой площади (рис. 8), если $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

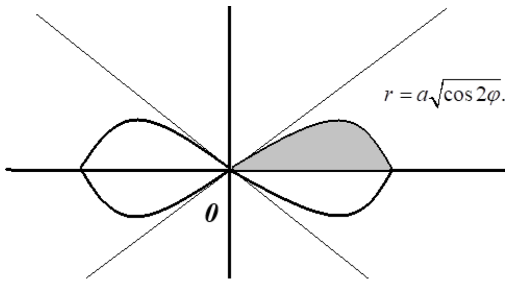

Рис. 8

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad S = a^2.$$

23.4. Длина дуги кривой в прямоугольных координатах

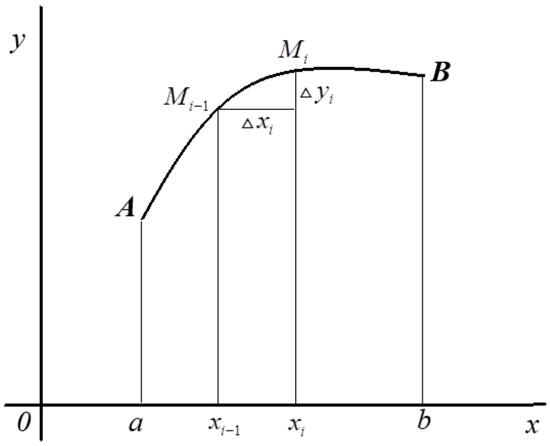

Рис. 9

Пусть дана $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ (рис. 9).

Выберем

$$\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}.$$

Длину кривой AB приближенно представим, как

$$L_{AB} = \sum_{i=1}^{n} M_{i-1}M_i,$$

но $M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$.

В силу непрерывности $f(x)$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0}\sigma_\tau = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\ \text{где}\ \ \xi_i\in[x_{i-1},x_i],$$

причем при $\Delta x_i\to 0$ $\xi_i\to x$, тогда

$$L_{AB}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Пример. Определить длину окружности $x^2+y^2=r^2$.

Решение. Вычислим вначале длину четверти окружности, лежащей в I-м квадранте. Тогда уравнение ее будет

$y=\sqrt{r^2-x^2}$, откуда $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}l=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2},$$

тогда $l=2\pi r$.

23.5. Длина кривой в параметрической форме

Пусть $y=f(x)$ в виде

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$$

где $\varphi(t),\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, $\varphi'(t)\ne 0$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пусть $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, и сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$, тогда

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt\ \text{или}\ l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

Пример. Вычислить длину астроиды

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t.$$

Решение. Т.к. кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в I-м квадранте. Находим

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Параметр t будет изменяться от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\, dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \quad l = 6a.$$

23.6. Длина дуги кривой в полярных координатах

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой

$$r = f(\varphi).$$

Воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

или $x = f(\varphi)\cos\varphi, \quad y = f(\varphi)\sin\varphi.$

Найдем

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi - f(\varphi)\cos\varphi,$$

тогда

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2 = r'^2 + r^2 \quad \Rightarrow$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Изменяя полярный угол φ от 0 до π, получим половину искомой длины. Здесь $r' = -a\sin\varphi \quad \Rightarrow$

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

23.7. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть имеется некоторое тело *T*. Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси *Ox* (рис. 10). Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией *x*:

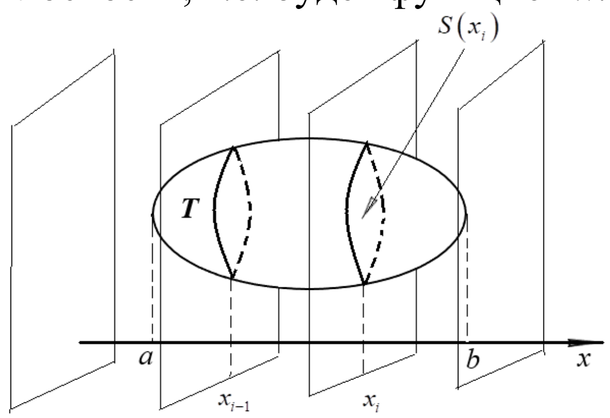

Рис. 10

$$S=S\left(x\right).$$

Предположим, что $S\left(x\right)$ есть непрерывная функция от *x*.

Проведем плоскости $x=x_0=a;\ x=x_1;\ x=x_2;...x=x_n=b.$

Эти плоскости разобьют тело на слои.

Т.о., имеем $\tau=\left\{x_i\right\}_{i=0}^{i=n}$, тогда объем *i*-го слоя есть

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}S\left(\xi_i\right)\Delta x_i,$$

где $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$; $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, а объем всего тела *T* будет

$$V=\lim_{\delta_\tau\to 0}V_n=\int_a^b S\left(x\right)dx.$$

Пример. Вычислить объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. В сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oyz и отстоящей на расстоянии x от нее, получится эллипс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\qquad \frac{y^2}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}+\frac{z^2}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=1;$$

с полуосями $b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$ Но площадь такого эллипса равна πb_1c_1, поэтому

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Объем эллипсоида будет равен

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

23.8. Объем тела вращения

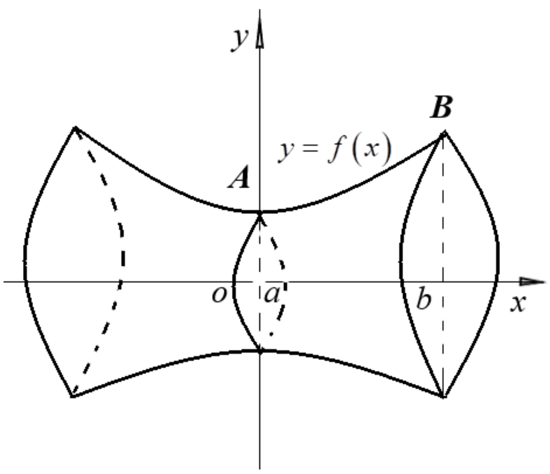

Рис. 11

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 11).

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, есть круг, площадь которого

$$S(x)=\pi\left[f(x)\right]^2.$$

Применим формулу из п. 23.7:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx.$$

Пример. Найти объем тела, образуемого вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

вокруг оси *Ox* на участке от 0 до b.

Решение:

$$V = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2 dx = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) dx =$$

$$= \pi \frac{a^2}{4} \left(\frac{a}{2} e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a} \right) \Bigg|_0^b = \frac{\pi a^2}{8}\left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

23.9. Площадь поверхности тела вращения

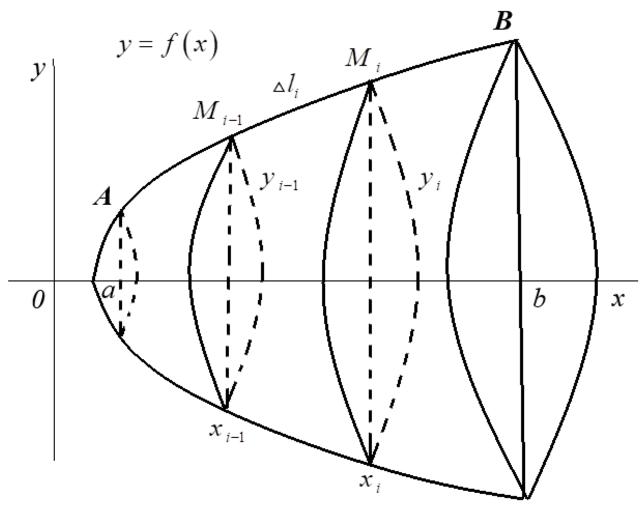

Рис. 12

Пусть дана поверхность, образованная вращением кривой $y = f(x)$, вокруг оси *Ox*. Найдем площадь этой поверхности на $[a, b]$ (рис. 12).

Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ – непрерывны на $[a, b]$.

Выберем

$$\tau = \left\{ x_i \right\}_{i=0}^{i=n}.$$

Точки $M_i = f(x_i)$ соединим прямыми отрезками, которые обозначим через Δl_i. Каждый отрезок при вращении образует усеченный конус, площадь которого

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i,$$

но

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Применим теорему Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad \Rightarrow$

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i \text{ и } \Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i,$$

тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i,$$

но, в силу непрерывности $f(x)$ и $f'(x)$, имеем

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i)\sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Пример. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 2px,\ x \in [0, a]$.

Решение:

$$y = \sqrt{2px}; \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}; \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}.$$

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x + p}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x + p)^{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

23.10. Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть под действием силы F материальная точка M движется по прямой Ox, причем направление F совпадает с направлением Ox.

Найдем работу, произведенную силой F при перемещении точки M из положения $x=a$ в положение $x=b$.

1. Если $F=\text{const}$, то

$$A=F(b-a).$$

2. Пусть $F=F(x)$ – непрерывная на $[a,b]$, тогда выберем

$$\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$$

и на $[x_{i-1},x_i]$

$$A_i=F(x_i)\Delta x_i.$$

Отсюда

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

В силу того что $F(x)$ непрерывна, то

$$A=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i=\int_a^b F(x)dx.$$

Пример. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 5 см, если для сжатия ее на 1 см нужна сила 10 H.

Решение. Сила F и перемещение x связаны по условию зависимостью $F=kx$; где $k=\text{const}$. При $x=0{,}01$; $F=10$, т.е. $10=k\cdot 0{,}01 \Rightarrow \text{k}=1000 \Rightarrow F=1000x$, тогда

$$A=\int_0^{0{,}05}1000x\,dx=1000\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0{,}05}=1{,}25\,Дж.$$

24. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

24.1. Несобственный интеграл I рода

Рассмотренные выше определенные интегралы, у которых промежуток интегрирования $[a,b]$ конечный, а подынтегральная функция непрерывна, называются ***собственными интегралами***.

Теперь рассмотрим определенные интегралы, которые назовем ***несобственными***, т.е. определенные интегралы от непрерывных функций, но с бесконечным промежутком интегрирования или с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Определение. Пусть $f(x)$ непрерывна на $\left[a,+\infty\right)$. Если существует

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

то он называется ***несобственным интегралом первого рода***.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же предела не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на $(-\infty,b]$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема. Если на $\left[a,+\infty\right)$ $f(x)$ и $g(x)-$ непрерывны и $0\le f(x)\le g(x)$, то

из сходимости $\int_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\infty f(x)dx$;

а из расходимости $\int_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\infty g(x)dx$.

□ Рассмотрим

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dx = A\ne\infty$$

$\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx\le A,$ а это означает, что

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = B\ne\infty\ \ (B\le A).$$ ■

Следствие. Если существует предел $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < \infty,$ $f(x) > 0,\ g(x) > 0,$ то интегралы

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^{\infty} g(x)dx$$

одновременно сходятся и расходятся.

(Без доказательства)

Пример. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-2}dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1.$

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = -\lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \infty.$

3. Сходится ли интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}.$

При $x \geq 1$ имеем $\dfrac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \dfrac{1}{x^2},$ но $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \Rightarrow$ данный интеграл сходится.

24.2. Несобственный интеграл II рода

Определение. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty.$ Если существует конечный интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

то его называют несобственным ***интегралом второго рода***.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов II рода.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b)$ и при $x=b$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, причем $0\le f(x)\le\varphi(x)$, тогда из сходимости (расходимости)

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

вытекает сходимость (расходимость) интеграла

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=\infty$, тогда, если существует, то

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,\quad 0<k<\infty,$$

то $$\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi(x)dx$$

одновременно сходятся или расходятся.

Пример. Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ на $[0,1]$ имеет разрыв в точке $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^0=0-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=\infty,$$

но $$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ – расходится.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие является концентратором основных положений теоретического характера с подробной иллюстративной и практической направленностью, адаптированной на широкую предметно-ориентированную студенческую аудиторию, обучающуюся по различным образовательным техническим программам специалитета, в том числе аэрокосмической подготовки инженеров высокой квалификации, обладающих глубокими знаниями в использовании математического аппарата как инструментария выполнения проектов повышенной сложности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. школа, 1981. – 687 с.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616 с.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.2. – 810 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ряжских Виктор Иванович
Ряжских Александр Викторович
Соболева Елена Александровна
Федюнин Максим Леонидович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Сахарова Д. О.

Подписано к изданию 15.07.2020.
Объем данных 2,1 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14