

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра управления

Модели и механизмы стимулирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к конспекту лекций по дисциплине «Модели и механизмы стимулирования»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.04.02
«Менеджмент» всех форм обучения, профилей и специализаций

Воронеж 2020

УДК 657 (075.8)
ББК 65.052.9(2)2я7

Составители:

д-р техн. наук, проф. С. А. Баркалов
д-р техн. наук, проф. П. Курочка

Методические указания к конспекту лекций по дисциплине «Модели и механизмы стимулирования» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.04.02 «Менеджмент» (магистры) всех форм обучения, профилей и специализаций / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. С. А. Баркалов, П. Н. Курочка. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2020. 32 с.

Основной целью методических указаний является дать возможность студентам при изучении дисциплины «Модели и механизмы стимулирования» опираться на краткий конспект лекций в котором изложены ключевые понятия курса. Изучаемый материал хорошо структурирован по разделам и темам. В конце каждой темы приводится перечень вопросов для самоконтроля. Предназначены для подготовки студентов к практическим занятиям и сдачи экзамена или зачета по итогам изучения дисциплины «Модели и механизмы стимулирования». Методические указания могут быть также использованы как краткое справочное пособие по вопросам стимулирования персонала организации. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.04.02 «Менеджмент» всех форм обучения, профилей и специализаций.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле . pdf.

Рис. 12. Библиогр.: 3 назв.

УДК 657 (075.8)
ББК 65.052.9(2)2я7

Рецензент – В. П. Морозов, д-р техн. наук, доц.
кафедры управления ВГТУ

Издается по решению учебно-методического совета

Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения дисциплины «Модели и механизмы стимулирования»:

- овладение студентами статистической методологией и ее применение при всестороннем исследовании социально-экономических процессов, протекающих в организациях, на предприятиях, фирмах и в отраслях национальной экономики;

- овладение совокупностью математических методов, используемых для количественной оценки экономических явлений и процессов; обучение построению экономико-математических моделей, параметры которых оцениваются средствами статистики;

- обучение эмпирическому выводу экономических законов; подготовку к прикладным исследованиям в области экономики.

Задачами дисциплины «Модели и механизмы стимулирования» являются:

- получение студентами знаний и навыков формирования статистической информации, ее использования для получения обоснованной системы показателей, с помощью которых выявляются имеющиеся резервы роста эффективности производства и прогноз тенденций его развития;

- научить студентов использовать данные наблюдения для построения количественных зависимостей для экономических соотношений, для выявления связей, закономерностей и тенденций развития экономических явлений;

- выработать у студентов умение формировать экономические модели, основываясь на экономической теории или на эмпирических данных, оценивать неизвестные параметры в этих моделях, делать прогнозы и оценивать их точность, давать рекомендации по экономической политике и хозяйственной деятельности.

Результатом освоения дисциплины является освоение следующих компетенций по направлениям подготовки:

38.04.02 Менеджмент:

ПК-1 - способностью управлять организациями, подразделениями, группами (командами) сотрудников, проектами и сетями;

ПК-5 - владением методами экономического и стратегического анализа поведения экономических агентов и рынков в глобальной среде.

Основными разделами изучаемой дисциплины: «Модели и механизмы стимулирования» являются:

Тема №1. «Задачи согласования интересов участников организационных систем»

Тема №2. «Базовые модели стимулирования»

Тема №3. «Формы и системы индивидуальной заработной платы и их математические модели»

Тема №4. «Коллективное стимулирование за индивидуальные результаты»

Тема №5. ««Бригадные» формы оплаты труда»

Тема №6. «Ранговые системы стимулирования»

Методические рекомендации при изучении курса «Модели и механизмы стимулирования»

Место в процессе изучения курса «Модели и механизмы стимулирования» большое значение имеет самостоятельная работа студента. Это особенно видно при знакомстве с учебным планом, согласно которому более половины времени, отводимое на изучение предмета, должно приходиться на самостоятельную работу студентов вне стен учебного заведения. Таким образом, весь спектр занятий, предусмотренный учебным планом, студент должен осуществлять не только на занятиях согласно расписанию, но также и самостоятельно. Следовательно, прослушав лекцию, студент должен, придя домой, разобрать конспект лекции, почитать то, что на тему, рассмотренную на лекции, написано в рекомендованном учебнике или пособии и ответить на контрольные вопросы.

При подготовке к практическому или лабораторному занятию студент должен повторить лекционный материал, разобрать примеры, приведенные в учебном пособии и решить то, что было задано на практическом или лабораторном занятии.

Использование методических указаний предполагает, что студент изучил лекционный материал и, если у него возникли вопросы, то можно просмотреть рекомендации, содержащиеся в данных методических указаниях по конкретной теме. Методические указания ни в коем случае не должны заменять материал лекционных, практических и лабораторных занятий.

В данном случае совершенно справедливо утверждение о том, что если преподаватель привел своих студентов на берег реки знаний, то это не означает, что он сможет заставить их что-то из этой реки зачерпнуть. Необходима воля и труд, самих обучающихся. Таким образом, учеба является достаточно тяжелым и напряженным трудом, сопряженным со значительными затратами времени и ограничиться только посещением занятий совершенно недостаточно.

Тема №1 «Задачи согласования интересов участников организационных систем»

Модель организационной системы

Рассмотрим организационную систему (ОС), состоящую из одного управляющего органа - центра - на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта - активного элемента на нижнем уровне.

В рамках модели участники организационной системы, то есть Центр и активный элемент или агент, обладают свойством активности – способностью самостоятельного выбора действий (стратегий).

Механизмом функционирования организационной системы называется совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие

участников системы. Механизмом стимулирования называется правило принятия решений центром относительно стимулирования активного элемента. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая определяется функцией стимулирования, задающей зависимость вознаграждения активного элемента от выбираемых им действий.

Предположения, о свойствах функций, описывающих задачу стимулирования

А.1. Множество возможных действий активного элемента A составляет положительную полуось. Отказу исполнителя от участия в рассматриваемом проекте (бездействию) соответствует нулевое действие ($y = 0$).

А.2. Функция затрат активного элемента не убывает.

А.3. Функция дохода центра $H(y)$ непрерывна, принимает неотрицательные значения и доход центра достигает максимума при ненулевых действиях активного элемента.

А.4. Вознаграждение, выплачиваемое Центром активному элементу, неотрицательно: $\sigma(y) \geq 0$.

Гипотезы о поведении участников организационной системы

Рациональное поведение участника организационной системы заключается в максимизации (выбором собственной стратегии) его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации.

Свойство активности – все участники организационной системы осознают свои интересы и действуют согласно им.

Гипотеза благожелательности – если исполнитель безразличен между выбором нескольких действий, то он выбирает из этих действий то действие, которое наиболее благоприятно для Центра.

В целях определения режима функционирования организационной системы необходимо определить информированность игроков и порядок функционирования системы.

Информированность игроков формируется в предположении, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам организационной системы известны все целевые функции и все допустимые множества.

Порядок функционирования системы определяется спецификой задачи стимулирования в которой фиксирован порядок ходов в рассматриваемой игре. Центр-метаигрок – обладает правом первого хода, сообщая активному элементу выбранную им функцию стимулирования, после чего при известной стратегии Центра активный элемент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Стратегией активного элемента является выбор действия, принадлежащего множеству допустимых действий активного элемента $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых действий A . Содержательно, действием активного элемента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной

продукции и т.д. Множество допустимых действий представляет собой набор альтернатив, из которых активный элемент производит свой выбор, например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства и т.д.

Стратегией Центра является выбор функции стимулирования $\sigma(y)$, принадлежащей допустимому множеству и ставящей в соответствие действию активного элемента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром.

Выбор допустимого действия y требует от активного элемента затрат $c(y)$ и приносит Центру доход $H(y)$. Интересы участников организационной системы (Центра и активного элемента) выражаются их целевыми функциями, которые обозначим, соответственно: $F(y)$ и $f(y)$ (функциями выигрыша, полезности и т.д., в записи которых зависимость от стратегии Центра будет опускаться), представляющими собой: для активного элемента – разность между стимулированием и затратами, то есть выражаться формулой вида

$$f(y) = \sigma(y) - c(y),$$

а для Центра целевая функция может быть записана в двух видах, что и порождает два типа задач:

- в качестве целевой функции Центра выбирается величина дохода от деятельности активного элемента; в этом случае имеем *задачу стимулирования первого рода*, и целевая функция Центра запишется в виде

$$\Phi(y) = H(y),$$

- либо разность между доходом от действий активного элемента и затратами Центра на его стимулирование, то есть вознаграждением, выплачиваемым исполнителю. В этом случае получаем *задачу стимулирования второго рода* или детерминированную задачу теории контрактов):

$$\Phi_2(y) = H(y) - \sigma(y).$$

Основная идея стимулирования заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, Центр может побуждать активный элемент выбирать те или иные действия, выгодные Центру.

При этом возникает две задачи:

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность.

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие, или в более общем случае – заданное множество действий.

Минимальные затраты на стимулирование

Предположение. Если одно и то же действие может быть реализовано несколькими системами стимулирования, то, очевидно, что большей эффективностью обладает та из них, которая характеризуется меньшими затратами на стимулирование.

Решение. Оптимальным является класс систем стимулирования, реализующий любое действие активного элемента с минимальными затратами центра на стимулирование.

Обоснование решения задач первого рода

Для этих задач критерием сравнения эффективностей систем стимулирования служат максимальные множества реализуемых ими действий. Для всех задачи стимулирования критерием сравнения эффективности служат минимальные затраты Центра на стимулирование активных элементов.

Системы стимулирования, характеризующиеся меньшими затратами на стимулирование, реализуют большие множества действий, что доказывает справедливость утверждения для задач первого рода

Представим графически возможное решение задачи стимулирования второго рода.

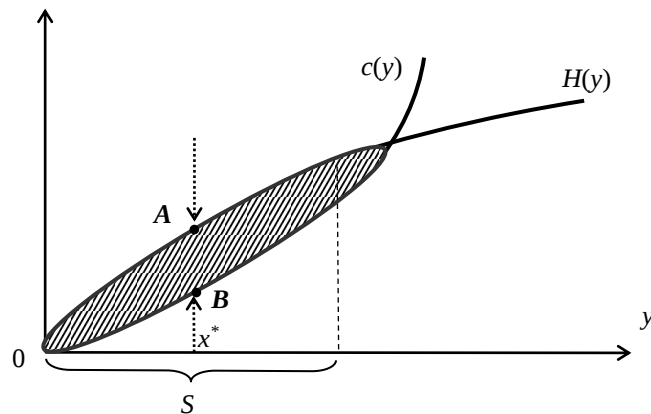


Рис. 1. Графическое решение задачи стимулирования второго рода

На рис. 1 изображены графики функций: дохода от действий активного элемента – $H(y)$ и затрат активного элемента на реализацию выбранного действия – $c(y)$. С точки зрения Центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности активного элемента (так как, отказавшись от взаимодействия с ним, Центр всегда может получить нулевую полезность).

Обоснование решения задач второго рода

Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции $H(y)$. С точки зрения активного элемента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую активный элемент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции $c(y)$.

Множество действий активного элемента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования и индивидуальной рациональности, как для Центра, так и для активного элемента), – «область компромисса» заштрихована на рис. 1 Множество действий активного элемента, при которых область компромисса не пуста, называется множеством согласованных планов.

Так как Центр стремится минимизировать выплаты активному элементу при условии, что последний выбирает требуемое действие, то оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть стимулирование в точности должно равняться затратам активного элемента. Этот важный вывод получил название «*принцип компенсации затрат*».

Принцип компенсации затрат: стимулирование в точности должно равняться затратам активного элемента.

В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить активный элемент выбрать определенное действие, Центру достаточно компенсировать затраты активного элемента.

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также мотивирующую надбавку $\delta > 0$.

Таким образом, для того чтобы активный элемент выбрал действие, выгодное Центру

$$x \in A,$$

стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

$$\sigma(x) = c(x) + \delta.$$

Вывод

В том случае если в случае выбора активным элементом других действий (отличных от x) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия *согласованности стимулирования*, так и условие *индивидуальной рациональности активного элемента*.

При этом такое стимулирование со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, решением задачи стимулирования будет являться следующая система стимулирования, получившая название компенсаторной (К-типа):

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

Параметр $x \in A$, фигурирующий в компенсаторной системе стимулирования, в теории управления называется планом – желательным с точки зрения Центра действием активного элемента.

План является согласованным, если его выполнение (выбор действия, совпадающего с планом) выгодно активному элементу, то есть принадлежит множеству реализуемых действий (тех действий, на которых достигается максимум целевой функции активного элемента).

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать Центру, то есть каково оптимальное значение согласованного плана $x \in S$.

Так как стимулирование равно затратам активного элемента, то оптимальным реализуемым действием x^* является действие, максимизирующее на

множестве S разность между доходом Центра и затратами активного элемента. Следовательно, оптимальный согласованный план может быть найден из решения следующей стандартной оптимизационной задачи:

$$x^* = \arg \max \{H(x) - c(x)\},$$

где операция $\max$ берется по всему множеству согласованных планов S .

Данная задача получила название *задачи оптимального согласованного планирования*.

Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия

Действительно, то действие, которое Центр собирается побуждать выбирать активный элемент, может интерпретироваться как план – желательное с точки зрения Центра действие активного элемента. В силу принципа компенсации затрат план является согласованным, то есть выполнение этого плана будет также выгодно и активному элементу, значит Центру остается найти решение стандартной оптимизационной задачи.

Условие оптимальности плана x^* в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат активного элемента) имеет вид:

$$\frac{dH(x^*)}{dy} = \frac{dc(x^*)}{dy}$$

Величина $\frac{dH(x^*)}{dy}$ в экономике называется предельной производительностью (MRP – marginal rate of production), а величина $\frac{dc(x^*)}{dy}$ – предельными за-

тратами (MC – marginal costs). Условие оптимума (MRP = MC) определяет действие x^* и так называемую эффективную заработную плату $c(x^*)$.

Оптимальный согласованный план x^* максимизирует разность между доходом Центра и затратами активного элемента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций

$$\begin{aligned} f(y) &= \sigma(y) - c(y) \\ \Phi(y) &= H(y) - \sigma(y) \end{aligned}$$

участников организационной системы, и, следовательно, является эффективным по Парето.

План эффективный по Парето – это такой план, что не существует другого плана, при выполнении активным элементом которого, все участники организационной системы (и Центр, и активный элемент) получают не меньший выигрыш, а кто-то из них – строго больший.

Наличие области компромисса свидетельствует о том, что Центр и активный элемент имеют некую базу для прихода к взаимовыгодному соглашению, то есть к компромиссу.

Фактически компромисс между Центром и активным элементом заключается в дележе полезности Δ , равной разности полезностей в точках A и B на рис.

И в данном случае очень важен тот момент, кто же делает первый ход.

Делая первый ход (предлагая контракт), центр «забирает» эту разность себе, вынуждая активного элемента согласиться с резервным значением полезности. Легко проверить, что в противоположной ситуации, когда первый ход делает активный элемент, предлагая контракт центру, нулевую полезность получает центр, а активный элемент «забирает» разность Δ между полезностями в точках A и B себе. Возможны и промежуточные варианты, когда принцип дележа прибыли Δ между Центром и активным элементом оговаривается заранее в соответствии с некоторым *механизмом компромисса*.

Таким образом, решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа.

На первом этапе решается задача согласования – определяется множество реализуемых при заданных ограничениях действий – множество согласованных планов.

На втором этапе решается задача оптимального согласованного планирования – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите простейшую модель организационной системы, которую используем для моделирования процессов стимулирования
2. Что называется механизмом функционирования организационной системы
3. Что называется механизмом стимулирования
4. Какие приняты предположения, о свойствах функций, описывающих задачу стимулирования
5. Как понимать гипотезу о рациональном поведении участника организационной системы
6. Что такое свойство активности участников организационной системы
7. Что такое гипотеза благожелательности, принимаемая в задачах стимулирования
8. Что такое информированность игроков
9. Что понимается под термином игрок
10. Что такое порядок функционирования системы
11. Что является стратегией Центра и стратегией активного элемента
12. В чем заключается основная идея стимулирования

13. Сформулируйте прямую задачу синтеза оптимальной системы стимулирования
14. Сформулируйте обратную задачу синтеза оптимальной системы стимулирования
15. Какая система стимулирования обладает большей эффективностью
16. В чем заключается принцип компенсации затрат
17. Запишите целевую функцию Центра и активного элемента в задачах стимулирования
18. Схематично нарисуйте область компромисса Центра и активного элемента

Тема №2 «Базовые механизмы стимулирования»

Рассмотрим базовые системы стимулирования. При описании систем стимулирования ее критерием эффективности является эффективность.

Эффективность систем стимулирования – это значение целевой функции Центра на множестве действий активного элемента, реализуемых данной системой стимулирования. То есть

$$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y).$$

В демонстрационных целях будем рассматривать условный пример – модель стимулирования в одноэлементной детерминированной организационной системе.

При этом в этой системе, приводимой для примера, предусмотрено задание функции дохода Центра и активного элемента в следующем виде:

- доход Центра принимается равным:

$$H(y) = by, \quad b > 0,$$

- функция затрат активного элемента равна:

$$c(y) = ay^2, \quad a > 0.$$

Если не оговорено особо, будем считать выполненными предположения **A.1, A.2, A.3 и A.4.**

Так как в определении эффективности системы стимулирования максимум вычисляется по множеству реализуемых действий, то чем шире это множество, тем больше соответствующее максимальное значение. Следовательно, с расширением множества реализуемых действий увеличивается эффективность стимулирования.

Другими словами, если одна система стимулирования (точнее – класс систем стимулирования) имеет более широкое множество реализуемых действий, чем другая система стимулирования (другой класс систем стимулирования), то и эффективность первой системы стимулирования выше, чем второй. Следовательно, можно сделать следующий вывод:

Вывод

Максимальной эффективностью обладает класс систем стимулирования, имеющий максимальное множество реализуемых действий.

Согласно изложенным выше результатам, самой логичной является компенсаторная система стимулирования, которая характерна тем, что если активный элемент выбирает действие, отличное от заданного Центром, то он ничего не получает! Именно в этом случае стимулирование со стороны Центра является минимально возможным, а, следовательно, такая система стимулирования будет обладать наибольшей эффективностью. Таким образом, параметрическим (с параметром $x \in S$) решением задачи стимулирования будет являться компенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$$

которая называется *компенсаторной (K-типа)*, эскиз которой приведен на рис.2.

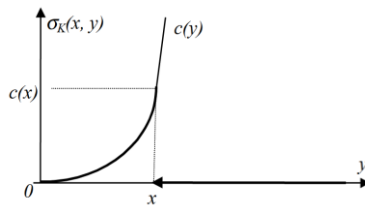


Рис. 2. Компенсаторная система стимулирования (K-типа)

Квазикомпенсаторная система стимулирования

QK-типа

Отличаются от компенсаторных тем, что вознаграждение выплачивается агенту только при точном выполнении плана, эскиз которой приведен на рис. 3.

$$\sigma_{QK}(x, y) = \begin{cases} c(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

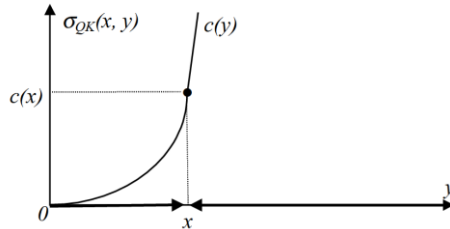


Рис. 3. Квазикомпенсаторная система стимулирования (QK-типа)

Квазикомпенсаторные системы стимулирования реализуют действия с минимальными затратами на стимулирование, поэтому они же являются оптимальными в задачах стимулирования второго рода.

Задача оптимального согласованного планирования в этом случае заключается в поиске реализуемого действия агента, максимизирующего разность между доходом центра и минимальными затратами на стимулирование (которые совпадают в рассматриваемой модели с затратами агента), то есть необходимо решить следующую задачу оптимизации

$$H(y) - \sigma(y) \rightarrow \max,$$

где операция максимум берется по всему множеству допустимых действий.

Содержательно, при использовании систем стимулирования *QK*-типа, как следует из их названия, Центр в точности компенсирует затраты агента при выборе определенного действия, не выплачивая никакого вознаграждения при выборе агентом других действий.

В этом случае квазикомпенсаторные системы стимулирования согласованы с условием индивидуальной рациональности: при их использовании полезность агента равна нулю как минимум в двух точках - при выборе реализуемого действия и нулевого действия, причем полезность агента нигде не принимает строго положительных значений.

Достоинством квазикомпенсаторных систем стимулирования является их простота и высокая эффективность,

Недостатком: неустойчивость относительно возможных возмущений параметров модели.

Действительно, если центр неточно знает функцию затрат активного элемента, то сколь угодно малая неточность может приводить к значительным изменениям реализуемых действий.

Скачкообразные системы стимулирования (С-типа)

Активный элемент получает постоянное вознаграждение (как правило, равное максимально возможному или заранее установленному значению) при условии, что выбранное им действие не меньше заданного, и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий

$$\sigma_C(x, y) = \begin{cases} C, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$$

Графически эскиз скачкообразной системы (С-типа) стимулирования представлен на рис. 4.

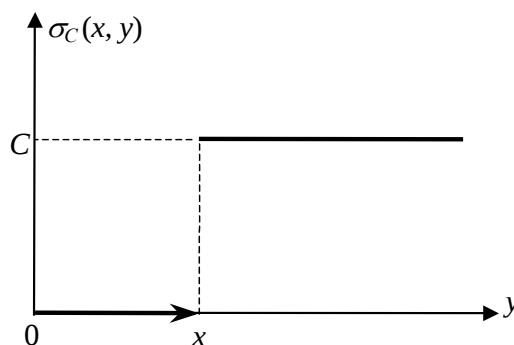


Рис. 4. Эскиз скачкообразной системы стимулирования

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как аккордные, соответствующие фиксированному вознаграждению C при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т. д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному окладу.

В том случае, когда ограничение C фиксировано, то при монотонной функции дохода центра оптимальным является реализация максимального действия $y^*(C)$. Учитывая особенности рассматриваемой системы стимулирования следует сказать, что величина такого действия активного элемента будет определяться из условия, что величина затрат, понесенных активным элементом на реализацию такого действия должна быть равна величине ограничения, то есть C . Таким образом получаем соотношение вида

$$c(y^*) = \sigma(y^*),$$

Подставляя заданные значения получаем

$$ay^{*2} = C$$

Отсюда находим требуемое значений

$$y^* = \sqrt{C/a}.$$

График изменения целевой функции активного элемента в зависимости от принятого активным элементом действия при использовании Центром скачкообразной системы стимулирования C -типа приведен на рис. 5.

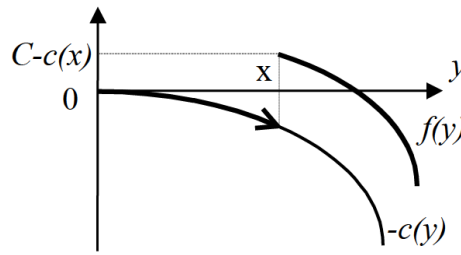


Рис. 5.

Квазискачкообразные системы стимулирования (QC-типа)

Отличаются от скачкообразных тем, что вознаграждение выплачивается активному элементу только при точном выполнении плана

$$\sigma_{QC}(x, y) = \begin{cases} C, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

Следует отметить, что системы стимулирования QC-типа являются достаточно экзотическими (особенно в условиях неопределенности непонятно, что понимать под точным выполнением плана) и редко используются на практике.

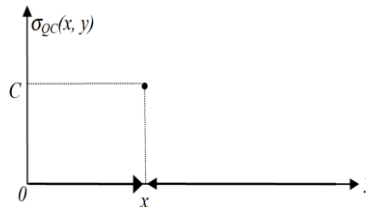


Рис. 6. Квазискачкообразная система стимулирования (QK-типа)

Отметим, что о скачкообразных и квазискачкообразных системах стимулирования имеет смысл говорить в рамках предположения А.3, то есть функция

дохода центра $H(y)$ непрерывна, принимает неотрицательные значения и доход Центра достигает максимума при ненулевых действиях активного элемента.

Если на абсолютную величину вознаграждения агента не наложено никаких ограничений, то необходимо доопределить, что понимать под величиной C , то есть амплитуда "скачка", также как и план, может являться переменной величиной, каковой мы и будем ее считать в системах стимулирования C -типа и QC -типа в рамках предположения А.3

Пропорциональные (линейные) системы стимулирования **(L-типа)**

На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование ставки оплаты единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т. д.

Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение активного элемента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т. д.), а ставка оплаты $\lambda \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности (рис. 7):

$$\sigma_L(y) = \lambda y.$$

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат активного элемента выбираемое им действие определяется из следующего выражения активного элемента:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y).$$

Для нахождения величины оптимального y^* действия активного элемента при использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования необходимо найти первую производную от целевой функции активного элемента и приравнять ее к нулю:

$$f_L(y) = \lambda y - c(y).$$

Отсюда получаем соотношение вида

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda - c'(y) = 0$$

Решая это уравнение относительно неизвестно y находим оптимальное значение

$$y^* = c'^{-1}(\lambda),$$

где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат активного элемента.

Эскиз рассматриваемой системы стимулирования приведен на рис. 7.

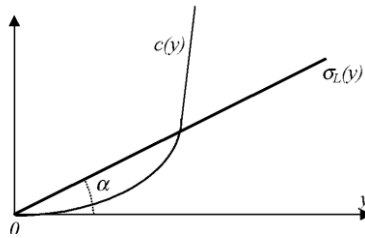


Рис.7. График пропорциональной системы стимулирования L -типа

При этом затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые, то есть равные компенсируемым затратам активного элемента $c(y^*)$ на следующую величину:

$$\Delta\sigma(y) = \lambda y - c(y^*)$$

или, подставляя найденную величину λ

$$c'(y) = \lambda$$

получаем

$$\Delta\sigma(y) = y^*c'(y^*) - c(y^*).$$

Например, если центр имеет функцию дохода

$$H(y) = by, \quad b > 0,$$

а функция затрат агента выпукла и равна:

$$c(y) = ay^2, \quad a > 0,$$

то, находя производную от функции затрат активного элемента

$$c'(y^*) = 2ay^*$$

и подставляя эти значения в выражения для $\Delta\sigma(y)$, получаем

$$\Delta\sigma(y) = 2ay^{*2} - ay^{*2}.$$

Вывод

Таким образом, при любом реализуемом действии активного элемента Центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (D-типа)

Эта система стимулирования основана на идее дележе дохода, получаемого Центром. Поэтому возможно осуществлять стимулирование активного элемента на величине дохода Центра. Для этой цели положить вознаграждение активного элемента равным определенной (например, постоянной) доле дохода Центра. То есть величина функции стимулирования будет определяться в виде

$$\sigma_D = \xi \cdot H(y),$$

где $\xi \in [0; 1]$

На сегодняшний день формальные модели с переменной долей $\xi(y)$, к сожалению, не исследованы.

Системы стимулирования C , K , L и D -типа являются параметрическими:

– для определения конкретной скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (ξ, C) ;

- конкретная компенсаторная система стимулирования однозначно определяется функцией затрат агента (и, быть может, планом x);
- для определения конкретной пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты a ;
- для определения конкретной системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив ξ .

Степенные системы стимулирования

Данные системы стимулирования представляют собой достаточно искусственную конструкцию, когда вознаграждение агента пропорционально его затратам в определенной степени:

$$\sigma_B(y) = \alpha c^\beta(y), \beta \in (0; 1].$$

Использование степенных систем стимулирования оказывается эффективным в многоэлементных организационных системах с неопределенностью.

По аналогии с тем как это делалось для скачкообразных и компенсаторных систем стимулирования, можно ввести квазилинейные системы стимулирования (QL -типа), при использовании которых агент получает вознаграждение, пропорциональное плану, в случае его выполнения, и нулевое вознаграждение во всех остальных случаях.

Аналогично определяются системы стимулирования QD -типа, которые можно назвать квазиперераспределительные системы.

Операции над базовыми системами стимулирования

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы "конструктора", используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования.

Для возможности такого "конструирования" необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования.

Для одноэлементных детерминированных организационных систем достаточно ограничиться операциями следующих трех типов.

Первый тип операции

Переход к соответствующей "квази"-системе стимулирования. То есть вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом.

В детерминированных организационных системах такая операция будет находиться в рамках гипотезы благожелательности и практически не изменяет свойств системы стимулирования.

Второй тип операции

Состоит в разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах.

Такие системы стимулирования называются составными и обозначаются последовательной записью обозначений ее компонент

Пример применения операции второго типа

Центр зафиксировал два плана: x_1 и x_2 причем для определенности принимается, что $(x_1 \leq x_2)$.

Используется следующая составная система стимулирования:

- 1) S -типа со скачком в точке x_1 в том случае, когда активный элемент, выбирает действия меньше x_2 ,
- 2) пропорциональная система стимулирования при действиях активного элемента, превышающих план x_2 .

Эскиз получающейся при этом системы стимулирования CL -типа приведен на рис. 8.

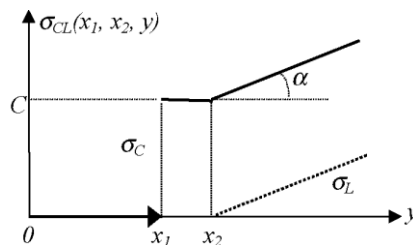


Рис. 8. Эскиз составной системы стимулирования CL -типа

Третий тип операции

Представляет собой алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно).

Результат применения операции третьего типа будем называть суммарной системой стимулирования и обозначать "суммой" исходных систем стимулирования.

Эскиз системы стимулирования $S+L$ -типа, получающейся в результате применения операции третьего типа к системам стимулирования S -типа и L -типа, изображен на рис. 9 ниже.

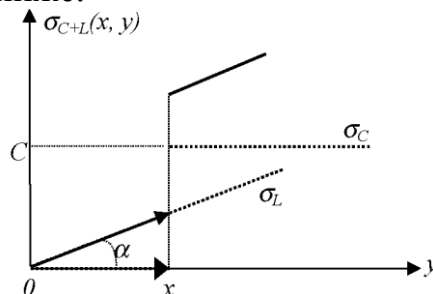


Рис. 9. Эскиз системы стимулирования $S+L$ -типа

Получающиеся в результате последовательного применения конечное число раз операций первого, второго или третьего типа к системам S -типа, или K -типа, или L -типа или D -типа (которые мы назовем основными), а также к результатам предшествующих их применений, назовем производными от исходных.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется эффективность системы стимулирования

2. Дайте определение компенсаторной системе стимулирования
3. Дайте определение квазикомпенсаторной системе стимулирования
4. Дайте определение скачкообразной системе стимулирования
5. Дайте определение квазискачкообразной системе стимулирования
6. Дайте определение линейной системе стимулирования
7. Дайте определение системе стимулирования, основанные на перераспределении дохода
8. Что понимается под степенными системами стимулирования
9. Какая из базовых систем стимулирования является наиболее эффективной
10. Какие операции над базовыми системами стимулирования можно выполнять
11. Дайте определение линейной системе стимулирования
12. Дайте определение системе стимулирования, основанные на перераспределении дохода
13. Что понимается под степенными системами стимулирования
14. Приведите эскиз квазикомпенсаторной системы стимулирования.
15. Приведите эскиз квазискачкообразной системы стимулирования

Тема № 3 «Формы и системы индивидуальной заработной платы и их математические модели»

Системой оплаты труда называется способ определения размеров вознаграждения в зависимости от затрат, результатов труда и т.д.

Формы индивидуальной заработной платы

- тарифная, вознаграждение активного элемента не связано явным образом с количественными показателями его деятельности, а определяется ее содержанием, квалификационными требованиями и прочими нормативами;

Для оплаты труда руководителей и специалистов может использоваться окладно-премиальная система оплаты, в которой индивидуальное вознаграждение складывается из оклада (тарифная система) и премии, определяющей по результатам деятельности организации, подразделения и т.д.

Разновидностью тарифной формы оплаты также являются так называемые плавающие оклады, при использовании которых показатели тарифной системы на каждый период рассчитываются с учетом результатов деятельности в предыдущих периодах:

- повременная, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от отработанного времени с учетом квалификации и качества труда;
- сдельная, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от количества произведенной продукции;
- участие в доходе (участие в прибылях, выплаты бонуса), например - приобретение акций компании (опционы);

- премии - дополнительное по сравнению с заработной платой вознаграждение, выплачиваемое в определенных случаях.

Повременная форма заработной платы может реализовываться в виде следующих систем оплаты:

- простая повременная;
- повременно-премиальная.

Сдельная форма заработной платы (иногда ее называют поштучной) может реализовываться в виде следующих систем оплаты:

- прямая сдельная;
- сдельно-премиальная;
- сдельно-прогрессивная;
- косвенно-сдельная;
- аккордная.

Простая повременная система оплаты

Соответствует использованию фиксированных (постоянных, то есть не зависящих от каких-либо показателей деятельности активного элемента) ставок оплаты за единицу времени.

Если под действием агента понимать отработанное время, то данной системе оплаты соответствует система стимулирования L -типа.

При использовании повременно-премиальной системы оплаты к сумме заработка по тарифу (при условии выполнения и/или перевыполнения нормативов, например – плана x) добавляется премия (обозначим ее ставку $\Delta\alpha$), измеренная, например, в процентах к тарифной ставке.

Данной системе оплаты соответствует система стимулирования LL -типа (см. рис. 10).

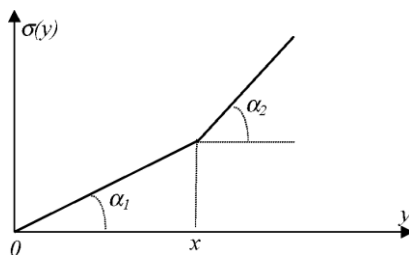


Рис. 10. Эскиз повременно-премиальной системы оплаты труда LL -типа
(норматив – x ; $\alpha_2 = (1 + \Delta\alpha)\alpha_1$ или $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$)

Повременная форма заработной платы используется для 70-80% американских рабочих, и для 60-70% рабочих в Западной Европе. В России по разным оценкам повременная форма оплаты используется для 20% рабочих, а по некоторым источникам приводится оценка – 40-60%.

Сдельно-премиальная система оплаты

В этом случае помимо базового тарифа, выплачивается премия, например, за перевыполнение нормативов и т.д. (см. рисунок). Следует отметить, что в литературе сдельно-премиальная и сдельно-прогрессивная системы оплаты не всегда разделяются достаточно четко, поэтому можно в общем случае считать,

что при перевыполнении нормативов используется повышенный тариф или ставка оплаты. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования $L+C$ -типа или в более общем случае, приведенном на рис. 11 ($\alpha_1 \leq \alpha_2$), система стимулирования $LL+C$ -типа.

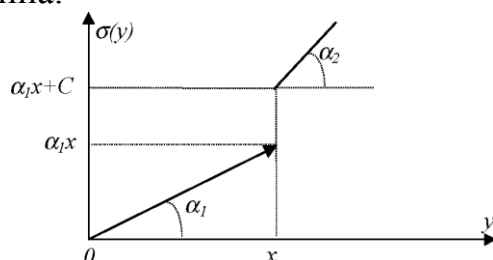


Рис.11. Эскиз сдельно-премиальной системы оплаты (норматив - x)

Сдельно-прогрессивная система оплаты

В рамках этой системы выработка сверх установленной нормы оплачивается по повышенным расценкам, с точки зрения формального анализа полностью аналогична повременно-премиальной системе оплаты (с точностью до конкретизации меры труда), и ей соответствует система стимулирования LL -типа.

Косвенно-сдельная система оплаты

Используется для оплаты труда вспомогательных рабочих. При этом размер их заработка может составлять определенный процент от заработка основных (обслуживаемых ими) рабочих. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования, основанная на перераспределении дохода - D -типа.

Аккордная система оплаты

В этом случае совокупный индивидуальный заработок выплачивается за фиксированные стадии работы или за выполнение полного комплекса работ.

Данной системе оплаты соответствует система стимулирования C -типа. Разновидностью аккордной системы оплаты является так называемые *аккордно-премиальные системы оплаты*, в которых дополнительная премия выплачивается за качество работ, сокращение сроков и т.д.

Участие в доходе (прибыли)

Как форма индивидуальной заработной платы (см. выше) в точности совпадает с системой стимулирования D -типа.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется системой оплаты труда?
2. Какие формы индивидуальной заработной платы Вы знаете?
3. Дайте определение тарифной системе оплаты труда.
4. Какая форма оплаты труда, как правило, применяется для оплаты труда руководителей?
5. Какие формы повременной оплаты труда Вам известны?
6. Какие формы сдельной оплаты труда Вам известны?

7. К какому типу базовых систем стимулирования можно отнести простую повременную систему оплаты труда?
8. Нарисуйте эскиз простой повременной системы оплаты труда.
9. Какие разновидности простой повременной системы оплаты труда Вы знаете?
10. К какому типу базовых систем стимулирования относятся разновидности простой повременной системы оплаты труда?
11. Нарисуйте эскизы этих разновидностей простой повременной системы оплаты труда.
12. Где применяется повременная форма заработной платы?
13. Дайте определение сдельно-премиальная система оплаты.
14. К какому типу базовых систем стимулирования можно отнести сдельно-премиальная система оплаты?
15. Нарисуйте эскиз сдельно-премиальная система оплаты.
16. Какие разновидности сдельных систем оплаты труда Вы знаете?
17. Дайте определение для этих разновидностей сдельных систем оплаты труда.

Тема №4 «Коллективное стимулирование за индивидуальные результаты»

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является многоэлементная организационная система с независимыми (невзаимодействующими) активными элементами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач. Если ввести общие для всех или ряда активных элементов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в организационной системы со слабо связанными активными элементами, представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если активные элементы взаимосвязаны (мы не будем рассматривать ситуацию, когда существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий активных элементов), то есть затраты или/и стимулирование активного элемента зависят, помимо его собственных действий, от действий других активных элементов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное или допустимое при заданных ограничениях) действие (первый этап – этап анализа согласованности стимулирования). В одноэлементных организационных системах в рамках гипотезы благожелательности Если активные элементы взаимосвязаны (мы не рассматриваем ситуацию, когда существуют общие ограничения на множества

допустимых состояний, планов, действий активных элементов), то есть затраты или/и стимулирование активного элемента зависят, помимо его собственных действий, от действий других активных элементов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное или допустимое при заданных ограничениях) действие (первый этап – этап анализа согласованности стимулирования). В одноэлементных организационных системах в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции активного элемента будет достигаться, в том числе и на реализуемом действии. В многоэлементных организационных системах достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре активных элементов. Если равновесий несколько, то необходимо проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе активных элементов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (активные элементы не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий активных элементов и т. д. Далее следует приравнять стимулирование затратам и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых действий следует реализовывать центру (второй этап – этап согласованного планирования). Конкретизируем этот общий подход.

Стимулирование в организационных системах со слабо связанными активными элементами

Обобщим решение задачи стимулирования на случай, когда имеются несколько активных элементов, то есть $n \geq 2$.

Предположим, что их функции затрат зависят только от их собственных действий (так называемые сепарабельные затраты).

Это предположение означает, что стимулирование каждого активного элемента будет зависеть только от его собственных действий.

Связью между активными элементами, входящими в изучаемую организационную систему является ограничение на суммарное стимулирование активными элементами.

Такая модель называется *организационной системой со слабо связанными активными элементами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество активных элементов, $y_i \in A_i$ – действие i -го активного элемента, $c_i(y_i)$ – затраты i -го активного элемента, $\sigma_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны Центра, $i \in N$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор дейст-

вий активных элементов, $y \in A' = \prod_{i \in N} A_i$. Предположим, что Центр получает доход $H(y)$ от деятельности активных элементов.

Пусть размеры индивидуальных вознаграждений активных элементов ограничены величинами R_i , то есть для каждого активного элемента должно выполняться соотношение вида

$$\sigma_i(y_i) \leq R_i.$$

Означающее, что размер стимулирования i -го активного элемента не должен превышать величины R_i .

Существует также и ограничение на фонд заработной платы (ФЗП): суммарный объем стимулирования не должен превышать заданной величины R . Это означает, что должно выполняться бюджетное ограничение следующего вида

$$\sum_{i \in N} R_i \leq R.$$

В этом случае максимальное множество реализуемых действий для i -го активного элемента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования и в рамках введенных ранее предположений будет равно $P_i(R_i) = [0; y_i^+(R_i)]$, где множество реализуемых действий находится из соотношения вида

$$y_i^+(R_i) = \max \{y_i \in A_i \mid c_i(y_i) \leq R_i\}, i \in N.$$

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования в организационной системе со слабо связанными активными элементами определяется следующим образом: максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{R_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющих бюджетному ограничению $\sum_{i \in N} R_i \leq R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(R_i)\}_{i \in N}} H(y_1, \dots, y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Отметим, что когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \geq 0} [\Phi(R) - R]$$

Отметим, что во многих важных с практической точки зрения случаях величина ФЗП (или фонда материального поощрения, премиального фонда и т.п.) зависит от действий активных элементов, то есть достигнутых ими результатов. При этом можно либо в явном виде учитывать зависимость $R = R(y)$, что приведет к существенному усложнению соответствующих оптимизационных задач, либо применять подход, описанный выше – искать оптимальное решение в параметрическом виде (где ФЗП является параметром), а потом определять оптимальное значение ФЗП.

Стимулирование в организационных системах с

сильно связанными активными элементами

Интересы и предпочтения участников организационной системы – Центра и активных элементов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция Центра $\Phi(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением, выплачиваемым активным элементам $\sum_{i=1}^n \sigma_i(y)$, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i -го активного элемента:

$$\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^n \sigma_i(y), \quad (1)$$

Целевая функция i -го активного элемента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y), \quad i \in N. \quad (2)$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i -го активного элемента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех активных элементов (случай сильно связанных активных элементов с несепарабельными затратами).

Примем следующий порядок функционирования организационной системы. Центру и активным элементам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников организационной системы. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их активным элементам, после чего активным элементам при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров организационной системы введем следующие предположения:

- 1) множество допустимых действий каждого активного элемента совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел;
- 2) функции затрат активных элементов непрерывны, неотрицательны и не убывают по y_i ;
- 3) функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при ненулевых действиях активных элементов.

Второе предположение означает, что независимо от действий других активных элементов любой активный элемент может минимизировать свои затраты выбором нулевого действия. Остальные предположения – такие же, как и в одноэлементной модели

Так как и затраты, и стимулирование каждого активного элемента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех активных элементов, то активные элементы оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех. Обозначим $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий активных элементов – мно-

жество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что активные элементы выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной организационной системе в рамках гипотезы благожелательности эффективностью стимулирования является максимальное значение целевой функции Центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y). \quad (3)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^* , которая имеет максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y). \quad (4)$$

В частном случае, когда активные элементы независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – δ -оптимальной, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_{iK}(x_i, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, i \in N, \quad (5)$$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие x^* , реализуемое системой стимулирования (5) как равновесие в доминантных стратегиях (РДС), является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{y \in A'} \left\{ H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \right\} \quad (6)$$

Напомним, что РДС называется такой вектор действий активного элемента, что каждому активному элементу выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия независимо от того, какие действия выбирают остальные активные элементы.

Если стимулирование каждого активного элемента зависит от действий всех активных элементов и затраты несепарабельны (то есть затраты каждого активного элемента зависят в общем случае от действий всех активных элементов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость активных элементов), то множества равновесий Нэша будет составлено из доминантных стратегий каждого участника организационной системы. Естественно для этого необходимо чтобы у каждого активного элемента такая стратегия существовала.

Формально, если в игре каждый игрок имеет доминирующую стратегию, то ситуация, образованная выбором этих стратегий всеми игроками, образует равновесие в доминирующих стратегиях.

Равновесие в доминирующих стратегиях является равновесием Нэша. Более того, если стратегии являются строго доминирующими, то такое равновесие в игре единственно. Если доминирование нестрогое, то помимо равновесия в доминирующих стратегиях, в игре могут существовать и другие равновесия Нэша.

Следует напомнить в чем заключается понятие доминирования: стратегия В доминирует стратегию А, если при любом поведении остальных игроков использование стратегии В приводит к не худшему исходу, нежели использование А. Различают строгое доминирование, когда В дает больший выигрыш, чем А, в любых условиях, и слабое доминирование, если при некоторых действиях других игроков В обеспечивает больший выигрыш, чем А, а при других – одинаковый с ней.

Если при заданной системе стимулирования у всех активных элементов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Фиксируем произвольный вектор $x \in A'$ действий активных элементов и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \delta_i \geq 0, i \in N. \quad (7)$$

Д.А. Новиковым было доказано, что при использовании центром системы стимулирования (7) равновесие будет достигаться в доминантных стратегиях. Более того, если $\delta_i \geq 0, i \in N$, то такое равновесие будет единственным.

Содержательно при использовании системы стимулирования (7) центр использует следующий принцип декомпозиции. Он предлагает i -му активному элементу: «выбирай действие x_i , а я компенсирую тебе затраты независимо от того, какие действия выбрали остальные активные элементы, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, Центр декомпозирует игру активных элементов.

Если стимулирование каждого активного элемента должно зависеть только от его собственного действия, то, фиксируя для каждого активного элемента обстановку игры, перейдем от (7) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий активных элементов $x \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$\sigma_i(x, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i, x_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \delta_i \geq 0, i \in N. \quad (8)$$

Содержательно при использовании системы стимулирования (8) центр предлагает i -му активному элементу: «выбирай действие x_i , а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные активные элементы также выбрали соответствующие компоненты – x_{-i} , если же ты выберешь любое другое действие, то

вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру активных элементов, то есть реализует вектор x как равновесие Нэша игры активных элементов.

Отметим, что функция стимулирования (8) зависит только от действия i -го активного элемента, а величина x_i входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (8), в отличие от (7), каждый из активных элементов имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того чтобы система стимулирования (8) реализовывала вектор x как РДС, необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (7)) предположений относительно функций затрат активных элементов.

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы активные элементы не выбирали нулевые действия), то активным элементам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i -го активного элемента известна с точностью до $\delta_i/2$, то компенсаторная система стимулирования (7) все равно реализует действие x .

Вектор оптимальных реализуемых действий активных элементов x^* , фигурирующий в качестве параметра в выражении (7) или (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{y \in A'} \left\{ H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \right\} \quad (9)$$

а эффективность системы стимулирования (7), (9) равна следующей величине:

$$\Delta = H(x^*) - \sum_{i \in N} c_i(x_i^*) - \delta$$

Д.А. Новиковым доказано, что система стимулирования (7), (9) является оптимальной, то есть обладает максимальной эффективностью, среди всех систем стимулирования в многоэлементных организационных системах.

Механизмы стимулирования нескольких активных элементов

В большинстве известных моделей стимулирования рассматриваются либо организационная система, в которых управляющий орган – Центр – наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов – активных элементов, находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо организационная система с неоп-

ределенностью, в которых наблюдаемый результат деятельности активных элементов зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов.

Рассмотрим подход к решению задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной организационной системе, в которой Центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности активных элементов.

Пусть в рамках ранее рассмотренной модели, *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ организационной системы, состоящей из n активных элементов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$, где $Q(\cdot)$ – *оператор агрегирования*, отображающий вектор $y \in A'$ действий активных элементов в результат их деятельности $z \in A_0$. Интересы и предпочтения участников организационной системы – Центра и активных элементов – выражены их целевыми функциями.

Целевая функция Центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением, выплачиваемым активным элементам

$\sum_{i \in N} \sigma_i(z)$, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i -го активного элемента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \dots, \sigma_n(z))$, то есть

$$\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z). \quad (10)$$

Целевая функция i -го активного элемента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y), \quad i \in N. \quad (11)$$

Примем следующий порядок функционирования организационной системы. Центру и активным элементам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников организационной системы, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их активным элементам, после чего активные элементы при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия активных элементов наблюдаемы для Центра (или когда Центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий активных элементов: $\forall i \in N \tilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$. Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны ранее.

Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности организационной системы, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий активных эле-

ментов, то есть имеет место *агрегирование информации* – Центр имеет не всю информацию о векторе $y \in A'$ действий активных элементов, а ему известен лишь некоторый их агрегат $z \in A_0$ – параметр, характеризующий результаты совместных действий активных элементов.

Будем считать, что относительно параметров организационной системы выполнены предположения, введенные ранее и, кроме того, предположим, что функция агрегирования однозначна и непрерывна.

По-прежнему под эффективностью стимулирования будем понимать максимальное (в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma(\cdot)) = \max_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), Q(y)). \quad (12)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^* , которая имеет максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg \max_{\sigma(\cdot)} K(\sigma(\cdot)). \quad (13)$$

Отметим, что ранее в рассмотренных задачах стимулирования декомпозиция игры активных элементов основывалась на возможности Центра поощрять активных элементов за выбор определенного (и наблюдаемого Центром) действия. Если действия активных элементов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение активных элементов зависит от агрегированного результата деятельности организационной системы, следует использовать следующий подход: найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризующее минимальными суммарными затратами активных элементов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить, реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для Центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в организационной системе с агрегированием информации.

Определим множество векторов действий активных элементов, приводящих к заданному результату деятельности организационной системы:

$$Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A', z \in A_0.$$

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий активных элементов минимальные затраты Центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам активных элементов $\sum_{i \in N} c_i(y)$.

По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты активных элементов по достижению результата деятельности $\tilde{\vartheta}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а

также множество действий $Y^*(z) = \text{Arg min}_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$ на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

Д.А. Новиковым при следующем дополнительном предположении «технического» характера о том, что функция затрат $c_j(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i , было доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

$$\sigma_{ix}^*(z) = \begin{cases} c_i[y^*(x)] + \delta, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in N, \quad (14)$$

вектор действий активных элементов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами Центра на стимулирование, равными: $\tilde{\vartheta}(z) + \delta$ где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$.

2) система стимулирования (14) является δ -оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (13) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (14), характеризуемой затратами Центра на стимулирование $\tilde{\vartheta}(x)$ и реализующей вектор действий активных элементов, приводящий к заданному результату деятельности $x \in A_0$.

Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для Центра результат деятельности организационной системы $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \text{Arg max}_{x \in A_0} [H(x) - \tilde{\vartheta}(x)] \quad (15)$$

Таким образом, выражения (14)–(15) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) Центром индивидуальных действий активных элементов влияет на эффективность стимулирования. Пусть, как и выше, функция дохода Центра зависит от результата деятельности организационной системы. Рассмотрим два случая.

Первый – когда действия активных элементов наблюдаемы, и Центр может основывать стимулирование как на действиях активных элементов, так и на результате деятельности организационной системы.

Второй случай, когда действия активных элементов не наблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности организационной системы. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

При наблюдаемых действиях активных элементов затраты Центра на стимулирование $\vartheta_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий активных элементов равны $\vartheta_1(y) = \sum_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна:

$$K_1 = \max_{y \in A'} \{H[Q(y)] - \vartheta_1(y)\}.$$

При ненаблюдаемых действиях активных элементов минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом (см. (14) и (15)): $\tilde{\vartheta}_2(y) = \sum_{y \in Y(z)} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна:

$$K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - \vartheta_2(z)\}$$

Доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования», помимо оценок сравнительной эффективности имеет важное методологическое значение. Оказывается, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата совместной деятельности активных элементов, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования активных элементов за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий меньшую информацию, чем вектор действий активных элементов.

Другими словами, **наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы**. Это достаточно парадоксально, так как известно, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование*, возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают активные элементы, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на Центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности активных элементов, то целесообразно основывать стимулирование активных элементов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия активных элементов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях активных элементов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на Центр.

Ранее был сформулирован принцип компенсации затрат. На модели с агрегированием информации этот принцип обобщается следующим образом: минимальные затраты Центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности организационной системы определяются как минимум компенсируемых Центром суммарных затрат активных элементов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности.

Механизмы унифицированного стимулирования

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых Центр устанавливал для каждого активного элемента свою зависимость вознаграждения от его действий, или действий других активных элементов, или результатов их совместной деятельности. Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех активных элементов. Необходимость использования унифицированного стимулирования может быть следствием институциональных ограничений, а может возникать в результате стремления Центра к «демократическому» управлению, созданию для активных элементов равных возможностей и т. д.

Так как унифицированное управление является частным случаем персонифицированного, то эффективность первого не превышает эффективности второго. Следовательно, возникает вопрос, к каким потерям в эффективности приводит использование унифицированного стимулирования, и в каких случаях потери отсутствуют?

Рассмотрим две модели коллективного унифицированного стимулирования (используемая техника анализа может быть применена к любой системе стимулирования) – унифицированные пропорциональные системы стимулирования и унифицированные системы коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности. В первой модели унификация не приводит к потерям эффективности (оказывается, что именно унифицированные системы стимулирования оказываются оптимальными в классе пропорциональных), а во второй снижение эффективности значительно.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования

Введем следующее предположение относительно функций затрат активных элементов:

$$c_i(y_i, r_i) = r_i \varphi(y_i/r_i), i \in N, \quad (16)$$

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^\alpha / \alpha$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности активного элемента.

Если Центр использует пропорциональные (*L*-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \lambda_i y_i$, то целевая функция активного элемента имеет вид: $f_i(y_i) = \lambda_i y_i - c_i(y_i)$. Дифференцируя целевую функцию, вычислим действие, выбираемое активным элементом при использовании Центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

$$y_i^*(\lambda_i) = r_i \varphi'^{-1}(\lambda_i), i \in N, \quad (17)$$

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$.

Минимальные суммарные затраты Центра на стимулирование равны:

$$\vartheta_L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i \varphi'^{-1}(\lambda_i) \quad (18)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Суммарные затраты активных элементов равны:

$$c(\gamma) = \sum_{i=1}^n r_i \varphi[\varphi'^{-1}(\lambda_i)] \quad (19)$$

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них, интерпретируя действия активных элементов как объемы выпускаемой ими продукции.

Задача 1. Пусть Центр заинтересован в выполнении активными элементами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами активных элементов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат активных элементов и суммарных затрат Центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\lambda_i\}_{i \in N}$ в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} c(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda} \\ \sum_{i=1}^n y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases}, \quad (20)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= \varphi'(w/W); \quad y_i^* = r_i(w/W); \quad i \in N, \\ c^* &= W\varphi(w/W); \quad \vartheta_L^* = R\varphi'(w/W). \end{aligned} \quad (21)$$

где $W = \sum_{i=1}^n r_i$.

Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех активных элементов, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты активных элементов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i^*(\lambda_i) \rightarrow \max_{\lambda} \\ c(\lambda) \leq v \end{cases}. \quad (22)$$

Решение задачи (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= \varphi'(\varphi^{-1}(v/W)); \quad y_i^* = r_i \varphi^{-1}(v/W); \quad i \in N, \\ c^* &= R; \quad \vartheta_i^* = \varphi^{-1}(v/W) W \varphi'(\varphi^{-1}(v/W)), \end{aligned} \quad (23)$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат активных элементов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

Задача 3. Если Центр заинтересован в выполнении активными элементами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} g_L(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda} \\ \sum_{i=1}^n y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases} \quad (24)$$

решение которой совпадает с (21), что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты активных элементов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i^*(\lambda_i) \rightarrow \max_{\lambda} \\ g_L(\lambda) \leq v \end{cases} \quad (25)$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем условие оптимальности (λ_0 – множитель Лагранжа):

$$\lambda_0 \varphi'^{-1}(\lambda_i) \varphi''(\lambda_i) + \lambda_i = 1, i \in N,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

$$\lambda \varphi'^{-1}(\lambda) = v / W. \quad (26)$$

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными активными элементами, функции затрат которых имеют вид (16), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Отметим, что выше установлено, что унифицированные пропорциональные системы стимулирования (*системы стимулирования UL-типа*) оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в организационных системах со слабо связанными активными элементами, имеющими функции затрат вида (16). Поэтому исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано ранее, для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования Центром оптимальных компенсаторных систем стимулирования (которые равны $g_K(y^*) = \sum_{i=1}^n r_i \varphi(y_i / r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $g_K(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^n y_i^* = w$, получаем, что $g_K^* = W \varphi(w / W)$. Подставляя из выражения

(21) $\vartheta_{UL}^* = R \varphi'(w/W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

$$\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* = w/W \varphi'(w/W) / \varphi(w/W). \quad (27)$$

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* \geq 1$. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании унифицированных пропорциональных систем стимулирования выше, чем при использовании «абсолютно оптимальных» компенсаторных систем стимулирования, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован со сделанным ранее выводом, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем компенсаторного.

Унифицированные системы стимулирования результатов совместной деятельности

Ранее исследовались персонифицированные системы стимулирования активных элементов за результаты их совместной деятельности. Рассмотрим, что произойдет, если в этой модели потребовать, чтобы система стимулирования была унифицированной.

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования за результаты совместной деятельности, то есть систем стимулирования, в которых Центр использует для всех активных элементов одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности $z \in A_0$. Введем следующую функцию:

$$c(y) = \max_{i \in N} \{c_i(y)\}. \quad (13)$$

На первом шаге вычислим минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования:

$$\vartheta_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = \text{Arg} \min_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с тем, как это делалось ранее, можно показать, что унифицированная система стимулирования:

$$\sigma_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)) + \delta/n, & z = x, \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in N, \quad (29)$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат дея-

тельности организационной системы x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x_U^* = \text{Arg max}_{z \in A_0} [H(z) - n\vartheta_U(z)] \quad (30)$$

Выражения (29)–(30) дают решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования активных элементов за результаты их совместной деятельности. Легко видеть, что эффективность унифицированного стимулирования (29)–(30) не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования (20)–(21).

Вопросы для самоконтроля

1. В чем отличие одноэлементной модели организационной системы от многоэлементной модели?
2. Какие предположения вводятся относительно выбора активными элементами своих действий?
3. Как задаются целевые функции Центра и активных элементов?
4. Какая система стимулирования будет являться решением в случае, когда активные элементы независимы?
5. Что такое равновесие в доминантных стратегиях (РДС)?
6. Что такое равновесие по Нэшу?
7. Что означает условие несепарабельности затрат?
8. Что означает строгое и нестрогое доминирование стратегии?
9. Что такое агрегирование информации и для чего оно используется в задачах стимулирования?
10. Какой подход используется для декомпозиции задачи стимулирования нескольких активных элементов при агрегировании информации?
11. Какую стратегию использует Центр для декомпозиции игры активных элементов?
12. Что означает термин «идеальное агрегирование в моделях стимулирования»?
13. Дайте определение организационной системы со слабо связанными активными элементами
14. Дайте определение организационной системы с сильно связанными активными элементами
15. Какие предположения вводятся относительно параметров организационной системы

Тема №5 «Механизмы «бригадной» оплаты труда»

Рассмотрим модели коллективного стимулирования, а именно – «бригадных» форм оплаты труда, в рамках которых вознаграждение активного элемента – члена бригады – определяется *коэффициентом его трудового участия* (КТУ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других активных элементов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем

случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом).

Процедура определения КТУ может быть различной, а именно возможно:

- формирование КТУ пропорционально тарифному разряду (квалификации) работника;
- формирование КТУ пропорционально *коэффициенту трудового вклада* (КТВ) работника.

При формировании КТУ пропорционально тарифным разрядам имеется в виду следующее. Считается, что тарифный разряд характеризует деятельность каждого работника – активного элемента. При этом полагается, что чем больше тарифный разряд, тем выше квалификация активного элемента. Поэтому тарифный разряд, отражая эффективность работы каждого активного элемента, может быть использован для оценки его деятельности.

При формировании КТВ учитывается фактический вклад каждого активного элемента в зависимости от индивидуальной производительности труда и качества работы в общую работу всего трудового коллектива.

Итак, в трудовом коллективе руководство имеет свои цели и формирует условия функционирования, чтобы достичь эти цели. Соответственно, активные элементы тоже имеют свои цели и, выбирая соответствующие действия, стремятся их достичь.

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R , который распределяется между активного элементами полностью в зависимости от выбранной системы стимулирования.

Будем считать, что i -й активный элемент характеризуется показателем r_i , отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i -го активного элемента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i , $i \in N$. Коллектив, в котором квалификация всех активных элементов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования будем оценивать суммой действий активных элементов: $\Phi(y) = \sum_{i \in N} y_i$.

Процедуры, основанные на КТУ. Рассмотрим сначала случай использования КТУ. Фонд R распределяется между активными элементами на основе коэффициентов трудового участия $\{\kappa_i\}_{i \in N}$, $\sum_{j \in N} \kappa_j = 1$. Таким образом, премия i -го активного элемента определяется выражением $\sigma_i = \kappa_i R$.

Целевые функции активных элементов имеют вид:

$$f_i(y_i) = \sigma_i - c_i(y_i, r_i), i \in N. \quad (31)$$

Достаточно распространенная из-за своей простоты процедура определения КТУ основывается только на учете показателя квалификации i -го активного

элемента, то есть $\kappa_i = \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j}$. Подставляя в (31), получим, что использование КТУ,

основанных на квалификации активных элементов и не зависящих от их реальных действий, не оказывает никакого воздействия на активных элементов, то есть, не побуждает их выбирать, например, бóльшие действия. Поэтому перейдем к рассмотрению КТВ.

Процедуры, основанные на КТВ. Естественный и простейший способ определения КТВ активного элемента – пропорционально действию последнего, то есть

$$\kappa_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j}, i \in N. \quad (32)$$

Пусть функции затрат активных элементов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (31) и (32) получаем следующее выражение для целевой функции i -го активного элемента, зависящей уже от действий всех активных элементов:

$$f_i(y) = R \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} - y_i / r_i, i \in N. \quad (33)$$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (33).

Однородный коллектив. Рассмотрим сначала случай однородного коллектива. Равновесные по Нэшу действия можно найти, дифференцируя каждое из n выражений (33), приравнивая производную нулю и выражая сумму равновесных действий активных элементов. В итоге получим, что равновесные по Нэшу действия активных элементов имеют вид:

$$y_i^* = \frac{Rr(n-1)}{n^2}, i \in N, \quad (34)$$

что приводит к следующему значению *эффективности*:

$$K_1(R, r, n) = \frac{Rr(n-1)}{n}. \quad (35)$$

Из (34) видно, что чем больше премиальный фонд, тем бóльшие действия выбирают активные элементы. Из (35) следует, что эффективность линейно растет при увеличении как премиального фонда (то есть не существует оптимального размера премиального фонда, максимизирующего эффект K_1/R его использования), так и квалификации активных элементов. Если действия активных элементов ограничены сверху, то существует оптимальный размер премиального фонда, который при известном ограничении может быть вычислен из выражения (34). Кроме того, разбиение однородного коллектива на более мелкие коллективы и соответствующее дробление премиального фонда не приводит к росту эффективности его использования. Можно также показать, что при постоянном размере фонда сокращение однородного коллектива приводит

к уменьшению эффективности и увеличению действий, выбираемых активного элементами.

Рассмотрим следующую задачу: возможно ли повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R , но по-другому формируя КТВ активных элементов?

Для этого рассмотрим следующую процедуру формирования КТВ, которая более чувствительна к различию активных элементов, чем (32):

$$\kappa_i = \frac{y_i^\varepsilon}{\sum_{j \in N} y_j^\varepsilon}, i \in N, 1 \leq \varepsilon \leq \frac{n}{n-1}. \quad (36)$$

Тогда равновесные по Нэшу действия активных элементов имеют вид:

$$y_i^* = \varepsilon \frac{Rr(n-1)}{n^2}, i \in N, \quad (37)$$

что превышает (34).

Ограничение $1 \leq \varepsilon \leq \frac{n}{n-1}$ позволяет констатировать, что использование процедуры (36) формирования КТВ дает возможность увеличить эффективность по сравнению с процедурой (32) на $1/(n-1)$ процентов. Например, если коллектив состоит из 11 человек, показатель эффективности можно увеличить максимум на 10 %.

Неоднородный коллектив. Из (32) и (33) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия активных элементов (которые можно вычислить по аналогии с тем как это описано выше для случая однородного коллектива) и эффективность:

$$y_i^* = \frac{\sum_{j \in N} 1/r_j - (n-1)/r_i}{(\sum_{j \in N} 1/r_j)^2} R(n-1), i \in N, \quad (38)$$

$$K_2(R, \vec{r}, n) = \sum_{j \in N} y_j^* = \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in N} 1/r_j} \quad (39)$$

Предположим, что коллектив состоит из активных элементов двух типов – m активных элементов – лидеров, имеющих эффективность r^+ , и $(n-m)$ «рядовых» активных элементов, то есть активных элементов, имеющих эффективность r^- , причем $r^+ > r^-$.

Тогда $\sum_{i \in N} 1/r_i = m/r^+ + (n-m)/r^-$.

Используя выражение (38), найдем действия, выбираемые в равновесии лидерами:

$$y^+ = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} \times \left[1 - \frac{1}{r^+} \times \frac{n-1}{m/r^+ + (n-m)/r^-} \right] \quad (40)$$

и рядовыми активными элементами:

$$y^- = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} \times \left[1 - \frac{1}{r^-} \times \frac{n-1}{m/r^+ + (n-m)/r^-} \right] \quad (41)$$

Используя выражение (39), найдем значение эффективности

$$K_2(R, m, n) = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}. \quad (42)$$

Из выражений (38), (40), (41) видно, что появление в коллективе лидеров (более квалифицированных активных элементов) вынуждает рядовых (менее квалифицированных) активных элементов выбирать меньшие действия. Понятно, что это влечет за собой уменьшение значений их целевых функций.

Из (41) получаем, что если количество лидеров в коллективе таково, что $m \geq \frac{1/r^-}{1/r^- - 1/r^+}$, то рядовым активным элементам вообще не выгодно увеличивать выбираемые ими действия. Однако при $m = 1$, то есть если в коллективе есть только один лидер, рядовым активным элементам всегда выгодно увеличивать действия. В то же время в литературе доказывается, что появление в коллективе лидеров приводит к повышению эффективности всего коллектива, несмотря на выбор меньших действий рядовыми активными элементами.

Исследуем, возможно ли дальнейшее увеличение показателей эффективности работ в коллективе в рамках того же премиального фонда R . Для этого разобьем неоднородный коллектив на два однородных подколлектива. Пусть первый состоит из m лидеров, а второй – из $(n - m)$ рядовых активных элементов. Соответственно разобьем премиальный фонд R всего коллектива, а именно: $R = R^+ + R^-$. Тогда в равновесии Нэша эффективность первого подколлектива равна $\frac{R^+ r^+ (m-1)}{m}$, а второго – $\frac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}$.

Соответственно, общий показатель эффективности всего коллектива из n активных элементов равен:

$$K_3(R, m, n) = \frac{R^+ r^+ (m-1)}{m} + \frac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m} \quad (43)$$

Выше отмечалось, что разбиение однородного коллектива на несколько подколлективов не приводит к увеличению суммарного показателя эффективности. Для неоднородного коллектива это не всегда так. Например, из сравнения (42) и (43) следует, что если в коллективе имеется половина лидеров, эффективность деятельности которых в два раза выше эффективности рядовых активных элементов, то выделение лидеров в отдельный подколлектив повысит суммарную эффективность, только если в исходном коллективе было не более шести активных элементов. В противном случае возможно снижение суммарной эффективности в результате разбиения неоднородного коллектива на два однородных подколлектива, даже при оптимальном распределении премиального фонда между подколлективами.

Индивидуальное и коллективное стимулирование. Сравним эффективности индивидуального и коллективного стимулирования для ряда практически важных частных случаев.

Пусть функции затрат активных элементов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$, $i \in N$, и пусть существует одинаковое для всех активных элементов ограничение y^{max} на максимальную величину выбираемого действия: $A_i = [0; y^{max}]$, $i \in N$.

Перенумеруем активных элементов в порядке убывания эффективностей деятельности:

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n. \quad (44)$$

Предположим, что ограничение y^{max} таково, что действие y_1^* , определяемое (8) при $i = 1$, является допустимым. Тогда допустимыми являются и действия всех остальных активных элементов при использовании системы коллективного стимулирования (2), основанной на КТВ. Эффективность коллективного стимулирования $K_2(R, \vec{r}, n)$ при этом определяется выражением (39).

Вычислим эффективность индивидуального стимулирования, при котором центр может стимулировать активных элементов независимо за индивидуальные результаты деятельности при условии, что сумма вознаграждений не превышает фонд R . Для этого воспользуемся принципом компенсации затрат и результатами решения задачи стимулирования слабо связанных активных элементов.

Получим, что при использовании Центром компенсаторных систем стимулирования оптимальной является компенсация затрат первым в упорядочении (44) k активным элементам (или $(k + 1)$ активным элементам – в зависимости от соотношения параметров), где

$$k = \min \left\{ j \in N \mid y^{max} \sum_{i=1}^j 1/r_i \leq R, y^{max} \sum_{i=1}^{j+1} 1/r_i < R \right\} \quad (45)$$

Содержательно выражение (45) означает, что центру следует в первую очередь задействовать активных элементов, эффективность деятельности которых максимальна. Другими словами, отличное от нуля стимулирование получают первые k или $(k + 1)$ активных элементов, а остальным следует назначить нулевое вознаграждение (их использование нецелесообразно). Таким образом, эффективность индивидуального стимулирования равна:

$$K_4(R, \vec{r}, n) = ky^{max} + r^{k+1} \left(R - y^{max} \sum_{i=1}^k 1/r_i \right) \quad (46)$$

Выражения (39) и (46) позволяют проводить сравнительный анализ эффективностей коллективного и индивидуального стимулирования.

Как правило, индивидуальное стимулирование оказывается более эффективным. Например, в случае однородных коллективов справедлива следующая оценка:

$$K_4(R, r, n) / K_1(R, r, n) \approx n / (n - 1) \geq 1.$$

Близкими к бригадным формам оплаты труда являются так называемые ранговые системы стимулирования, в которых для коллективного стимулирования используются процедуры соревнования, установления системы нормативов и т. д.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение однородного коллектива
2. Дайте определение неоднородного коллектива
3. Как определяется коэффициентом трудового участия (КТУ) для каждого активного элемента.
4. Как определяется коэффициентом трудового вклада (КТВ) для каждого активного элемента.
5. В чем различие между КТУ и КТВ?
6. Что такое индивидуальное стимулирование?
7. Что такое коллективное стимулирование?
8. Какая из систем стимулирования (индивидуальная или коллективная) наиболее эффективна и почему?

Тема №6. «Ранговые системы стимулирования»

Во многих моделях стимулирования вознаграждение агентов зависит от абсолютных значений их действий и/или результата деятельности. В то же время на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные РСС*, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении показателей деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные РСС*.

Преимуществом ранговых систем стимулирования является в основном то, что при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных агентами, а достаточна информация о диапазонах, которым они принадлежат, или об упорядочении действий.

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от показателей их деятельности (выбираемых действий и т. д.). Для дальнейшего изучения введем следующие предположения.

Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество A неотрицательных действительных чисел. Во-вторых, предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество агентов; $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество возможных рангов, где m – размерность НРСС (число рангов); $\{q_j\}$, $j = 1, 2, \dots$,

m – совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги.

При использовании унифицированных (с одинаковыми нормативами для всех агентов) *нормативных ранговых систем стимулирования* (УНРСС) агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_m < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества A . Унифицированная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i -го агента σ_i определяется следующим образом: если его действие принадлежит «диапазону» $[Y_j, Y_{j+1})$, то вознаграждение равно q_j , причем $Y_0 = 0, q_0 = 0$.

Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий: $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$. Эскиз графика прогрессивной УНРСС приведен на рис. 12.

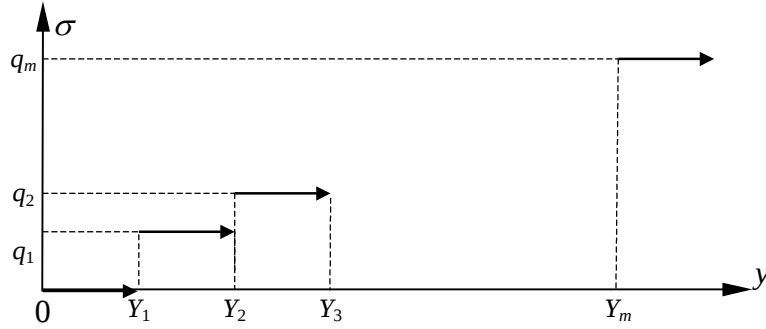


Рис. 12. Эскиз прогрессивной УНРСС

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной УНРСС множество допустимых действий равно: $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$, причем так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^* , выбираемое i -м агентом, определяется парой векторов (Y, q) , то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

$$k_i = \text{Arg} \max_{k=\overline{0,m}} [q_k - c_i(Y_k)], i \in N \quad (47)$$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), \dots, y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов q и Y , удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$\Phi[y^*(Y, q)] \rightarrow \max_{Y, q} \quad (48)$$

Фиксируем некоторый вектор действий $x \in \mathbb{R}_n^+$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС.

Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y , следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонентов вектора дейст-

вий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n , нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу агентов, то есть положим $m = n$.

Для фиксированного вектора действий $y^* \in \mathfrak{R}_n^+$ положим $Y_i = x_i$, $i \in N$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i, j \in N$. Из определения реализуемого действия (см. (47)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $x \in \mathfrak{R}_n^+$ (то есть побуждала агентов выбирать соответствующие действия), необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

$$q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij}, i \in N, j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

Обозначим суммарные затраты на стимулирование по реализации действия x УНРСС

$$\vartheta(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x) \quad (50)$$

где $q(x)$ удовлетворяет (49).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (50) при условии (49).

Предположим, что агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат:

$$\forall y \in A \quad c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \dots \geq c_n'(y),$$

и фиксируем некоторый вектор $x \in \mathfrak{R}_n^+$, удовлетворяющий следующему условию:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad (51)$$

то есть чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

Доказано, что:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (51);

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) для определения оптимальных размеров вознаграждений может быть использована следующая рекуррентная процедура:

$$q_1 = c_{11}, q_i = c_{ii} + \max_{j < i} (q_j - c_{ij}), i = \overline{2, n}$$

4) индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор $x \in \mathfrak{R}_n^+$, удовлетворяют:

$$q_i = \sum_{j=1}^i [c_j(x_j) - c_j(x_{j-1})] \quad (52)$$

Выражение (52) позволяет исследовать свойства УНРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классифи-

каций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и так далее (см. свойства ранговых систем стимулирования ниже).

Соревновательные системы стимулирования. Рассмотрим кратко известные свойства соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в СРСС индивидуальное поощрение агента не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов. Доказано, что:

1) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий агентов $x \in \mathfrak{R}_n^+$ в классе СРСС является выполнение (5);

2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

$$q_i(x) = \sum_{j=2}^i [c_{j-1}(x_j) - c_{j-1}(x_{j-1})], i = \overline{1, n} \quad (53)$$

Выражение (53) позволяет исследовать свойства СРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность СРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и с эффективностью УНРСС и т. д.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое ранговые системы стимулирования (РСС)?
2. В чем преимущество РСС?
3. Что такое нормативные ранговые системы стимулирования (НРСС)?
4. Что такое соревновательные ранговые системы стимулирования (СРСС)?
5. Какие предположения вводятся при изучении РСС?
6. Дайте определение унифицированных нормативных РСС.
7. Какая унифицированная нормативная РСС называется прогрессивной?
8. Какими свойствами обладает унифицированная нормативная РСС?
9. Нарисуйте эскиз унифицированной нормативной РСС.
10. Дайте определение соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Модели и механизмы стимулирования» для студентов, обучающихся по экономическим специальностям всех форм обучения, профилей и специализаций содержат краткий обзор основных понятий теории стимулирования. По каждой теме

кратко излагаются основные понятия и выводы, приводятся вопросы для самоконтроля. Всем интересующимся более глубоким изучением предмета может быть рекомендовано обращение к литературе, приведенной в конце методических указаний.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Модели и методы материального стимулирования: теория и практика / Д.Ю. Иванов, О.Н. Васильева, Д.А. Новиков, В.В. Засканов ; ред. В.Г. Засканов, Д.А. Новиков. – Москва : Ленанд, 2007. – 283 с.
2. Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000.
3. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: – 2005. – 138 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Самостоятельная работа по курсу «Модели и механизмы стимулирования»»	
Тема №1. «Задачи согласования интересов участников организационных систем»	
Тема №2. «Базовые модели стимулирования»	
Тема №3. «Формы и системы индивидуальной заработной платы и их математические модели»	
Тема №4. «Коллективное стимулирование за индивидуальные результаты»	
Тема №5. ««Бригадные» формы оплаты труда»	
Тема №6. «Ранговые системы стимулирования»	
Заключение	
Библиографический список	

Модели и механизмы стимулирования МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к конспекту лекций по дисциплине «Модели и механизмы стимулирования»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.04.02
«Менеджмент» всех форм обучения, профилей и специализаций

Составители:

д-р техн. наук, проф. Баркалов Сергей Алексеевич
д-р техн. наук, проф. Курочка Павел Николаевич
Компьютерный набор П. Н. Курочка

Подписано к изданию 21.12.2020

Уч.–изд. л. 2,0

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» 394026

Воронеж, Московский просп., 14