ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

ВАЖНЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В MAPLE

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для практических занятий по курсу «Математика»
для студентов направлений
16.03.01 «Техническая физика» 14.03.01, «Ядерная энергетика и теплофизика» и 22.03.02 «Металлургия»
очной формы обучения

Воронеж 2021

Составители: канд. техн. наук С.А. Кострюков,
канд. техн. наук В.В. Пешков,
канд. физ.-мат. наук В.А. Шунина

Важнейшие математические операции в Maple: Методические указания для практических занятий по курсу «Математика» для студентов направлений 16.03.01 «Техническая физика» 14.03.01, 14.03.01 «Ядерная энергетика и теплофизика» и 22.03.02 «Металлургия» очной формы обучения / Воронеж. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет». 2021; сост. С.А. Кострюков, В.В. Пешков, В.А. Шунина. Воронеж, 20 с. Электронный ресурс кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

В методических указаниях кратко рассмотрены примеры выполнения простейших математических операций, необходимых студентам 1-го курса очной формы обучения с помощью широко распространенной универсальной системы компьютерной математики Maple.

Методические указания подготовлены в электронной форме и содержатся в файле ВМО в Maple.pdf.

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Публикуется по решению методического семинара кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

Любая система компьютерной математики должна уметь выполнять базовые действия математического анализа, такие как дифференцирование, интегрирование, вычисление пределов, разложение функций в ряды и т.д. Конечно, такая мощная система, как Maple, здесь не является исключением и располагает многообразными и развитыми средствами по решению подобных задач. В большинстве случаев соответствующие Maple-функции находятся в ядре системы и не требуют подключения пакетов расширения.

1. Дифференцирование

Вычисление производной функции $f(x)$ может быть оформлено через Maple-функцию **diff**, первый аргумент которой есть заданная функция, а второй – переменная дифференцирования. Например, для нахождения производной функции $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(x-2)$ используется команда:

```
> diff(x^2*arctan(x-2),x);
```

$$2\,x\arctan(x-2)+\frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Отметим, что для этой функции **diff**, как и для многих других функций Maple, существует так называемая инертная форма. Последняя отличается от основной формы только первой буквой – в инертной форме она заглавная, т.е. вызов осуществляется с помощью **Diff**. При этом непосредственного вычисления производной она не производит, но исходные данные выводит в математической нотации:

```
> Diff(x^2*arctan(x-2),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\arctan(x-2)\right)$$

Если справа от знака равенства записать функцию **diff**, а слева ту же самую функцию, но с большой буквы (т.е. в инертной форме), то получим вывод результата в весьма наглядном виде:

```
> Diff(x^2*arctan(x-2),x)=diff(x^2*arctan(x-2),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \arctan(x-2)\right) = 2\,x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Действительно, в строке вывода видим: производная заданной функции равна такой-то функции. Этот прием, улучшающий читабельность математических документов, довольно часто используется при вычислениях в Maple.

Следует сказать, что в пакете Maple существует особая функция **value**, с помощью которой в любой момент инертную функцию можно превратить в вычисляемую. Применительно к функции **Diff** такое действие приведет к вычислению производной:

```
> r:=Diff(x^2*arctan(x-2),x): # r – вспомогательная переменная для хранения Diff
> value(r);
```

$$2\,x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Приведенный чуть выше способ вывода, когда слева стоит условие, а справа результат, можно получить, записав:

```
> r=value(r);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \arctan(x-2)\right) = 2\,x \arctan(x-2) + \frac{x^2}{1+(x-2)^2}$$

Производную можно брать от вектор-функции. К примеру, вычисление производной от вектора, компонентами которого являются функции $\sin^2 x$, x^n, e^{ax}, можно оформить так:

```
> Diff([sin(x)^2,x^n,exp(a*x)],x)=diff([sin(x)^2,
x^n,exp(a*x)],x);
```

$$\frac{d}{dx}\left[\sin(x)^2, x^n, \mathbf{e}^{(a\,x)}\right] = \left[2\sin(x)\cos(x), \frac{x^n\,n}{x}, a\,\mathbf{e}^{(a\,x)}\right]$$

Производная порядка выше первого задается добавлением к имени переменной комбинации **$m**, где **m** – число, равное

порядку. Найдем производную восьмого порядка функции $x^2 \ln(x-2)$:

```
> Diff(x^2*ln(x-2),x$8)=diff(x^2*ln(x-2),x$8);
```

$$\frac{d^8}{dx^8}\left(x^2 \ln(x-2)\right) = -\frac{6720}{(x-2)^6} + \frac{11520\,x}{(x-2)^7} - \frac{5040\,x^2}{(x-2)^8}$$

Можно попытаться упростить этот результат:

```
> simplify(");
```

$$\frac{d^8}{dx^8}\left(x^2 \ln(x-2)\right) = -\frac{240\,(x^2 - 16\,x + 112)}{(x-2)^8}$$

Функция **diff** также пригодна для вычисления частных производных. Частная производная по x функции двух переменных $f(x,y) = \cos(x/y+1)\,x^2 y$:

```
> diff(cos(x/y+1)*x^2*y,x);
```

$$-\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2 + 2\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x\,y$$

Частная производная по y той же функции (с использованием инертной формы):

```
> Diff(cos(x/y+1)*x^2*y,y)=diff(cos(x/y+1)*x^2*y,y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2 y\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^3}{y} + \cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2$$

Частная производная по y 2-го порядка:

```
> Diff(cos(x/y+1)*x^2*y,y$2)=diff(cos(x/y+1)*x^2*y,y$2);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2 y\right) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^4}{y^3}$$

Смешанная частная производная:

```
>Diff(cos(x/y+1)*x^2*y,x,y)=diff(cos(x/y+1)*x^2*y,x,y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2 y\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x^3}{y^2} + \frac{2\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)x^2}{y} + 2\cos\left(\frac{x}{y}+1\right)x$$

Для операций дифференцирования также может использоваться оператор **D**. Отметим, что здесь под термином «оператор» понимается специфический объект Maple, лишь в некото-

ром смысле напоминающий классический математический оператор. В форме **D(f)(x)** результат действия этого объекта аналогичен вызову **diff(f(x),x)**. В записи **D(f)** он выдает производную функции **f** в символической форме или как отображение аргумент→значение функции. В частности,

```
> D(cos^2+tan);
```

$$-2\sin\cos + 1 + \tan^2$$

```
> D(sin@cos); # оператор D действует на композицию двух функций, т.е. на sin(cos)
```

$$-\cos^{(2)}\sin$$

(Здесь $\cos^{(2)}$ означает функцию cos(cos…) – «косинус от косинуса»).

```
> D(sin*cos);
```

$$\cos^2 - \sin^2$$

```
> D(ln); # пример вывода в форме отображения
```

$$a \to \frac{1}{a}$$

Рассмотрим одно важное применение оператора **D**. Зададим функцию $\sin x^2$:

```
> f:=x->sin(x^2):
```

Поставим целью определить функцию **u(x)**, в каждой точке равную производной функции **f**. Речь идет о Maple-функции, к которой потом можно было обращаться как к обычной математической функции, т.е. вычислять значение при заданном аргументе, строить графики, дифференцировать и т.д.? Такой, казалось бы, очевидный способ не приводит к успеху:

```
> u:=x->diff(fun(x),x); # задание переменной u как функции x → f'(x)
```

$$u := x \to \mathrm{diff}(\mathrm{fun}(x), x)$$

```
> u(2.); # попытка вычисления значения функции u(x) в точке x=2
Error, (in u) wrong number (or type) of parameters in function diff
```

Сообщение об ошибке. Это свидетельствует о том, что Maple не воспринимает **u** как функцию аргумента **x**. Введение вспомогательной переменной **t** тоже не обеспечивает нужного результата:

```
> t:=diff(fun(x),x);   u:=x->t;
```

$$t := 2\cos(x^2)\,x$$

$$u := x \to t$$

```
> u(2.);
```

$$2\cos(x^2)\,x$$

В последнем выводе не происходит вычисления функции, значит, по-прежнему Maple не рассматривает $u(2)$ как значение функции $2\cos(x^2)x$ в точке $x=2$.

Проблема полностью решается с помощью оператора **D**:

```
> D(f);  # производная функции f в виде отображения x → f'(x)
```

$$x \to 2\cos(x^2)\,x$$

```
> u:=D(f);  # переменная u для хранения этого отображения
```

$$u := x \to 2\cos(x^2)\,x$$

```
> u(2.);  # значение функции f'(x) в точке x=2
                                -2.614574484
```

```
> plot({f(x),u(x)},x=0..5);  # построение графиков функций f(x) и f'(x) при 0 ≤ x ≤ 5.
```

Теперь видно, что **u(x)** как объект Maple, созданный для хранения производной, обладает всеми требуемыми свойствами, и может использоваться в дальнейших вычислениях наряду с другими объектами Maple.

Еще примеры на использование оператора **D**:

```
> fun:=x->x+2*x*exp(-x^2):  # задание функции одной переменной
```

```
> D(D(fun));  # производная от производной
```

$$x \to -12\,x\,\mathbf{e}^{(-x^2)} + 8\,x^3\,\mathbf{e}^{(-x^2)}$$

```
> (D@@5)(fun);  # пятая производная
```

$$x \to 120\,\mathbf{e}^{(-x^2)} - 720\,x^2\,\mathbf{e}^{(-x^2)} + 480\,x^4\,\mathbf{e}^{(-x^2)} - 64\,x^6\,\mathbf{e}^{(-x^2)}$$

> **D(fun)(2);** **#** *производная в точке* x=2

$$1 - 14\,\mathbf{e}^{(-4)}$$

> **evalf(");#***то же в форме числа с плавающей точкой*

$$0.7435810555$$

> **D(fun)(2.);** **#** *то же самое, что одновременно две последние команды*

$$0.7435810558$$

> **g:=(x,y,z)->x*exp(y)+y*sqrt(z^1+1);** **#** *задание функции трех переменных*

$$g := (x, y, z) \to x\,\mathbf{e}^{y} + y\sqrt{z+1}$$

> **D[2](g);** **#** *частная производная по второй переменной, т.е. по y*

$$(x, y, z) \to x\,\mathbf{e}^{y} + \sqrt{z+1}$$

Для вычисления производных неявно заданных функций используется функция **implicitdiff**. Следующие примеры поясняют ее применение.

> **f:=y^(x)+ln(y)=1;** **#** *вводится неявная функция и присваивается переменной* **f**

$$f := y^x + \ln(y) = 1$$

> **implicitdiff(f,y,x);** **#** *производная функции* $y(x)$ *по* x

$$-\frac{y^x\,y\ln(y)}{y^x\,x+1}$$

> **implicitdiff(f,x,y);** **#** *производная функции* $x(y)$ *по* y

$$-\frac{y^x\,x+1}{y^x\ln(y)\,y}$$

> **implicitdiff(f,y,x,x);** **#** *вторая производная функции* $y(x)$ *по* x

$$\frac{y^x\,y\ln(y)\,(-\ln(y)+2\,(y^x)^2\,x+2\,y^x+(y^x)^2\,x\ln(y)+y^x\ln(y))}{(y^x)^3\,x^3+3\,x^2\,(y^x)^2+3\,y^x\,x+1}$$

2. Интегрирование

а) Неопределенные интегралы

Для вычисления неопределенных интегралов Maple предоставляет функцию **int**. При этом если аналитического значения интеграла не существует, возвращается исходная запись.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int ax^n dx$. Имеем

```
> int(a*x^n,x);
```

$$\frac{a\,x^{(n+1)}}{n+1}$$

Существует инертная форма функции **int**:

```
> Int(ln(x)^3,x);
```

$$\int \ln(x)^3\,dx$$

В таком представлении интеграл записывается, но не вычисляется, а если его все же требуется вычислить, то используется функция **value**:

```
> value(");
```

$$\ln(x)^3 x - 3\,x\ln(x)^2 + 6\,x\ln(x) - 6\,x$$

Напомним, что символ " («кавычки») означает подстановку последнего вычисленного результата. Вместо него может стоять переменная, которой предварительно была присвоена инертная функция **Int**:

```
> t:=Int(ln(x)^3,x): value(t);
```

$$\ln(x)^3 x - 3\,x\ln(x)^2 + 6\,x\ln(x) - 6\,x$$

Как и с функцией **diff**, весьма наглядный способ представления результата обеспечивается, когда в одной строке используется функция **int** вместе со своим аналогом в инертной форме **Int**. Этот способ вполне очевиден из примеров:

```
> Int(x^2*sin(x),x)=int(x^2*sin(x),x);
```

$$\int x^2 \sin(x)\,dx = -x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

> **Int(sin(x)/x,x)=int(sin(x)/x,x);** **#** *эта функция называется интегральный синус*

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \mathrm{Si}(x)$$

Следует помнить, что хотя в аналитических выражениях интегралов отсутствует аддитивная произвольная постоянная *C*, она должна там подразумеваться.

В некоторых случаях Maple не может взять интеграл, тогда с помощью функций **taylor** и **convert** можно попытаться представить результат в виде полинома умеренной степени, что демонстрирует следующий пример

> **w:=int(exp(-sin(x)),x);** **#** *интеграл присваивается переменной w*

$$w := \int \mathbf{e}^{(-\sin(x))}\,dx$$

> **convert(taylor(w,x=0,8), polynom);** **#** *о параметрах функции* **taylor** *см. ниже*

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{1680}x^7 - \frac{1}{720}x^8$$

Разумеется, что в этом случае решение является приближенным, но оно все же есть и с ним можно работать, например, строить график функции, представляющей данный интеграл.

- **convert/parfrac** – разложение рациональной функции на простые дроби

> **(x^5+1)/(x^4-x^2)=convert((x^5+1)/(x^4-x^2), parfrac,x);**

$$\frac{x^5+1}{x^4-x^2} = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

б) Определенные интегралы

Для вычисления определенных интегралов используются те же функции **int** и **Int**, в которых надо указать пределы ин-

тегрирования, например **x=a..b**, если интегрируется функция переменной **x**.

```
> Int(sin(x)/x,x=a..b)=int(sin(x)/x,x=a..b);
```

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \mathrm{Si}(b) - \mathrm{Si}(a)$$

```
> int(sin(x)/x,x=0..1);
```

$$\mathrm{Si}(1)$$

Maple предпочитает выводить результат в таком как бы незавершенном виде, так как считает его более точным значением, чем в виде числа с плавающей точкой. Однако если требуется именно численное значение интеграла, причем с любой заданной точностью, можно применить функцию **evalf**. Существует и другая возможность сразу получить численный результат, что показано в следующем примере:

```
> int(sin(x)/x,x=0..1.);  # вместо целого числа 1 записано действительное 1.
```

$$0.9460830704$$

(т.е. один или два предела интегрирования записываются в виде числа с плавающей точкой).

Еще примеры – несобственные интегралы:

```
> Int(x*ln(x),x=0..1)=int(x*ln(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 x\ln(x)\,dx = \frac{-1}{4}$$

```
> Int(x*exp(-x),x=0..infinity)=int(x*exp(-x),
x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty x\,\mathbf{e}^{(-x)}\,dx = 1$$

```
> Int(1/(x^2+6*x+12),x=-infinity..infinity)=
int(1/(x^2+6*x+12),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}\,dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Последние два примера показывают, что пределами интегралов может выступать бесконечность, обозначаемая как **infinity.**

Возможна ситуация, когда определенный интеграл аналитически не вычисляется и не выражается даже в виде специальных функций, которые в очень большом количестве имеются в базе данных системы. Например,

```
> int(exp(-sin(x)),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \mathbf{e}^{(-\sin(x))}\,dx$$

В этом случае использование функции **evalf** позволяет посчитать интеграл численно (при этом задействуются именно численные методы интегрирования):

```
> evalf(");
```

$$0.6513249125$$

Другой пример:

```
> Int(exp(-x)/sqrt(x^2+1),x=0..exp(1))=
evalf(int(exp(-x) /sqrt(x^2+1),x=0..exp(1)));
```

$$\int_0^{\mathbf{e}} \frac{\mathbf{e}^{(-x)}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 0.7366659769$$

Следует отметить, что если **evalf** применить к инертной функции **Int**, то это так же, как и в случае комбинации с **int**, вызовет численное вычисление интеграла, однако при этом есть возможность указать точность (разрядность сетки) и метод интегрирования. Например,

```
> evalf(Int((1-exp(-x^2))/x,x=0..100,15,_NCrule));
```

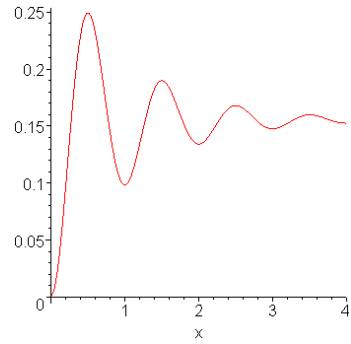
4.89377801843886

в) Интегралы с переменными пределами интегрирования

Определим функцию $f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin 2\pi t dt$, зависящую от верхнего предела интеграла:

```
> f:=x->int(exp(-t)*sin(2*Pi*t),t=0..x);
```

$$f := x \to \int_0^x \mathbf{e}^{(-t)} \sin(2\,\pi\,t)\,dt$$



Теперь можно выполнять любые допустимые действия с этой функцией, например, вычислить её значение в конкретной точке:

```
> f(2.);
```

0.1342159345

или построить график

```
> plot(f(x),x=0..4);
```

г) Повторные интегралы

Повторные интегралы имеют вид

$$\int_a^b dx_n \int_{\varphi_1(x_n)}^{\varphi_2(x_n)} dx_{n-1} \ldots \int_{\psi_1(x_2,\ldots x_n)}^{\psi_2(x_2,\ldots x_n)} dx_1 .$$

Вычисление этих интегралов сводится к рекурсивному вызову функции **int** (либо **Int**). Например, если интегрируется функция двух переменных, можно использовать команды

```
> Int(Int(arctan(y/x)/(x*y),x=2.0..4.4),y=-2..3.0);
```

$$\int_{-2}^{3.0}\int_{2.0}^{4.4} \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{x\,y}\,dx\,dy$$

```
> evalf(");
```

1.257050378

Обратите внимание в приведенном примере на форму записи интеграла, которую легко принять за двойной интеграл. Тем не

менее, это интеграл повторный, причем сначала интегрирование производится по *x*, а затем по *y*.

Повторный интеграл от функции трех переменных:

```
> int(int(int((x^2+y^2)*z,z=0..a),y=0..a),x=0..a);
```

$$\frac{a^6}{3}$$

Пример повторного интеграла, у которого внутренний интеграл имеет переменные пределы:

```
> p:=Int(Int(2-x-y,x=sqrt(y)..y^2),y=0..1): p=value(p);
```

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^2} 2 - x - y \, dx \, dy = \frac{-11}{30}$$

Как известно, вычисление кратных интегралов сводится к повторным интегралам.

3. Вычисление пределов функций

Для вычисления предела функции в точке $x=a$ в пакете Maple используются функции

```
limit(f,x=a);                    limit(f,x=a,dir);
Limit(f,x=a);                    Limit(f,x=a,dir);
```

Здесь **f** – алгебраическое выражение, **x** – имя переменной, **dir** –параметр, указывающий направление поиска предела(**right** – справа, **left** – слева, **real** – в области вещественных значений, **complex** – в области комплексных значений). Значением **a** может быть бесконечность.

Внимательно разберите примеры.

```
> Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x)/x,x=0);  # первый замечательный предел
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

```
> Limit(((x-2)/x)^x,x=infinity)=limit(((x-2)/x)^x,
x=infinity);
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x}=\mathbf{e}^{(-2)}$$

```
> Limit(2^(1/x),x=0,left)=limit(2^(1/x),x=0,left);
```

*левосторонний предел*

$$\lim_{x\to 0-}2^{\left(\frac{1}{x}\right)}=0$$

```
> Limit(2^(1/x),x=0,right)=limit(2^(1/x),x=0,right);
```

*правосторонний предел*

$$\lim_{x\to 0+}2^{\left(\frac{1}{x}\right)}=\infty$$

```
> Limit(((x-2)/(1+x))^x,x=-infinity)=
limit(((x-2)/(1+x))^x,x=-infinity);
```

$$\lim_{x\to(-\infty)}\left(\frac{-2+x}{x+1}\right)^{x}=\mathbf{e}^{(-3)}$$

```
> Limit((2^x-1)/x,x=0)=limit((2^x-1)/x,x=0);
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}-1}{x}=\ln(2)$$

4. Разложение функций в ряды

Для разложения функции или выражения в ряд служат Maple-функции

series(expr,eqn);	**taylor(expr,eqn);**
series(expr,eqn,n);	**taylor(expr,eqn,n);**

Функции **series** осуществляют разложение в степенной ряд, функции **taylor** – в ряд Тейлора. Здесь **expr** – разлагаемое в ряд выражение, **eqn** – имя переменной (например, **x**) или равенство в виде **x=a**, **n** – целое положительное число, определяющее порядок разложения (при отсутствии **n** полагается равным 6). При задании **eqn** в виде **x=a** разложение ищется

относительно точки $x = a$. Если вместо **x=a** указано просто **x**, разложение осуществляется в окрестности точки $x = 0$.

Разложение получается в форме степенного многочлена, порядок которого определяется параметром **n** (на единицу меньше). Остаточная погрешность задается членом вида **O(x-a)^n**. При точном разложении этот член отсутствует. В общем случае для его удаления можно использовать функцию **convert**.

> **series(sinh(x),x=0);** **#** *разложение в ряд по степеням x гиперболического синуса*

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

> **series(sinh(x),x=1,3);** **#** *первые три члена разложения* sh *x по степеням x*–1

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{e} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathbf{e}}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{e} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathbf{e}}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{4}\mathbf{e} - \frac{1}{4}\frac{1}{\mathbf{e}}\right)(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

> **series(sinh(x),x=1.,3);** **#** *то же самое, но коэффициенты в виде десятичных дробей*

$$1.175201193 + 1.543080635(x-1.) + 0.5876005967(x-1.)^2 + O((x-1.)^3)$$

> **series(sin(x)/x,x,10);** **#** *члены разложения в ряд функции* sin*x*/*x по степеням* 0, 1, …, 9

*переменной x*

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 + O(x^9)$$

> **convert(",polynom);** **#** *отбрасывается остаточный член*

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8$$

> **2/sqrt(Pi)*Int(exp(-t^2),t=0..x)=**
2/sqrt(Pi)*int(exp(-t^2),t=0..x); **#** *это так называемая функция ошибок*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathbf{e}^{(-t^2)}\,dt = \mathrm{erf}(x)$$

> **s:=taylor(erf(x),x,9);** **#** *разложение этой функции в ряд Маклорена*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}x-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}x^5-\frac{1}{21\sqrt{\pi}}x^7+O(x^9)$$

> **evalf(convert(s,polynom),5);** **#** *то же разложение в числовом формате*

$$1.1283\,x-0.37612\,x^3+0.11283\,x^5-0.026865\,x^7$$

Есть в пакете Maple и другие встроенные функции, позволяющие получить разложения в ряд математической функции. Например,

asympt – асимптотическое разложение,

5. Вычисление сумм и произведений

Для вычисления сумм и произведений последовательностей могут использоваться функции:

sum(f,k);	**product(f,k);**
sum(f,k=m..n);	**product(f,k=m..n);**
sum(f,k=alpha);	**product(f,k=alpha);**

Здесь **f** – функция, задающая члены суммируемого ряда, **k** – индекс суммирования, , **m** и **n** – целочисленные пределы изменения **k**, **alpha** – выражение формата **RootOf**. Значение **n** может быть равно бесконечности (**infinity**).

> **sum(k^2, k=0..4);**

30

> **Sum(k^2, k=0..4)=sum(k^2, k=0..4);**

$$\sum_{k=0}^{4}k^2=30$$

Разработчики Maple рекомендуют при использовании упомянутых функций заключать **k** и **f** в прямые кавычки, например **sum('f','k'=m..n)**. Это предотвратит возможную ошибку, связанную с предшествующим присваиванием переменной **k** определенного значения.

> **sum('k^2', 'k'=0..n);**

$$\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}n+\frac{1}{6}$$

```
> sum('a[k]*x^k','k'=0..4);
```

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

```
> sum('1/k!', 'k'=0..infinity);
```

$$\mathbf{e}$$

```
> r:=Sum(Sum(k^2,k=1..m),m=1..N):
r=factor(simplify(value(r)));
```

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) = \frac{N(N+2)(N+1)^2}{12}$$

Обратите внимание на следующий пример, в котором второй аргумент функции sum задан просто как **'k'**:

```
> t:=sum('-exp(-k)', 'k');
```

$$t := \frac{\mathbf{e}}{(-1+\mathbf{e})\,\mathbf{e}^k}$$

В справочной системе Maple такой вид суммы именуется как indefinite sum («неопределенная сумма»). Если этот результат обозначить как $t(k)$, то выполняются свойства

$$t(k+1) - t(k) = f(k), \quad t(n+1) - t(m) = \sum_{k=m}^{n} f(k),$$

где $f(k)$ – суммируемая последовательность – первый аргумент функции **sum**. Проверим последнее свойство.

```
> subs(k=n+1,t)-subs(k=1,t);
```

$$\frac{\mathbf{e}}{(-1+\mathbf{e})\,\mathbf{e}^{(n+1)}} - \frac{1}{-1+\mathbf{e}}$$

```
> sum('-exp(-k)', 'k'=1..n);
```

$$\frac{\mathbf{e}}{(-1+\mathbf{e})\,\mathbf{e}^{(n+1)}} - \frac{1}{-1+\mathbf{e}}$$

По смыслу indefinite sum во многом напоминает частичную сумму S_{n+1} ряда с общим членом $f(k)$ (продумайте этот вопрос). Произведения членов последовательности строятся аналогично:

```
> product( k^2, k=1..4 );
```

576

```
> Product( n+k, k=0..m ) = product( n+k, k=0..m );
```

$$\prod_{k=0}^{m}(n+k)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n)}$$

```
> product(k, k=RootOf(x^3-2));
```

$$2$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти производные:

а) y', если $y=\ln(\cos(x^2+1))$;

б) y^{IV}, если $y=x\ln(1-3x)$;

в) y'_x и y''_x для параметрически заданной функции:

$x(t)=\operatorname{arctg} t,\ y(t)=\ln(1+t^2)$;

г) y'_x и y''_x для неявно заданной функции $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

2. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$;

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$;

в) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$;

г) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr$;

3. Найти суммы рядов: а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}$;

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1)^{\pi/\operatorname{arctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg}\pi x}$;

5. Построить графики функций:

а) $\displaystyle\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx$;

б) $\displaystyle\int_0^t\cos\frac{\pi x^2}{2}dx$.

Вариант 2

1. Найти производные

а) $f'(x)$, если $f(x)=x\sqrt{64-x^2}+64\arcsin\left(\frac{x}{8}\right)$;

б) $f^{(10)}(x)$, если $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$;

в) $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:

$x(t)=\sin^2 t$, $y(t)=\ln\cos t$;

г) $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно уравнением

$xy-\sqrt[3]{xy^2+6}=0$.

2. Вычислить интегралы

а) $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}e^x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x dx$;

в) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{2+x^4}}dx$; г) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{1-x}(x^2+y)dy$.

3. Найти суммы рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$

4. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{d}{dx}\ln\left(1+\sqrt[5]{x^7}\right)$.

5. Найти значения функции $F(x)$ при $x=0.2$, $x=0.5$ и $x=1$ и построить её график, если

$$F(x)=-\int\limits_0^x\ln\cos t dt,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{3}.$$