

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
во втором семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 517.9(075)

ББК 22.161(я7)

Составители:

канд. физ.-мат. наук А. П. Бырдин,

канд. техн. наук А. А. Сидоренко

Математика: методические указания к проведению практических занятий во втором семестре для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» (профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта и хранения нефти, газа и продуктов переработки») очно-заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. – 44 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по дисциплине «Математика». Подробно разобраны примеры решения задач и приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов первого курса очно-заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле Математика_21.03.01_2 семестр.pdf.

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.9(075)

ББК 22.161(я7)

Рецензент - *О. А. Соколова, канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [1, гл. 10, §§ 1 – 10].

1.1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$ для всех $x \in (a, b)$.

Простейшие примеры:

1. $f(x) = x^2$; $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}3x^2$;

2. $f(x) = \cos x$; $F(x) = \sin x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Если для $f(x)$ существует первообразная $F(x)$, то существует и бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга на константу. Например, для $f(x) = x^2$ первообразными будут функции: $\frac{1}{3}x^3$; $\frac{1}{3}x^3 - 1$; $\frac{1}{3}x^3 - 10$ и т.д.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом функции* $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла (первообразной) называют *интегрированием функции* $f(x)$. Функция, имеющая первообразную, называется интегрируемой. Для функции, непрерывной на (a, b) существует первообразная на (a, b) , т.е. она интегрируема. Интегрирование есть операция обратная дифференцированию.

Из определения неопределенного интеграла следует:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции (применяется для проверки):

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2) дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int dF(x) = F(x) + C$.

1.2. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0).$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0; a \neq 1).$

4. $\int e^x dx = e^x + c.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$

$$\begin{aligned}
9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases} & 10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{cases} \\
11. \int \frac{dx}{1+x^2} &= \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arcctg} x + c \end{cases} & 12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \end{cases} \\
13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c. & 14. \int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.
\end{aligned}$$

Так как интегрирование есть операция обратная дифференцированию, то прочитав таблицу интегралов справа налево, получим таблицу производных.

Интегралы, содержащиеся в таблице, называются табличными. Вычисление интеграла сводится к последовательным операциям, результатом которых является приведение заданного интеграла к табличному (если это возможно).

1.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(верно для любого конечного числа слагаемых).

3. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b) dx = F(x+b) + C$;

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C; \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Примеры. Вычислить неопределенные интегралы:

$$1. \int \frac{x^3 - x^2 - x\sqrt{x} - 1}{x^2} dx = \int \left(x - 1 - x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} \right) dx =$$

$$= \int x dx - \int dx - 2e^{-x/2}(x^2 + 4x + 8) + C = \frac{x^2}{2} - x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C.$$

$$2. \int \frac{(x^2 - 1)dx}{x} = \int x dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C. \quad 4. \int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C.$$

$$5. \int \sin(2x-1) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C.$$

1.4. Интегрирование с помощью замены переменной

Одним из самых распространенных методов интегрирования является метод замены переменной.

Пусть надо вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Часто его можно упростить, введя вместо x новую переменную t , положив $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$.

Предположим, что $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке оси Ox , а функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на соответствующем промежутке изменения t . Тогда

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (1.1)$$

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (1.1).

Однако чаще употребляют обратную замену $\psi(x) = t$; $\psi'(x)dx = dt$, то есть заменяют ту функцию, стоящую под интегралом, дифференциал (производную) от которой, мы видим стоящим под этим интегралом: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \frac{f(x)=t}{f'(x)dx=dt} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + C$.

Примеры.

$$1. \int (\sin x)^\alpha \cos x dx = \left| \frac{\sin x = t}{\cos x dx = dt} \right| = \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c = \frac{(\sin x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

$$2. \int e^x \sin(e^x) dx = \left| \frac{e^x = t}{e^x dx = dt} \right| = \int \sin t dt = -\cos t + c = -\cos(e^x) + C.$$

$$3. \int 2xe^{-x^2} dx = \left| \frac{-x^2 = t}{-2x dx = dt} \right| = -\int e^t dt = -e^{-x^2} + C.$$

$$4. \int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \left| \frac{\sin x = t}{\cos x dx = dt} \right| = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

$$5. \int \frac{xdx}{x^2+1} = \left| \frac{x^2+1=t}{2x dx = dt} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

$$6. \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^4}} = \left| \frac{x^2=t}{x dx = \frac{1}{2} dt} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{4+t^2}| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{4+x^4}| + C..$$

1.5. Формула интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные. Тогда по правилу дифференцирования произведения имеем: $d[uv] = vdu + u dv$.

Интегрировав обе части равенства по x , имеем

$$\int d[uv] = \int vdu + \int u dv, \quad uv = \int vdu + \int u dv, \quad \int u dv = uv - \int vdu.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*. Формула сводит вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться проще исходного.

С помощью интегрирования по частям вычисляются интегралы следующих видов.

$$a) \int e^{ax} P_n(x) dx, \int P_n(x) \sin x dx; \int P_n(x) \cos x dx.$$

Во всех этих интегралах многочлен $P_n(x)$ умножается на функцию, интеграл от которой является табличным. В этом случае за $u(x)$ выбирают $P_n(x)$.

$$б) \int \ln x P_n(x) dx, \int P_n(x) \arcsin x dx; \int P_n(x) \arctg x dx.$$

Во всех этих интегралах многочлен $P_n(x)$ умножается на функцию, интеграла от которой в таблице нет. В этом случае за $u(x)$ выбирают $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ и т.д.

$$в) \int e^{ax} \sin bxdx, \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Такого вида интегралы берутся по частям два раза.

Примеры. Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

$$1. \int x e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

$$2. \int x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$3. \int (x^2 - 2x + 3) e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^2 - 2x + 3; \quad du = (2x - 2) dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right) = \\ = (x^2 - 2x + 3) e^x - \int (2x - 2) e^x dx =$$

Применим ко второму интегралу еще раз формулу интегрирования по частям

$$= \left(\begin{array}{l} u = 2x - 2; \quad du = 2 dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right) = (x^2 - 2x + 3) e^x - (2x - 2) e^x + \\ + 2 \int e^x dx = (x^2 - 2x + 3) e^x - (2x - 2) e^x + 2 e^x + C.$$

$$4. \int x^5 \underbrace{\ln x}_u dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^5 dx, \quad v = \frac{x^6}{6} \end{array} \right) = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^6}{6} dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

1.6. Рациональные дроби.

Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m}.$$

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь *правильная*. В противном случае дробь называется *неправильной*. Неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = N(x) + \frac{P_k(x)}{P_m(x)} \quad (k < m).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5}{x^2+1} dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь.

Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть: $\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$, Тогда

$$\int \frac{x^5}{x^2+1} dx = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби всегда может быть сведено к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Интегрирование многочлена не представляет труда, поэтому рассмотрим интегрирование правильной рациональной дроби.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k};$$

где A, B, p, q – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $D = p^2 - 4q < 0$ называются *простейшими дробями* I, II, III и IV типов.

Проинтегрируем простейшие дроби I, II, III:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III. Рассмотрим интеграл } I_3 = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx.$$

Выделим в числителе производную знаменателя

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно второй интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$. Выделим в знаменателе полный

квадрат $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{4} + q} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2} \right)}{\underbrace{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right)}_{>0}} =$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{z}{\alpha} + C = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\alpha} + C \left(z = x + \frac{p}{2}; \quad q - \frac{p^2}{4} = \alpha^2 \right).$$

Окончательно получим:

$$I_3 = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\alpha} + C, \quad \left(\alpha^2 = q - \frac{p^2}{4} \right).$$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+2| + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

IV. Интеграл от дроби этого типа выражается через сумму дробно – рациональных функций и арктангенс.

1.7. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть имеется правильная дробно-рациональная функция:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (1.2)$$

($m > n$) и знаменатель ее разложен на действительные множители:

$$Q_m(x) = a_m (x-x_1)^k (x-x_2)^l \dots (x^2 + p_1x + q_1)^s (x^2 + p_2x + q_2)^p \dots$$

Тогда дробь (3.2) можно представить и притом единственным образом в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-x_2)^l} + \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_s+N_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s} + \\ &+ \frac{P_1x+Q_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{P_p+Q_p}{(x^2+p_2x+q_2)^p} + \dots \end{aligned}$$

Здесь $A_1, A_2, \dots, A_k; B_1, B_2, \dots, B_l, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2$ и т.д. - некоторые коэффициенты.

Число простейших дробей, соответствующих каждому множителю знаменателя, равно кратности соответствующего корня.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} dx$.

Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь. Разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-2}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители.

$$\frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{\overline{Ax} + A + \overline{Bx^2} + Bx - \overline{2Bx} - 2B + \overline{Cx^2} - 4Cx + 4C}{(x-2)^2(x+1)} \Rightarrow$$

$$(B+C)x^2 + (A-B-4C)x + (A-2B+4C) = x+2.$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые степени и коэффициенты при одинаковых степенях равны. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , имеем

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} B+C=0 \\ A-B-4C=1 \\ A-2B+4C=2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} C=-B \\ A+3B=1 \\ A-6B=2 \end{array} \right|; \quad 9B=-1; \quad B=-\frac{1}{9}; \quad C=\frac{1}{9}; \quad 3A=4; \quad A=\frac{4}{3}.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение

$$\frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{4}{3} \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{9} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{9} \frac{1}{x+1}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{4}{3} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{9} \ln|x-2| + \frac{1}{9} \ln|x+1| + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}.$

Разложим дробь на простейшие

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}.$$

Приравняем числители:

$$A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + C(x^3 - x) + D(x^2 - 1) = 1.$$

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4A=1 \quad A=\frac{1}{4}, \\ B=-\frac{1}{4}; \quad C=0, \\ D=-\frac{1}{2}. \end{array}$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}.$$

В результате

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

1.8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

I. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Пусть надо вычислить интеграл от тригонометрической функции, рациональной относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$\int R(\cos x, \sin x) dx.$$

С помощью замены переменной $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (универсальная тригонометрическая подстановка) вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла от дробно-рациональной функции относительно t , при этом функции $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через t и dt :

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Примеры.

$$1. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad \left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right);$$

$$2. \int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 2} = \left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right) = \int \frac{2dt}{1+t^2 \left[3 \frac{2t}{1+t^2} + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \right]} =$$
$$\int \frac{2dt}{6t + 2 - 2t^2 + 2 + 2t^2} = \int \frac{2dt}{6t + 4} = \int \frac{dt}{3t + 2} = \frac{1}{3} \ln|3t + 2| + c = \frac{1}{3} \ln \left| 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right| + C.$$

Однако пользоваться универсальной тригонометрической подстановкой не всегда целесообразно, так как часто она приводит к громоздким выкладкам. Поэтому в некоторых частных случаях используют другие подстановки.

II. Частные случаи интегрирования тригонометрических выражений.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x) \cos x dx$, то подстановка $\sin x = t$; $\cos x dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t) dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x) \sin x dx$, то подстановка $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.

Пример.

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{2 \cos^2 x + 1} = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right) = - \int \frac{t dt}{2t^2 + 1} =$$
$$= - \frac{1}{4} \int \frac{4t dt}{2t^2 + 1} = - \frac{1}{4} \ln|2t^2 + 1| + C = - \frac{1}{4} \ln|2 \cos^2 x + 1| + C.$$

3) Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$, то замена $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.

4) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x, \cos x) dx$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, так как

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

После подстановки получаем интеграл от рациональной функции.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= (\operatorname{tg} x = t) = \int \frac{dt}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} = \\ &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x - 4} &= (\operatorname{tg} x = t) = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - 4} = \int \frac{dt}{1 - 4t^2 - 4} = \\ &= -\int \frac{dt}{4t^2 + 3} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{3}{4} + t^2} = -\frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

5) Пусть интеграл имеет вид $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$. Рассмотрим два случая.

а) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них *нечетное* неотрицательное число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p + 1$ и преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx.$$

Делаем замену переменной $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt, \text{ а это есть интеграл от рациональной функции от } t.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^4 x} = \left(\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right) = -\int \frac{(1-t^2) dx}{t^4} = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

б) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n *неотрицательные и четные*.

Для вычисления интеграла используем тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Пример. $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 dx =$
 $= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} [x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx] = \frac{1}{4} (\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}) + C.$

1.9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

1. Рассмотрим интеграл $\int R(x, \sqrt[m]{x}, \sqrt[n]{x}, \dots) dx = \int R(x, x^{1/m}, x^{1/n}, \dots) dx.$

Пусть k – общий знаменатель дробей $1/m, 1/n, \dots$. Сделаем подстановку $x = t^k, \quad dx = kt^{k-1} dt.$

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t , и подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t .

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left(\begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right) = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$= 6 \int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t+1} dt = 6 \left[\int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C; \quad t = \sqrt[6]{x}.$$

2. Рассмотрим интеграл вида $\int R\left(x; \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right) dx.$

Ничего не изменяется по сравнению с предыдущим случаем, если все подкоренные выражения являются одной и той же дробно – рациональной функцией. В этом случае делаем замену: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где N – наименьшее общее кратное чисел m, n . Выражаем x :

$$ax + b = cxt^N + dt^N; \quad x = \frac{t^N d - b}{a - ct^N} = \varphi(t).$$

Здесь $x = \varphi(t)$ – рациональная функция от t , поэтому $\varphi'(t)$ – тоже рациональная функция. Значит, и $dx = \varphi'(t)dt$ является рациональным выражением. В результате получим интеграл от дробно-рациональной функции.

Пример. $J = \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = - \int \frac{(t^3 - 1)^2}{4} \cdot t \frac{6t^2 dt}{(t^3 - 1)^2} =$
 $= -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3t^4}{8} + c = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} + C. \quad \frac{x+1}{x-1} = t^3; \quad x+1 = xt^3 - t^3; \quad x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1};$
 $dx = \frac{3t^2(t^3 - 1) - (t^3 + 1)3t^2}{(t^3 - 1)^2} dt = -\frac{6t^2 dt}{(t^3 - 1)^2}; \quad x-1 = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} - 1 = \frac{t^3 + 1 - t^3 + 1}{t^3 - 1} = \frac{2}{t^3 - 1}.$

Задачи для самостоятельного решения: [1, гл. 10, №№ 159, 162, 166, 171, 174, 194, 197, 211], [3, №№ 1337 – 1395, 1409 – 1440, 1453 – 1458, 1489-1499], [6, №№ 1707-1780, 1781-1789, 1832-1849, 2012-20217, 2022-2028, 2036-2042, 2090-2112].

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$. 2. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. 3. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx$. 4. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.
5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$. 6. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$. 7. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$. 8. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. 9. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.
10. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$. 11. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$. 12. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$. 13. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$. 14. $\int \frac{5x^8+1}{x^4} dx$.
15. $\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$. 16. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$. 17. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$. 18. $\int e^{-x^2} x dx$. 19. $\int \frac{x^4}{x^5+7} dx$.
20. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$. 22. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$. 23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$. 24. $\int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx$. 25. $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x} dx$.
26. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$. 27. $\int e^{\cos x} \sin x dx$. 28. $\int e^{-x^3} x^2 dx$. 29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 30. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.
31. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$. 32. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$. 33. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$. 34. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3-8} dx$. 35. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
36. $\int \frac{dx}{(\arccos x) \sqrt[5]{1-x^2}}$. 37. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx$. 38. $\int \sqrt{3+\cos 5x} \sin 5x dx$. 39. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.
40. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$. 41. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$. 42. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^4}}$. 43. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-3}}$. 44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.
45. $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5} dx$. 46. $\int x \operatorname{arctg} x dx$. 47. $\int \arcsin x dx$. 48. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$. 49. $\int \ln x dx$. 50. $\int x \ln x dx$.
51. $\int x \ln(3x+2) dx$. 52. $\int x e^{5x} dx$. 53. $\int x^3 e^{-x} dx$. 54. $\int x \sin x dx$. 55. $\int (x+1) \cos 3x dx$. 56. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.
57. $\int e^x \sin x dx$. 58. $\int \ln^2 x dx$. 59. $\int \ln(x^2+2) dx$. 60. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$. 61. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$.
63. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)} dx$. 63. $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx$. 64. $\int \frac{(x^2+2) dx}{(x+1)^2(x-1)}$. 65. $\int \frac{x dx}{x^2+3x+2}$. 66. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.
67. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$. 68. $\int \frac{dx}{1-x^3}$. 69. $\int \frac{dx}{1+x^3}$. 70. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{1+x^3} dx$. 71. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

Ответы

1. $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$. 2. $2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin x + C$. 3. $2e^x + \frac{1}{2x^2} + C$. 4. $x - \cos x + C$.
5. $-(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + C$. 6. $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$. 7. $\cos x - \operatorname{ctg} x + C$. 8. $-(\operatorname{ctg} x + x) + C$.
9. $\arcsin x - \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$. 10. $x - \operatorname{arctg} x + C$. 11. $x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. 12. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$.
13. $e^x + \operatorname{tg} x + C$. 14. $x^5 - \frac{1}{3x^3} + C$. 15. $3 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x + C$. 16. $x^3 + \operatorname{arctg} x + C$.
17. $-\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$. 18. $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$. 19. $\frac{1}{5} \ln|x^5 + 7| + C$. 20. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C$.
21. $-\frac{2}{3} \sqrt{2-3x} + C$. 22. $6 \left(\frac{1}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{3} \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right) + C$.
23. $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1)^2 + C$. 24. $-\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$. 25. $\frac{1}{3} \ln|3 + \sin 3x| + C$. 26. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.
27. $-e^{\cos x} + C$. 28. $-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$. 29. $2e^{\sqrt{x}} + C$. 30. $e^{\operatorname{arctg} x} + C$. 31. $\frac{1}{4 \cos^4 x} + C$.
32. $\ln|1 + \ln x| + C$. 33. $\frac{2}{3} (1 + \ln x)^{3/2} + C$. 34. $\frac{5}{18} (x^3 - 8)^{6/5} + C$. 35. $2 \sin \sqrt{x} + C$.
36. $\frac{1}{4 \arccos^4 x} + C$. 37. $2 \ln|\sin x| - \operatorname{ctg} x + C$. 38. $-\frac{2}{15} (3 + \cos 5x)^{3/2} + C$. 39. $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$.
40. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2x} + \sqrt{2x^2 + 3}| + C$. 41. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| + C$. 42. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2}} + C$. 43. $\frac{1}{4} \ln|x^4 + \sqrt{x^8 - 3}| + C$.
44. $\ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}| + C$. 45. $\frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$. 46. $\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$.
47. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. 48. $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + C$. 49. $x(\ln x - 1) + C$.
50. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. 51. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9} \right) \ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C$. 52. $\frac{e^{5x}}{25} (5x-1) + C$.
53. $-e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$. 54. $\sin x - x \cos x + C$. 55. $\frac{x+1}{3} \sin 3x + \frac{\cos 3x}{9} + C$.
56. $\ln|\sin x| - x \operatorname{ctg} x + C$. 57. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$. 58. $x \left[1 + (\ln x - 1)^2 \right] + C$.
59. $x \ln(x^2 + 2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$. 60. $2 \ln|x-2| - \ln|x-3| + C$. 61. $\ln|x-2| + \ln|x+5| + C$.
62. $3 \ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$. 63. $-\frac{7}{2(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + C$.
64. $\frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{4} \ln(x+1)(x-1)^3 + C$. 65. $\frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 + 3x + 2)(x+2)^3}{(x+1)^3} + C$.

$$\begin{aligned}
66. & -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \quad 67. \frac{1}{9} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{9\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln|x-1| + C. \\
68. & -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \\
69. & \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \\
70. & \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 71. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [1, гл. 11, §§ 1 – 7].

2.1. Площадь криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла

К понятию определенного интеграла приводят многие задачи геометрии, механики и физики.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(x) > 0$. Рассмотрим фигуру, ограниченную осью Ox , графиком $y = f(x)$, и двумя прямыми: $x = a$ и $x = b$.

Эта фигура называется *криволинейной трапецией*, отрезок $[a, b]$ оси Ox – ее основанием. Найдем площадь этой фигуры. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей произвольным образом. Через точки деления $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ проведем прямые, параллельные оси Oy . Криволинейная трапеция при этом разбивается на n частей. Обозначим длины элементарных отрезков через Δx_k :

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0; \Delta x_1 = x_2 - x_1; \dots \Delta x_k = x_{k+1} - x_k; \dots \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

В каждом из элементарных промежутков возьмём произвольную точку ξ_k :

$$x_0 \leq \xi_0 \leq x_1; x_1 \leq \xi_1 \leq x_2; \dots x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}; \dots x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n.$$

Вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_k), \dots, f(\xi_{n-1}).$$

Каждую элементарную полоску с основанием Δx_k заменим прямоугольником с тем же самым основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Площадь каждого такого прямоугольника равна $f(\xi_k) \Delta x_k$.

При этом криволинейная трапеция заменяется ступенчатой фигурой, площадь которой равна сумме площадей элементарных прямоугольников:

$$S_n = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_k) \Delta x_k + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} \quad \text{или} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Ясно, что площадь S_n ступенчатой фигуры не равна площади криволинейной трапеции, а является лишь приближенным значением искомой площади. Очевидно, что это приближение будет тем более точным, чем меньше длина частичных интервалов (и больше n). Полоски становятся уже, т.е. ломаная линия будет теснее примыкать к кривой $y = f(x)$.

За площадь криволинейной трапеции принимают предел, к которому стремиться S_n , когда разбиение отрезка $[a, b]$ делается сколь угодно мелким (если такой предел существует):

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} S_n \quad \text{или} \quad S = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k . \quad (2.1)$$

Здесь $\max \Delta x_k$ - наибольшая длина элементарного отрезка.

Операция, приведшая к формуле (2.1) называется *интегрированием функции на отрезке*. Сумма:

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2.2)$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ при данном разбиении отрезка $[a, b]$ на частичные и данном выборе промежуточных точек ξ_k .

Интегральных сумм для данной функции и данного отрезка можно составить бесконечно много, так как они зависят от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_k .

Если частичные отрезки становятся сколь угодно мелкими, т.е. $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, а число n элементарных отрезков в разбиении стремиться к бесконечности, то интегральная сумма будет каким-то образом изменяться.

Определение. Если существует предел интегральной суммы (2.2) при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ и если этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка на частичные, ни от выбора промежуточных точек ξ_k , то этот предел называется *определенным интегралом от функции*

$f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается: $\int_a^b f(x) dx$.

Здесь a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования. Таким образом, определенный интеграл - это число, записываемое в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k . \quad (2.3)$$

Геометрический смысл определенного интеграла при $f(x) \geq 0$: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

2.2. Свойства определенного интеграла

Из определения вытекают следующие свойства.

$$1. \int_a^b dx = b - a .$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx , \text{ а если } a = b , \text{ то } \int_a^a f(x) dx = 0 .$$

3. Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx .$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то определенный интеграл их алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Замечание. Свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

6. Если отрезок $[a, b]$ разбит точкой c на части, то интеграл по всему промежутку равен сумме интегралов по его частям (при любом расположении точек a , b , и c).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

7. Если функция $f(x) \geq 0$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ ($a < b$), то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

8. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) и удовлетворяют на нем равенству $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{неравенства можно интегрировать, когда } a < b).$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ ($a < b$) и существуют числа m и M такие, что во всех точках отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

10. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c ($c \in (a, b)$) такая, что имеет место равенство: $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

2.3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ есть одна из первообразных для $f(x)$ на $[a, b]$, то имеет место формула для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2.4)$$

- формула Ньютона – Лейбница.

Примеры. Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -[1+1] = -2. \text{ Получили абсурд, так как функция } \frac{1}{x^2} \text{ терпит разрыв в}$$

точке $x = 0$, следовательно, применять формулу Ньютона-Лейбница нельзя.

2.4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – некоторая непрерывная функция.

Часто для нахождения первообразной приходится вводить новую переменную $x = \varphi(t)$.

При этом пользуются следующим правилом:

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны в промежутке $[\alpha, \beta]$ и $a \leq \varphi(t) \leq b$ при $\alpha \leq t \leq \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.
3. Сложная функция $f[\varphi(t)]$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)\varphi'(t)dt]. \quad (2.5)$$

Замечание. При вычисление неопределенного интеграла с помощью замены переменной в найденной первообразной $\Phi(t)$ приходилось возвращаться к старой переменной x . Если в определенном интеграле наряду с переменной интегрирования заменить и пределы, то надобность возвращения к исходной переменной отпадает.

Примеры.

$$1. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left(\begin{array}{l} \sqrt{x} = t; x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x_1 = 0; t_1 = 0 \\ x_2 = 4; t_2 = 2 \end{array} \right) = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt =$$

$$= 2 \left[\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} \right] = 2t \Big|_0^2 - 2 \ln|t+1| \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln 3.$$

$$2. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\begin{array}{l} x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 \quad x_2 = a; t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$3. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left(\begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t; x = \ln(t^2 + 1) \\ dx = \frac{2t}{1+t^2} dt; \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0; x_2 = \ln 2 \quad t_2 = 1 \end{array} \right) = \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 2 \left[\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right] = 2 [t - \operatorname{arctgt}]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

2.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы в $[a, b]$. Тогда, дифференцируя произведение, получим

$$du(x)v(x) = u dv + v du.$$

Проинтегрировав это тождество по x в промежутке $[a, b]$, получим *формулу интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2.6)$$

Пример. $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln(1+x); \quad du = \frac{dx}{1+x}; \\ dv = dx; \quad v = x. \end{array} \right) =$

$$= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{x+1} = \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 - x \Big|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1.$$

2.6. Несобственные интегралы

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty]$. На данном промежутке не существует определенный интеграл, поскольку нельзя разбить промежуток $[a, +\infty]$ на n частей конечной длины.

Тем не менее интегралы с бесконечными пределами встречаются как в математике, так и в приложениях. Однако это уже иные интегралы.

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному у промежутку $a \leq x < +\infty$ называют

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Примеры.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctgx} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctgb} - \operatorname{arctg0}] = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

$$2. \int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [1 - \cos b]$$

Предел не существует – интеграл расходится.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. При каких p интеграл сходится и при каких расходится?

$$1) \text{ Пусть } p > 1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right] = \frac{1}{p-1}. \text{ Интеграл сходится.}$$

2) Пусть $p < 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^{+\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty. \text{ Интеграл расходится.}$$

$$3) \text{ Пусть } p = 1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \infty. \text{ Интеграл расходится.}$$

Замечание. Большинство свойств определенного интеграла (кроме оценки и теоремы о среднем) для несобственных интегралов сохраняются.

Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty, a)$, то аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Интеграл, стоящий слева, называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части и расходящимся, если расходится хотя бы один из интегралов в правой части.

Часто бывает достаточно знать, сходится или расходится рассматриваемый несобственный интеграл. Для этого могут быть полезны следующие теоремы.

Теорема. Пусть для $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется соотношение $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда:

$$1) \text{ если } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходится, то сходится и } \int_a^{+\infty} f(x) dx;$$

$$2) \text{ если } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ расходится, то расходится и } \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Примеры.

1. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Сравним данный интеграл с известным сходящимся интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Так как при

$x \geq 1 \quad \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2} \quad , \quad \text{то} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Следовательно, интеграл сходится.

2. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{x\sqrt{x}} dx$.

Действительно, при $x \geq 1 \quad \frac{1+x}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} \quad . \quad \int_1^{\infty} \frac{1+x}{x\sqrt{x}} dx > \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, а $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится,

следовательно, $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{x\sqrt{x}} dx$ расходится.

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int_0^2 (3x^2 - 1) dx$. 2. $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$. 3. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 4. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2} dx$. 5. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$. 6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
7. $\int_0^2 x(3-x) dx$. 8. $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$. 9. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$. 10. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$. 11. $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx$. 12. $\int_1^e \ln x dx$.
13. $\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx$. 14. $\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$. 15. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. 16. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 17. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.
18. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$. 19. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$. 20. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{25+x^2}$. 21. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Ответы

1. 6. 2. $1/3$. 3. $\ln(3+\sqrt{10})$. 4. $\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4}$. 5. $21/8$. 6. $\pi/6$. 7. $10/3$. 8. $\frac{1}{4}$. 9. $\frac{\pi}{2}$. 10. $\frac{1}{3}$. 11. 5π . 12. 1.
13. $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$. 14. 0. 15. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. 16. $4-2\ln 3$. 17. $2-\ln 2$. 18. $1/3$. 19. $\ln \frac{3}{2}$. 20. $\frac{\pi}{10}$. 21. 1.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Литература: [1, гл. 12, §§ 1 – 5].

3.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции вычисляют по

формуле $S = \int_a^b f(x) dx$.

Если $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ и $S = -\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$.

Если $f(x)$ принимает на $[a, b]$ значения разных знаков, то $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - 3$ и $y = 6x - x^2 - 7$. Сделать чертеж.

Решение. Если фигура ограничена графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ($y_1(x) \leq y_2(x)$) и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

В нашем случае $y_1(x) = x - 3$ и $y_2(x) = 6x - x^2 - 7$, a и b – абсциссы точек пересечения указанных прямых (рис. 1).

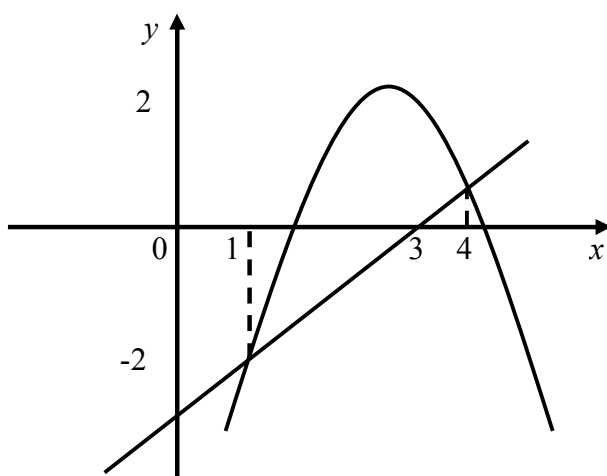


Рис. 1

Найдем эти значения.

$$6x - x^2 - 7 = x - 3, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Найдем площадь фигуры:

$$S = \int_1^4 ((6x - x^2 - 7) - (x - 3)) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

3.2. Длина дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости задана кривая уравнением $y = f(x)$, непрерывная на $[a, b]$.

Длина дуги кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Пример. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Вычислим длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте.

Тогда уравнение дуги AB будет $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, откуда $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{4}L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = \frac{\pi}{2}.$$

Длина всей окружности $s = 2\pi r$.

Пример. Определить длину $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Решение. Если линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$

то длина L дуги этой линии вычисляется по формуле $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = \\ &= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a. \end{aligned}$$

3.3. Объем тела вращения

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная сверху непрерывной кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), вращается вокруг оси Ox .

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 1 + \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Сделать чертеж.

Решение. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox , равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

Изобразим указанную в условии задачи фигуру (рис.2). По формуле находим:

$$V = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \pi \left(x + 2 \ln x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^3 = \pi \left(\frac{8}{3} + 2 \ln 3\right).$$

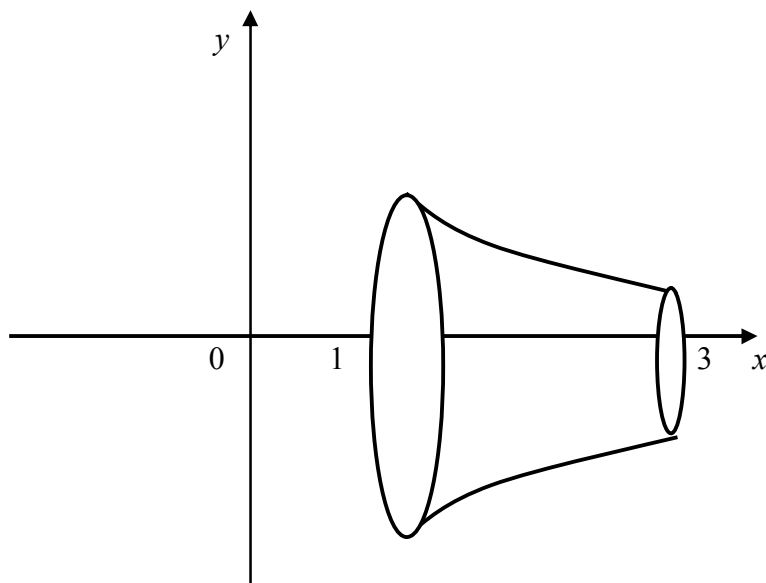


Рис. 2

Задачи для самостоятельного решения: [1, гл.12, №№ 10, 12, 19, 41, 45, 46], 4, №№ 1596 – 1602, 1613 – 1621, 1628-1631], [6, №№ 2455-2462, 2521-2529, 2555-2564].

Задачи для самостоятельного решения

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. 2. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$. 3. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. 4. $y = x^2$, $y = 1$.

5. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$. 6. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$. 7. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Найти длину дуги кривой:

8. $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 4$.

9. $y = x^2 - 1$, отсеченной осью Ox .

10. $y = \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \pi/6$. 11. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ от $x = 1$ до $x = e$.

12. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x = -1$ до $x = 2$. 13. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

14. Астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

15. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .

16. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox .

17. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .

18. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .

19. $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .

20. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .

Ответы

1. $32/3$. 2. 1. 3. $8/3$. 4. $4/3$. 5. $2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$. 6. $4 \ln(4e)$. 7. $1/3$. 8. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.
9. $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$. 10. $\frac{1}{2}\ln 3$. 11. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. 12. $4/3$. 13. $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$. 14. $6a$. 15. $\frac{256}{15}\pi$; 8π .
16. $\frac{3\pi}{10}$. 17. $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$; 2π . 18. $178/15\pi$; $21/2\pi$. 19. 12π ; 24π . 20. $\frac{\pi(\pi + 2)}{4}$; $\pi \ln 2$.

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Зависимость между несколькими переменными величинами, при которой значение одной из них полностью определяется значениями остальных переменных, возникает во многих вопросах естествознания.

Определение. Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек n -мерного пространства E^n ставится в соответствие по известному закону некоторое число u , то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$. При этом множество $\{M\}$ называется областью задания функции $u = f(M)$.

Число u , соответствующее данной точке M из множества $\{M\}$ называется частным значением функции в точке M . Совокупность $\{u\}$ всех частных значений функции $u = f(M)$ называется множеством значений этой функции.

Для функции $u = f(M)$ используется также обозначение $u = f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты точки M , или обозначение $u = f(\bar{x})$.

Таким образом, функция двух переменных ставит в соответствие каждой упорядоченной паре чисел (x, y) , т. е. точке $M(x, y)$, принадлежащей некоторому подмножеству точек плоскости, одно число $(x, y) \rightarrow u$; функция трех переменных – упорядоченной тройке чисел (x, y, z) также сопоставляет вещественное число $(x, y, z) \rightarrow u$.

Как и прежде, для функции одной переменной, примем соглашение: в случае, когда функция определена некоторой формулой, и если только не оговорено противное, мы принимаем за область задания этой функции (область определения) наибольшее множество наборов чисел $(x_1, \dots, x_n)$, на которых формула имеет смысл.

Рассмотрим пример функции, заданной формулой.

Пример. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, где a – действительное число. Областью определения этой функции является множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству: $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq a^2$, т. е. замкнутый двумерный шар – круг радиуса a с центром в начале координат. Множество значений функции – сегмент $0 \leq u \leq a$.

4.1. Частные производные функции

Если в функции нескольких переменных $u = f(x_1, \dots, x_n)$ дать определенные численные значения из области задания всем независимым переменным, кроме одной, и предоставить изменяться этой переменной, скажем x_1 , то функция превратится в функцию одной переменной $u(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$. В частности, рассматривая функцию $z = f(x, y)$ двух переменных и приписывая аргументу y определенное значение $y = y_0$, получим функцию $z = f(x, y_0)$ одной переменной.

Пусть существует производная функции $z = f(x, y_0)$ одной переменной в точке $x = x_0$. Это значит, что существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Этот предел называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}$, или $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$, или $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, или $f'_x(x_0, y_0)$. (Символ ∂ читается как «дэ круглое». Его не следует путать с символом «дф»).

Таким образом, частная производная функции $z = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ по определению равна пределу отношения частного приращения функции по x $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ к приращению аргумента Δx , если этот предел существует при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (4.1)$$

Аналогично определяется частная производная функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \quad (4.2)$$

Отметим: из приведенных выше рассуждений следует, что частная производная функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$ по аргументу x_k представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому вычисление частных производных производится по обычным правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 1. Найти частные производные в точке $M_0(2, 3)$ функции

$$f(x, y) = 3x^3y + 4xy^2 - 2x + 4y - 5.$$

Решение. Положим $y = 3$, получим функцию, зависящую только от x :

$$f(x, 3) = 9x^3 + 36x - 2x + 12 - 5 = 9x^3 + 34x + 7.$$

Производная этой функции по x равна $27x^2 + 34$: при $x = 2$ она равна 142. Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 142.$$

Для нахождения частной производной функции $f(x, y)$ по y в точке $M_0(2, 3)$ положим $x = 2$. Получаем функцию переменной y :

$$f(2, y) = 8y^2 + 28y - 9.$$

Отсюда найдем ее производную в точке $y = 3$: $16y + 28|_{y=3} = 76$.

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 76$.

Пример 2. Найти частные производные функции $z = \arctg(xy^2)$ в точке (x, y) .

Решение. Считая y постоянным, находим производную по x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\arctg(xy^2))'_{(xy^2)} \cdot (xy^2)'_x = \frac{1}{1+(xy^2)^2} \cdot y^2 = \frac{y^2}{1+x^2y^4}.$$

При вычислении производной использовалось правило дифференцирования сложной функции одной переменной. Индексы показывают по какой «букве» проводится дифференцирование. Аналогично получим частную производную по y в точке (x, y) :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\arctg(xy^2))'_{(xy^2)} \cdot (xy^2)'_y = \frac{2xy}{1+x^2y^4}.$$

Аналогично тому, как определялись частные производные функции двух переменных (формулы (4.1) и (4.2)), определяются частные производные функции большего числа аргументов. Например, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, частные производные в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяются как пределы отношений соответствующих приращений, если эти пределы существуют:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}. \quad (4.5)$$

4.2. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z = f(M)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$ (рис. 3).

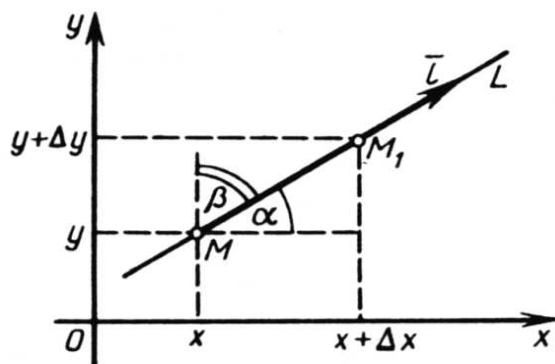


Рис. 3

Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl , т.е. $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена так, как на рис. 61, и $\Delta l = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена по другую сторону от точки M . Функция $f(M)$ получит при этом приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение 1. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ ($M_1 \rightarrow M$), если он существует, называется производной функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т.е. $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}$.

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \rightarrow 0$, получаем формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных, причем направляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, показывающими вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

В частности, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$. Отсюда следует, что частные производные по x и y являются частными случаями производной по направлению.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке $M(1, 2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где M_1 – точка с координатами $(3, 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор $\vec{l}$, имеющий данное направление:

$$\overline{MM_1} = \{2; -2\} = 2\vec{i} - 2\vec{j}; \quad |\overline{MM_1}| = 2\sqrt{2};$$

$$\vec{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

откуда $\cos \alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos \beta = -1/\sqrt{2}$. Вычислим частные производные функции в точке $M(1, 2)$: $f'_x(x, y) = 2x + y^2$, $f'_y(x, y) = 2xy$, откуда $f'_x(1, 2) = 6$, $f'_y(1, 2) = 4$. По формуле (4.6) получим $\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Определение 2. Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x, y)$.

$$\text{Обозначение: } \text{grad } z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\}.$$

Используя понятие градиента функции и учитывая, что вектор $\vec{l}$ имеет координаты $\cos \alpha$, $\cos \beta$, представим формулу (6) в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } z$ и $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \text{grad } z \cdot \vec{l} \quad (4.7)$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\text{grad } z \cdot \vec{l} = |\text{grad } z| \cdot |\vec{l}| \cos \varphi, \quad (4.8)$$

где $|\text{grad } z|$ – длина вектора $\text{grad } z$; φ – угол между векторами $\vec{l}$ и $\text{grad } z$. Сравнивая

формулы (4.7) и (4.8) и учитывая, что $|\vec{l}| = 1$, получаем $\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z| \cos \varphi$.

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos \varphi = 1$ ($\varphi = 0$), т.е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением $\text{grad } z$. При этом $\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z|$. Таким образом, градиент функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Аналогично определяется производная по направлению для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, выводится формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

вводится понятие градиента $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ и исследуются его свойства.

4.3. Частные производные высших порядков

Пусть частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(M)$, определенной в окрестности точки M , существуют в каждой точке этой окрестности. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y , определенные в указанной окрестности точки M . Назовем их *частными производными первого порядка*.

В свою очередь, частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке M , если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(M)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ называются *смешанными частными производными*.

Примеры.

1. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x$.

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

2. $z = \sin x \cdot \cos y$. Имеем, $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y$.

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

В обоих примерах смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ равны. Но, вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производится дифференцирование. Так, например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $(0; 0)$ имеет смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, но они не равны друг другу. Действительно,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0 + \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1.$$

Проводя аналогичные вычисления, получим $f''_{xy}(0, 0) = 1$. Таким образом, $f''_{yx}(0, 0) \neq f''_{xy}(0, 0)$.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях значения смешанных производных не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование, дает следующая теорема.

Теорема 2. Если производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ существуют в некоторой δ -окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в самой точке M , то они равны между собой в этой точке, т.е. имеет место равенство $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$.

4.4. Экстремумы функции двух переменных

Определение 3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0 , в которой для любой точки $M(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками экстремума*. Из определения следует, что если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0 , то полное приращение $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки M_0 одному из следующих условий: $\Delta z \leq 0$ (в случае локального максимума), $\Delta z \geq 0$ (в случае локального минимума). И наоборот, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция имеет экстремум в точке M_0 .

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, и в точке M_0 существуют частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (4.9)$$

Условие (4.9) не является достаточным условием экстремума. Например, частные производные функции $z = x^2 - y^2$ равны нулю в точке $(0, 0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке, так как равна в ней нулю и ни в какой окрестности точки $(0, 0)$ не сохраняет знак: если $x = 0$, то $z < 0$, а если $y = 0$, то $z > 0$. Графиком функции $z = x^2 - y^2$ является гиперболический параболоид.

Таким образом, условие (4.9) является только необходимым условием экстремума. Точки, в которых оно выполняется, будем по аналогии с функциями одной переменной называть *точками возможного экстремума*. Такие точки называются также *стационарными*.

Теорема 2 (Достаточные условия экстремума). Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ возможного экстремума и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ – локальный минимум; б) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.

З а м е ч а н и е. Если $\Delta = 0$, то функция $f(x, y)$ в точке M_0 возможного экстремума может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Примеры.

1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Имеем, $f'_x = 2x + y - 2$, $f'_y = x + 2y - 3$. Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$ решения которой $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

Следовательно, $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ – точка возможного экстремума. Далее, $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$, $\Delta = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Так как $\Delta = 3 > 0$ и $f''_{xx} = 2 > 0$, то в точке $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ данная функция имеет минимум.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - y^2$.

Имеем $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$. Решая систему уравнений $2x = 0$, $-2y = 0$, получаем, что $M_0(0, 0)$ – точка возможного экстремума. Так как $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -2$ и, следовательно, $\Delta = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$, то в точке $M_0(0, 0)$ экстремума нет.

4.5. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D и дифференцируема внутри этой области. В этом случае она имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе. Если наибольшее или наименьшее значение функция принимает во внутренних точках области D , то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции $z = f(x, y)$. Однако своего наибольшего и наименьшего значения функция $z = f(x, y)$ может достигать и на границе области. Поэтому, для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной области D , нужно найти все внутренние точки, "подозрительные" на экстремум, вычислить значения функции в них и сравнить со

значениями функции в граничных точках области. Наибольшее и наименьшее из этих значений и будет наибольшим и наименьшим значением функции во всей области.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в области D , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 4).

Решение. Найдем точки возможного экстремума

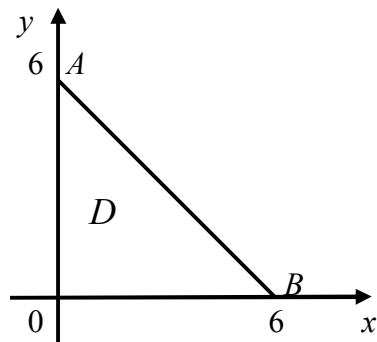


Рис. 4

$$z'_x = 2xy(2 - x - y) - x^2 y = xy(4 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = x^2(2 - x - y) - x^2 y = x^2(2 - x - 2y).$$

Так как внутри треугольника $x \neq 0$, $y \neq 0$, то приравнявая z'_x и z'_y нулю, получим:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases}. \text{ Отсюда: } x_1 = 1, y_1 = \frac{1}{2}. \text{ То есть т. } P_1\left(1, \frac{1}{2}\right) \in \Delta \text{ и в ней } z_1 = \frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим границу ΔOAB : 1) На OA $x = 0$ и $z = 0$. 2) На OB

$y = 0$ и $z = 0$. 3) На AB $y = 6 - x$, $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$. Найдем наибольшее и наименьшее значение этой функции на $[0, 6]$:

$z'_x = -8x(6 - x) + 4x^2 = 12x^2 - 48x = 0$. Тогда $12x(x - 4) = 0$ и $x_2 = 0$, $x_3 = 4$. Вычислим значение z в этих точках: $z_2(0) = 0$, $z_3(4) = -128$. На конце $x_4 = 6$ отрезка $[0, 6]$ $z_4(6) = 0$.

Из значений в точках P , x_2 , x_3 , x_4 выбираем наибольшее и наименьшее: $M = \frac{1}{4}$, $m = -128$.

Задачи для самостоятельного решения: [3, №№ 1174 – 11178, 1199 – 1204, 1268 – 11273, 1307 – 1309, 1316-1319], [6, №№ 2983-2990, 3037-3058, 3181-3192, 3440-3443].

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частные производные второго порядка функции z

а) $z = \arcsin(xy)$; б) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x; \quad y = x + 1; \quad y = 0; \quad x = 3.$$

3. Даны: функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти: 1) **grad** z в точке A ; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$

а) $z = \sqrt{x} \ln(x^2 y + \sqrt{y})$; $A(1; 1)$; $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

$$\text{б) } z = \operatorname{arctg}(x^2 y); \quad A(1;1); \quad \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}.$$

5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: /I. гл. 13. § 1-5, 7, 17, 18, 20-24/

5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные понятия. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad (5.1)$$

где x - независимая переменная, y - искомая функция, y' - ее производная называется дифференциальным уравнением первого порядка. Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно y' , то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \quad (5.2)$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = x^2$, $x \in (a, b)$ является решением уравнения $2y - xy' = 0$, так как ее подстановка в уравнение обращает его в тождество: $2x^2 - x \cdot 2x = 0$.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

В ряде случаев важное значение имеет отыскание решения дифференциального уравнения (5.2), удовлетворяющего заданному начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \quad (5.3)$$

С геометрической точки зрения решить задачу (задачу Коши) - значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости Oxy . Ответ на вопрос о возможности решения задачи Коши дает теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области D плоскости Oxy , то для любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области существует единственное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию (5.3).

Общим решением уравнения (1.2) в области D называется функция $y = \varphi(x, c)$, определенная в некоторой области изменения переменных x и c и имеющая непрерывную производную по x , если при любом допустимом значении c она является решением уравнения (5.2) и если для любых значений $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное значение постоянной $c = c_0$, такое, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет условию (5.3).

Частным решением уравнения (5.2) в области D называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, получающаяся из общего решения при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения, имеющие вид

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (5.4)$$

Здесь правая часть является произведением функции $f_1(x)$, зависящей только от x , на функцию $f_2(y)$, зависящую только от y . Заменим в (5.4) y' на $\frac{dy}{dx}$ и предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, разделим обе части (1.4) на $f_2(y)$ и умножим на dx . Уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Считая y известной функцией x , последнее равенство можно рассматривать как тождество, которое после последнего интегрирования определяет неявным образом общее решение уравнения (5.4.)

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c. \quad (5.5)$$

И называется общим интегралом этого уравнения.

Пример. Решить задачу Коши $y' = (2y-1)\operatorname{ctgx}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5$.

Решение. Здесь $f_1(x) = \operatorname{ctgx}$, $f_2(y) = 2y-1$. Предполагая, что $f_2(y) = 2y-1 \neq 0$, разделим переменные $\frac{dy}{2y-1} = \operatorname{ctgx}dx$. Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dy}{2y-1} = \int \operatorname{ctgx}dx; \quad \frac{1}{2} \ln|2y-1| = \ln|\sin x| + \ln|c_1|$$

(для удобства дальнейших выкладок произвольная постоянная записана в виде $\ln|c_1|$, $c_1 \neq 0$), $\ln|2y-1| = 2\ln|c_1 \sin x| = \ln(c_1^2 \sin^2 x)$. Отсюда $2y-1 = \pm c_1^2 \sin^2 x$ или $2y-1 = c \sin^2 x$ (положили $c = \pm c_1^2$). Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $y = \frac{1}{2}(1 + c \sin^2 x)$.

Постоянную c подберем так, чтобы удовлетворить начальным условиям $5 = \frac{1}{2}\left(1 + c \sin^2 \frac{\pi}{6}\right)$. Отсюда $c=36$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = 18 \sin^2 x + \frac{1}{2}$.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией нулевого измерения относительно переменных x и y , если для любого $t \neq 0$ справедливо тождество $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Например, такой функцией будет $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, так как

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение (1.2), в правой части которого стоит однородная функция нулевого измерения, называется однородным. С помощью подстановки $y = ux$, где $u=u(x)$ - новая неизвестная функция, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Данное уравнение является однородным (проверить самим). Выполним замену, положив $y = u \cdot x$. Вычислим $y' = u'x + u$. Уравнение примет вид $\frac{xdu}{dx} = \sin u$.

Считая, что $x \neq 0$, $\sin u \neq 0$, разделим переменные $\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln |c_1|$, откуда $\frac{u}{2} = \operatorname{arctg} cx$ ($c = \pm c_1$).

Производя обратную замену, приходим к общему решению исходного уравнения $y = 2x \operatorname{arctg} cx$. Подставляя начальные условия, получаем $\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg} c$, откуда $c=1$. Искомое решение $y = 2x \operatorname{arctg} x$.

Линейные уравнения первого порядка.

Уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (5.6)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его название объясняется тем, что искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно, то есть в первой степени.

Будем искать решение уравнения (5.6) в виде произведения двух неизвестных функций от x

$$y = u(x)v(x). \quad (5.7)$$

Дифференцируя (5.7) и подставляя y и y' в (5.6), после группировки получим

$$v(x)[u'(x) + p(x)u(x)] + u(x)v'(x) = q(x). \quad (5.8)$$

Выберем функцию u такой, чтобы скобка в левой части (1.8) обратилась в ноль: $u'(x) + p(x)u(x) = 0$. Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными, и выбирая какое-либо частное решение этого уравнения, получим $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

Подставляя найденную функцию в левую часть (5.8), вновь приходим к уравнению с разделяющимися переменными для $v(x)$, а именно $u(x)v'(x) = q(x)$. Его общее решение $v(x) = \int \frac{q(x)}{u(x)} dx + c = v(x, c)$.

Перемножая найденные функции $u(x)$ и $v(x, c)$, получаем общее решение уравнения (5.6) $y = u(x)v(x, c)$.

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$.

Решение. Ищем решение данного линейного уравнения в виде $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

Уравнение примет вид $v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{1}{x^2}$. Потребуем, чтобы функция $u(x)$ обращала в ноль круглую скобку $\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0$. Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными, найдем частное решение $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$, $\ln|u| = -\ln|x|$, $\ln|u| = \ln \frac{1}{|x|}$, $u = \frac{1}{x}$. Тогда для оставшейся части решения получим уравнение $\frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$. Отсюда $dv = \frac{dx}{x}$, $v = \ln|x| + c$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = \frac{1}{x}(\ln|x| + c)$.

Задачи для самостоятельного решения [6, №№ 3902-3910, 3913-3915, 3934-3942, 3945-3947, 3954-3958, 3965-3967].

5.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка. Это

$$y'' = f(x); \quad (5.9)$$

$$y'' = f(x, y'); \quad (5.10)$$

$$y'' = f(y, y'). \quad (5.11)$$

Общее решение уравнения (5.9) находится двукратным последовательным интегрированием.

Пример. Решить уравнение $y'' = \sin x$

Решение. Так как $y'' = (y')' = \frac{d}{dx}(y') = \sin x$, то умножая обе части этого уравнения на dx и интегрируя, получим уравнение первого порядка $\int dy' = \int \sin x \, dx$, $y' = -\cos x + c_1$.

Вновь разделяя переменные и выполняя интегрирование, получаем общее решение исходного уравнения $\int dy = \int (-\cos x + c_1) dx$, $y = -\sin x + c_1 x + c_2$.

Следует обратить внимание, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит уже две произвольные постоянные c_1 и c_2 .

Правая часть уравнения (5.10) не содержит искомой функции $y(x)$. После замены $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, для $p(x)$ получаем уравнение первого порядка $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$. Его общее решение $p = \varphi(x, c_1)$, то есть $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1)$. Отсюда, интегрируя еще раз, получим общее решение уравнения (5.10)

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2.$$

Пример. Решить уравнение $y'' = \frac{1}{x} y' + x$.

Решение. Правая часть уравнения не зависит от y . Положим $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. В результате приходим к уравнению первого порядка $p' - \frac{1}{x} p = x$, которое является линейным. Ищем его решение в виде $p = u(x)v(x)$. Имеем

$$p' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = x, \quad v \left(u' - \frac{1}{x} u \right) + uv' = x. \quad \text{Выберем вначале } u(x) \text{ так, чтобы } u' - \frac{1}{x} u = 0. \text{ Отсюда, } \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad u = x, \text{ а затем определим } v(x). \text{ Имеем } x \frac{dv}{dx} = x, \quad dv = dx,$$

$$x = x + c_1. \text{ Поэтому } p = \frac{dy}{dx} = uv = x^2 + c_1 x \text{ и } y = \frac{y^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 - \text{общее решение уравнения.}$$

Уравнение (5.11) не содержит явно x . Произведем замену $y' = p(y)$ и, используя правило дифференцирования сложной функции, вторую производную запишем в виде $y'' = p \frac{dp}{dy}$. Уравнение примет вид $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$. Решая его, найдем $p = \varphi(y, c_1)$ или

$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1)$. Отсюда получаем общий интеграл исходного уравнения $\int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = x + c_2$.

Пример. Решить уравнение $y'' = \frac{2y'^2}{y}$.

Решение. Положим $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, тогда уравнение примет вид $p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y} 2p^2$. Получилось уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Полагая $p \neq 0$, получим $\frac{dp}{p} = 2 \frac{dy}{y}$, $p = c_1 y^2$. Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = c_1 y^2$, откуда $\frac{dy}{y^2} = c_1 dx$, $-\frac{1}{y} = c_1 x + c_2$ и $y = -\frac{1}{c_1 x + c_2}$ - искомое решение.

Отметим, что при разделении переменных было потеряно решение $y = \text{const} \neq 0$, получающееся из уравнения $p = y' = 0$

Задачи для самостоятельного решения [6, №№ 4155-4162, 4163, 4167-4170].

5.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Так называются уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (5.12)$$

где p и q - действительные числа, $f(x)$ - непрерывная функция. Общее решение неоднородного уравнения (5.12) является суммой общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (5.13)$$

и частного решения y^* уравнения (5.12).

Для отыскания $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение для уравнения (5.13)

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В зависимости от вида его корней общее решение (5.13) будет иметь вид:

а) $\bar{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, если корни действительные различные;

б) $\bar{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_2 x}$, если корни действительные и равные ($k_1 = k_2$)

в) $\bar{y} = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$, если корни комплексно-сопряженные ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$).

Пример. Решить уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + k + 1 = 0$. Его корни $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствуют случаю в), где $\alpha = -\frac{1}{2}$, а $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

В соответствии с видом правой части уравнения (5.12), для отыскания его частного решения y^* следует руководствоваться правилом:

а) если $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n , то y^* следует искать в виде $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$ где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения (5.13), равных α ;

б) если $f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$, где $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней l и m соответственно, то y^* ищем в форме $y^* = x^r e^{\alpha x} [M_n(x) P_l(x) \cos \beta x + N_n(x) Q_m(x) \sin \beta x]$, где $M_n(x)$ и $N_n(x)$ - многочлены степени $n = \max\{l, m\}$, а r - число корней характеристического уравнения, равных $\alpha + i\beta$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = e^x(x - 2)$.

Решение. Прежде всего выпишем соответствующее однородное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$ имеет действительные различные корни $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Поэтому $\bar{y} = c_1 e^{6x} + c_2 e^x$. Правая часть исходного уравнения может быть записана в виде $f(x) = e^x P_1(x)$ и соответствует случаю а), где $\alpha = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения ($r = 1$). Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y^* = x e^x Q_1(x) = x e^x (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx)$. Вычислим $y^{*'} = e^x [Ax^2 + (B + 2A)x + B]$, $y^{*''} = e^x [Ax^2 + (B + 4A)x + 2(A + B)]$.

Подставляя y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ в исходное уравнение, получим

$$-10Ax - 5B + 2A = x - 2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ -5B + 2A = -2, \end{cases}$$

из которой находим $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Тогда

$$y^* = x e^x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right)$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + x e^x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right).$$

Задачи для самостоятельного решения [6, №№ 4268-4278].

Задачи для самостоятельного решения

В следующих уравнениях: 1) найти общие решения уравнений; 2) найти частные решения по начальному условию $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$.

1. $xy' - y = 0$. 2. $xy' + y = 0$. 3. $yy' + x = 0$. 4. $y' = y$.

Найти общие решения уравнений:

5. $x^2 y' + y = 0$. 6. $x + xy + y'(y + xy) = 0$. 7. $(1 + y^2)dx = (1 + x^2)dy$

8. $y - xy' = 1 + x^2 y'$. 9. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$. 10. $(1 + 2y)x dx + (1 + x^2)dy = 0$.

11. $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$. 12. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

13. $2y'\sqrt{x} = y$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.

14. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$, $y_0 = 1/2$ при $x_0 = \pi/4$.

15. $x^2y' + y^2 = 0$, $y_0 = 1$ при $x_0 = -1$.

16. $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

17. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y_0 = 1$ при $x_0 = e$.

18. $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y_0 = 1$ при $x_0 = e$.

Найти общие решения уравнений:

19. $y' - y = e^x$. 20. $y' = x + y$. 21. $y' + x^2y = x^2$. 22. $xy' + y = 3$. 23. $xy' + y = e^x$.

24. $y' - \frac{3y}{x} = x$. 25. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. 26. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$. 27. $y' + y = \cos x$.

28. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$. 29. $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. 30. $y' + y \cos x = \sin 2x$. 31. $xy' + 2y = x^2$.

32. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$. 33. $y'x + y = -xy^2$. 34. $y' + y = xy^3$. 35. $x^2y' = y^2 + xy$.

36. $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решить уравнения:

37. $y'' - 5y' + 4y = 0$. 38. $y'' - 6y' + 9y = 0$. 39. $y'' + 8y' + 25y = 0$. 40. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

41. $y'' - 4y' + 4y = 0$. 42. $y'' - 2y' + 2y = 0$. 43. $y'' - 4y' + 3y = 0$. 44. $y'' - 4y = 0$. 45. $y'' + 4y' = 0$.

46. $y'' + y = 0$. 47. $y'' + 2y' + y = e^x$. 48. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. 49. $y'' - 2y = xe^{-x}$.

50. $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$. 51. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. 52. $y'' - 3y - 10y = \sin x + 3 \cos x$.

53. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$. 54. $y'' = \sin 2x$. 55. $xy'' - 2y' = 0$. 56. $xy'' + y' = 0$. 57. $xy'' - y' = 0$.

Решить системы уравнений:

58. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ 59. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$ 60. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ 61. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

Ответы

1. $y = Cx$, $y = -2x$. 2. $xy = C$, $xy = -8$. 3. $x^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$. 4. $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$.

5. $y = Ce^{1/x}$. 6. $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$. 7. $y = \frac{C+x}{1-Cx}$. 8. $y = 1 + \frac{Cx}{1+x}$. 9. $1 + y^2 = C(1 - x^2)$.

10. $y = \frac{C}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}$. 11. $(1+y^2)(1+x^2) = Cx^2$. 12. $1 + e^y = C(1+x^2)$. 13. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

14. $y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. 15. $y = -x$. 16. $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1 + e^x)$. 17. $\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$. 18. $y = \ln x$.

19. $y = (x+C)e^x$. 20. $y = Ce^x - x - 1$. 21. $y = 1 + Ce^{-x^3/3}$. 22. $y = 3 + \frac{C}{x}$. 23. $y = \frac{e^x + C}{x}$.

24. $y = Cx^3 - x^2$. 25. $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$. 26. $y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$. 27. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.
28. $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$. 29. $y = 1 + \frac{\ln C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos x}$. 30. $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. 31. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$.
32. $y = Cx^2 + e^x$. 33. $y = \frac{1}{x \ln Cx}$. 34. $y = -\frac{1}{\sqrt{x+1/2} + Ce^{2x}}$. 35. $y = \frac{x}{C - \ln x}$. 36. $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$.
37. $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. 38. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$. 39. $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin x)$.
40. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 41. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$. 42. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
43. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 44. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. 45. $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. 46. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
47. $y = (C_1 x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$. 48. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1,5)$.
49. $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} - (x-2)e^{-x}$. 50. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5 \cos 3x - \sin 3x)$.
51. $y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41}(5 \cos x - 4 \sin x)$.
52. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{13} \sin x - \frac{9}{39} \cos x$. 53. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}(x^2 - 2x + 2)$.
54. $y = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$. 55. $y = C_1 x^3 + C_2$. 56. $y = C_1 \ln x + C_2$. 57. $y = C_1 x^2 + C_2$.
58. $x = e^{3t}(C_1 + C_2 t)$, $y = e^{3t}(C_1 - C_2 + C_2 t)$. 59. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $z = -C_1 e^x - \frac{3C_2}{2}e^{2x}$.
60. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t)$.
61. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Наука, 1998.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. Т.1. 432 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. Ч. 1.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. Ч. 2..
5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. 240 с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. – СПб., Изд-во «Профессия», 2006. 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Неопределенный интеграл	3
1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	3
1.2. Таблица неопределенных интегралов	3
1.3. Основные свойства неопределенного интеграла	4
1.4. Интегрирование с помощью замены переменной	5
1.5. Формула интегрирования по частям	5
1.6. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.	6
1.7. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование правильных рациональных дробей	8
1.8. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций	10
1.9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений	12
Задачи для самостоятельного решения	13
2. Определенный интеграл	15
2.1. Площадь криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла	15
2.2. Свойства определенного интеграла	16
2.3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	17
2.4. Замена переменной в определенном интеграле.	18
2.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле.	19
2.6. Несобственные интегралы.	19
Задачи для самостоятельного решения	21
3. Приложения определенного интеграла	21
3.1. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах	21
3.2. Длина дуги плоской кривой.	22
3.3. Объем тела вращения.	23
Задачи для самостоятельного решения	24
4. Функции нескольких переменных	25
4.1. Частные производные функции	25
4.2. Производная по направлению. Градиент	27
4.3. Частные производные высших порядков	29
4.4. Экстремумы функции двух переменных	30
4.5. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных	31
Задачи для самостоятельного решения	32
5. Обыкновенные дифференциальные уравнения	33
5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка.	33
5.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка	36
5.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	37
Задачи для самостоятельного решения	38
Библиографический список	40

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
во втором семестре для студентов
направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело»
(профиль «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта
и хранения нефти, газа и продуктов переработки»)
очно-заочной формы обучения

Составители:

Бырдин Аркадий Петрович
Сидоренко Александр Алексеевич

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 09.06.2022.
Уч.-изд. л. 2,4.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84