МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра кадастра недвижимости, землеустройства и геодезии

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

к выполнению практических работ
для студентов направления 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
(профиль «Геодезия») всех форм обучения

Воронеж 2022

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разделы «Сфероидическая геодезия» и «Теоретическая геодезия» являются завершающими в изучении дисциплины «Высшая геодезия» и формируют теоретические основы профессиональных знаний инженера-геодезиста.

В данных разделах изучают системы координат на земной поверхности. Важное место занимают вопросы редуцирования измерений на координатные поверхности, а также исследование различий геометрических и физических параметров нормальной и реальной Земли. В последние годы для решения задач высшей геодезии все шире используются технологии, основанные на спутниковых системах позиционирования *NAVSTAR* (США) и *ГЛОНАСС* (РФ).

В разделе «Сфероидическая геодезия» рассмотрены параметры координатной поверхности – земного эллипсоида и связь между ними, системы координат, применяющиеся для решения задач высшей геодезии. В связи с развитием методов геодезии, основанных на спутниковых системах позиционирования, детально рассмотрены геоцентрические системы пространственных прямоугольных координат, а также их связь с эллипсоидальными координатами. Детально рассматриваются вопросы, связанные с изучением геометрии земного эллипсоида, классификация кривых на этой поверхности и решение задач по вычислению длин дуг меридианов и параллелей, а также размеров рамок трапеций топографических карт. Выводится система дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида и первый интеграл этой системы – уравнение Клеро, лежащие в основе решения самых различных геодезических задач.

В связи с тем, что основным видом геодезических построений являются треугольники триангуляции или трилатерации, рассмотрены методы их решения с использованием теоремы Лежандра и способа аддитаментов, широко применяющиеся на производстве. Приводится обоснование условий, когда эти методы обеспечивают необходимую точность для решения как практических, так и научных задач геодезии.

Подробно рассмотрены методы решения главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида как на малые расстояния, что широко используется при вычислениях в государственных геодезических построениях, созданных классическими методами, так и на любые (до 20 000 км) расстояния, что актуально в современных условиях при реше- нии геодезических задач с использованием спутниковых технологий.

Изложена теория конформных отображений поверхностей и приводятся выводы основных формул для решения геодезических задач с применением наиболее распространенных в мире геодезических проекций в их классическом представлении. Также приведена общая теория описания класса проекций, наиболее подходящих для координатного описания объектов автоматизированных информационных технологий.

В разделе «Теоретическая геодезия» приведены основы знаний по физическим параметрам реальной и нормальной модели Земли, нормальном, реальном и возмущающем потенциале силы тяжести и их использовании при решении редукционной проблемы высшей геодезии. Приводятся выводы основных методов определения уклонений отвеса, которые являются основными геометрическими характеристиками аномального гравитационного поля Земли.

Рассмотрена проблема неоднозначности передачи измеренных высот на большие расстояния. Обосновано применение, приводятся формулы для вычислений системы геопотенциальных высот, передача которых не зависит от пути нивелирования и которые применяются при создании высот- ной основы государства.

Рассмотрена проблема редуцирования геодезических и астрономических измерений с физической поверхности Земли на поверхность земного эллипсоида, приводятся расчеты значимости различных поправок и необходимость их учета в различных условиях.

Рассмотрены основные методы установления параметров общего земного эллипсоида, включая современные, а также методы установления исходных геодезических дат государства на поверхности референц-эллипсоида.

Рассмотрены основные методы уравнивания измерений в государственной геодезической сети, лежащих в основе поддержания государственных систем координат на поверхности земного эллипсоида.

В связи с бурным развитием и внедрением в геодезическую науку и практику современных измерительных технологий рассмотрены методы установления различных систем координат и связь между ними.

Приведены основные математические формулы, которые наиболее часто применяются при рассмотрении теоретического материала.

Цель преподавания дисциплины: сформировать у будущего специалиста профессиональные знания в области высшей геодезии, привить навыки и умения по формированию и практическому использованию баз данных для решения задач геодезического обеспечения различных отраслей хозяйственной деятельности государства.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
Длина дуги меридиана и параллели. Размеры рамок трапеций топографических карт

Длина дуги меридиана и параллели

Для вычислений длины дуги меридиана земного эллипсоида, принятого в системах координат WGS-84 или ПЗ-90, применяют формулу (4.29), в которой коэффициенты вычисляют по параметрам соответствующего эллипсоида.

Для упрощения вычислений на определенном эллипсоиде можно использовать известные значения коэффициентов, например, для эллипсоида Красовского, принятого в качестве координатной поверхности в системе координат СК-42, можно использовать рабочую формулу, приведенную к виду, удобному для вычислений:

$$X = 6367558.4969B - \sin B \cos B\left[32005.7801 + \left(133.9213 + 0.7032\sin^2 B\right)\sin^2 B\right],$$

где широта B берется в радианной мере, при этом ошибка вычисления длины дуги меридиана от экватора до точки с широтой B не более 0.0001 м. Если необходимо вычислить длину дуги меридиана $\Delta X = X_2 - X_1$, заключенной между двумя точками с широтами, соответственно B_2 и B_1, то ее получают как разность длин дуг меридианов от экватора до этих точек. По формуле (4.29) сразу вычисляется эта разность, для вычисления длины дуги меридиана от экватора следует принять $B_1 = 0$.

При выполнении работы полезно вычисления произвести двумя способами для контроля.

На практике часто возникает необходимость вычисления малой длины меридиана, а в этом случае можно считать его радиус постоянным и равным радиусу меридиана, вычисленному по средней широте его дуги

$$B_m = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\right); \qquad \Delta X = M_m \frac{\left(B_2 - B_1\right)'}{\rho'} = \frac{c}{V_m^3}\frac{\left(B_2 - B_1\right)'}{\rho'}.$$

Если длина меридиана не превышает 45 км, то ошибка вычислений по этой формуле не более 0.001 м.

Параллель является окружностью радиуса r:

$$r = \mathrm{N}\ \cos\mathrm{B}\ = \frac{c}{V}\cos\mathrm{B}\ ,$$

длина ее вычисляется по строгой формуле

$$\Delta Y = \frac{c}{V}\cos\mathrm{B}\ \frac{\left(L_2 - L_1\right)'}{\rho'}.$$

Учитывая то, что в вычислительных средствах, как правило, имеется значение π, удобнее использовать формулы перехода:

– если необходимо перейти из градусной меры в радианную,

$B = B^0\ \pi\ /\ 180^0$, где B выражено в долях градусов;

– для обратного перехода

$B^0 = B\ 180^0\ /\ \pi$.

Задание 1: Вычислить длины дуг меридианов от экватора до заданных широт двух точек, а также длины дуг меридиана и параллели между двумя точками с заданными координатами:

$B_1 = 53^0\ 35^{/}\ 22.352^{//} + 2к^{/}\ 0.125к^{//}$;

$B_2 = 58^0\ 30^{/}\ 12.135^{//} + 2к^{/}\ 0.125к^{//}$;

$L_1 = 26^0\ 35^{/}\ 32.135^{//} + 2к^{/}\ 0.125к^{//}$;

$L_2 = 29^0\ 30^{/}\ 51.415^{//} + 2к^{/}\ 0.125к^{//}$,

Параллель находится на широте $B = 51^0\ 45^{/}\ 35^{//} + \kappa^0$,

κ – номер варианта, заданный преподавателем.

Размеры рамок трапеций топографических карт

Рамки трапеций топографических карт различных масштабов являются изображениями на плоскости меридианов и параллелей эллипсоида. В основе разграфки всего номенклатурного ряда лежит трапеция карты масштаба 1:1 000 000, ограниченная меридианами с разностью долгот в 6° и параллелями с разностью широт в 4°. Номера меридианных зон обозначаются арабскими цифрами от 1 до ±30, счет ведется от Гринвича, а широтные пояса обозначаются буквами латинского алфавита, счет ведется от экватора. На топографических картах указываются номера колонн, полученных как номер зоны плюс 30 (для того, чтобы избежать отрицательных номеров зон в западном полушарии). Зная номер зоны или колонны и название пояса, довольно просто найти геодезические широты и долготы вершин рамок трапеций.

Пусть, например, дана трапеция топографической карты масштаба 1:100 000 с номенклатурой N-35-100. Здесь номер зоны будет 35 – 30 = 5 (восточная), а номер пояса 14 (порядковый номер буквы *N* в латинском алфавите). Следовательно, трапеция масштаба 1:1 000 000 будет ограничена параллелями с широтой 52° и 56° и меридианами с долготой 24° и 30°.

Указанная трапеция масштаба 1:100 000 будет ограничена меридианами с долготой 25°30′ и 26° и параллелями с широтой 31° и 31°20′.

Формулы для вычислений длин рамок трапеций

$$\left.\begin{aligned}
S_{(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_m^3}\frac{(B_2-B_1)^\circ}{180^\circ}\frac{100}{m}\pi\\
S_{1(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_1}\frac{(L_2-L_1)^\circ}{180^\circ}\cos B_1\frac{100}{m}\pi\\
S_{2(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_2}\frac{(L_2-L_1)^\circ}{180^\circ}\cos B_2\frac{100}{m}\pi
\end{aligned}\right\}$$

где m – знаменатель масштаба карты.

Для обеспечения необходимой точности вычислений размеров рамок (0.1 мм) достаточно ограничиться четырьмя значащими цифрами для всего масштабного ряда топографических карт.

Задание 2: Определить номенклатуру и вычислить размеры рамок трапеций топографических карт масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 100 000, в которые попадает точка с координатами: $B = 53^0\ 15^/ + \kappa^0$; $L = 25^0\ 12^/ + \kappa^/$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Решение геодезических треугольников

Основным видом геодезических построений являются триангуляция и трилатерация, в треугольниках которых измерены либо углы, либо длины сторон. После редуцирования на поверхности эллипсоида получаем сфероидический треугольник, длины сторон которого не превышают 60 км (на территории Беларуси, не более 20 км). В пределах необходимой точности вычисления поверхность эллипсоида можно заменить сферой радиусом, равным среднему радиусу кривизны поверхности эллипсоида для средней широты B_0 геодезического построения.

$$R_0 = \sqrt{M_0 \mathrm{N}_0} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B_0}.$$

Следовательно, треугольники в пределах такой области можно решать как сферические по формулам сферической тригонометрии. Как известно, здесь длины сторон выражаются в частях радиуса, что для практики неудобно, поэтому в геодезии малые сферические треугольники (длины сторон которых не превосходят 90 км) решают по формулам плоской тригонометрии с введением поправок в сферические углы (способ Лежандра) либо в длины сторон (способ аддитаментов).

Способ Лежандра

Основан на теореме Лежандра, согласно которой в сферическом и плоском треугольнике с соответственно равными длинами сторон каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на одну треть сферического избытка. Сферический избыток любой фигуры определяется формулой

$$\varepsilon' = \frac{\mathrm{P}}{R^2} \rho',$$

где P – площадь фигуры; R – радиус сферы.

Площадь треугольника может быть вычислена по одной из формул

$$2\mathrm{P} = ab \sin C = bc \sin A = ac \sin B; \quad \mathrm{P} = a^2 \frac{\sin \mathrm{B} \sin C}{2 \sin \mathrm{A}};$$

$$\mathrm{P} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

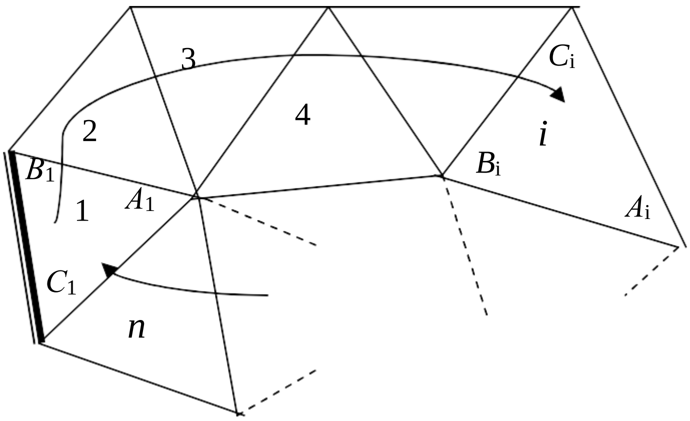
где a, b, c – длины сторон треугольника, A, B, C – его углы, лежащие против соответствующих сторон (против стороны a лежит угол A и т. д.), $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр треугольника.

Заметим, что для максимально возможных в триангуляции I класса длин сторон в 60 км имеем сферический избыток не более 8.5″, что является малой величиной и его вычисления можно выполнять с четырьмя значащими цифрами. Формула для его вычисления может быть записана в виде

$$\varepsilon' = 2 \cdot f \cdot \mathrm{P},$$

где величина $f = \frac{\rho'}{2R^2}$ может быть принята для территории Республики Беларусь постоянной и равной $f = 2.530 \cdot 10^{-9}$ (если длины сторон выражать в метрах).

По способу Лежандра можно решать любое число треугольников, для чего вначале необходимо на схеме сети определить последователь ность их решения, в соответствии с которой пронумеровать треугольники. При этом удобнее через A_i обозначать угол, лежащий против исходной (или вычисленной из предыдущего треугольника) стороны, а угол C_i – против стороны, смежной с последующим решаемым треугольником.



Решение треугольников ведется последовательно (от номера 1 до n) по единой схеме. В триангуляции вычисления ведутся следующим образом.

1. По теореме синусов плоской тригонометрии выполняют приближенное решение треугольника, с контролем вычисляют длины сторон b_i, c_i.

$$b_i = a_i \frac{\sin B_i}{\sin A_i}; \quad c_i = a_i \frac{\sin C_i}{\sin A_i} = b_i \frac{\sin C_i}{\sin B_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Для этой цели достаточно углы треугольника округлять до целых минут, вычисления вести с четырьмя значащими цифрами.

2. Вычисляются сферические избытки треугольников по формуле

$$\varepsilon' = f a_i b_i \sin C_i .$$

3. Для каждого треугольника вычисляется одна треть сферического избытка и вычитается из измеренных углов треугольников, в результате получают измеренные плоские углы. В триангуляции 1-2 классов вычисления ведут с округлением до $0.01''$.

4. Вычисляются невязки в треугольнике и вычитается одна треть их из каждого угла, получают уравненные плоские углы.

5. По исходной стороне и уравненным плоским углам последовательно решают с контролем по теореме синусов треугольник, в результате чего получают искомые длины сторон. Значения длин сторон округляютдо 0.001 м, с той же точностью должны совпасть контрольные вычисления стороны c_i.

6. Приступают к решению следующего треугольника по той же схеме, при этом производят замену обозначений смежной стороны $c_i = a_{i+1}$.

При решении треугольников трилатерации следует иметь в виду, что в каждом треугольнике измерены длины сторон, необходимо вычислить сфероидические углы. Подготовительные действия выполняют аналогично триангуляции. Последовательность решения треугольников определяется также:

1) по теореме косинусов плоской тригонометрии вычисляют все три угла треугольника:

$$\left.\begin{aligned} \cos A_i' &= \frac{b_i^2 + c_i^2 - a_i^2}{2b_i c_i} \\ \cos B_i' &= \frac{a_i^2 + c_i^2 - b_i^2}{2a_i c_i} \\ \cos C_i' &= \frac{a_i^2 + b_i^2 - c_i^2}{2a_i b_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

2) вычисляют сферические избытки треугольников;

3) сферические углы треугольников получают путем добавления к плоским углам A', B', C' одной трети сферического избытка.

Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

Вершина тр-ка	Измеренные углы тр-ка	Уравненные сферические углы тр-ка	Уравненные плоские углы	Sin уравненных плоских углов	Длины сторон
C_i	$82^0 37' 42.67''$	$82^0 37' 42.40''$	$82^0 37' 41.58''$	0.99173447	42837.260
A_i	60 02 17.42	60 02 17.15	60 02 16.33	0.86635570	37421.614
B_i	37 20 03.18	37 20 02.91	37 20 02.09	0.60645914	26195.568
Σ	180 0003.27	180 00 02.46	180 00 00.00		
ε''	+2.46				
w''	+0.81				

Способ аддитаментов

Как известно, способ основан на теореме синусов сферической тригонометрии, в которой тригонометрические функции малых аргументов представляют в виде ряда с удержанием двух членов разложений. В результате получают теорему синусов плоской тригонометрии

$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C} \quad ,$$

где a', b', c' – приведенные длины сторон треугольника, вычисляемые по формулам

$$\left.\begin{aligned} a' &= a - ka^3 = a - \mathrm{A}a \\ ba &= b - kb^3 = b - \mathrm{A}b \\ c' &= c - kc^3 = c - \mathrm{A}c \end{aligned}\right\}.$$

Величина $k = \dfrac{1}{6R_c^2} = 4.09 \cdot 10^{-15}$ для всей территории Беларуси, если длины сторон брать в метрах; A_a, $A_в$, A_c – аддитаменты сторон.

Порядок решения треугольников триангуляции:

1. Вычисляется аддитамента исходной стороны и вычитается из ее длины, получается приведенная длина исходной стороны.

$$\mathrm{A}_{S_0} = kS_0^3, \quad S_0' = S_0 - \mathrm{A}_{S_0}.$$

2. По приведенной длине исходной стороны из решения треугольников по теореме синусов плоской тригонометрии последовательно вычисляются приведенные длины сторон треугольников (с контролем). Углы в треугольниках берут сферические уравненные (из способа Лежандра)

$$c_i' = a_i' \frac{\sin C_i}{\sin \mathrm{A}_i}, \quad b_i' = a_i' \frac{\sin B_i}{\sin \mathrm{A}_i} = c_i' \frac{\sin B_i}{\sin C_i}.$$

3. Вычисляются аддитаменты по приведенным длинам сторон и путем сложения с ними получаются точные значения сторон треугольника

$$S_i = S_i' + \mathrm{A}_{S_i}.$$

При большом числе треугольников триангуляции или трилатерации их решение производится последовательно. В триангуляции, как известно, может быть измеренной или вычисленной длина одной стороны, соединяющая исходные пункты. Вначале решается треугольник, включивший исходную сторону, а затем решаются другие треугольники, смежные с уже решенным. В трилатерации решение треугольников может производиться в любой последовательности.

При вычислении аддитаментов предварительные значения длин сторон достаточно вычислять с округлением до десятков метров. Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

В практике геодезических вычислений решение треугольников производят с контролем, применяя для этой цели оба способа. Расхождение в длинах сторон не должно превышать 0.001 м, а в углах – 0.01″ в сетях 1-2 классов.

Задание на выполнение работы

Решить три треугольника звена триангуляции 1 класса по способу Лежандра и способу аддитаментов.

Исходные данные для выполнения лабораторных работ № 2 – 4.

Названия углов треугольников	Измеренные углы	***B, L*** – широта, долгота пункта ***A*** ***A*** – азимут выходной стороны ***AB*** ***S*** – длина выходной стороны ***AB***

C_1
A_1
B_1
	$67^0\ 56^/\ 33.41^{//}$
	56 38 20. 76
	55 25 07. 20
		B = $53^0\ 06^/\ 59.8567^{//}$ + к$^/$ к$^{//}$
		L = 24 15 23.2078 + к$^/$ к$^{//}$
		A = 42 42 10.513 + к^0 к$^/$ к$^{//}$
		S = (23 580. 591 + 1. 211к) м
		к – номер варианта

C_2 A_2 B_2	59 49 38. 18 39 02 33. 10 81 07 48. 64	
C_3 A_3 B_3	57 13 27. 94 59 20 17. 84 63 26 16. 97	

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3
Решение главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида

Для выполнения практичечской работы № 3 необходимо изучить раздел 6 лекционного курса.

Как отмечено, положение точек на поверхности земного эллипсоида определяется широтами и долготами, декартовыми прямоугольными координатами в геодезической проекции. После редуцирования измеренных линий на поверхности эллипсоида получают геодезические линии (кратчайшие кривые на поверхности, соединяющие две любые точки). Длина геодезической линии S_{12} и угол, образованный ею с меридианом точки, называемый геодезическим азимутом A_{12}, называются полярными сфероидическими координатами.

Главная геодезическая задача связывает системы координат и включает в себя прямую задачу, когда по данным широте, долготе одной точки, расстоянию и азимуту до другой точки необходимо определить широту и долготу другой точки и обратный азимут. В обратной задаче по данным широтам и долготам двух точек требуется определить длину, прямой и обратный азимуты геодезической линии между ними.

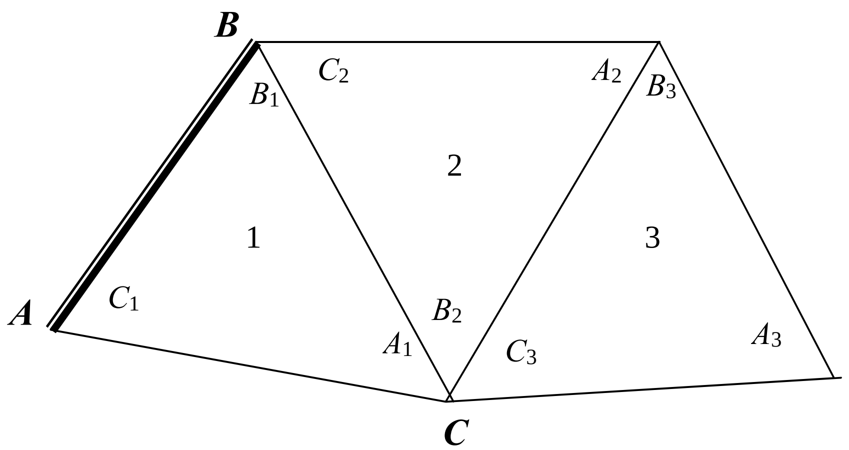
Заметим, что для обеспечения необходимой точности при решении геодезических задач широты и долготы вычисляют с округлением до 0.0001″, геодезические азимуты до 0.001″, а в каталогах помещают их значения, округленные до 0.001″ и 0.01″ соответственно, расстояния вычисляют до 0.001 м.

При использовании спутниковых систем позиционирования получают пространственные прямоугольные координаты точек, по которым можно вычислить геодезические широты, долготы и высоты по формулам раздела 3. 2 лекционного курса. Здесь актуальным является решение обратной геодезической задачи, когда расстояния между смежными пунктами могут быть от 20 до 20 000 км. Поэтому применяют способ Бесселя. Формулы для решения главной геодезической задачи по способу Бесселя приведены в разделах 6.7 – 6.8 лекционного курса.

При выполнении данной работы главная геодезическая задача решается в триангуляции 1 класса, поэтому используем формулы со средними аргументами, приведенные в разделах 6.4 – 6.6 лекционного курса.

Задание на выполнение работы

По исходным данным, приведенным в задании на выполнение лабораторной работы № 2, составляем схему геодезической сети.



Прямую геодезическую задачу решаем, используя сферические уравненные углы и длины сторон сферических треугольников из работы № 2. Для решения используем формулы (6.18) по методике, описанной в разделе 6.5 лекционного курса. Точность вычисления широт и долгот не ниже 0.0002″, азимутов – 0.001″.

В процессе решения задачи следует обратить внимание на передачу геодезических азимутов, используя сферические уравненные углы треугольников:

$$\boldsymbol{A_{AC}} = \boldsymbol{A_{AB}} + C_1; \quad \boldsymbol{A_{BC}} = \boldsymbol{A_{BA}} - B_1; \quad A_1 = \boldsymbol{A_{CB}} - \boldsymbol{A_{CA}}.$$

Прямую геодезическую задачу необходимо решить по всем трем треугольникам.

Обратную геодезическую задачу решаем, используя формулы, приведенные в разделе 6.6 лекционного курса. Решение производится для всех пунктов сети, геодезические широты и долготы которых определены при решении прямой задачи. Для контроля необходимо сравнить полученные значения азимутов и расстояний из решения обратной задачи с исходными данными и результатами вычислений при решении прямой задачи. Сходимость результатов должна быть не хуже 0.0002$''$ в широтах и долготах, 0.001$''$ – в азимутах и 0.001 м – в расстояниях.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
Решение задач проекции Гаусса – Крюгера

Для выполнения практичечской работы № 4 необходимо изучить раздел 7 лекционного курса.

Система геодезических координат обладает несомненным достоинством как единая система для поверхности земного эллипсоида, позволяет решать научные и практические задачи при различных удалениях между точками земной поверхности и околоземного пространства. При решении инженерно-геодезических задач, а также при математической обработке измерений, выполненных на ограниченных территориях, нецелесообразно применение громоздких сфероидических формул. В этих целях наиболее удобной, наглядной и простой является система прямоугольных координат на плоскости геодезической проекции. В настоящее время на территории Республики Беларусь применяют геодезическую проекцию Гаусса – Крюгера.

Изыскать проекцию для обработки геодезических измерений – это значит установить связь плоских прямоугольных координат x, y с геодезическими B, L, а также получить формулы для редуцирования длин геодезических линий, их азимутов и углов между ними на плоскость проекции. Точность формул должна быть на порядок выше точности измерений.

Для инженерно-геодезического обеспечения строительства вводят местные системы координат; осевой меридиан таких зон, как правило, совпадает с серединой объекта, в этом случае размеры зоны невелики и искажениями в них пренебрегают. Это создает удобство при проектировании объектов, при их выносе на местность.

При выполнении практичечской работы вычисления производим для шестиградусных зон, поэтому формулы, приведенные в разделе 7 лекционного курса, работающие для девятиградусных зон, можно упростить.

Вычисление плоских прямоугольных координат по геодезическим

При выполнении этого задания можно использовать формулы (7.50) – (7.51), приведенные в курсе лекций, однако, если вычисления вести на поверхности эллипсоида, параметры которого известны, то можно использовать рабочие формулы с заранее вычисленными значениями коэффициентов, например для эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу, удобную для вычислений:

$$\left.\begin{aligned} x &= 6367558.497B - ((((a_{28}\, l^2 - a_{26})l^2 + a_{24})l^2 + 0.5)l^2 N - a_0)\sin B\cos B \\ y &= (((b_{17}\, l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1)lN\cos B \end{aligned}\right\},$$

где $l = L - L_0$ – разность долгот точки и осевого меридиана в радианной мере (зональная долгота точки); B, l – задаются в радианной мере;

$N = ((0.605\sin^2 B + 107.155)\sin^2 B + 21346.142)\sin^2 B + 6378245;$

$a_0 = (0.7032\cos^2 B - 135.3277)\cos^2 B + 32140.4046;$

$a_{24} = ((0.0000076\cos^2 B + 0.0025269)\cos^2 B + 0.25)\cos^2 B - 0.0416667;$

$a_{26} = ((0.00562\cos^2 B + 0.16358)\cos^2 B - 0.08333)\cos^2 B + 0.00139;$

$a_{28} = ((0.125\cos^2 B - 0.104)\cos^2 B + 0.014)\cos^2 B;$

$b_{13} = (0.00112309\cos^2 B + 0.33333333)\cos^2 B - 0.16666667;$

$b_{15} = ((0.004043\cos^2 B + 0.196743)\cos^2 B - 0.166667)\cos^2 B + 0.008333;$

$b_{17} = ((0.1429\cos^2 B - 0.1667)\cos^2 B + 0.0361)\cos^2 B - 0.0002.$

Для проекции Гаусса – Крюгера значения коэффициентов следующие, обеспечивающие необходимую точность вычислений для шестиградусных зон.

Для шестиградусной координатной зоны координаты x, y вычисляются по этим формулам с точностью до 0.001 м.

Редуцирование измеренных величин на плоскость проекции Гаусса – Крюгера

Геодезические измерения (угловые и линейные) после их редуцирования на поверхность эллипсоида дают длины геодезических линий S, углы между ними β. Для перехода на плоскость проекции вычисляют длины прямоугольных отрезков, соединяющих изображения точек, а также углы между ними.

Для редуцирования расстояний применяется формула

$$d = S_m\left(1+\frac{y_m^2}{2R_m^2}+\frac{\Delta y^2}{24R_m^2}\right),$$

а в измеренные направления вычисляются поправки по формулам

$$\left.\begin{aligned}\delta_{12}' &= -\frac{1}{3} f\left(x_2-x_1\right)\left(2y_1+y_2\right)\\ \delta_{21}' &= \frac{1}{3} f\left(x_2-x_1\right)\left(2y_1+y_2\right)\end{aligned}\right\},$$

где $f = \dfrac{\rho'}{2R_m^2}$ – величина, постоянная для всей территории Республики Беларусь и равна 0.002530, если координаты в формулах (4.8) выражают в километрах; $R_m = \sqrt{\mathrm{M}_m\mathrm{N}_m}$ – средний радиус кривизны эллипсоида, вычисленный по средней широте, для территории Республики Беларусь тоже можно считать постоянной величиной и равной $6.385\cdot10^3$ км.

Если необходимо редуцировать углы треугольников сети триангуляции, то поправка в угол получается как разность поправок в направления (правое минус левое). Например, для данной сети имеем

$$\delta_{C_1} = \delta_{AC} - \delta_{AB}.$$

Заметим, что максимальное значение поправок имеет место на краю зоны, и на территории Республики Беларусь для шестиградусной зоны составляет $\delta_S \le 11$ м, $\delta \le 3''$ для длин сторон не более 20 км.

Поправки в длины линий обусловлены масштабом изображения в проекции, а поправки в горизонтальные направления обусловлены кривизной изображения геодезических линий эллипсоида на плоскость проекции.

Для перехода от геодезического азимута A_{12} на поверхности эллипсоида к дирекционному углу α_{12} на плоскости применяется формула

$$\alpha_{12} = \mathrm{A}_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}'.$$

Здесь γ_1 – сближение меридианов, выражающее угол между изображением меридиана данной точки на плоскость проекции с прямой, параллельной изображению осевого меридиана, вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\gamma = \sin\mathrm{B}\,\mathrm{tg}l + \eta^2\sin\mathrm{B}\cos^2\mathrm{B}\left(1+\frac{2}{3}\eta^2 + l^2\cos^2\mathrm{B}\right)l^3.$$

Для параметров эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу

$$\mathrm{tg}\gamma = (((l^2+0.045)\cos^2 B+1)0.00674l^3\cos^4 B+\mathrm{tg}l)\sin B.$$

Вычисление геодезических координат по плоским

На практике может возникнуть задача обратного перехода, когда известны плоские прямоугольные координаты точек и необходимо вычислить их геодезические широты и долготы. В этом случае используются формулы (7.52) курса лекций. Для эллипсоида Красовского имеем рабочую формулу, удобную для вычислений.

$$B = B_x + (((A_{28} z^2 - A_{26}) z^2 + A_{24}) z^2 - 1) z^2 A_{22};$$

$$l = (((B_{17} z^2 + B_{15}) z^2 + B_{13}) z^2 + 1) z; \quad L = L_0 + l,$$

где принято:

$$\beta = x_{(M)} / 6367558.497;$$

$$B_x = ((2382\cos^2\beta + 293609)\cos^2\beta + 50221747)\sin\beta\cos\beta \times 10^{-10} + \beta;$$

$$A_{22} = (0.003369263\cos^2 B_x + 0.5)\sin B_x \cos B_x;$$

$$A_{24} = ((0.0056154 - 0.0000151\cos^2 B_x)\cos^2 B_x + 0.1616128)\cos^2 B_x + 0.25;$$

$$A_{26} = ((0.00389\cos^2 B_x + 0.04310)\cos^2 B_x - 0.00168)\cos^2 B_x + 0.125;$$

$$A_{28} = ((0.013\cos^2 B_x + 0.008)\cos^2 B_x - 0.031)\cos^2 B_x + 0.078;$$

$$B_{13} = (0.16666667 - 0.00112309\cos^2 B_x)\cos^2 B_x - 0.33333333;$$

$$B_{15} = ((0.008783 - 0.000112\cos^2 B_x)\cos^2 B_x - 0.166667)\cos^2 B_x + 0.2;$$

$$B_{17} = (0.1667 - 0.0361\cos^2 B_x)\cos^2 B_x - 0.1429;$$

$$N_x = ((0.605\sin^2 B_x + 107.155)\sin^2 B_x + 21346.142)\sin^2 B_x + 6378245;$$

$$z = y / (N_x \cos B_x).$$

Отметим, что широты и долготы вычисляются по приведенным формулам в радианной мере.

Задание на выполнение работы

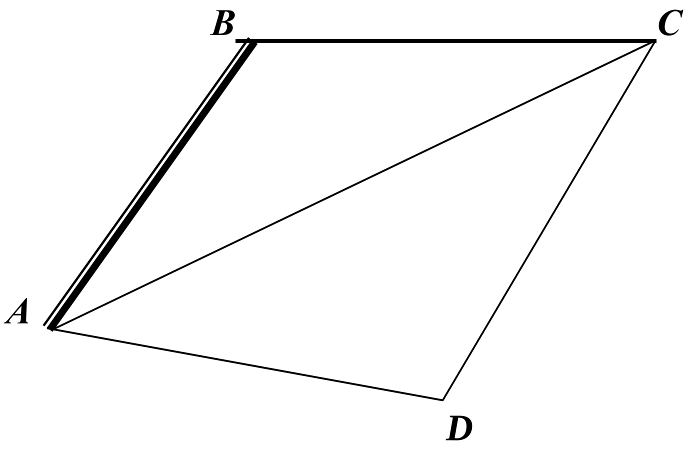
Редуцировать на плоскость проекции Гаусса – Крюгера сеть триангуляции, предложенную в предыдущей работе. Для решения этой задачи необходимо:

1. Определить номер шестиградусной координатной зоны, в которую попадает геодезическая сеть, и долготу осевого меридиана.
2. Вычислить плоские прямоугольные координаты всех пунктов.
3. Вычислить геодезические широты и долготы исходных пунктов.
4. Вычислить расстояния, редуцированные на плоскость проекции, между пунктами сети, проконтролировав путем решения обратной геодезической задачи на плоскости.
5. Вычислить поправки в измеренные направления и углы треугольников, проконтролировать их значения по сферическим избыткам треугольников.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Редуцирование измерений в геодезической сети 1 класса на поверхность эллипсоида

Дана геодезическая сеть триангуляции 1 класса.



В сети произведены измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний.

Названия пунктов	Названия направлений	Измеренные зенитные расстояния	Измеренные направления, приведенные к центрам пунктов
A	B C D	$89^0\ 21'\ 05''$ 89 42 19 90 39 21	$0^0\ 00'\ 00.00''$ 84 10 05.95 152 24 46.07
B	C A - - -	90 41 13 90 38 45	$0^0\ 00'\ 00.00''$ 50 25 12.79
C	D A B - - -	90 51 33 90 39 21 89 18 37	$0^0\ 00'\ 00.00''$ 54 13 59.42 99 38 43.02
D	A C - - -	89 20 18 89 09 21	$0^0\ 00'\ 00.00''$ 57 31 19.51

Также даны астрономические широта, долгота пункта ***A***, дальномерное расстояние и азимут направления ***AB***, приведены составляющие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале, аномалия высоты.

Астрономические широта, долгота и азимут	Уклонения отвеса, аномалия высоты	Измеренная длина исходной стороны	Нормальные высоты
$\varphi_A = 52^0 25' 03.59''$ $\lambda_A = 24^0 12' 34.55''$ $\alpha_{AB} = 20^0 15' 25.32''$	$\xi = +2.85'' + 0.1''\,\kappa$ $\eta = +3.02'' + 0.1''\,\kappa$ $\zeta = +1.2\text{м} + 0.1\,\kappa_м$	S_{AB}=21 233.242 м+ +κ	$H_A{}^{\gamma}$ = 250.2 м $H_B{}^{\gamma}$ = 261.9 м

Астрономические широту, долготу и азимут для варианта *к* принять с поправками + $\kappa^{/}\ \kappa^{//}$

Рабочие формулы для редукционных вычислений следующие:

– для вычисления геодезических широты, долготы, высоты и азимута используем формулы, следуемые из (10.5, 10.10) лекционного курса.

$$B = \varphi - \xi^{//} - 0.171^{//} H_{(км)} \sin 2\varphi,$$

$$L = \lambda - \eta^{//} \sec\varphi,$$

$$H = H^{\gamma} + \zeta,$$

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L)\sin\varphi + \frac{\eta\cos A_m - \xi\sin A_m}{\mathrm{tg}z};$$

– для редуцирования светодальномерного измерения (наклонной дальности) используем формулы (12.9 – 12.10)

$$c = \sqrt{\frac{d^2 - (H_1 - H_2)^2}{\left(1 + \dfrac{H_1 + H_2}{R_A}\right)}}, \qquad S = 2R_A \arcsin\frac{c}{2R_A},$$

где радиус кривизны нормального сечения, проходящего в азимуте *A*, вычисляется по рабочей формуле, следуемой из (4.17):

$$R_A = \frac{c_{эллипс.}}{V(1 - e^2\sin^2 B\cos^2 A)};$$

– для редуцирования измеренных горизонтальных направлений вводят три поправки: за уклонения отвеса, за высоту наблюдаемой цели и за переход от направления прямого нормального сечения к направлению геодезической линии, для чего используют формулы (12.11, 12.14 и 12.15) лекционного курса

$$\delta_1^{//} = \frac{\eta^{//}\cos A - \xi^{//}\sin A}{tgz},$$

$$\delta_2^{//} = \rho^{//}\frac{H_2}{2M_m} e^2 \sin 2A_{12} \cos^2 B_m.,$$

$$\delta_3^{//} = \rho^{//}\frac{e^2 S^2}{12N_1^2}\sin 2A_m \cos^2 B_m.$$

Задание на выполнение работы

1. Произвести расчеты необходимой точности редукционных вычислений, сделать вывод о значимости высот инструментального столика и верха визирного барабана над центрами пунктов (высоты пунктов не превышают 30 м).

2. Вычислить геодезические широту, долготу пункта ***A***, геодезические азимут и расстояние вдоль стороны ***AB*** треугольника.

3. Вычислить поправки в измеренные направления, составить сводку редуцированных на поверхность эллипсоида направлений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Установление связи систем координат

На территории Республики Беларусь имеется государственная геодезическая сеть триангуляции, координаты пунктов которой определены в референцной системе СК-42, а также производится модернизация этой сети с использованием систем спутникового позиционирования, которые позволяют определять пространственные геоцентрические координаты, отнесенные к общему земному эллипсоиду WGS-84 или ПЗ-90. Параметры связи систем координат приведены в табл. 15.2, связь пространственных прямоугольных координат производится по формулам (15.2 – 15.3) лекционного курса. Если имеются значения пространственных прямоугольных координат в одной системе (например, в WGS-84), можно вычислить пространственные прямоугольные координаты в другой системе, используя соответствующие параметры связи.

В том случае, когда необходимо произвести связь пространственных прямоугольных координат с геодезическими широтами, долготами и высотами, используют уравнения (3.16, 3.17, 3.20 и 3.21).

$$x = (N + H)\cos B \cos L;$$

$$y = (N + H)\cos B \sin L;$$

$$z = \left[N(1 - e^2) + H \right] \sin B;$$

$$\mathrm{tg} L = \frac{y}{x};$$

$$\mathrm{tg} B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(z + \frac{a e^2 \mathrm{tg} B}{\sqrt{1 + (1 - e^2)\mathrm{tg}^2 B}}\right);$$

$$H = \frac{z}{\sin B} - N(1 - e^2); \qquad H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos B} - N.$$

При переходе из одной системы координат в другую поправки в геодезические широты, долготы и высоты можно вычислить для каждого пункта по формулам (13.30) лекционного курса.

$$\delta B^{//} = \frac{\rho^{//}}{(M+H)}(\delta Z\cos B - (\delta X\cos L + \delta Y\sin L)\sin B +$$

$$+\frac{N}{a}e^{2}\sin B\cos B\delta a + \left(\frac{1}{W^{2}}+1\right)N\sin B\cos B\frac{\delta e^{2}}{2});$$

$$\delta L^{//} = -\rho^{//}\frac{(\delta X\sin L - \delta Y\cos L)}{(N+H)\cos B};$$

$$\delta H = \delta Z\sin B + (\delta X\cos L + \delta Y\sin L)\cos B - W\delta a +$$

$$+\frac{N\sin^{2}B}{2}\delta e^{2}.$$

Параметры земного эллипсоида:

a = 6 378 137 м, α = 1: 298. 257 224 – в системе *WGS-84;*

a = 6 378 136 м, α = 1: 298. 257 839 – в системе *ПЗ-90;*

a = 6 378 245 м, α = 1: 298. 3 – в системе *СК-42*.

Если необходимо связать поправки в полярное сжатие и квадрат первого эксцентриситета меридианного эллипса, используют формулы:

$$\delta\alpha = \frac{\delta e^{2}}{2\sqrt{1-e^{2}}}; \qquad \delta e^{2} = 2(1-\alpha)\delta\alpha,$$

которые получают дифференцированием уравнения связи этих параметров, приведенных в разделе 2 лекционного курса.

Задание на выполнение работы

Имеется сеть триангуляции 1 – 2 классов, референцные геодезические координаты пунктов которой в системе СК- 42 приведены в таблице.

Названия пунктов	Широта	Долгота	Высота
A	$53^{0}\ 21^{/}\ 33.524^{//}$	$27^{0}\ 31^{/}\ 39.352^{//}$	190. 152м
B	54 33 12.121	28 21 34. 523	188. 213
C	53 30 35.240	27 41 37. 728	199. 561
D	55 12 53. 345	29 25 43. 521	197. 687
E	56 01 42. 781	53 21 33. 524	170. 364

Широту и долготу для варианта *к* принять с поправками $+\kappa^{/}\ \kappa^{//}$, высоту + $\kappa_{м}$

Произвести вычисления для пунктов сети:

1) пространственных прямоугольных координат в системе *СК-42*;

2) пространственных прямоугольных координат в системах *WGS-84* и *ПЗ-90*;

3) геодезических широт, долгот и высот в системах *WGS-84* и *ПЗ-90* с контролем.

Произвести анализ полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1976. – 512 с.
2. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
3. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем: научное издание / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 126 с.
4. Яковлев, Н.Б. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учебное пособие для вузов / Н.Б. Яковлев. – М.: Недра, 1982. – 368 с.

Дополнительная

1. Бугаевский, Л.М. Математическая картография / Л.М. Бугаевский. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
2. Галазин, В.Ф. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90): справочный документ / В.Ф. Галазин [и др.]. – М., 1998. – 40 с.
3. Генике, А.А. Глобальные спутниковые системы определения местоположения и их применение в геодезии / А.А. Генике, Г.Г. Побединский. – М.: Картгеоцентр, 2004. – 352 с.
4. Кашин, Л.А. Построение классической астрономо-геодезической сети России и СССР (1816 – 1991 г.г.) / Л.А. Кашин. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1999. – 192 с.
5. Пеллинен, Л.П. Высшая геодезия / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
6. Подшивалов, В.П. Формулы для редуцирования измеренного отрезка прямой на поверхность эллипсоида / В.П. Подшивалов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – М., 1984. – № 1. – с. 30 – 37.
7. Урмаев, Н.А. Сфероидическая геодезия / Н.А. Урмаев. – М.: РИО ВТС, 1955. – 250 с.

Перечень наглядных и других пособий, методических указаний и методических материалов к техническим средствам обучения

1. Схема построения государственной геодезической сети СССР.
2. Карта аномалий высот квазигеоида.
3. Методическое пособие по решению задач сфероидической геодезии / сост. В.П. Подшивалов, А.В. Лапина. – Новополоцк: ПГУ, 1993.
4. Комплекс программ для геодезических вычислений на ЭВМ / сост. С.В. Маковский, В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 1988. – 2004.