ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

576-2015

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ № 3-4 по дисциплине
«Компьютерные технологии в науке и образовании»
для студентов направления магистерской подготовки
11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств»
очной формы обучения

Воронеж 2015

Составитель д-р техн. наук М.А. Ромащенко

УДК 621

Методические указания к выполнению лабораторных работ № 3-4 по дисциплине «Компьютерные технологии в науке и образовании» для студентов направления магистерской подготовки 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. М.А. Ромащенко. Воронеж, 2015. 16 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ № 3-4 по дисциплине «Компьютерные технологии в науке и образовании» магистрами направления 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств» очной формы обучения. Содержат основные требования к содержанию и оформлению отчета, а также варианты заданий.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2007 и содержатся в файле КТвНиО_ЛР3-4.pdf

Табл. 9.

Рецензент д-р техн. наук, проф. О.Ю. Макаров

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р техн. наук, проф. А.В. Муратов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: получить представление об интерполировании функций в системе Mathcad с помощью различных способов.

Время работы: 4 часа.

1.1. Задания для самостоятельного изучения и методические указания по их выполнению

Задание 1 – вспомнить основные способы интерполирования функций.

Пусть функция f(x) задана таблично, либо вычисление ее требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию f (x) на какую-либо функцию F(x) , так, чтобы отклонение f (x) от F(x) было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции f (x) , а функция F(x) – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требование строгого совпадения значений f(x) и F(x) в точках x_i (i = 0, 1, 2,...n), т. е.

$$F\left(x_0\right)=y_0,\ F\left(x_1\right)=y_1,\ \ldots,\ F\left(x_n\right)=y_n \tag{1.1}$$

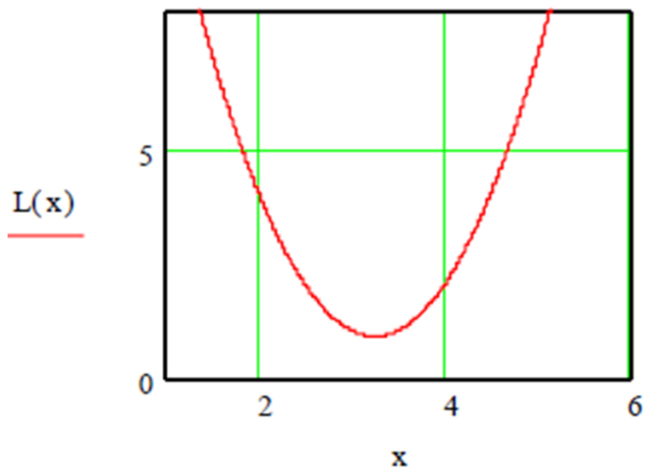
В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – узлами интерполяции.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента x . В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i\ \left(i = 0,\ 1,\ 2,\ ...\right)$является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисление по этим формулам) заметно упрощается.

Задание 2 – ознакомиться с примерной последовательностью действий в системе Mathcad для выполнения лабораторных заданий.

$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{y0\cdot(x-x1)\cdot((x-x2))}{(x0-x1)\cdot(x0-x2)} + \frac{y1\cdot(x-x0)\cdot((x-x2))}{(x1-x0)\cdot(x1-x2)} + \frac{y2\cdot(x-x0)\cdot((x-x1))}{(x2-x0)\cdot(x2-x1)}\right]$$



$x0 := 2 \quad x1 := 3 \quad x2 := 5 \quad y0 := 4 \quad y1 := 1 \quad y2 := 7$

$$L(x) := \left[\frac{4\cdot(x-3)\cdot((x-5))}{(2-3)\cdot(2-5)} + \frac{1\cdot(x-2)\cdot((x-5))}{(3-2)\cdot(3-5)} + \frac{7\cdot(x-2)\cdot((x-3))}{(5-2)\cdot(5-3)}\right]$$

$$2\cdot x^2 - 13\cdot x + 22$$

1.2. Лабораторные задания

Задание 1 – По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа (1.2) и построить график $L_2(x)$. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 1.

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad (1.2)$$

Таблица 1 - Варианты индивидуальных заданий

Вариант	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
1	2	3	5	4	1	7
2	4	2	3	5	2	8
3	0	2	3	-1	-4	2

4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	2	4	7	-1	-6	3

Задание 2 – Вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента (а) с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа (1.3) и оценить погрешность интерполяции. Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 2, 3 или 4.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (1.3)$$

Для погрешности $R_n(x)$ выполняется неравенство

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod\nolimits_{n+1}(x)\right|, \quad x \in [x_0, x_n] \qquad (1.4)$$

где $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Таблица 2 - Варианты индивидуальных заданий

Вариант	значение а	доп. таблица
1	-2	3
2	3,77	4
3	0,55	3
4	4,83	4
5	3,5	3
6	5,1	4
7	1,75	3
8	4,2	4
9	-1,55	3
10	6,76	4

Таблица 3 - Варианты индивидуальных заданий

x	-3,2	-0,8	0,4	2,8	4,0	6,4	7,6
$f(x) = 2{,}1\sin(0{,}37x)$	-1,94	-0,61	0,31	1,81	2,09	1,47	0,68

Таблица 4 - Варианты индивидуальных заданий

x	1,3	2,1	3,7	4,5	6,1	7,7	8,5
$f(x) = \lg(x)/x + x^2$	1,777	4,563	13,84	20,39	37,34	59,41	72,4

Задание 3 – Уплотнить часть таблицы заданной на отрезке [a,b] функции, используя интерполяционный многочлен Ньютона (1.5) и оценить погрешность интерполяции D (1.6). Таблицу 8 конечных разностей просчитать вручную на отрезке [a,b] с шагом h . Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 5, 6 или 7.

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \qquad (1.5)$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

$$D \approx \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f'''(\xi) \qquad (1.6)$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i\left(i = \overline{0,n}\right)$ и x.

Формула (1.5) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Если вычисляемое значение переменной ближе к концу отрезка [a;b], то применяют вторую формулу Ньютона – интерполирование назад

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \qquad (1.7)$$

где $t = \dfrac{x - x_n}{h}$.

$$D \approx \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} f'''(\xi)$$

Таблица 5 - Варианты индивидуальных заданий

Вариант	a	b	h_0	h	доп. таблица
1	0,65	0,80	0,05	0,01	
2	0,25	0,40	0,05	0,025	
3	0,75	0,90	0,05	0,01	
4	0,70	0,85	0,05	0,025	
5	0,80	0,95	0,05	0,025	
6	0,10	0,25	0,05	0,025	
7	0,15	0,30	0,05	0,025	

8	0,70	0,85	0,05	0,025	
9	0,20	0,35	0,05	0,01	
10	0,80	0,95	0,05	0,01	

Таблица 6 - Варианты индивидуальных заданий

x	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)=\cos(x)$	0,995	0,988	0,980	0,969	0,955	0,939	0,921

Таблица 7 - Варианты индивидуальных заданий

x	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
$f(x)=\sin(x)$	0,605	0,644	0,681	0,71	0,75	0,783	0,813

Таблица 8 – Таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x_2 = x_1 + h$	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_2 + h$	y_3			

1.3. Контрольные вопросы для отчета работы

1. В чем особенность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?
2. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?
3. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
4. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?
5. В чем особенности этих двух способов интерполяции?
6. Как производится оценка погрешности метода интерполяции многочленом Лагранжа?
7. Как используется метод интерполирования для уточнения таблиц функций?
8. В чем отличие между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона?

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: получить представление о численном интегрировании в системе Mathcad с помощью различных способов.

Время работы: 4 часов.

2.1. Домашние задания и методические указания по их выполнению

Задание 1 – вспомнить основные способы численного интегрирования.

Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция f(x) заменяется на отрезке [a,b] интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа $L_n(x)$; для интеграла имеем приближенное равенство (2.1). Предполагается, что отрезок [a,b] разбит на n частей точками (узлами) x_i, наличие которых подразумевается при построении многочлена $L_n(x)$. Для равноотстоящих узлов $x_i = x_0 + ih,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_0 = a,\ x_n = b$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \qquad (2.1)$$

При определенных допущениях получаем формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (2.2)$$

где y_i – значения функции в узлах интерполяции.

Имеем следующую оценку погрешности метода интегрирования по формуле трапеций (2.2)

$$|R_n| \le M\frac{|b-a|\cdot h^2}{12},\ \text{где } M = \max\left|f^{(2)}(x)\right|,\ x\in[a,b] \qquad (2.3)$$

Во многих случаях более точной оказывается формула Симпсона (формула парабол)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \ldots + 2y_{2m-1}\right) \qquad (2.4)$$

Для формулы Симпсона имеем следующую оценку погрешности

$$|R_n| \le M\frac{|b-a|\cdot h^4}{180},\ \text{где } M=\max\left|f^{(4)}(x)\right|,\ x\in[a,b].$$

Задание 2 – освоить символьное решение систем уравнений в системе Mathcad.

Вычислить интеграл от заданной функции на отрезке [a,b] по формуле трапеций и прямым способом/ Ниже приведен фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями.

$$a := 0 \qquad b := 1 \qquad n := 10 \qquad h := \frac{(b-a)}{n}$$

$$i := 0\,..\,10 \qquad x_0 := a \qquad x_i := x_0 + i\cdot h$$

$$y := 0.37\cdot e^{\sin(x)}$$

$$s := h\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0+y_n}{2}\right)$$

$$s = 0.604$$

$$\int_0^1 0.37\, e^{\sin(x)}\,dx = 0.604$$

2.2. Лабораторные задания

Задание 1 – Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке [a,b] по формуле трапеций с шагом h=0,1и h=0,05. Сравнить результаты. Оценить точность по формуле (2.3). Сравнить результаты. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 9.

Таблица 9 - Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Функция	*a*	*b*
1	$0,37e^{\sin x}$	0	1
2	$0,5x + x\ln x$	1	2

3	$(x+1,9)\sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x}\ln(x+2)$	2	3
5	$\frac{3\cos x}{2x+1,7}$	0	1
6	$(2x+0,6)\cos(x/2)$	1	2
7	$2,6x^2\ln x$	1,2	2,2
8	$(x^2+1)\sin(x-0,5)$	1	2
9	$x^2\cos(x/4)$	2	3
10	$\frac{\sin(0,2x-3)}{x^2+1}$	3	4

Задание 2 – Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке [a,b] по формуле Симпсона методом повторного счета с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 9.

2.3. Контрольные вопросы для отчета работы

1. Каковы преимущества формулы парабол по сравнению с формулой трапеций и следствием чего являются эти преимущества?
2. Верны ли формулы (1.2), (1.4) для неравноотстоящих узлов?
3. В каких случаях приближенные формулы трапеций и парабол оказываются точными?
4. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?
5. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?

СОДЕРЖАНИЕ

1. Лабораторная работа № 3 1
2. Лабораторная работа № 4 6

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ № 3-4 по дисциплине
"Компьютерные технологии в науке и образовании"
для студентов направления магистерской подготовки
11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств»
очной формы обучения

Составитель
Ромащенко Михаил Александрович

В авторской редакции

Подписано к изданию 30.09.2015.
Уч.-изд. л. 0,8.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14