

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»

Кафедра «Ракетные двигатели»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических и самостоятельных работ по  
дисциплине «Автоматика и регулирование ракетных  
двигателей»

для студентов специальности 160700.65, 24.05.02  
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»  
очной формы обучения



Воронеж 2015

Составитель д-р техн. наук Г.И. Скоморохов  
лаб.-исслед. А.А. Пригожин

УКД 621.465-52

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Автоматика и регулирование ракетных двигателей» для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.И. Скоморохов, А.А. Пригожин. Воронеж, 2015. 41 с.

В методических указаниях изложены теоретические основы моделирования и анализа статических и динамических характеристик двигательных установок с ЖРД, а также контрольные задания к курсовой работе по исследованию условий устойчивости летательного аппарата по дисциплине «Автоматика и регулирование ракетных двигателей».

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей», дисциплине «Автоматика и регулирование РД».

Ил. 17. Библиогр.: 6 назв.

Рецензент д-р техн. наук, проф. А.В. Кретинин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук,  
проф. В.С. Рачук

Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО «Воронежский  
государственный технический  
университет», 2015

## ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние и перспективы развития космической техники во многом связаны с созданием многорежимных, регулируемых в широком диапазоне изменения параметров, двигательных установок (ДУ) с жидкостными ракетными двигателями (ЖРД) многократного использования. Для создания надежных систем автоматического управления особенно остро встают вопросы изучения статических и динамических характеристик, а также условий устойчивости, как элементов ЖРД, так и двигательных установок в целом. Возникновение неустойчивой работы ДУ с ЖРД обусловлено сложными связями между элементами, которые могут приводить к возникновению внутренних колебательных контуров и резонансных явлений. Кроме этого, на ДУ во время работы воздействует множество внешних возмущений: продольные и поперечные ускорения, вибрации, изменение режимов работы ЖРД и др.

Одной из важнейших процедур проектно-творческой деятельности при создании ДУ с ЖРД является анализ и синтез элементов и узлов с заданными динамическими характеристиками. Большое значение в профессиональной деятельности инженера приобретают знания основных принципов автоматического регулирования и управления; методов исследования устойчивости и качества линейных систем управления.

Методические указания содержат теоретические сведения по моделированию и анализу статических и динамических характеристик систем автоматического регулирования, условий устойчивости элементов и систем двигательных установок с жидкостными ракетными двигателями, а также практические задания на курсовую работу по исследованию условий устойчивости летательного аппарата.

# 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

## 1.1. Схема и особенности регулирования двигательной установки с жидкостным ракетным двигателем

На рис.1.1 изображена схема двигательной установки (ДУ) с двухкомпонентным ЖРД, насосной подачей компонентов и с автономным питанием турбины рабочим телом.

Для управления ДУ предусмотрено два регулирующих органа. Один из них - это дроссель 1 перед головкой газогенератора 2, его проходная площадь  $F_{др.гг}$  может изменяться при перемещении  $z_{др.гг}$ . Дроссель 1 позволяет изменять количество рабочего тела, поступающего из полости 8 на турбину 4, в результате чего будет изменяться суммарный расход компонентов, что обеспечит соответствующие изменения давления  $p_k$  в камере 7 и тяги двигательной установки.

Для того чтобы сохранить соотношение компонентов или изменить его в нужную сторону, в гидравлической системе компонента окислителя  $O$  предусмотрен второй дроссель 5, установленный между насосом 3 и головкой камеры 6. Изменение его проходной площади  $F_{др.о}$ , за счет перемещения  $z_{др.о}$  изменяет расход окислителя.

Изменения расходов окислителя и горючего вызывают соответствующие изменения давлений: перед форсунками газогенератора (ГГ)  $p_{ф.гг}$ , в камере ГГ  $p_{к.гг}$ , перед турбиной  $p_m$ , за насосами окислителя и горючего  $p_{н.о}$ , и  $p_{н.г}$ , перед дросселем 5  $p_{м.03}$ , за ним  $p_{м.02}$ , перед форсунками камеры  $p_{м.02}$  и  $p_{ф.г}$ . Давления перед насосами  $p_o$ ,  $p_г$ , в баке рабочего тела турбины  $p_{б.т}$  и перед дросселем 1  $p_{кл.гг}$  изменяются незначительно при изменении давления в



На двигательную установку - объект регулирования (ОР) - действуют различные внешние возмущения (ВВ), изменяющие ее режим работы. К таким возмущениям относятся: полное продольное ускорение, изменяющееся во время полета; изменение температуры  $T_{б.т.}$  компонентов топлива в баке с изменением потока тепла, поступающего через стенку бака; изменение гидравлических сопротивлений отдельных участков системы  $\Delta P_{гидр}$ ; изменение давления компонентов  $P_o$  и  $P_z$  перед насосами по мере выработки компонентов топлива (снижения их уровня в баках) и изменения давления наддува баков и т.д. На объект регулирования должны также поступать командные воздействия, по которым он должен настраиваться на заданный режим.

Такие воздействия могут поступать непосредственно от управляющего двигательной установкой человека или от автоматического устройства. Эти командные воздействия должны привести к тому, что оба дроссельных крана 1 и 5 установятся в положение, при котором давление в камере  $P_k$  и соотношение компонентов примут заданные значения.

Таким образом, объект регулирования (рис. 1.2,а) будет обладать двумя выходными величинами - давлением в камере  $P_k$  и соотношением компонентов  $k_m$ , а также двумя входными величинами - проходными площадями дросселей  $F_{др.гг}$ ,  $F_{др.о.}$ .

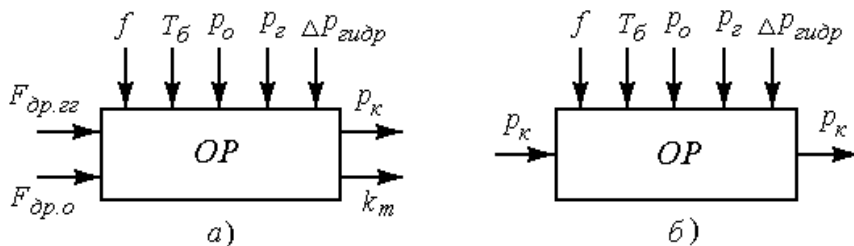


Рис. 1.2. Общая (а) и упрощенная (б) схемы ДУ с ЖРД

На объект регулирования также воздействует ряд внешних возмущений: ускорение -  $a$ , температура компонентов топлива в баке -  $T_6$ , гидравлические сопротивления участков системы -  $\Delta p_{гидр}$ , давление окислителя  $p_o$ , и горючего  $p_2$  перед насосами. Входными величинами будут также управляющие воздействия - проходные площади дроссельных кранов  $F_{др.гг}$  и  $F_{др.о}$ . Все входные величины воздействуют на объект регулирования только в направлении стрелок. Такое однонаправленное прохождение сигналов называется *детектированием*.

Если изменением соотношения компонентов топлива можно пренебречь, схема объекта регулирования может быть упрощена и представлена в виде, приведенном на рис. 1.2,б. Здесь объект регулирования обладает только одной выходной величиной  $p_2$  и одним управляющим воздействием  $F_{др.гг}$ .

### *1.2. Элементы и звенья систем автоматического регулирования*

Любая система автоматического регулирования (САР) включает *объект управления и регулятор*. Динамические характеристики САР определяются взаимодействием объекта управления с регулятором. В процессе динамического взаимодействия объекта с регулятором в каждом элементе системы происходят количественные и качественные изменения сигналов от входа к выходу, свойственные физической природе этих элементов.

ДУ с ЖРД представляет собой динамический комплекс, включающий в себя элементы различной сложности: газогенератор, ТНА, камеру сгорания, систему топливоподдачи и др. Для математического описания и исследования работы САР удобно разбивать не на элементы автоматики, а на динамические звенья.

*Динамическим звеном* называется часть системы автоматического управления (САУ), описываемая дифференциальным (или иным) уравнением определенного вида. Такое достаточно общее определение позволяет рассматривать как отдельные элементы автоматики, так и совокупности таких элементов и даже всю систему автоматического регулирования в целом. В отличие от элемента автоматики, динамическое звено не обязательно имеет схемное или конструктивно оформленное устройство. В отдельных случаях динамические звенья могут вообще не иметь физического смысла, характеризуя лишь математические зависимости, имеющие место между некоторыми величинами автоматической системы.

Динамическое звено САУ изображено на рис. 1.3, где  $x$  - входная величина;  $y$  - выходная величина;  $f$  - возмущающее воздействие.

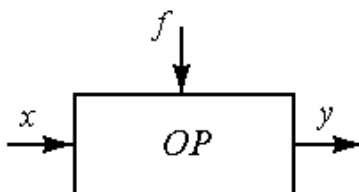


Рис. 1.3. Условное изображение динамического звена

В общем случае на звено наряду с входным сигналом  $x$  могут воздействовать внешние и внутренние возмущения, а также сигналы обратных связей.

Звено характеризуется статическими и динамическими свойствами, которые описываются соответствующими характеристиками.

*Статической характеристикой звена* называется зависимость выходной величины  $y$  от входной  $x$  в установившемся режиме  $y = f(x)$ . Статическая характеристика не содержит в качестве переменной времени и представляет собой любую из возможных видов записи

(графическую, математическую, табличную) связи входных и выходных величин. Чаще всего эта связь имеет вид алгебраического уравнения.

На рис. 1.4 изображена статическая характеристика двигательной установки с ЖРД, связывающая  $p_k/p_k^*$  давление в камере сгорания с величиной площади дросселя  $F_{др}/F_{др}^*$  газогенератора в относительных величинах. Статическая характеристика (или семейство статических характеристик) полностью характеризует поведение динамического звена в установившихся режимах.

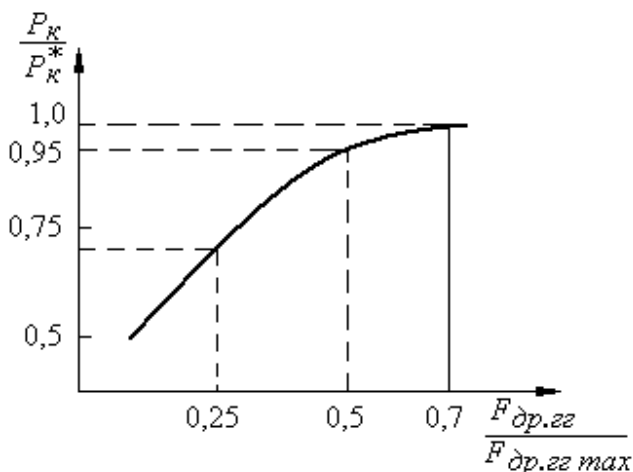


Рис. 1.4. Статическая характеристика ДУ с ЖРД

*Динамические характеристики* звена связывают изменение выходной величины во времени при определенном законе изменения входной величины (чаще всего это дифференциальные уравнения).

*Цель изучения динамических свойств ДУ как объекта регулирования* – выявление характера изменения регулируемой величины во времени (переходного процесса) при воздействии на ДУ сигналов со стороны регулятора или внешних возмущений.

Для теоретического исследования динамических свойств звеньев необходимо составить уравнения, описывающие их поведение при изменяющихся внешних воздействиях, т.е. соотношения, связывающие обобщенные координаты на входе и выходе звена в неустановившихся процессах. В большинстве случаев рассмотрение переходных режимов динамических звеньев приводит к дифференциальным уравнениям того или иного вида. В результате физическая задача определения выходной величины звена при изменяющемся входном сигнале сводится к математической задаче отыскания решения дифференциального уравнения, описывающего работу звена.

Примерный порядок составления дифференциального уравнения звена заключается в следующем:

1. Определяют входную и выходную величины звена и устанавливают дополнительные факторы, от которых зависит выходная величина;

2. Выбирают начало отсчета и положительные направления отсчета всех входящих в рассмотрение переменных;

3. Вводят те или иные упрощающие предположения (допущения) и граничные условия;

4. Используют основные законы той или иной отрасли науки и техники, к которой относится исследуемое звено: законы Ньютона – для звеньев механической природы; законы сохранения энергии – для гидравлических и пневматических звеньев и др.

Для звеньев непрерывного действия с сосредоточенными параметрами общее дифференциальное уравнение динамики имеет следующий вид:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, x^{(m)}, x^{(m-1)}, \dots, \dot{x}, x, f^{(q)}, f^{(q-1)}, \dots, \dot{f}, f) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $n, m, q$  – натуральные числа, определяющие наивысший порядок входящих в уравнение производных от

выходной величины звена  $y$  и внешних воздействий  $x$  и  $f$ ;  $F$  – некоторая функция от трех аргументов.

На практике в большинстве случаев  $m < n$  и  $q < n$ . Число  $n$  называется порядком дифференциального уравнения (1.1). При  $n = 1$  имеем дифференциальное уравнение первого порядка -  $F(\dot{y}, y, x, f) = 0$ , при  $n = 2$  – второго порядка  $F(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{x}, x, \dot{f}, f) = 0$  и т.д.

Неизвестной функцией в уравнении (1) является выходная величина звена  $y(t)$ . Для решения уравнения (1.1) должны быть заданы величины  $x(t)$  и  $f(t)$  как функции времени и начальные условия.

Уравнения статистической характеристики представляют собой частный случай дифференциального уравнения (1.1). Положив в нем  $x = const$ ,  $f = const$  и  $y = const$ , получим уравнение

$$F(0, 0, \dots, y, 0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, f) = 0, \quad (1.2)$$

определяющее статическую характеристику в неявном виде.

### 1.3. Передаточные функции линейных звеньев

Рассмотрим динамическое звено (рис.1.3), работа которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$a(p)y = b(p)x + r(p)f, \quad (1.3)$$

где

$$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n; \quad (1.4)$$

$$b(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m; \quad (1.5)$$

$$r(p) = r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q.$$

$$(1.6)$$

В уравнениях (4)-(6)  $a_i, b_i, r_i$  - вещественные числа;  $n, m, q$  - целые неотрицательные числа и  $m \leq n, q \leq n$  ;

$p = \frac{d}{dt}$  - так называемый *символ дифференцирования*. (Его не

следует путать с комплексной переменной, фигурирующей в преобразовании Лапласа, которую будем обозначать буквой  $s$ ).

Уравнение (1.3) исчерпывающе характеризует динамические свойства звена, так как позволяет найти реакцию звена  $y(t)$  на любые входные сигналы  $x(t)$  и  $f(t)$ . Для этого должны быть заданы законы изменения внешних воздействий  $x$  и  $f$  как функции времени и начальные условия.

Если при  $t = 0$  звено находилось в покое, то

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n)}(0) = 0. \quad (1.7)$$

Обычно начальные условия (1.7) называют *нулевыми начальными условиями*.

Для описания динамических свойств линейных звеньев в теории автоматического управления, кроме дифференциальных уравнений, широко используются передаточные функции, временные и частотные характеристики, которые выгодно отличаются от дифференциальных уравнений значительно большей наглядностью и возможностью экспериментального определения (для частотных и временных).

*Передаточной функцией звена* по какому-либо внешнему воздействию называется отношение преобразования Лапласа выходной величины звена к преобразованию Лапласа рассматриваемого внешнего воздействия. При этом все другие внешние воздействия полагаются равными нулю, а преобразования Лапласа выходной величины и внешнего воздействия вычисляются при нулевых начальных значениях самих функций и их производных.

Из приведенного определения следует, что для любого звена с одной выходной величиной число передаточных функций равно числу внешних воздействий. В частности, для звена, изображенного на рис.1.3, можно ввести *передаточную функцию по входной величине*

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (1.8)$$

и *передаточную функцию по возмущению*

$$W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.8) и (1.9) представляют собой определения соответствующих передаточных функций звена. Использовать их для непосредственного вычисления передаточных функций звена часто нецелесообразно.

В уравнениях (1.8) и (1.9)  $s$  – комплексная переменная, а выражения

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt; \quad (1.10)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt; \quad (1.11)$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (1.12)$$

- преобразования Лапласа (изображения) соответствующих функций (оригиналов) времени.

Применительно к уравнению (1.3) при вычислении изображений (1.10), (1.11), (1.12) следует считать выполненными следующие условия:

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n)}(0) = 0,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(m)}(0) = 0,$$

$$f(0) = \dot{f}(0) = \dots = f^{(q)}(0) = 0.$$

Передаточная функция по входной величине (1.8)  $W(s) = Y(s)/X(s)$  называется *основной передаточной функцией* или *просто передаточной функцией звена*.

Передаточная функция, так же как и дифференциальные уравнения, являются динамической характеристикой САР, поскольку, если передаточная функция известна, то можно вычислить реакцию системы на любое внешнее воздействие. Из соотношения (1.8)

$$Y(s) = W(s) \cdot X(s).$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к  $Y(s)$ , получим оригинал

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\omega}^{C+j\omega} W(s)X(s) \cdot e^{st} ds.$$

Рассмотрим основные свойства передаточной функции для систем с сосредоточенными параметрами, т.е. описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1. Передаточная функция является дробно-рациональной функцией от  $s$ , причем для всякого физически реализуемого устройства порядок числителя  $m$  всегда меньше или равен порядку знаменателя  $n$ , т.е.  $m \leq n$ .

2. Коэффициенты  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ,  $b_0 + b_1 + \dots + b_m$ ; вещественны, так как они являются функциями физических параметров системы.

3. В тех случаях, когда для дифференциальных уравнений применяют символическую форму записи, используя оператор дифференцирования  $p = p/dt$ , например,  $A(p)y(t) = B(p)x(t)$ , функция  $W(s)$  может быть получена из операторной формы записи полиномов  $A(p)$  и  $B(p)$  формальной заменой  $p$  на  $s$ .

4. Если у передаточной функции системы нет нулей и полюсов с положительной вещественной частью, то система называется минимально-фазовой. В противном случае система является не минимально-фазовой. При одинаковых АЧХ минимально-фазовым системам соответствуют меньшие по величине фазовые сдвиги.

Передаточные функции звена весьма просто могут быть найдены, если известно дифференциальное уравнение звена. Для этого преобразуем уравнение (1.3) по Лапласу. Учитывая теорему линейности, получим

$$\begin{aligned} a_0 L\{p^n y(t)\} + \dots + a_n L\{y(t)\} = \\ = b_0 L\{p^m x(t)\} + \dots + b_m L\{x(t)\} + r_0 L\{p^q f(t)\} + \dots + r_q L\{f(t)\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

По теореме об изображении производной

$$\begin{aligned} L\{p^k y(t)\} &= s^k Y(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \\ L\{p^k x(t)\} &= s^k X(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m; \\ L\{p^k f(t)\} &= s^k F(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

при условии, что выполнено соотношение (1.7) о нулевых начальных условиях для всех функций. Поэтому уравнение (1.13) приводится к виду

$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) + \dots + a_n Y(s) = \\ = b_0 s^m X(s) + \dots + b_m X(s) + r_0 s^q F(s) + \dots + r_q F(s) \end{aligned}$$

или к виду

$$a(s)Y(s) = b(s)X(s) + r(s)F(s), \quad (1.14)$$

где

$$a(s) = a(p) \Big|_{p=s} = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n; \quad (1.15)$$

$$b(s) = b(p) \Big|_{p=s} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m; \quad (1.16)$$

$$r(s) = r(p) \Big|_{p=s} = r_0 s^q + r_1 s^{q-1} + \dots + r_{q-1} s + r_q. \quad (1.17)$$

Несмотря на формальное сходство, уравнения (1.3) и (1.14) резко отличаются друг от друга. Уравнение (1.3) представляет собой дифференциальное уравнение  $n$ -ого порядка относительно неизвестной функции времени  $y(t)$ , тогда как уравнение (1.14) является алгебраическим уравнением первой степени относительно неизвестного изображения  $Y(s)$ . (Преобразование Лапласа является функциональным и служит для преобразования определенного класса функций вещественной переменной в функции комплексной переменной. При этом, методы функционального преобразования позволяют интегродифференциальные уравнения заменять алгебраическими уравнениями, решение которых значительно проще).

Соотношение (1.14) называется *уравнением динамического звена относительно изображения при нулевых начальных значениях*. Оно легко может быть получено из дифференциального уравнения звена (1.3) путем формальной замены символа дифференцирования  $p$  комплексной переменной  $s$  и функций времени  $y(t)$ ,  $x(t)$  и  $f(t)$  – их изображениями  $Y(s)$ ,  $X(s)$  и  $F(s)$ . Разрешив уравнение (1.14) относительно выходной величины звена, получим

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} X(s) + \frac{r(s)}{a(s)} F(s). \quad (1.18)$$

При  $F(s) = 0$  из (14) следует, что *основная передаточная функция звена*

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (1.19)$$

Положив в соотношении (1.14)  $X(s) = 0$ , найдем передаточную функцию звена по возмущению

$$W_f(s) = \frac{r(s)}{a(s)} = \frac{r_0 s^q + r_1 s^{q-1} + \dots + r_{q-1} s + r_q}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (1.20)$$

Формулы (1.19) и (1.20) показывают, что для определения передаточной функции звена по какому-либо внешнему воздействию необходимо:

1. Записать дифференциальное уравнение звена в символической форме  $a(p)Y = b(p)X + r(p)F$ ;
2. В полученном результате заменить символ дифференцирования  $p$  комплексной переменной  $s$ .  
 $a(s)Y(s) = b(s)X(s) + r(s)F(s)$ .
3. Разделить формально символический многочлен, стоящий в правой части дифференциального уравнения звена перед интересующим нас внешним воздействием, на символический многочлен, фигурирующий в левой части дифференциального уравнения звена:

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} - \text{передаточная функция звена};$$

$$W_f(s) = \frac{r(s)}{a(s)} - \text{передаточная функция звена по возмущению}.$$

Пример 1. Определить основную передаточную функцию и передаточную функцию по возмущению для звена описываемого дифференциальным уравнением вида при нулевых начальных условиях

$$T \frac{dy}{dt} + y = a_n x + r_q f.$$

Решение:

Символическое уравнение  $T(p)y + y = a_n x + r_q f$ .

2.  $(Tp + 1)y = a_n x + r_q f$ .

3. Преобразование Лапласа  $(Ts + 1)y(s) = a_n x(s) + r_q f(s)$ .

4. Передаточная функция звена при  $f(s) = 0$

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{a_n}{Ts + 1}.$$

5. Передаточная функция звена по возмущению при  $x(s) = 0$

$$W_f(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{r_q}{Ts + 1}.$$

Пример 2. Определить передаточную функцию для звена описываемого дифференциальным уравнением вида при нулевых начальных условиях

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 3y = 5x$$

Решение:

1.  $4y(p^2) + 2y(p) + 3y = 5x$  - символическое уравнение.

2.  $(4p^2 + 2p + 3)y = 5x$ .

3.  $(4s^2 + 2s + 3)Y(s) = 5X(s)$  - преобразование Лапласа.

4.  $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{4s^2 + 2s + 3}$  - передаточная функция звена.

С математической точки зрения преобразование Лапласа можно рассматривать как математический прием, который можно применять для решения дифференциальных уравнений, не вдаваясь в физический смысл преобразования (полезно

представлять себе переменную  $s$  как эквивалент оператора  $p$ , обозначающего операцию дифференцирования).

Общая процедура решения дифференциального уравнения методом преобразования Лапласа состоит в следующем: сначала отыскиваются изображения для всех членов уравнения, затем полученное в результате алгебраическое уравнение решается относительно переменной  $s$  и при помощи таблиц производится обратное преобразование полученного решения.

При выводе формул (1.19) и (1.20) конкретный вид функций  $x(t)$  и  $f(t)$  не оговаривался. Отсюда следует, что *передаточная функция линейного звена по какому-либо внешнему воздействию не зависит от закона изменения этого воздействия и определяется только свойствами самого звена.*

Сопоставляя формулы (1.19) и (1.20), нетрудно убедиться в том, что *все передаточные функции какого-либо конкретного звена имеют один и тот же знаменатель.*

Многочлен

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad (1.21)$$

фигурирующий в знаменателе передаточных функций звена, называется *характеристическим полиномом* этого звена, а уравнение

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.22)$$

- *характеристическим уравнением* звена. Для звена, описываемого дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка, характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение  $n$ -й степени и имеет  $n$  корней  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , среди которых могут быть как вещественные, так и комплексно-сопряженные.

Корни многочлена, стоящего в знаменателе передаточной функции, называются *полюсами этой передаточной функции*;

корни многочлена, стоящего в числителе передаточной функции, – нулями этой передаточной функции.

Из алгебры известно, что многочлены  $a(s)$  и  $b(s)$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} a(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n); \\ b(s) = b_0(s - s_1^0)(s - s_2^0)\dots(s - s_n^0); \end{cases}$$

где  $s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0$  – корни многочлена  $b(s)$ .

Поэтому передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(S) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(s - s_1^0)(s - s_2^0)\dots(s - s_n^0)}{(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)}, \quad (1.23)$$

откуда следует, что задание нулей и полюсов определяет передаточную функцию звена с точностью до постоянного множителя  $b_0/a_0$ .

В том случае, когда вещественные части всех полюсов передаточной функции отрицательны звено называется устойчивым, т.е.

$$\operatorname{Re} s_k < 0, \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В устойчивых звеньях переходная составляющая выходной величины с течением времени затухает.

#### 1.4. Получение дифференциального уравнения звена по известным передаточным функциям

Пусть, например, на звено действует единственное возмущение  $f$  и известны основная передаточная функция звена (1.19) и передаточная функция звена по возмущению (1.20). Тогда на основании соотношения (1.18) можно найти изображение выходной величины звена

$$Y(s) = W(s)X(s) + W_f(s)F(s). \quad (1.24)$$

Умножив обе части соотношения (24) на характеристический полином звена  $a_0(s)$ , получим уравнение (14)

$$a(s)Y(s) = b(s)X(s) + r(s)F(s).$$

Поэтому для нахождения дифференциального уравнения звена достаточно в уравнении заменить комплексную переменную  $s$  символом дифференцирования  $p$  и изображения  $Y(s), X(s), F(s)$  – оригиналами  $y(t), x(t), f(t)$ . В результате будем иметь дифференциальное уравнение звена (1.14)

$$a(p)y = b(p)x + r(p)f.$$

### **1.5. Структурная схема динамического звена**

Перепишем соотношение (1.24) следующим образом

$$Y(s) = Y_x(s) + Y_f(s). \quad (1.25)$$

Здесь  $Y_x(s) = W(s)X(s)$

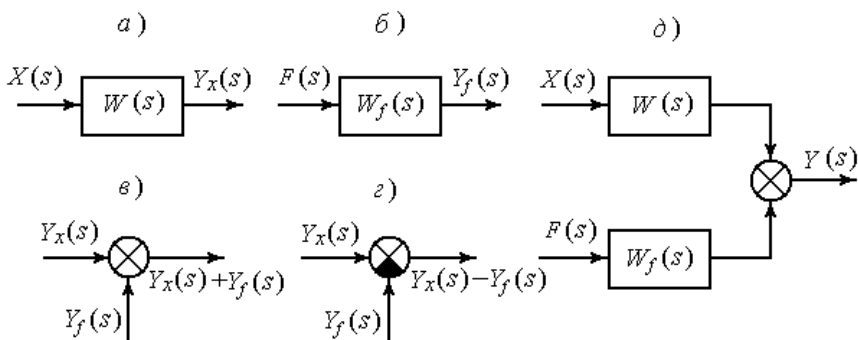
$$(1.26)$$

- составляющая изображения выходной величины звена, обусловленная входной величиной, а

$$Y_f(s) = W_f(s)F(s) \quad (1.27)$$

– составляющая изображения выходной величины звена, обусловленная возмущающим воздействием.

Формулы (1.26) и (1.27) удобно изображать графически так, как это показано на рис. 1.5. Выходная величина каждого из прямоугольников представляет собой результат произведения входной величины на передаточную функцию, записанную внутри прямоугольника. Элемент суммирования обозначается графически в виде перечеркнутого кружка (рис. 1.5, в.).



а, б – графическое изображение отдельных составляющих преобразования Лапласа; в, г – графическое изображение сложения и вычитания двух переменных; д – структурная схема звена с одним входным и одним возмущающим воздействиями

Рис. 1.5. Структурные схемы динамических звеньев

Этот же символ используется и для обозначения операции *вычитания*, только тогда сектор, соответствующий вычитаемому, изображается зачерненным (рис. 1.5,г.). На рис. 1.5,д представлена так называемая структурная схема динамического звена.

*Структурной схемой системы автоматического регулирования, элемента автоматики или какого-либо другого устройства* называется схема, показывающая, из каких звеньев состоит это устройство и как эти звенья соединены между собой. С принципиальной точки зрения структурная схема представляет собой просто графическое изображение уравнений, связывающих преобразования Лапласа входных и выходных переменных. Часто на структурных схемах входными и выходными величинами звеньев условно считают не изображения, а сами функции – оригиналы (рис. 1.5,д). Это позволяет в случае необходимости приводить непосредственно на структурных схемах графики изменения во времени

входных  $x(t)$  и выходных  $y(t)$  величин звеньев. При этом не следует забывать, что соотношения вида (1.26) и (1.27), лежащие в основе построения структурных схем, справедливы только для изображений и не верны для оригиналов.

### 1.6. Передаточные функции сложного соединения звеньев

Существуют три основных типа соединений динамических звеньев: последовательное, параллельное, соединение с обратной связью (встречно-параллельное).

*Последовательным называется такое соединение звеньев, у которого каждая входная величина последующего звена является выходной предыдущего* (рис. 1.6).

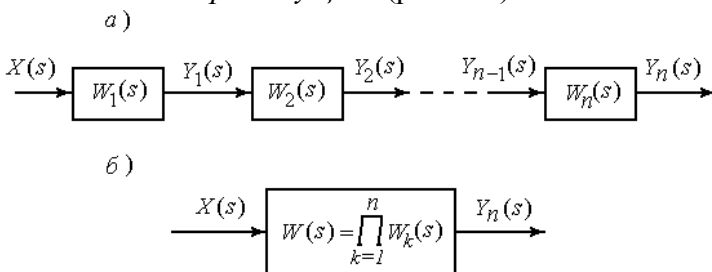


Рис. 1.6. Последовательное соединение звеньев (а) и его эквивалентная структурная схема (б)

Передаточная функция соединения в целом будет определяться отношением

$$W(s) = \frac{Y_n(s)}{X(s)},$$

или

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{Y_n(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \cdot \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \cdot \dots \cdot \frac{Y_{n-1}(s)}{Y_{n-2}(s)} \cdot \frac{Y_n(s)}{Y_{n-1}(s)} = \\ &= W_1(s)W_2(s)\dots W_{n-1}(s)W_n(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \end{aligned}$$

Таким образом, изображения выходной и входной величин рассматриваемого соединения связаны соотношением

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_n(s). \quad (1.28)$$

Полученный результат говорит о том, что последовательное соединение звеньев в смысле прохождения сигнала эквивалентно одному звену, передаточная функция которого (1.28) равна произведению передаточных функций последовательно соединенных звеньев (рис. 1.6,б).

*Параллельным называют такое соединение звеньев, у которого имеется общая входная величина, а выходная представляет собой сумму выходных величин всех звеньев, входящих в соединение (рис. 1.7).*

По определению параллельного соединения

$$y(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

где  $n$  – число звеньев, входящих в соединение.

Преобразовав последнее соотношение по Лапласу, получим

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s).$$

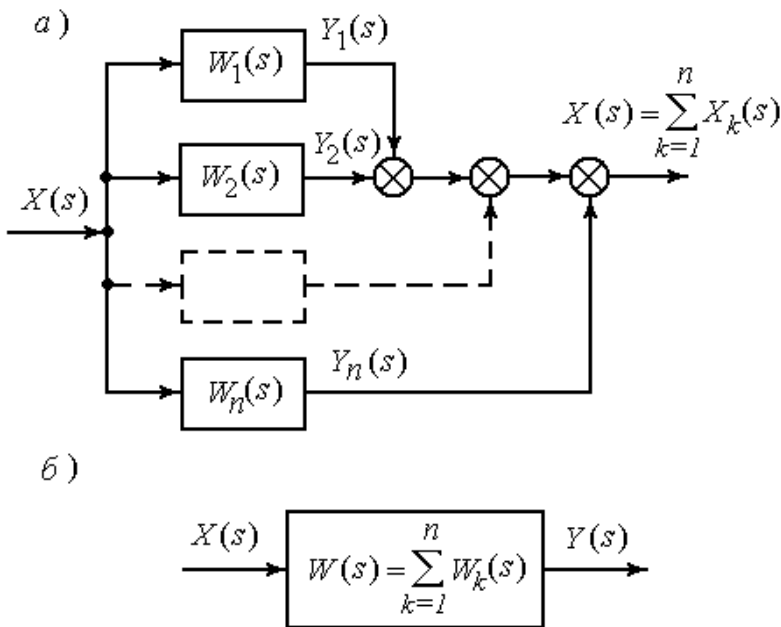


Рис. 1.7. Параллельное соединение звеньев (а) и его эквивалентная структурная схема (б)

Так как

$$X_i(s) = W_i(s)X(s),$$

то окончательно получим

$$Y(s) = W(s)X(s),$$

где

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (1.29)$$

Отсюда следует, что параллельное соединение звеньев в смысле прохождения сигнала эквивалентно одному звену, передаточная функция которого (1.29) равна сумме передаточных функций параллельного соединения звеньев (рис. 1.7,б).

*Соединением с обратной связью называется такое соединение двух звеньев, при котором выходная величина одного звена подается обратно на его вход через другое звено (рис. 1.8).*

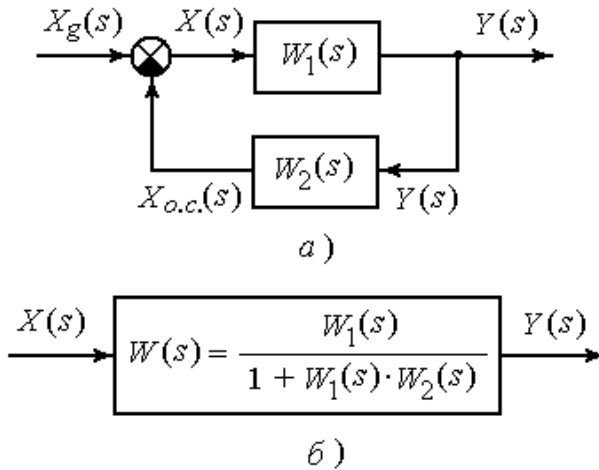


Рис. 1.8. Звено, охваченное отрицательной обратной связью (а), и его эквивалентная структурная схема (б)

Звено с передаточной функцией  $W_1(s)$  называют звеном прямого канала, а звено с передаточной функцией  $W_2(s)$  – звеном цепи обратной связи. В зависимости от знака выходной величины звена обратной связи, соединение может быть как с положительной, так и отрицательной обратной связью.

Определим соотношение, связывающее выходную величину  $Y(s)$  с входной величиной  $X(s)$  соединения с отрицательной обратной связью.

Изображение выходной величины

$$Y(s) = W_1(s)X_{\Sigma}(s).$$

В случае отрицательной обратной связи

$$X_{\Sigma}(s) = X(s) - X_{OC}(s),$$

где  $X(s)$  – изображение входного (возмущающего) воздействия  $x(t)$ . Так как

$$X_{OC}(s) = W_2(s)Y(s),$$

то

$$X_{\Sigma}(s) = X(s) - X_{OC}(s),$$

или

$$Y(s) = W_1(s)X_2(s) = W_1(s)X(s) - W_1(s)W_2(s)Y(s),$$

откуда

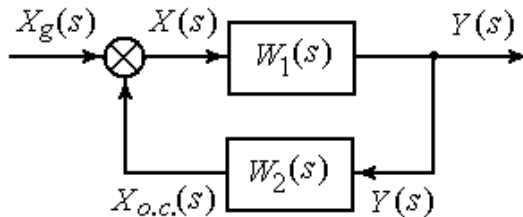
$$Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} X(s).$$

Так как передаточная функция определяется соотношением  $W_{\Sigma}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ , то передаточная функция встречно-параллельного соединения с отрицательной обратной связью будет определяться следующим выражением:

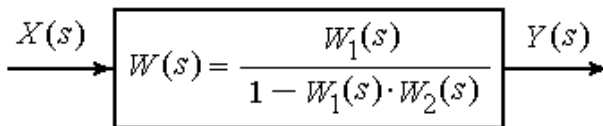
$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \quad (1.30)$$

Аналогично определяется передаточная функция соединения звеньев с положительной обратной связью (рис. 9):

$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}. \quad (1.31)$$



а)



б)

Рис. 1.9. Звено, охваченное положительной обратной связью (а), и его эквивалентная структурная схема (б)

Важным частным случаем встречно-параллельного соединения является *единичная отрицательная обратная связь*, когда  $W_2(s) = 1$  (рис.1.10).

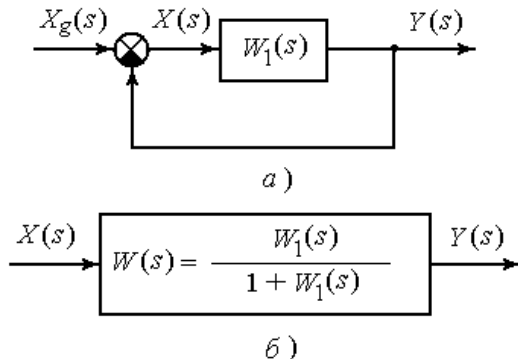


Рис.1.10. Звено, охваченное единичной отрицательной обратной связью (а), и его эквивалентная структурная схема (б)

Передаточная функция встречно-параллельного соединения с *единичной отрицательной обратной связью*

$$W_{\Sigma}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)}. \quad (1.32)$$

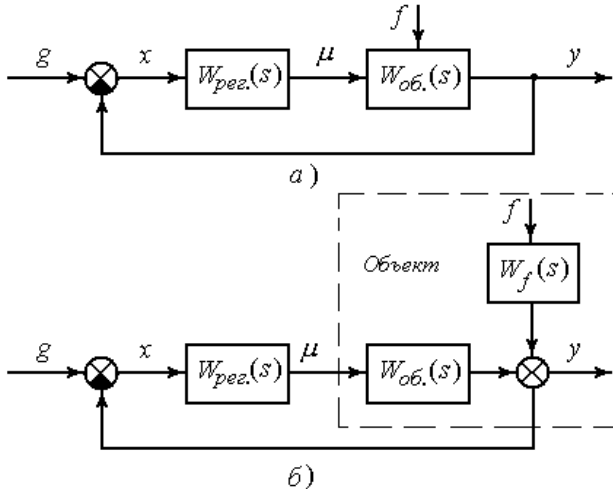
### 1.7. Передаточные функции линейных систем

Структурная схема любой САР обычно может быть приведена к виду, показанному на рис.1.11, где  $W_{рег}(s)$  и  $W_{об}(s)$  – передаточные функции регулятора и объекта регулирования соответственно.

На этом рисунке для упрощения показано лишь одно возмущающее воздействие  $f$ , приложенное к объекту

регулирования. Передаточная функция по этому возмущению обозначена  $W_f(s)$ .

На рис.1.11 чувствительный элемент САР условно отнесен к объекту регулирования, и выходной величиной САР считается выходная величина чувствительного элемента.



$a$  – общая;  $b$  – развернутая  
Рис.1.11. Структурная схема САР

Передаточные функции  $W_{pez}(s)$ ,  $W_{об}(s) = 1$  и  $W_f(s)$  представляют собой некоторую рациональную дробь (отношение двух многочленов) относительно комплексной переменной  $s$ :

$$W_{pez}(s) = \frac{b_{pez}(s)}{a_{pez}(s)}; \quad (1.33)$$

$$W_{об}(s) = \frac{b_{об}(s)}{a_{об}(s)}; \quad (1.34)$$

$$W_f(s) = \frac{b_f(s)}{a_{об}(s)}; \quad (1.35)$$

где  $b_{рег}(s), b_{об}(s), b_f(s), a_{рег}(s), a_{об}(s)$  - некоторые многочлены от комплексной переменной  $s$ .

*Передаточная функция разомкнутой системы*  $W(s)$  представляет собой отношение преобразования Лапласа регулируемой величины к преобразованию Лапласа сигнала ошибки при нулевых начальных значениях  $y(t)$  и  $x(t)$  и их производных:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (1.36)$$

где

$$Y(s) = L\{y(t)\}, \quad X(s) = L\{g(t) - y(t)\} = L\{x(t)\}.$$

Происхождение названия этой передаточной функции становится понятным, если учесть, что при размыкании цепи главной обратной связи (место разрывания указано волнистой чертой на рис. 1.11,а) входным сигналом САР является *ошибка*  $x(t)$ .

Так для структурной схемы, приведенной на рис.1.10,  $[y] = [g] = [x]$ , то из формулы (1.36) следует, что передаточная функция разомкнутой системы является безразмерной величиной:  $[W(s)] = 1$ . Передаточная функция  $W(s)$  легко вычисляется по структурной схеме САР (все возмущающие воздействия при этом считаются равными нулю).

**Пример 3.** Вычислить передаточную функцию разомкнутой системы стабилизации углового движения баллистической ракеты, структурная схема которой изображена на рис.1.12.

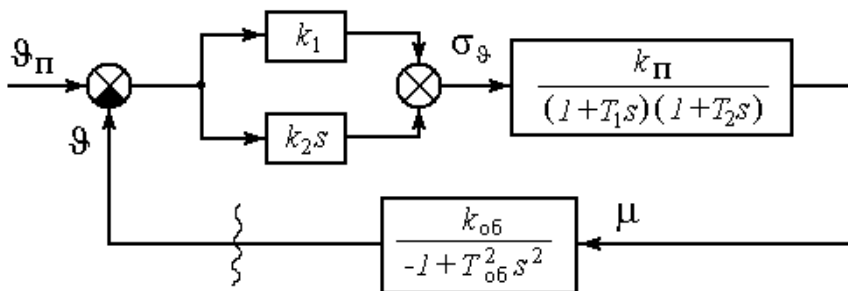


Рис.1.12. Структурная схема системы угловой стабилизации баллистической ракеты

Передаточная функция разомкнутой системы с учетом структурных преобразований (при параллельном соединении передаточные функции складываются, а при последовательном – перемножаются)

$$W(s) = \frac{k_{o\delta}k_n(k_1 + k_2s)}{(-1 + T_{o\delta}^2s^2)(1 + T_1s)(1 + T_2s)} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

В общем случае передаточная функция *разомкнутой системы* представляет собой рациональную дробь:

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{(b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)}{(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)}. \quad (1.37)$$

Здесь  $b(s) = b_{pez}(s)b_{o\delta}(s)$ ,  $a(s) = a_{pez}(s)a_{o\delta}(s)$  - некоторые многочлены с вещественными коэффициентами  $b_i$  и  $a_i$ , зависящими от параметров звеньев САР. В реальных САР всегда  $m > n$  и коэффициент  $b_m \neq 0$ .

Многочлен  $a(s)$  называется *характеристическим полиномом разомкнутой системы*, а уравнение

$$a(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1.38)$$

представляет собой характеристическое уравнение разомкнутой САР.

Передаточную функцию разомкнутой системы обычно записывают в стандартной форме, при которой многочлены в числителе и знаменателе  $W(s)$  имеют свободные члены, равные единицы (1.39):

$$W(s) = K \frac{B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + 1}{A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + 1}, \quad (1.39)$$

где  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Для статических систем  $[K] = 1$ , а для систем с астатизмом первого порядка  $[K_1] = 1/c$ .

*Основная передаточная функция замкнутой системы* (главный оператор САР)  $\Phi(s)$ . Представляет собой отношение преобразования Лапласа регулируемой величины к преобразованию Лапласа задающего воздействия при нулевых начальных значениях функций  $y(t)$  и  $g(t)$  и их соответствующих производных:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}, \quad (1.40)$$

где  $G(s) = L\{g(t)\}$ .

При вычислении главного оператора возмущающие воздействия не учитываются. Когда возмущений нет, общая структурная схема САР (рис.1.11) может быть приведена к виду, показанному на рис.1.13.

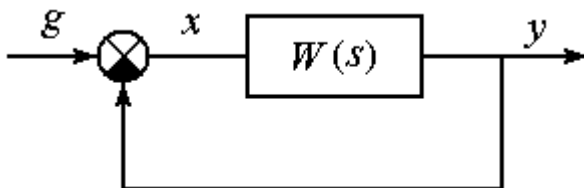


Рис. 1.13. Структурная схема САР при отсутствии возмущающих воздействий

Поэтому для нахождения главного оператора можно воспользоваться соотношением (30), положив в нем  $W_1(s) = W(s)$ ,  $W_2(s)$ :

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}. \quad (1.41)$$

Учитывая формулу (1.37), можно выражение (1.41) преобразовать к следующему виду:

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n}. \quad (1.41)$$

Таким образом, главный оператор  $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$  легко

вычисляется, если известна передаточная функция разомкнутой системы (1.37). Он представляет собой рациональную дробь, в числителе которой стоит многочлен  $b(s)$ , фигурирующий в числителе передаточной функции разомкнутой системы, а в знаменателе – *характеристический полином замкнутой системы*

$$c(s) = b(s) + a(s) = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n, \quad (1.42)$$

равный сумме многочленов, фигурирующих в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{b(s)}{a(s) + b(s)}. \quad (1.43)$$

Пример 4. Вычислить характеристический полином замкнутой системы для структурной схемы САР, изображенной на рис.1.12, и построить кривую Михайлова для определения устойчивости системы. Передаточная функция разомкнутой САР имеет вид (пример 3):

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{k_{o\delta}k_{\Pi}(k_1 + k_2s)}{(-1 + T_{o\delta}^2s^2)(1 + T_1s)(1 + T_2s)}.$$

Решение:

1. Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{b(s)}{a(s) + b(s)}.$$

2. Характеристический полином замкнутой системы

$$c(s) = a(s) + b(s) = k_{o\delta}k_n(k_1 + k_2s) + (-1 + T_{o\delta}^2s^2)(1 + T_1s)(1 + T_2s)$$

После преобразований характеристический полином имеет вид

$$c(s) = T_{o\delta}^2T_1T_2s^4 + T_{o\delta}^2(T_1 + T_2)s^2 + (T_{o\delta}^2 - T_1T_2)s^2 + (k_2k_{\Pi}k_{o\delta} - T_1 - T_2)s + k_1k_{\Pi}k_{o\delta} - 1.$$

Произведем замену  $s = j\omega$

$$c(j\omega) = T_{o\delta}^2T_1T_2(j\omega)^4 + T_{o\delta}^2(T_1 + T_2)(j\omega)^3 + (T_{o\delta}^2 - T_1T_2)(j\omega)^2 + (k_1k_{\Pi}k_{o\delta} - T_1 - T_2)j\omega + k_1k_{\Pi}k_{o\delta} - 1.$$

После возведения  $j\omega$  в степень получим выражение

$$c(j\omega) = T_{o\delta}^2T_1T_2\omega^4 - T_{o\delta}^2(T_1 + T_2)j\omega^3 - (T_{o\delta}^2 - T_1T_2)\omega^2 + (k_1k_{\Pi}k_{o\delta} - T_1 - T_2)j\omega + k_1k_{\Pi}k_{o\delta} - 1.$$

Для определения устойчивости САР по критерию Михайлова (3.1) выделим вещественную и мнимую части в характеристическом полиноме

$$c(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где

$$X(\omega) = T_{o\delta}^2T_1T_2\omega^4 - (T_{o\delta}^2 - T_1T_2)\omega^2 + k_1k_nk_{o\delta} - 1,$$

$$Y(\omega) = -T_{o\delta}^2(T_1 + T_2)\omega^3 + (k_1k_nk_{o\delta} - T_1 - T_2)\omega.$$

Изменяя  $\omega$  от 0 до  $\infty$  построим кривую Михайлова. Ее вид для устойчивой системы изображен на рис. 1.14.

### **1.8. Критерий устойчивости Михайлова**

Критерий устойчивости был предложен ученым А.В. Михайловым в 1936 г. Он позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду кривой Михайлова, представляющей собой годограф вектора

$$c(j\omega) = c_0(j\omega)^n + c_1(j\omega)^{n-1} + \dots + c_n \quad (1.44)$$

при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Годограф  $c(j\omega)$  представляет собой полином замкнутой системы  $c(s)$  при подстановке  $s = j\omega$ .

Выделив в правой части (1.41) вещественную и мнимую составляющие, можно записать

$$c(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (1.45)$$

где 
$$\begin{cases} X(\omega) = c_n - c_{n-2}\omega^2 + c_{n-4}\omega^4 - \dots; \\ Y(\omega) = c_{n-1}\omega - c_{n-3}\omega^3 + c_{n-5}\omega^5 - \dots; \end{cases} \quad (1.46)$$

Кривая Михайлова строится в плоскости  $[X, jY]$  по точкам в соответствии с выражением (1.45). Критерий Михайлова формулируется таким образом: *для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы вектор  $c(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  повернулся на угол*

$$\psi = \frac{n\pi}{2}$$
 *против часовой стрелки, где  $n$  – степень характеристического полинома исследуемой системы (рис.1.14).*

Следовательно, кривая Михайлова для устойчивых САУ, последовательно проходит число квадрантов, которое равно порядку дифференциального уравнения САУ (рис.1.14).

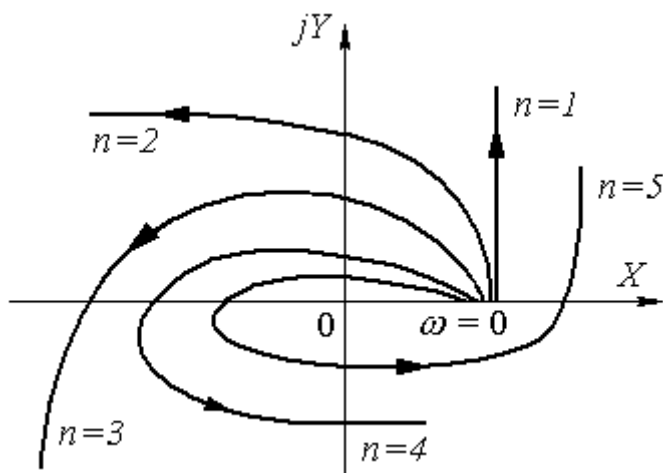


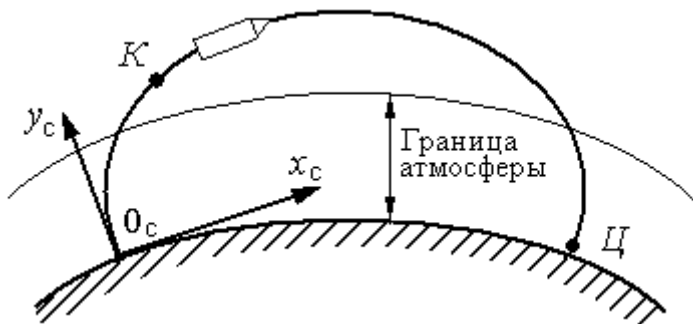
Рис.1.14. Кривые Михайлова для устойчивых САР

## 2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Тема: «Исследование устойчивости системы угловой стабилизации статически неустойчивой баллистической ракеты»

### 2.1. Постановка задачи

Программная траектория ракеты включает активный участок  $O_c - K$ , на котором работают маршевые двигатели, и пассивный, участок  $K - Ц$ , в начале которого двигательная установка выключается и далее ракета летит как свободно брошенное тело (рис. 3.1).



$O_c - K$  – активный участок;  $K$  – точка выключения двигателей;  $K - Ц$  – пассивный участок

Рис. 2.1. Программная траектория полета баллистической ракеты

В качестве программной выбирается траектория, достаточно удобная с точки зрения управления и близкая к оптимальной траектории, соответствующей наименьшему расходу топлива при заданных значениях дальности и веса.

Траектория движения ракеты рассматривается в стартовой системе координат  $O_c X_c Y_c Z_c$ , начало координат  $O_c$  которой совмещается с точкой старта. Плоскость  $O_c X_c Y_c$  называется плоскостью стрельбы.

Угловое положение ракеты относительно стартовой определяется тремя углами Эйлера:  $\vartheta$  (тета),  $\psi$  (пси),  $\varphi$  (фи). Угол  $\vartheta$  называется *углом тангажа* и представляет собой угол между продольной осью ракеты и горизонтальной плоскостью в точке старта. Угол  $\psi$  называется *углом рыскания* и представляет собой угол между продольной осью ракеты и плоскостью  $O_c X_c Y_c$ . Угол  $\varphi$  называется *углом вращения* (крена). Он характеризует угол поворота ракеты относительно продольной оси.

Программное положение ракеты задается при помощи программной системы координат  $O_n X_n Y_n Z_n$  (рис.3.1), начало которой  $O_n$  совпадает с программным положением центра масс ракеты. Ось  $O_n X_n$  характеризует программное положение продольной оси ракеты; ось  $O_n Y_n$  перпендикулярна оси  $O_n X_n$  и расположена в плоскости стрельбы; ось  $O_n Z_n$  перпендикулярна плоскости  $O_n X_n Y_n$ .

Угловое положение программной системы координат относительно стартовой определяется программными значениями угла тангажа  $\vartheta_n$ , угла рыскания  $\psi_n$  и угла вращения  $\varphi_n$ . В большинстве случаев  $\psi_n = \varphi_n = 0$ . Программное значение угла тангажа ракеты изменяется от 0 до  $45^\circ$ . Объясняется это тем, что по конструктивным соображениям наиболее удобен вертикальный старт баллистической ракеты ( $\vartheta(0) = 90^\circ$ ), тогда как наибольшая дальность полета имеет место тогда, когда в момент выключения двигателя  $t_k$  угол тангажа  $\vartheta(t_k) \approx 45^\circ$ . Это предусматривает в процессе полета по программной траектории разворот и стабилизацию продольной оси ракеты от значения  $\vartheta(0)$  до значения  $\vartheta(t_k)$ .

## 2.2. Задание № 1

Исследовать на устойчивость систему угловой стабилизации статически неустойчивой баллистической ракеты с ЖРД, структурная схема которой изображена на рис. 3.2.

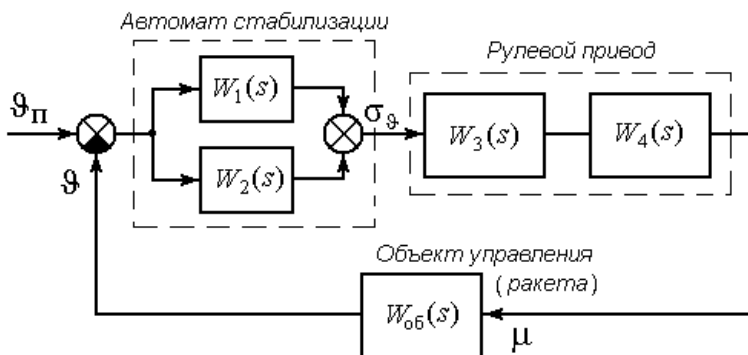


Рис. 2.2. Структурная схема системы стабилизации углового движения баллистической ракеты

На рисунке ты следующие обозначения:  $\vartheta_{\Pi}$  и  $\vartheta$  программное и действительное значение углового движения баллистической ракеты (угол тангажа) в момент времени  $t$ .  $\sigma_{\theta}$  - управляющий сигнал от усилителя-преобразователя;  $\mu$  - управляющее воздействие на регулирующий орган.

Автомат стабилизации состоит из двух параллельно соединенных звеньев с передаточными функциями  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Рулевой привод включает два последовательно соединенных звена с передаточными функциями  $W_3(s)$  и  $W_4(s)$ .  $W_{об}(s)$  – передаточная функция объекта управления (ракеты).

$\vartheta_n$  – программный угол тангажа ракеты;  $\vartheta$  - действительный угол тангажа ракеты в момент времени  $t$ .

Таблица 2.1

Варианты передаточных функций к заданию №1

№	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	$W_4(s)$	$W_{об}(s)$
1	$K_1$	$K_2 s$	$\frac{K_3}{1+T_1 s}$	$\frac{K_4}{1+T_2 s}$	$\frac{K_{об}}{-1+T_{об}^2 s^2}$
2	$K_1 s$	$\frac{K_2}{s}$	$\frac{K_3}{1+T_1 s}$	$K_4 s$	$\frac{K_{об}}{-1+T_{об} s}$
3	$\frac{K_1}{s}$	$K_2 + s$	$K_3$	$\frac{K_4 s}{T_2 s + 1}$	$\frac{K_{об}}{-1+T_{об}^2 s}$
4	$K_1$	$K_2 s$	$\frac{K_3}{s(T_1 + 1)}$	$\frac{K_4}{s}$	$\frac{K_{об}}{-1+T_{об} s}$
5	$K_1 + s$	$K_2$	$\frac{K_3 s}{T_2 s + 1}$	$\frac{K_4}{1+T_4 s}$	$\frac{K_{об}}{-1+T_{об}^2 s^2}$

В таблице 2.1 использованы следующие обозначения:

$k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты передачи автомата стабилизации;

$k_3$ ,  $k_4$  и  $T_1, T_2$  – коэффициент передачи и постоянная

времени рулевого привода;  $k_{об}$  и  $T_{об}$  – коэффициент передачи и постоянная времени объекта управления (ракеты).

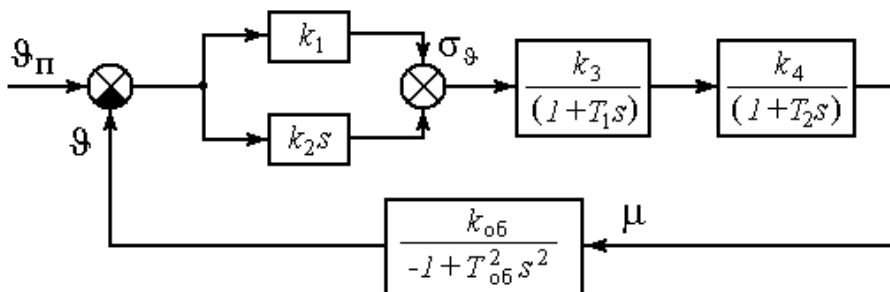


Рис. 2.3. Пример структурной схемы системы

стабилизации ракеты для варианта №1 из таблицы 2.1  
 Таблица 2.2  
 Значения коэффициентов усиления  
 и постоянных времени к заданию №1

№	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$k_{об}$	$T_1$	$T_2$	$T_{об}$	При м.
1.	1,2	0,6	1,0	1,8	1,6	0,1	0,05	1,0	
2.	0,5	1,0	0,8	1,5	5,0	0,05	1,5	1,2	
3.	1,0	0,8	0,5	0,4	1,2	0,5	1,0	0,5	
4.	0,8	1,2	1,3	0,2	0,5	0,8	1,2	0,9	
5.	0,4	0,6	0,9	0,9	2,0	0,2	0,5	0,4	
6.	0,9	0,5	0,6	1,2	1,5	0,4	0,02	1,5	
7.	1,0	0,7	3,0	0,3	0,8	0,7	0,1	0,8	
8.	2,0	0,4	2,0	0,7	1,8	0,15	0,2	0,7	
9.	1,5	1,0	1,4	2,0	2,8	0,3	0,06	0,6	
10.	1,1	0,9	2,5	1,6	0,6	0,6	0,07	1,8	

*Порядок выполнения работы:*

1. Определить передаточную функцию разомкнутой системы автоматического регулирования.
2. Определить характеристический полином замкнутой системы.
3. Выделить вещественную и мнимую части характеристического полинома.
4. Вычислить коэффициенты характеристического полинома в соответствии с вариантом задания.
5. Построить кривую Михайлова для определения устойчивости САР.
6. Если система неустойчива, то изменить параметры таким образом, чтобы она стала устойчивой.
7. Выводы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы теории автоматического управления ракетными двигательными установками /А.И. Бабкин, С.И. Белов, Н.Б. Рутовский и др. – М.: Машиностроение, 1986. 456 с. [библ. ВГТУ, шифр 621.4/0753].
2. Единая система программной документации. Схемы алгоритмов, программ данных и систем. Условные обозначения и правила выполнения. ГОСТ 19.701-90 (ИСО 5807-85).-М: Изд. стандартов, 1991. 26 с.
3. Методические указания к лабораторным работам № 1-3 по курсу «Автоматика и регулирование РД» для студентов специальности 160302 «Ракетные двигатели» очной формы обучения. Ч.1/ГОУВПО Воронежский государственный технический университет; сост. Г.И. Скоморохов. Воронеж, 2004. 21 с. [библ. ВГТУ, шифр 417-2004].
4. Методические указания к лабораторным работам № 4-6 по курсу «Автоматика и регулирование РД» для студентов специальности 160302 «Ракетные двигатели» очной формы обучения. Ч.2/ГОУВПО Воронежский государственный технический университет; сост. Г.И. Скоморохов, В.А. Коробченко. Воронеж, 2006. 15 с. [библ. ВГТУ, шифр 75-2006].
5. Методические указания к лабораторным работам № 7-9 по курсу «Автоматика и регулирование РД» для студентов специальности 160302 «Ракетные двигатели» очной формы обучения. Ч.3/ГОУВПО Воронежский государственный технический университет; сост. Г.И. Скоморохов, В.А. Коробченко. Воронеж, 2006. 19 с. [библ. ВГТУ, шифр 76-2006].
6. Методические указания к лабораторным работам № 10-11 по курсу «Автоматика и регулирование РД» для студентов специальности 160302 «Ракетные двигатели» очной формы обучения. Ч.3/ГОУВПО Воронежский государственный технический университет; сост. Г.И. Скоморохов, В.А.

Коробченко. Воронеж, 2007. 19 с. [библ. ВГТУ, шифр 93-2007].

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	1
1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.....	2
1.1. Схема и особенности регулирования двигательной установки с жидкостным ракетным двигателем.....	2
1.2. Элементы и звенья систем автоматического регулирования .....	5
1.3. Передаточные функции линейных звеньев .....	9
1.4. Получение дифференциального уравнения звена по известным передаточным функциям .....	18
1.5. Структурная схема динамического звена.....	19
1.6. Передаточные функции сложного соединения звеньев....	21
1.7. Передаточные функции линейных систем .....	26
1.8. Критерий устойчивости Михайлова .....	33
2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ .....	34
2.1. Постановка задачи .....	34
2.2. Задание № 1 .....	36
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	40

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
для практических занятий по дисциплине  
«Автоматика и регулирование ракетных двигателей»  
для студентов специальности 160700.65, 24.05.02  
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»  
очной формы обучения

Составитель  
Скоморохов Геннадий Иванович  
Пригожин Антон Александрович

В авторской редакции

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный  
технический университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14