ФГ/ БОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования)

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко

Diskr1.docx 1,26 М байт 31.10.2014 уч.-изд. 2.9 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 1

Воронеж 2014

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, ст. преп. Г.Ф. Федотенко

УДК 517

Элементы дискретной математики: методические указания по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 « Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 1/ ФГ БОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет» ; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов, Г.Ф. Федотенко. Воронеж, 2014. 48 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Diskr1.docx»

Ил. 11. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач по теме:“Дискретная математика ”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

Дискретная математика являются в настоящее время одними из наиболее важных разделов математики. В данной работе изложены основные положения теории дискретной математики. Методическое указание содержит большое количество задач для проведения практических и индивидуальных занятий. К задачам даны ответы, большое количество пояснений дает возможность многие примеры выносить на самостоятельную работу.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные положения теории множеств

Одним из разделов дискретной математики является раздел множества, которое было сформулировано математиком Г. Кантором.

Под множеством понимается любая совокупность определенных и различимых между собой объектов, мыслимая как единое целое.

Примером множества может быть количество студентов в группе, множество рациональных чисел, букв в алфавите, состояний системы и т. д. Понятие множества можно вводить тогда, когда элементы множества различимы между собой. Например, нельзя говорить о множестве молекул в комнате, так как невозможно четко указать отдельную молекулы.

Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Например, число 10 – элемент множества натуральных чисел, а буква д – элемент множества букв русского алфавита.

Обозначением множества служит пара фигурных скобок { }, внутри которых перечисляются элементы множества. Для обозначения конкретных множеств используют прописные буквы A, S, X... или прописные буквы с индексами A_1, A_2. Для обозначения элементов множества в общем виде используют различные строчные буквы a, s, x... или строчные буквы с индексами a_1, a_2...

Если элемент a является элементом множества S, то запись $a \in S$ указывает, что элемент a принадлежит множеству S, а запись $x \notin S$ говорит, что элемент x не принадлежит множеству S. Для x_1, x_2,... ...,$x_n \in S$ пользуются сокращением $x_1 \in S$, $x_2 \in S$,..., $x_n \in S$.

Как правило элементы множества различны. Если множество имеет повторяющимися элементы, то оно называется мультимножеством. Мультимножества применяется при рассмотрении задач комбинаторики.

Введем следующие обозначения для числовых множеств:

N – множество натуральных чисел, т.е. $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

Z – множество целых чисел, т.е. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$;

Q – множество рациональных чисел, $Q = \{ m / n \setminus m,\ n \in Z;\ n \neq 0\}$;

R – множество вещественных чисел;

C – множество комплексных чисел.

Множества бывают конечными и бесконечными. Множество называют конечным, если число его элементов конечно. То есть существует натуральное число n, являющееся числом элементов множества. Множество называют *бесконечным*, если оно содержит бесконечное число элементов. Количество элементов конечного множества называется *мощностью* и обозначается $|X| = n$, если множество X содержит n элементов.

Вводится понятие пустое множества. *Пустым множеством* называют множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество будем обозначают символом $\varnothing$. Например:

$$\{x \in R \mid 2x^2+2x+5=0\}=\varnothing.$$

Понятие пустого множества будет применятся при задании множества с помощью описания. Например, без понятия пустого множества нельзя о множестве хорошистов в группе или о множестве вещественных корней алгебраического уравнения, если в данной группе нет хорошистов или имеет данное уравнение вещественные корни. Пустое множество условно относится к конечным множествам.

Множество, содержащие все элементы называется *универсальным* или *универсумом* и обозначается U.

Имеется два способа задания множеств: перечисление и описание. Задание множества способом перечисления соответствует перечислению всех элементов множества. Например, множество хорошистов группы можно задать, перечислив студентов, которые учатся на хорошо, например {Иванов, Петров, Сидоров}. Для сокращения записи $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ иногда вводят множество индексов $I=\{1, 2,\ldots, n\}$ и пишут $X=\{x_i\}$, $i \in I$. Такой способ удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое число элементов, но можно применяться и для задания бесконечных множеств, например $\{1, 4, 7, 9\ldots\}$. Такая запись применима, если знать, что понимается под многоточием.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается свойство, которым обладают все элементы множества. При этом используется запись

$$X=\{x \mid x \text{ обладает свойством } Q(x)\}.$$

Выражение в скобках читается: множество всех элементов x, которые обладают свойством Q(x). Так, если M — множество студентов группы, то множество *B* хорошистов этой группы запишется в виде $B=\{x \in M \mid x - \text{хорошист группы}\}$

Это формулируется следующим образом: множество B состоит из элементов x множества M, обладающих тем свойством, что x является хорошистом группы.

В случаях, когда не вызывает сомнений, из какого множества берутся элементы x, указание о принадлежности x множеству M можно не делать. При этом множество A запишется в виде

$$\text{A}=\{x \mid x - \text{отличник группы}\}.$$

Приведем несколько примеров задания множеств методом описания: $\{x \mid x - \text{четное}\}$ – множество четных чисел;

$$\{x \mid x^2-4=0\} - \text{множество } \{+2, -2\}.$$

Пусть $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел. Тогда $\{x \in Z \mid 0<x \leq 7\}$ есть множество $\{ 2, 4, 6, 8\}$.

Множество нечетных чисел можно определить как $\{x \mid x=2k \text{ для некоторого } k \in Z\}$.

Способ задания множества с помощью свойств имеет недостаток, так как «неправильно» заданные свойства могут давать противоречия, т.е. не всякое свойство приводит к осмысленному заданию множества.

Также множество можно задать с помощью характеристической функции, значения которой указывают является ли x элементом множества X:

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 1, x \in X \\ 0, x \notin X \end{cases}$$

Заметим, что для любых элементов $\mu_{\varnothing} = 0$; $\mu_U = 1$.

Пример. Пусть на универсуме $U=\{a,b,c,d,e\}$ определено множество $X=\{a,c,d\}$, тогда

$$\mu_x(a)=1, \mu_x(b)=0, \mu_x(c)=1, \mu_x(d)=1, \mu_x(e)=0.$$

Для произвольных множеств X и Y можно определить два типа отношений – *отношение равенства и отношение включения.*

Два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Принято обозначение $X=Y$, если X и Y равны, и $X\neq Y$ – иначе.

Легко видеть, что для любых множеств X, Y, Z справедливы соотношения

$$X = X,$$
$$X = Y \rightarrow Y = X,$$
$$(X = Y \text{ и } Y = Z) \rightarrow X = Z.$$

Из определения равенства множеств вытекает, что порядок элементов в множестве несуществен. Так, например, множества {4, 5, 6} и {5, 6,4} представляют собой одно и то же множество.

Если каждый элемент множества X является элементом множества Y, то говорят, что X включено в Y и обозначают $X \subseteq Y$:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y).$$

В этом случае говорят, что множество X является *подмножеством* множества Y. В частном случае X и Y могут совпадать, поэтому $\subseteq$ называется также отношением *нестрогого включения.* Отметим некоторые свойства подмножества, вытекающее из его определения:

$$X \subseteq X,$$
$$(X \subseteq Y \text{ и } Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z.$$

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то говорят, что X есть *собственное подмножество* Y и обозначают $X \subset Y$, отношение между множествами в этом случае называется отношением *нестрогого включения.* Для отношения строгого включения справедливо

$$(X \subset Y \text{ и } Y \subset Z) \rightarrow X \subset Z.$$

Невключение подмножества X в множество Y обозначается $X \not\subset Y (X \not\subseteq Y)$.

1.2. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна

Для новых множеств полученных из существующих используют операции над множествами.

Объединением множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, все элементы которого являются элементами множества X или Y:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, элементы которого являются элементами обоих множеств X и Y:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Очевидно, что выполняются включения

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y; \quad X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y.$$

Разностью множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$ всех тех элементов X, которые не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

Дополнением множества X называется множество $\overline{X}$ всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству X:

$$\overline{X} = U \setminus X.$$

Симметрической разностью (или *кольцевой суммой*) множеств X и Y называется множество

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Замечание. $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

Универсальное множество графически изображают в виде множества точек прямоугольника, отдельные области внутри этого прямоугольника соответствуют различным подмножествам универсального множества. Такое представление универсального множества и его подмножеств называется *диаграммой Эйлера-Венна.* На диаграмме Эйлера-Венна можно проиллюстрировать все основные операции над множествами (рис. 1.1-1.5).

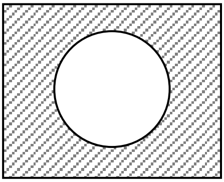


Рис. 1.1

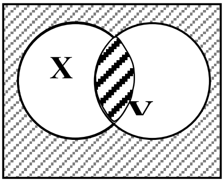


Рис. 1.2

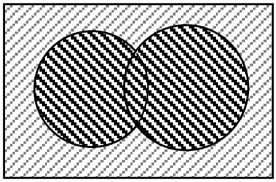


Рис. 1.3

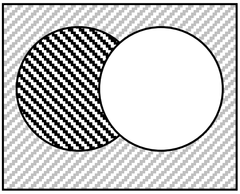


Рис.1.4

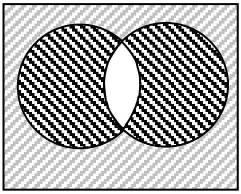


Рис. 1.5

Операции над множествами обладают определенными свойствами и удовлетворяют некоторым соотношениям.

Для любых множеств *X*, *Y, Z* выполняются следующие тождества (основные свойства операций):

1. *Коммутативность* операций $\cup$ и $\cap$:

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X.$$

2. *Ассоциативность* операций $\cup$ и $\cap$:

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z.$$

3. Законы *дистрибутивности*

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

4. $X \cup \varnothing = X, \quad X \cap \varnothing = \varnothing$.

5. $X \cup U = U, \quad X \cap U = X$.

6. Законы комплиментарности: $X \cup \overline{X} = U$, $X \cap \overline{X} = \varnothing$.

7. Законы идемпотентности: $X \cup X = X$, $X \cap X = X$.

8. Законы де Моргана: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

(Август де Морган (1806–1871) – английский математик).

9. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{X}} = X$.

10. Законы поглощения

$$X \cup (X \cap Y) = X, \quad X \cap (X \cup Y) = X.$$

Докажем один из законной дистрибутивности:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Доказательство. Чтобы доказать равенство двух множеств *A*=*B* нужно доказать, что *A*⊆*B* и *B*⊆*A*. Докажем, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Для доказательства этого включения выберем произвольный элемент из множества $X \cap (Y \cup Z)$ и покажем, что он принадлежит множеству $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Итак, пусть $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Тогда $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$. Если $x \in Y$, то $x \in X \cap Y$, а значит, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Если $x \in Z$, то $x \in X \cap Z$, а значит, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Таким образом,

$$X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

Теперь докажем, что $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$. Пусть $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Если $x \in (X \cap Y)$, то $x \in X$ и $x \in Y$, отсюда следует, что $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$, т.е. $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Если $x \in (X \cap Z)$, то $x \in X$ и $x \in Z$. Отсюда следует, что $x \in X$ и $x \in Y \cup Z$, т.е. $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Итак, $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$. Таким образом, получили, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ и $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$,

а это значит, что эти два множества равны.

Доказательство можно оформить в более формализованном виде, используя “{” для системы высказываний, объединенных союзом “и”, “[”- для системы высказываний, объединенных союзом «или».

Докажем, один из законов де Моргана: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

С одной стороны,

$$x \in \overline{X \cup Y} \Rightarrow \begin{cases} x \in U \\ x \notin X \cup Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin X \\ x \notin Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{X} \\ x \in \overline{Y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \overline{X} \cap \overline{Y} \Rightarrow \overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

С другой стороны,

$$x \in \overline{X} \cap \overline{Y} \Rightarrow \begin{cases} x \in \overline{X} \\ x \in \overline{Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in U \\ x \notin X \\ x \notin Y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \notin X \cup Y \Rightarrow x \in \overline{X \cup Y} \Rightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}.$$

Так как $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ и $\overline{X} \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$, то $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, что и требовалось доказать.

Можно выписать положения о произвольных множествах попарно эквивалентны:

1) $X \subseteq Y$; 2) $X \cap Y = X$; 3) $X \cup Y = Y$; 4) $X \setminus Y = \varnothing$; 5) $\overline{X} \cup Y = U$.

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Так как $X \cap Y \subseteq X$, то достаточно показать, что $X \subseteq Y$ влечет $X \subseteq X \cap Y$. Но если $x \in X$, то по условию $x \in Y$, и, следовательно, $x \in X \cap Y$.

2 $\Rightarrow$ 3. Так как $X \cap Y = X$, то $X \cup Y = (X \cap Y) \cup Y$. По закону поглощения и закону коммутативности имеем $(X \cap Y) \cap Y = Y$. Тогда $X \cup Y = Y$.

3 $\Rightarrow$ 4. Предположим, что $X \cup Y = Y$. Так как $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$, то по закону де Моргана, закону ассоциативности, закону коммутативности, закону комплиментарности и закону 4 имеем

$$X \setminus Y = X \cap (\overline{\overline{X} \cup Y}) = X \cap (\overline{\overline{X}} \cap \overline{Y}) = (X \cap \overline{\overline{X}}) \cap \overline{Y} = \varnothing \cap \overline{Y} = \varnothing$$

4 $\Rightarrow$ 5. Предположим, что $X \setminus Y = \varnothing$, т. е. $X \cap \overline{Y} = \varnothing$. Тогда $\overline{X \cap \overline{Y}} = \overline{\varnothing} = U$. По закону де Моргана и закону двойного отрицания получаем $U = \overline{X \cap \overline{Y}} = \overline{X} \cup \overline{\overline{Y}} = \overline{X} \cup Y$.

5 $\Rightarrow$ 1. Предположим, что $\overline{X} \cup Y = U$ и не выполняется условие $X \subseteq Y$, т. е. найдется элемент x такой, что $x \in X$ и $x \notin Y$. Тогда $x \notin \overline{X}$ и, значит, $x \notin \overline{X} \cup Y$, а это противоречит равенству $\overline{X} \cup Y = U$.

Отметим, что операция $\setminus$ выражается через операции $\cap$ и $^{-}$. По закону де Моргана и закону двойного отрицания справедливо соотношение $X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$, т. е. операция $\cup$ также выражается через операции $\cap$ и $^{-}$. По определению операция $\oplus$ тоже выражается через $\cap$ и $^{-}$. Таким образом, любая из определенных операций над множествами выражается через операции $\cap$ и $^{-}$.

Пересечение и объединение могут быть определены для любого множества множеств X_i, где индексы i пробегают множество I. Пересечение $\cap\{ X_i | i \in I \}$ и объединение $\cup\{ X_i | i \in I \}$ задаются равенствами

$$\cap\{ X_i | i \in I \} = \{ x | x \in X_i \text{ для всех } i \in I \},$$

$$\cup\{ X_i | i \in I \} = \{ x | x \in X_i \text{ для некоторого } i \in I \}.$$

Вместо $\cap\{ X_i | i \in I \}$ и $\cup\{ X_i | i \in I \}$ пишут соответственно $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$ и $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$, а иногда просто $\cap X_i$, $\cup X_i$, если из контекста ясно, какое множество I имеется в виду. Если $I = \{1,2,\ldots,n\}$, то $X_1 \cap X_2 \cap .. \cap X_n$ и $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$, а также $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Совокупность множеств $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ называется *покрытием* множества *X*, если $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$. Если при этом $|X|>0$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, то $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ называется *разбиением* множества *X*.

Пример. Пусть X={a, b, c, d, e, f}. Тогда {{a, b, d }, {c, f}, {e}} – разбиение множества X, а {{a, b, d }, {в, c, f}, {в, e}} – покрытие множества X.

Одним из понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств. *Декартовым (прямым) произведением* множеств *X* и *Y* называется множество упорядоченных пар вида

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

1.3. Мощность множества

1. Пусть заданы два конечных множества *X* и *Y*, причем $N(X)=|X|$; $N(Y)=|Y|$, тогда количество элементов в объединении двух множеств *X* и *Y* определяется по формуле

$$N(X \cup Y)=N(X)+N(Y)-N(X \cap Y).$$

Т.е. N(X)+N(Y) есть число элементов, которые мы получим, перечислив все элементы множества *X*, а затем – все элементы множества *Y*. Но в этом случае общие элементы (их число равно $N(X \cap Y)$ будут перечислены дважды, то есть $N(X \cup Y) + N(X \cap Y) = N(X)+N(Y)$, справедлива приведенная формула.

Теорема: если $X_1, X_2, ..., X_n$ – произвольные множества, то

$$N(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n) = N(X_1) + ... + N(X_n) - N(X_1 \cap X_2) - ... - N(X_{n-1} \cap X_n) +$$
$$+ N(X_1 \cap X_2 \cap X_3) + ... + N(X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n) - ... + (-1)^{n-1} N(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n)$$

(Формула доказывается методом математической индукции).

Метод подсчета по данной формуле, состоящий в поочередном сложении и вычитании, называется *методом включений и исключений.*

2. Для любого разбиения конечного множества $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|,$$

которое называют *правилом суммы.*

3. Для любого покрытия конечного множества $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ выполняется соотношение

$$|X| \le |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|,$$

которое называется *обобщенным правилом суммы.*

4. Для любых конечных множеств $X_1, X_2, ..., X_n$ имеет место равенство $|X_1 \times X_2 \times ... \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot ... \cdot |X_n|$, которое называется *правилом произведения.*

Если $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то $|X^n| = |X|^n$.

5. Если $|X| = n$, то $|p(X)| = 2^n$.

Две пары (x,y) и (u,v) считаются равными тогда и только тогда, когда $x=u$ и $y=v$

Аналогично можно определить декартово произведение n множеств $X_1, X_2, ..., X_n$

$$X_1 \times X_2 \times .... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n \}.$$

Если $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то n-я степень множества X определяется как X^n.

Для каждого множества X существует множество, элементами которого являются различные подмножества множества X. Такое множество называется *семейством множества* или *булеаном* множества X и обозначается $P(X)$ Так как $\varnothing$ включено в любое множество, то $\varnothing \subseteq P(X)$.

1.4. Взаимно однозначное соответствие между множествами

В некоторых задачах необходимо сопоставлять друг с другом элементы множеств. Рассмотрим, например, два множества: стадо из трех коз и рощу из трех деревьев. Эти множества находятся между собой в таком отношении, в каком ни одно из них не находится с кучей из трех камней или с рощей из трех деревьев. Их можно попарно сопоставить друг с другом, привязав коз к деревьям, так что каждая овца и каждое дерево будут в точности принадлежать одной и той же паре. Такое соответствие между элементами двух множеств называется *взаимно однозначным соответствием*.

Пусть X и Y два конечных множества: m- и n-элементные. Между ними можно установить взаимно однозначное соответствие только в том случае, если $m=n$. Сколько же существует таких взаимно однозначных соответствий для двух n-элементных множеств X и Y? Первый элемент множества X может быть сопоставлен с любым из n элементов множества Y. Для каждого такого сопоставления второй элемент множества X может быть сопоставлен с любым из оставшихся n-1 элементов множества Y и т. д. После того, как такое сопоставление проведено для n-1 элементов множества X, последний элемент этого множества будет сопоставляться с единственным оставшимся элементом множества Y. Таким образом, общее число взаимно однозначных соответствий для n-элементных множеств будет $n(n-1)\ \ldots\ 1=n!$

1.5. Счетные и несчетные множества

Множества являются бесконечными, то установление между ними взаимно однозначного соответствия имеют трудности, связанные с необходимостью оперировать с бесконечно большим числом элементов множества. За основу для сопоставления бесконечных множеств принято брать натуральный ряд чисел N: 1, 2, ... n … Если бесконечное множество оказывается возможным привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то такое множество называют *счетным.* Если бесконечное множество невозможно привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то его называют *несчетным*.

В качестве примера бесконечного множества рассмотрим множество равносторонних треугольников, в которых вершинами каждого треугольника являются середины сторон уже построенного треугольника (рис. 1.6). Это бесконечное множество равносторонних треугольников можно привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, расположив их в порядке уменьшения длин сторон, т. е. в виде последовательности T_1, T_2 …,T_n … Рассмотренное бесконечное множество равносторонних треугольников является счетным. Однако существует бесконечное множество других равносторонних треугольников, не входящих в рассмотренное множество. Является ли счетным множество всех равносторонних треугольников или всех треугольников вообще, требует исследования.

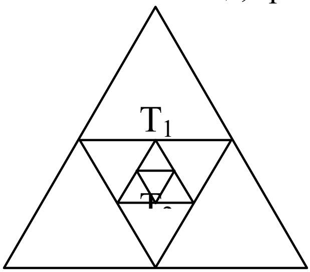


Рис. 1.6.

Приведем несколько примеров счетных множеств.

1. Множество квадратов целых чисел 1, 4, 9, ..., n^2 … представляет собой лишь подмножество множества натуральных чисел N. Однако множество является счетным, так как приводится во взаимно однозначные соответствия с натуральным рядом путем приписывания каждому элементу номера

того числа натурального ряда, квадратом которого он является.

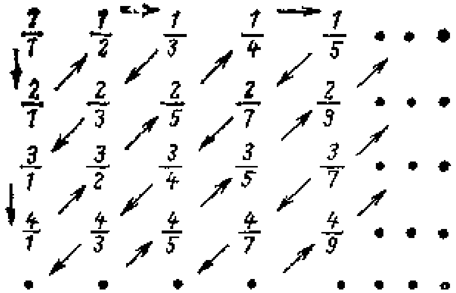
2. Счетным является множество Z всех целых чисел – положительных и отрицательных, хотя натуральный ряд представляет собой лишь подмножество этого множества. Это можно установить, рассмотрев взаимно однозначное соответствие

$$N:\ 1\ 2\ \ 3\ 4\ \ 5\ 6\ \ 7\ \ldots$$
$$Z:\ 0\ 1\ -1\ 2\ -2\ 3\ -3\ \ldots,$$

из которого следует, что

$$Z_n = \begin{cases} n/2 & \text{при четных n,} \\ -(n-1)/2 & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

3. Еще более удивителен тот факт, что счетным оказывается множество всех рациональных чисел, т. е. чисел, которые могут быть представлены в виде дроби $r=q/p$, где q и p – любые целые числа. Для того чтобы убедиться в этом, представим все множество рациональных чисел в виде следующей таблицы, в которую, естественно, заносим несократимые дроби:



Обходя таблицу по направлению стрелок, приходим к последовательности

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3}\ \ldots,$$

позволяющей занумеровать все эти числа.

Теорема . Множество всех действительных чисел интервала $0<x\leq 1$ несчетно.

Заметим, что любое число рассматриваемого интервала представляет собой конечную или бесконечную десятичную дробь вида 0, $a_1a_2a_3a_4\ldots$ и может быть представлено точкой отрезка вещественной оси. Следовательно, теорема утверждает, что множество точек отрезка (0, 1] несчетно.

Доказательство. Для доказательства предположим, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 ... представляет собой бесконечный перечень действительных чисел, принадлежащих этому интервалу. Вопрос состоит в том, может или не может подобный перечень содержать все числа этого интервала, т. е. нельзя ли найти число, которое принадлежит этому интервалу, но конечно не входит в указанный перечень чисел. Для того, чтобы найти такое число, запишем все входящие в перечень десятичные дроби одну под другой:

$$\begin{array}{llllll}
0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Образуем диагональную дробь, указанную стрелками, и заменим в ней каждую из последовательных цифр a_{nn} на отличную от нее цифру a'_{nn} так, чтобы при этом не получилась конечная дробь. Полученная дробь 0, $a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44}\ldots$ представляет собой действительное число, принадлежащее нашему интервалу, но не входящее в рассматриваемый перечень. Действительно, эта дробь отличается от первой из данных дробей своей первой цифрой после запятой, от второй – своей второй цифрой после запятой, от третьей – третьей цифрой и т. д.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ

2.1. Бинарные отношения. Свойства отношений

При решении некоторых задач необходимо выбирать элементы, связанные некоторым соотношением. Примерами таких связей между элементами могут служить функциональные зависимости или отношение «меньше или равно».

В множестве X n-местным или *n-арным отношением* называется подмножество R n-й декартовой степени $\mathrm{X}^n = \mathrm{X}\times\mathrm{X}\times....\times\mathrm{X}$ заданного множества, $R\subseteq \mathrm{X}^n$, X называется носителем отношения. Будем говорить, что упорядоченные элементы $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{X}$ находятся в отношении R, если $x_1, x_2, ..., x_n \in R$. Одноместное отношение называется *унарным,* или свойством, и соответствует подмножеству множества X. Особую роль в приложениях играют *бинарные* отношения $R\subseteq X\times X$. Если $(x, y)\in R$, то пишут также xRy.

Рассмотрим отношение $R=\{(x,y)|\ x\leq y,\ \ x,y\in \boldsymbol{R}\}$, заданное на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Тогда запись xRy означает, что $x\leq y$, и в качестве имени (обозначения) этого отношения можно взять символ $\leq$.

Каждому бинарному отношению можно поставить в соответствие матрицу бинарного отношения, которую также будем обозначать через $R=(r_{ij})_{n\times n}$ $(n = |\mathrm{X}|)$ и элементы которой r_{ij} определяются следующим правилом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, x_j)\in R, \\ 0, \text{ если } (x_i, x_j)\notin R. \end{cases}$$

Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представить эту информацию на компьютере. Заметим, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения.

Пример. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, тогда следующая таблица изображает бинарное отношение

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	1	0	1	1
x_4	1	1	1	0

Рассмотрим наиболее важные свойства бинарных отношений. Отношение $R \subseteq \mathrm{X}\times\mathrm{X}$ называется

рефлексивным, если для $\forall\, x \in X\ (x,x) \in R$;

антирефлексивным, если $\forall\, x \in X\ (x,x) \notin R$;

симметричным, если для $\forall\, x,\, y \in X\ ((x,y) \in R \to (y,x) \in R)$;

антисимметричным, если для $\forall\ x,\, y \in X\ ((x,y) \in R \to (y,x) \notin R)$;

транзитивным, если для $\forall\, x,\, y,\, z\ ((x,y) \in R$ и $(y,\, z) \in R \to$
$(x,z) \in R)$.

Пример. Следующие отношения, заданные на множестве действительных чисел ($\boldsymbol{R}$) обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности

$$R=\{(x,y)|\ x,y\in\boldsymbol{R}\ \text{ и }\ x=y\},$$

$$R=\{(x,y)|\ x,y\in\boldsymbol{R}\ \text{ и } x^2=y^2\}.$$

Отношение $R=\{(x,y)|\ x,y\in\boldsymbol{R}$ и $x\le y\}$, заданное на множестве действительных чисел, является рефлексивным, так как $\forall x\ x=x$, транзитивным и несимметричным.

Матрица бинарного отношения содержит единицы на главной диагонали, если отношение является рефлексивным; такая матрица является симметричной относительно главной диагонали, если отношение симметрично; для антисимметричного отношения произведение элементов, расположенных симметрично относительно главной диагонали, равно нулю.

Пусть на множестве X задано отношение $V \subseteq X \times X$ тогда совокупности $G = (X,V)$ называют *графом,* причем X – множество *вершин* графа, а V – множество линий, которые соединяют все или часть из этих вершин. Если в образовании пары (x,y) играет роль порядок элементов, то эту линию называют *дугой* и изображают направленным отрезком прямой (а граф G называется *ориентированным графом* или орграфом), иначе – *ребром* и изображают просто отрезком прямой (граф G в этом случае называется *неориентированным графом* или неорграфом). Пару противоположно направленных дуг между двумя фиксированными вершинами в графе часто заменяют ребром. Как правило, граф задается с помощью матрицы смежности $A=\{a_{ij}\}_{n\times n}$ ($n=|X|$), элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, x_j) \in V, \\ 0, \text{ если } (x_i, x_j) \notin V. \end{cases}$$

Заметим, что матрица смежности графа совпадает с матрицей соответствующего бинарного отношения.

Пример. Пусть матрица бинарного отношения R, заданного на универсальном множестве $U=\{a,b,c,d,e\}$, имеет вид

R	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	0	0	0	1	1
c	0	1	0	0	1
d	0	0	1	0	1
e	1	0	0	0	0

Тогда соответствующий граф будет иметь вид (рис. 2.1).

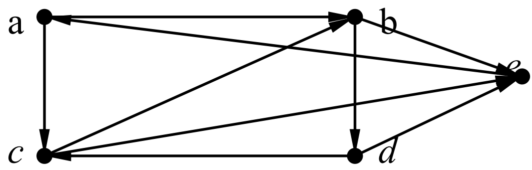


Рис. 2.1

Если отношение V рефлексивно, то граф G в каждой вершине имеет петлю; если V симметрично, то любые две вершины графа G соединены парой противоположно направленных дуг; если V антисимметрично, то в G любые две вершины x и y, такие что $(x,y) \in V$ соединены дугой. В графе G, задающем транзитивное отношение V, для всякой пары дуг, таких что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй – *транзитивно замыкающая дуга.*

Так как отношение является прежде всего множеством упорядоченных пар, то для отношений можно ввести те же операции, что и для множеств, то есть операции объединения, пересечения, разности и дополнения. Кроме того, для отношений существуют специальные операции:

инверсией отношения R (или обратным к отношению R) называется отношение $R^{-1} = \{(x, y)(y, x) \in R\}$. Матрица обратного отношения R^{-1} равна транспонированной матрице отношения R: $R^{-1} = R^T$.

Пусть R_1, R_2 – отношения, заданные на множестве X, тогда *композицией отношений* R_1 и R_2 называется отношение, определяемое следующим образом:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in R_1 \, u \, (z, y) \in R_2\}$$

Заметим, что $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

Замечание. Операция композиции позволяет определить свойство транзитивности. Если выполняется включение $R \circ R \subseteq R$, то отношение транзитивно.

Утверждение 2.1.1. Для любых бинарных отношений *P, Q, R* выполняются следующие свойства:

1) $(P^{-1})^{-1} = P$;

2) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;

3) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (ассоциативность композиции).

Доказательство. 1. По определению обратного отношения условие $(x, y) \in P$ равносильно условию $(y, x) \in P^{-1}$, что в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $(x, y) \in (P^{-1})^{-1}$. Следовательно, $P = (P^{-1})^{-1}$.

2. Предположим, что $(x, y) \in (P \circ Q)^{-1}$. Тогда $(y, x) \in P \circ Q$, и, следовательно, $(y, z) \in P$ и $(z, x) \in Q$ для некоторого элемента z. Значит, $(x, z) \in Q^{-1}$, $(z, y) \in P^{-1}$ и $(x, y) \in Q^{-1} \circ P^{-1}$. Включение $Q^{-1} \circ P^{-1} \subseteq (P \circ Q)^{-1}$ доказывается аналогично.

3. Пусть $(x, y) \in (P \circ Q) \circ R$. Тогда для некоторых u и v имеем $(x, u) \in P$, $(u, v) \in Q$, $(v, y) \in R$. Таким образом, $(u, y) \in Q \circ R$ и $(x, y) \in P \circ (Q \circ R)$. Включение $P \circ (Q \circ R) \subseteq (P \circ Q) \circ R$ доказывается аналогично.

2.2. Отношение эквивалентности и разбиения

Введем некоторые специальные типы отношений. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называется отношением эквивалентности или *эквивалентностью* I).

Примеры.

1. Отношение равенства на множестве целых чисел $R=\{(x,y) \mid x,y \in \boldsymbol{Z} \text{ и } x=y\}$ является отношением эквивалентности,

так как оно рефлексивно ($x=x$), симметрично ($x=y \Rightarrow y=x$), транзитивно ($x=y, y=z \Rightarrow x=z$)).

2. Отношение подобия на множестве треугольников являются отношением эквивалентности.

3. Отношение принадлежности к одной студенческой группе на множестве студентов ВГТУ – отношение эквивалентности.

4. Говорят, что целые числа x и y сравнимы по модулю m, если их разность делится на m. Этот факт обозначают в виде $x \equiv y(\mathrm{mod}\ m)$. На множестве целых чисел определим бинарное отношение R, полагая xRy, если $x \equiv y(\mathrm{mod}\ m)$. Это отношение называется отношением сравнимости по модулю m. Заметим, что R рефлексивно на множестве целых чисел, так как x-$x = 0$, и, следовательно, делится на m; R симметрично, так как если (x-y) делится на m, то (y-x) также разделится на m; это отношение транзитивно, так как если (x-y) делится на m, то для некоторого целого t_1 имеем $x-y=t_1 m$, а если (y-z) делится на m, то для некоторого целого t_2 имеем $y-z=t_2 m$. Отсюда $x-z= =(t_1+t_2)m$, то есть число (x-z) делится на m. Таким образом, отношение сравнимости по модулю m на множестве целых чисел является эквивалентностью.

Классом эквивалентности K(x) элемента x называется множество всех элементов $y \in X$, каждый из которых находится с этим элементом в отношении эквивалентности. Иными словами, класс эквивалентности – это множество эквивалентных элементов.

Примеры:

1. Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов одной группы.

2. Отношение сравнимости на множестве целых чисел порождает следующие классы эквивалентности: вместе с лю-

бым числом x в этом же классе эквивалентности содержатся все числа вида (y + km), где k – целое число. Очевидно, что числа 0, 1,…, m-1 порождают различные классы эквивалентности, которые называются классами вычетов по модулю m. Все остальные классы эквивалентности для этого отношения совпадают с ними, так как любое число x из множества целых чисел, можно представить в виде

$$y = tm + r, \text{ где } 0 \leq r \leq \mathrm{m}.$$

Заметим, что два различных класса эквивалентности не пересекаются, поэтому если все элементы множества X распределены по классам эквивалентности, то эти классы эквивалентности образуют разбиение множества X. Справедливо утверждение: всякое отношение эквивалентности определяет разбиение множества X на классы эквивалентности. Множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством* по данному отношению эквивалентности и обозначается X/I.

Пример 1. Для отношения принадлежности к одной студенческой группе фактор-множество множества студентов ВГТУ представляется собой множество студенческих групп.

Для определения, является ли заданное отношение R отношением эквивалентности используют следующий критерий:

Пусть R – матрица бинарного отношения. Если путем перестановки строк и столбцов ее можно привести к блочно-диагональному виду (на главной диагонали расположены подматрицы, состоящие из 1, а остальные элементы равны 0), то R является отношением эквивалентности, иначе – R не является отношением эквивалентности.

Пример 2. Рассмотрим отношение R, матрица которого имеет вид

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	1	1
d	1	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	1	1
f	0	0	1	0	1	1

Переставляя строки и столбцы, матрицу отношения R можно привести к блочно-диагональному виду, а значит R является эквивалентностью, и по полученной матрице можно определить классы эквивалентности K_1, K_2, K_3.

R	a	d	b	c	e	f
a	1	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

Таким образом, $K_1 = \{a, d)$, $K_2 = \{b\}$, $K_3 = \{c, e, f\}$.

Отношение эквивалентности имеет большое практическое значение. Так сущность моделирования заключается в том, что устанавливают отношение эквивалентности между двумя системами, каждая из которых может быль абстрактной или реально существующей. Если одна из систем оказывается проще для исследования, то ее рассматривают в качестве модели для другой. Модель называется изоморфной, если между моделью и реальной системой наблюдается полное поэлементное соответствие (чертеж и изготовленная по нему деталь). Однако часто используются модели, которые позволяют судить только о существенных аспектах поведения реальных систем, не детализируя их (географическая карта по отношению к изображенному на ней участку земной поверхности). Модели, отдельные элементы которых соответствуют лишь крупным частям реальной системы, а полное поэлементное соответствие отсутствует, называются гомоморфными.

2.3. Отношения порядка. Диаграмма Хассе

Отношение эквивалентности является обобщением отношения равенства: эквивалентные элементы считаются «равными». Обобщением обычного отношения $\leq$ служат отношения порядка.

Отношение $R \subseteq X^2$ называется предпорядком или квазипорядком, если R рефлексивно и транзитивно.

Пример. Отношение

R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(1,3)}

на множестве X={1,2,3} является предпорядком.

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется отношением нестрогого порядка и обозначается символом $\preceq$.

Антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется отношением строгого порядка и обозначается символом $\prec$. Отношения строгого и нестрогого порядков иначе называют отношениями упорядоченности. Отношение, обратное отношению упорядоченности, также является отношением упорядоченности, т.е. $(\prec)^{-1} = \succ$.

Примеры:

1. Пусть Y – некоторое множество, тогда отношение включения $\subseteq$ на множестве всех подмножеств $P(Y)$ явля-

ется отношением нестрогого порядка.

2. Отношение «x старше y» на некотором множестве людей является отношением строгого порядка.

Множество X с заданным в нем отношением порядка называется *упорядоченным* этим отношением. Если любые два элемента x и y множества X находятся между собой в отношении порядка, то множество X называется *линейно упорядоченным или цепью,* иначе множество X называется *частично упорядоченным.* В частично упорядоченном множестве можно выделить цепь. Цепь с повторяющимися элементами называется мультицепью. Если между элементами x и y установлено отношение порядка, то они называются *сравнимыми,* иначе – *несравнимыми. Антицепью* (семейством Шпернера) называется подмножество частично упорядоченного множества, в котором любые два элемента несравнимы. Специальным типом частично упорядоченного множества является интервал $|x,y]=\{z\in X|x \prec z\prec y\}$ (замкнутый) или $(x,y)P=\{z\in X|x\prec z\prec y\}$ (открытый).

Двойственным к частично упорядоченному множеству называется частично упорядоченное множество, определенное на том же носителе с помощью обратного отношения. Рассмотрим множество X с заданным на нем отношением частичного порядка $\prec$.

Говорят, что *элемент y покрывает элемент x*, если $x\prec y$ и не существует никакого элемента $z\in X$, такого что $x \prec z \prec y$. Таким образом, y покрывает x тогда и только тогда, когда $x\prec y$ и $[x,y]=\{x,y\}$. Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы. *Диаграммой Хассе* частично упорядоченного множества X называется граф, вершинами которого являются элементы множества X, а пара (x,y) образует ребро, если элемент y покрывает элемент x, и такой что, если $x \prec y$, то y рисуют с большей вертикальной координатой чем x.

Пример. Отношение включения $\subseteq$ на булеане $P(X)$, где $X=\{a, b, c\}$. Оно является частично упорядоченным множеством. Множество $P(X)$ содержит восемь элементов: $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Диаграмма Хассе для этого отношения будет иметь вид (рис. 2.2).

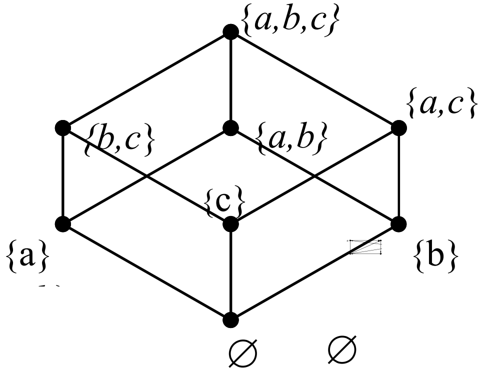


Рис. 2.2

Правило чтения диаграмм Хассе состоит в том, что $x \prec y$, если можно пройти из точки x в точку y, следуя вдоль восходящих отрезков соединяющих точки. Смена направления движения разрешается только в точках диаграммы.

Пусть X и Y два частично упорядоченных множества. Если их диаграммы Хассе совпадают, то эти частично упорядоченные множества имеют одинаковую структуру.

Пусть задано частично упорядоченное множество X. Для элементов x и y из множества X их *верхней гранью* называется любой элемент $z \in X$ такой, что $z \succ x$ и $z \succ y$, а их *нижней гранью* – любой элемент $t \in X$, такой, что $t \prec x$ и $t \prec y$. На языке диаграмм Хассе $x \prec y$ означает, что существует путь из x в y; верхняя грань x и y – это вершина, в которую есть путь из x и y; нижняя грань x и y – это вершина из которой есть путь и в x

и в *y*. В общем случае для некоторых элементов верхняя и нижняя грань может не существовать или быть неединственной, причем различные верхние (или нижние) грани могут быть несравнимы.

3. КОМБИНАТОРИКА

При решении многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, подсчитать число различных комбинаций и т.п. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся такого рода задачами, называется комбинаторикой.

Основные законы комбинаторики.

Правило суммы.

Если некоторый элемент a может быть выбран из множества элементов m способами, а другой элемент b может быть выбран n способами, причем любой выбор элемента b отличен от любого выбора элемента a, то выбрать либо a, либо b можно m + n способами.

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом:

Теорема1: если пересечение конечных множеств пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Разберем случай, когда множества могут иметь непустые пересечения.

Теорема2: для любых конечных множеств верно равенство:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Правило произведения.

Вторым основным правилом комбинаторики является правило произведения.

Если элемент a можно выбрать из множества элементов m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то два элемента (упорядоченную пару) a и b можно выбрать $m \cdot n$ способами.

На языке множеств это правило выражается в виде следующей теоремы.

Теорема3: если множества A и B конечны, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Следствие: если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечны, то $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

Формулы комбинаторики

1) *Перестановки:*

а) Перестановки без повторений

Перестановки - это комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком расположения этих элементов. Возьмем n различных элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; будем переставлять эти элементы всевозможными способами, оставляя без изменения число элементов и меняя только порядок их расположения. Обозначим общее число полученных таким образом перестановок P(n). P - первая буква французского слова *permutation* - перестановка.

Составив таблицу перестановок для n элементов и применив (n - 1) раз правило произведения, получим число всех возможных перестановок:

$$P(n) = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = n!$$

Такие перестановки называются перестановками без повторений (один и тот же элемент не может повториться в комбинации, все элементы различны).

б) Перестановки с повторениями

Рассматривая различные перестановки, мы предполагали, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., n_k элементов к-го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число: $\overline{P_n}(n_1,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}$, где $n_1+\ldots+n_k = n$.

2) Размещения

а) Размещения без повторений.

Размещениями называют комбинации, составленные из n данных элементов по k элементов (k<=n, k>0), которые отличаются либо составом элементов, либо порядком расположения элементов. Обозначаются размещения A_n^k . А - первая буква французского слова *arrangement*, что в переводе означает "размещение", "приведение в порядок". Число всех возможных размещений находится по формуле: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

б) Размещения с повторениям

Пусть существуют n различных элементов. Выберем из них m штук, действуя по следующему принципу: возьмем любой элемент, но не будем устанавливать его в какой-либо ряд, а просто запишем под номером 1 его название, сам же элемент вернем к остальным элементам. Затем опять из всех n элементов выберем один, запишем его название под номером 2 и снова вернем элемент обратно. Будем выполнять эти операции, пока не получим m названий. Размещения с повторениями вычисляются по формуле: $\overline{A_n^m} = n^m$.

3) Сочетания

а) Сочетания без повторений

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k (k =< n) элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Сочетания обозначаются: C_n^k C - первая буква французского слова *combinasion* - сочетание. Составим из n элементов всевозможные сочетания по k элементов в каждом. Их будет C_n^k . Внутри каждого сочетания, состоящего из k элементов, образуем всевозможные комбинации, учитывающие порядок следования в них элементов. Таких комбинаций будет P_k, т.к. мы в нашем сочетании образовываем перестановки. Всего различных комбинаций из n элементов по k в каждой, отличающихся друг от друга либо составом (элементами), либо порядком их следования, будет $C_n^k \bullet P_k$. Но такие комбинации называются размещениями. Таким образом, $A_n^k = C_n^k \bullet P_k$, тогда: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

б) Сочетания с повторениями.

Если в сочетаниях некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются сочетаниями с повторениями. Их число определяется по формуле: $\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^m$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1 .

Пусть Y — множество студентов группы, а X – множество отличников той же группы. Так как каждый отличник группы является в то же время студентом этой группы, то множество X является подмножеством множества Y.

Замечание. Не следует смешивать отношение принадлежности $\in$ и отношение включения $\subseteq$. Хотя $0 \in \{0\}$ и $\{0\} \in \{\{0\}\}$, неверно, что $0 \in \{\{0\}\}$, поскольку единственным элементом множества $\{\{0\}\}$ является $\{0\}$.

Задача 2 .

Справедливы следующие включения: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$, $R \subset C$.

Заметим, что если X является подмножеством Y и наоборот, то X и Y состоят из одних и тех же элементов, поэтому

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} \Leftrightarrow (\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y} \text{ и } \mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}).$$

Таким образом, чтобы доказать равенство двух множеств, надо установить два включения.

Задача 3.

Покажем, что множества $M_1=\{x \mid \sin x = 1\}$ и $M_2=\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathrm{Z}\}$ совпадают.

Если $x \in M_1$, то x является решением уравнения $\sin x=1$. Но это значит, что x можно представить в виде $x=\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$ и поэтому $x \in M_2$. Таким образом, $M_1 \subseteq M_2$. Если $x \in M_2$, т.е. $x=\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$, то $\sin x=1$, т.е. $M_2 \subseteq M_1$. Следовательно, $M_1=M_2$.

Задача 4 .

Пусть $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда

$$P(X)=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\},\varnothing\}.$$

Задача 5 .

Пусть X={1,2}, Y={3,4,5}. Тогда $X\times Y=\{(1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5)\}$, $Y\times X=\{(3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2),\ (5,1),\ (5,2)\}$, $X\times X=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$.

Задача 6.

Если X={2,3,4,5,6,7,8}, то бинарное отношение $R=\{(x,y)|$ x делит y и $x\le 3\}$, заданное на множестве X, можно записать в виде R={(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)}.

Задача 7.

Определим свойства отношения R$=\{(x,y)|\ x,y\in\boldsymbol{N}$ и x – делитель $y\}$, заданного на множестве натуральных чисел.

1. Так как $\dfrac{x}{x}=1$ для всех $x\in\boldsymbol{N}$, то R рефлексивно.

2. Рассмотрим элемент $(2,4)\in R$. 2 - делитель 4, но 4 не является делителем 2, т. е. $(4,2)\notin R$, следовательно, R - несимметричное отношение.

3. Так как, если $\dfrac{y}{x}\in\boldsymbol{N}$ и $\dfrac{z}{y}\in\boldsymbol{N}$, то $\dfrac{z}{x}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{z}{y}\in\boldsymbol{N}$ и R – транзитивно.

Задача 8.

Пусть А={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}. Рассмотрим отношение частичного порядка $\le$ на этом множестве, задаваемое по правилу: $x\le y \Leftrightarrow y$ делится на x. Диаграмма Хассе изображена на рис. 4.1

На рис. 4.2 изображена диаграмма Хассе линейно упорядоченного множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} с обычным отношением порядка ($\le$) на множестве натуральных чисел, не превосходящих восьми.

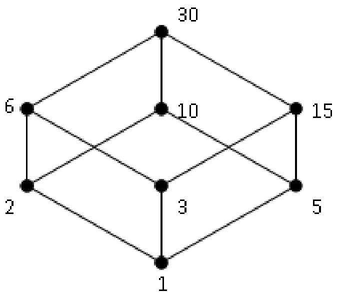


Рис. 4.1

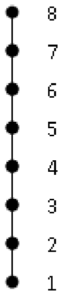


Рис. 4.2

Задача 9.

На рис. 4.3 а) изображена диаграмма Хассе множества $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, у которого элементы x_4, x_5 не имеют верхней грани, а элементы – нижней грани. На рис. 4.3 б) изображена диаграмма Хассе множества $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ у которого все элементы имеют верхние и нижние грани, однако, например, x_1 и x_3 имеют две несравнимые верхние грани.

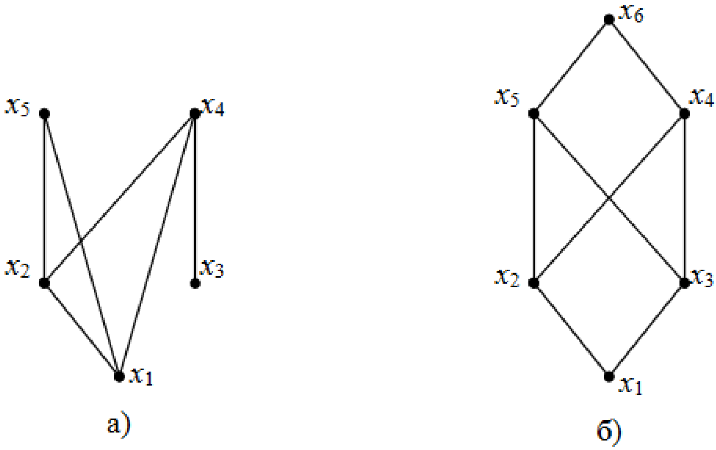


Рис. 4.3

Задача 10.

На блюде лежат 5 яблок и 2 груши. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: плод можно выбрать семью способами (5+2=7).

Задача 11.

Среди студентов первого курса 30 человек имеют дома компьютер, 35 – учебник по информатике; оказалось, что 10 студентов имеют и компьютер, и учебник по информатике. Сколько студентов на первом курсе?

Решение: пусть множество A составляют студенты, имеющие компьютер, множество B – студенты, имеющие учебник по информатике; по условию задачи:

$|A| = 30$ $|B| = 35$ $|A \cap B| = 10$

$|A \cup B| = ?$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 30 + 35 - 10 = 55.$$

Задача 12.

Определить количество клеток в игре «морской бой», если номер клетки состоит из буквы (букв 10) и цифры (цифр тоже 10).

Решение: количество клеток равно 10•10=100.

Задача 13.

Сколько номеров, состоящих из двух букв, за которыми идут три цифры можно составить, если использовать 29 букв и 10 цифр.

Решение: обозначим множество букв А, множество цифр – В; каждый номер требуемого вида является набором длины n из декартова произведения $A \times A \times B \times B \times B$; по условию $|A| = 29$, $|B| = 10$, тогда по следствию из теоремы3 имеем:

$$| A \times A \times B \times B \times B | = 29 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 841\ 000.$$

Задача 14.

Шесть человек могут в разном порядке сесть за круглый стол, сколько существует способов разместить эти шесть человек за столом?

Решение: т.к. все люди различны и их комбинации различаются только порядком следования, то мы имеем перестановки без повторений. Определим их число: $P(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Задача 15.

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД, МАТЕМАТИКА.

Решение: имеем перестановки с повторениями.

А) ДЕД $n=3$, $k=2$, $n_1=2$, $n_2=1$

$P_3(2, 1) = 3!/(2! \cdot 1!) = 6 / 2 = 3;$

Б) МАТЕМАТИКА $n=10$, $k=6$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=2$, $n_4=n_5=n_6=1$

$P_{10}(2,3,2,1,1,1)=10!/(2! \bullet 3! \bullet 2!)=2\bullet4\bullet5\bullet6\bullet7\bullet9\bullet10 = 134\,400$.

Задача 16.

Расписание одного дня состоит из двух пар. Определить число вариантов расписания при выборе из пяти дисциплин, если не может быть одинаковых пар.

Решение: имеем размещения без повторений из пяти элементов по два, из число: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$.

Задача 17.

Сколько четырехзначных номеров можно составить из 10 цифр?

Решение: имеем размещения с повторениями из 10 элементов по 4, их число: $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000$.

Задача 18.

В шахматном турнире участвует 7 человек; сколько партий будет сыграно, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна партия?

Решение: имеем сочетания без повторений из 7 элементов по 2; их число:

$$C_7^2 = \frac{A_7^2}{P_2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{6 \bullet 7}{2} = 21.$$

Задача 19.

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

Решение: имеем сочетания с повторениями из четырех по 7 по, их число: $\overline{C_4^7} = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{8 \bullet 9 \bullet 10}{1 \bullet 2 \bullet 3} = 120$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения по теме множества

1. Докажите равенства $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, где A, B, C - множества.
2. Верно ли равенства $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?
3. Что является дополнением к множеству четных чисел во множестве натуральных чисел?
4. Что является дополнением к множеству $\{1,3,5\}$ во множестве $\{1,2,3,4,5,6\}$?
5. Что является дополнением к множеству $\{1,3,5\}$ во множестве $\{1,3,5\}$?

6. Даны множества $X_0=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X_1=\{1,2,3,4\}$, $X_2=\{2,3,4,5\}$, $X_3=\{2,3,4\}$, $X_4=\{3,4,5\}$, $X_5=\{2,3\}$, $X_6=\{3,4\}$, $X_7=\{4,5\}$, $X_8=\{2,4\}$. Сформируйте частичный порядок на этих множествах.
7. Пусть X - множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентными отношения а) параллельности прямых и б) перпендикулярности прямых?

8. Приведите пример четырех различных рефлексивных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$.
9. Приведите пример трех различных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$, не являющихся рефлексивными.
10. Приведите пример двух различных симметричных отношений и двух различных, не являющихся симметричными, на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.
11. Приведите пример двух различных транзитивных отношений и двух различных, не являющихся транзитивными, на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.
12. Приведите пример множества и двух различных эквивалентностей на нем.
13. Приведите пример множества и двух различных частичных порядков на нем.
14. Определите свойства следующих отношений, заданных на множестве действительных чисел (***R***)

    а) $R=\{(x,y) |\ x,y\in \boldsymbol{R}$ и $x - y<0\}$,

    в) $R=\{(x,y) |\ x,y\in \boldsymbol{R}$ и $2x \geq 3y\}$,

    с) $R=\{(x,y) |\ x,y\in \mathbf{R}$ и $|x| \geq |y|\}$.
15. Найдите R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношений

    а) $R=\{(x,y) \mid x,y\in N$ и x, делит $y\}$,

    в) $R=\{(x,y) |\ x,y\in \mathbf{R}$ и $x + y<0\}$,

    с) $R=\{(x,y) |\ x,y\in \mathbf{R}$ и $2x \geq 3y\}$.
16. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 рефлексивны, то рефлексивны следующие отношения $R_1 \bigcup R_2$, $R_1 \bigcap R_2$, $R_1 \circ R_2$, R_1^{-1}.

17. Докажите, что если отношения R_1 и R_2 симметричны, то симметричны следующие отношения $R_1 \bigcup R_2$, $R_1 \bigcap R_2$, $R_1 \circ R_1^{-1}$, R_1^{-1}.
18. Докажите, что если R эквивалентность, то R^{-1} есть также эквивалентность.
19. Докажите, что $R_1 \bigcup R_2$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда $R_1 \bigcup R_2 = R_1 \circ R_2$.
20. Для отношения, заданного матрицей, определить является ли оно отношением эквивалентности. Если является, то определить классы эквивалентности.

а)

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	0	1	1
c	0	0	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	1	1
f	0	1	0	0	1	1

б)

R	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	1	0	1
b	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0
d	1	0	0	1	0	1
e	0	0	0	0	1	0
f	1	0	0	1	0	1

Задачи и упражнения для самостоятельного решения по теме комбинаторика

1. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и чёрный? А если нет ограничения на цвет квадратов?

   Ответ: 1042; 4032.

2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

   Ответ: 32×24.

3. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? А если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой "1"?

   Ответ: 480.

4. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 карты) по одной карте каждой масти?

   Ответ: 13^4.

5. В магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева "Рудин", 3 экземпляра его же романа "Дворянское гнездо" и 4 экземпляра романа "Отцы и дети". Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы "Рудин" и "Дворянское гнездо", и 7 томов, содержащих романы "Дворянское гнездо" и "Отцы и дети". Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? Та же задача, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят романы "Рудин" и "Отцы и дети".

   Ответ: 134; 143.

6. Возможно ли равенство $P_n = 36\, A_{n-1}^2$ и если да, то при каких n?

Ответ: Да, при $n = 6$.

7. Сколькими способами могут 4 человека разместиться в четырёхместном купе железнодорожного вагона?

Ответ: 24.

8. Найти число простых чисел, не превосходящих 250.

Ответ: 53.

9. У одного человека есть 7 книг, у другого 9.Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого, если все книги различны? Та же задача, но меняются две книги одного на две книги другого.

Ответ: 63; 756.

10. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 27 букв русского алфавита.

Ответ: 33820×10^4.

11. Сколькими способами можно составить список из 7 студентов?

Ответ: 5040.

12. Из спортклуба, насчитывающего 30 человек, надо выбрать команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А если нужно выбрать команду из четырех человек для участия в эстафете 100+200+400+800?

Ответ: 27405; 657720.

13. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из семи цифр 0, 1, 2,... , 6 , если каждая из них может повторяться несколько раз?

Ответ: 2058.

14. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,6,7,8, если никакую цифру не использовать более одного раза?

Ответ: 6!.

15. На танцевальном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танцев?

Ответ: 17417400.

16. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторение цифр в числах запрещено?

Ответ: $P_5 + A_5^4 + A_5^3 = 300$.

17. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где продаются 11 разных сортов пирожных?

Ответ: H_{11}^{4}.

18. Сколько всего костей домино, если используется для их образования 7 цифр 0,1,2,3,4,5,6. Ответ обосновать.

Ответ: 28, так как кости домино можно рассматривать как неупорядоченные 2-выборки из 7-и цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 с повторениями;

19. В группе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 - физический; 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учащихся посещают оба кружка? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Ответ: 6; 14.

20. Изучаются 10 учебных предметов. В понедельник надо поставить 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Ответ: 151200.

21. Сколькими способами читатель может выбрать 3 разные книги из пяти?

Ответ: 10.

22. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "тик-так" чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом? То же самое для слова "тартар".

Ответ: 84; 30.

23. Сколько целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Ответ: 228.

24. Сколькими способами можно переставить числа 12341234 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

Ответ: 864.

25. Сколькими способами можно переставить числа 12345254 так, чтобы ни какие две одинаковые цифры не шли друг за другом.

Ответ: 2230.

26. Сколько разных слов можно составить, переставляя буквы в слове "мама"? Напишите эти слова.

Ответ: 6.

27. В комнате n лампочек. Сколько всего разных способов освещения комнаты, при которых горит ровно k лампочек? Сколько всего может быть различных способов освещения данной комнаты?

28. Сколькими способами можно разместить на полке 4 разные книги?

Ответ: 24.

29. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

Ответ: $(n-2)(n-1)!$

Решение: Данные два элемента, например «a» и «b», будем считать за один элемент «ab». Тогда имеем $(n-1)$ элементов, которые можно переставить $(n-1)!$ способами. Если же имеем элемент «ba», то имеем так же $(n-1)!$ способов перестановки $(n-1)$ элементов. Следовательно, число перестановок, в которых «a» и «b» стоят рядом, равно $2(n-1)!$. Всего $n!$ перестановок. Тогда искомое число перестановок равно $n!-2(n-1)!$.

30. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

Ответ: 303600.

31. Студенту надо сдать 4 зачёта за 8 дней. Сколькими способами можно это сделать? А если последний зачёт обязательно сдавать на восьмой день?

Ответ: 1680; 840.

32. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглый стол?

33. На собрании должны выступать 4 человека А,В,С,Д. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если В не может выступать до того момента, пока не выступит А?

Ответ: $3\times 3!$.

34. Определить число всех плохих дней, если 12 дней шел дождь, 8 дней дул ветер, 4 дня было холодно, причем 5 дней были и дождливы и ветрены , 3 дня дождливы и холодны , 2 дня ветреных и холодных, 1 день дождливый, ветреный и холодный, а хороших дней не было за данный период.

Ответ: 15.

35. Сколько натуральных чисел в n-ой системе счисления можно записать k знаками?

Ответ: $(n-1)\times n^{k-1}$, так как имеем упорядоченные k-выборки с повторениями из n элементов множества $A=\{0,1,2,...,n-1\}$.

36. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного кода, составленного из 5 цифр и подбирающего его наудачу?

Ответ: $\overline{A}_{10}^{5}-1$, так как имеем упорядоченную 5-выборку с повторениями из 10-ти элементов, из них одна 5-выборка удачная, ограничений нет.

37. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

Ответ: 1800.

38. Сколько пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

Ответ: 5^5.

39. Сколькими способами можно сфотографировать 4 танкистов, 4 летчиков и 2 артиллеристов, поставив их в один ряд так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом?

Ответ: 6912.

40. Сколько различных слов получится в результате перестановки букв в слове а) "математика" , б) "комбинаторика"?

Ответ: $P(2{,}3{,}2{,}1{,}1{,}1)=151200$.

41. Сколько слов можно составить из 12 букв : четырех букв "а" , четырех букв "б", двух букв "в" и двух букв "г"?

Ответ: $P(4{,}4{,}2{,}2)=207900$.

42. Сколькими способами можно распределить n предметов среди k лиц?

Ответ: n^k

Решение: Перенумеруем все k предметов. Имеем упорядоченную k-выборку из множества $\{a_1,a_2,...,a_n\}$, так как всего n лиц, среди которых распределяются предметы.

43. Из цифр 1,2,3,4 составить неупорядоченные 2-выборки с повторениями. Сколько всего их? Перечислите.

Ответ: 10.

44. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры ,и гуси, и утки?

Ответ: 315.

45. Сколькими способами можно сервировать стол на четверых человек, если имеется 6 разных тарелок,8 разных вилок и 7 разных ножей?

46. Сколько существует всего двузначных чисел, составленных из цифр 0,1,2,...,9?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.
2. Леденева Т.М. Специальные главы математики. Дискретная математика: учеб. пособие / Т.М. Леденева. Воронеж: ВГТУ, 1997. – 130 с.
3. Собенина О.В. Дискретная математика: учеб. пособие / О.В. Собенина. Воронеж: ВГТУ, 2012. – 200 с.
4. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. СПб.: БХВ-Петербург. 2008. – 352 с.
5. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
6. Булгакова И.Н. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения. Часть 1: учеб. пособие / И.Н. Булгакова, Г.Ф. Федотенко. Воронеж: ВГУ, 2004. – 61 с.
7. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. СП.: Лань, 2005. - 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………..…..…1
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ………………………1
1.1. Основные положения теории множеств…………………..1
1.2. Операции над множествами и их свойства.
Диаграммы Эйлера-Венна……………………………………6
1.3. Мощность множества……………………………………11
1.4. Взаимно однозначное соответствие между множествами…13
1.5. Счетные и несчетные множества……...……………………13
2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ……………………17
2.1. Бинарные отношения. Свойства отношений……………17
2.2. Отношение эквивалентности и разбиения ………………21
2.3. Отношения порядка. Диаграмма Хассе …………………25
3. КОМБИНАТОРИКА………………………………………….28
4.РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ……………………………………………33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……..,………………..…………………….…47
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…………..……….…....47

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации самостоятельной работы по курсу «Математика» для студентов специальностей 220400 «Управление и информатика в технических системах», 221000 «Мехатроника и робототехника», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110800 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения
Часть 1

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Федотенко Галина Федоровна

В авторской редакции

Подписано к изданию 31.10. 2014.
Уч.-изд. л. 2,9. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14