ФГБОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра высшей математики и физико-математического моделирования)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов

Pakt- dop .docx 871 Кбайт 14.03.2015 уч.-изд.2.9 л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания

ФГБОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Воронеж 2015

Составители: канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов

УДК 517

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов» /ФГБОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Воронеж, 2015. 48 с.

Методические указания для выполнения практических занятий содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Pakt- dop .docx »

Ил. 13. Библиогр.: 9 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. М.В. Юрьева

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых практических задач по теме:“Математика”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Уравнения гиперболического типа.

Уравнение колебания струны.

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T(x), действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

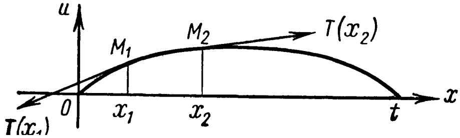

Рис.1.1.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox. Будем рассматривать только рис. 1.1 поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через u(x, t) смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции u(x, t), очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1.1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение u(x, t), а также производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами. Тогда можно получить уравнение колебаний струны:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)$$

Если p = const, т. е. в случае однородной струны, уравнение обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \text{ где } a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

Если внешняя сила отсутствует, то p(x, t) = 0 и получаем уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного этого уравнения недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Так, в начальный момент времени t = 0 нужно задать положение и скорость всех точек струны

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Эти условия называются начальными условиями. Так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах должно быть $u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0$ при всяком $t \geq 0$ - граничные условия. Возможны и другие граничные условия.

Решение задач о колебаниях
бесконечной и полуограниченной струны

Рассмотрим бесконечную струну, положение которой в состоянии равновесия совпадает с осью Ox (- ∞ < x < ∞) .

В начальный момент времени $t = 0$ точками струны задаются начальные отклонения и начальные скорости. Требуется найти отклонение $u(t, x)$ от положения равновесия любой точки x в любой момент времени t.удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

при $x \in (-\infty, \infty), t > 0$ и начальным условиям

$$\begin{cases} u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$ где $\varphi(x)$ - начальное отклонение,

$\psi(x)$ - начальная скорость точки x при $t = 0$.Так как у струны нет граничных точек, то для решения задачи не требуется задание граничных условий. Методом Даламбера или методом бегущих волн решение имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Ограниченная струна.

Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0$ и начальных условиях $u\big|_{t=o} = \varphi_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \ (0 \le x \le l).$

Методом Фурье можно найти решения задачи :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Решение задачи о продольные колебания стержня методом Фурье

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины *l*, когда один его конец x = 0 закреплен, а другой x = *l* свободен. Было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; a^2 = \frac{E}{\rho}$$

при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} = 0,$ и начальных условиях $u\big|_{t=0} = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = F(x), \; (0 < x < l)$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения будем искать в виде

u(x, t) = X(x)T(t)

Подставив *u(x, t)* в основное уравнение , получим $\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$, откуда получаем два уравнения

$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \; T(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$

Чтобы функция *X(x)*, отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничным условиям, очевидно, нужно потребовать выполнения условий X(0) = 0, X(*l*) = 0. Таким образом, мы пришли к задаче о собственных числах для уравнения

$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} = 0,$. Интегрируя уравнение , получим

$$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x.$$

И имеем $C_1 = 0$, $C_2\lambda\sin\lambda l = 0$.

Считая $C_2 \neq 0$ (в противном случае имели бы $X(x) \equiv 0$), находим $\cos\lambda x = 0$, откуда $\lambda l = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k — целое число).

Таким образом, нетривиальные решения задачи возможны лишь при значениях $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$. Собственным числам λ_k^2 соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

определенные с точностью до постоянного множителя, который мы положили равным единице (отрицательные целые значения k новых собственных функций не дадут). При $\lambda = \lambda_k$ общее решение основного уравнения имеет вид

$$T_k(t) = a_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Найдем

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = \left(a_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Составим ряд

$$u\ (x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$F(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(2k+1)\pi a}{2l}b_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

Предполагая, что ряды сходятся равномерно, можно определить коэффициенты a_k и b_k, умножив обе части равенств рядов на $\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ и проинтегрировав по x в пределах

от x = 0 до x = l Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^l \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{при } k = n \end{cases}$$

получим:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2\mathrm{n}+1)\pi x}{2l}\,dx\,, b_n = \frac{4}{(2n+1)}\int_0^l F(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx\,.$$

С помощью метода Фурье легко можно исследовать задачу о продольных колебаниях стержня. Напомним, что поставленная там задача приводится к решению основного уравнения при граничных и начальных условиях

$u\big|_{t=0} = f(x) = \mathrm{rx}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0, \ (0 < x < l)$, где r— постоянная. Применяя формулы, полученные выше, найдем, что

$a_k = \frac{(-1)^k 8lr}{(2k+1)^2\pi^2}$, b_k=0 откуда вытекает, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается рядом

$$u(x,t) = \frac{8lr}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,.$$

Уравнение колебаний мембраны.

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D, ограниченную замкнутой кривой L. Далее предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости xOy, параллельно оси Ou. Тогда смещение и точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t. Рассматривая далее только малые колебания мембраны, будем считать, что функция u(x, y, t), а также ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами (рис. 1.2).

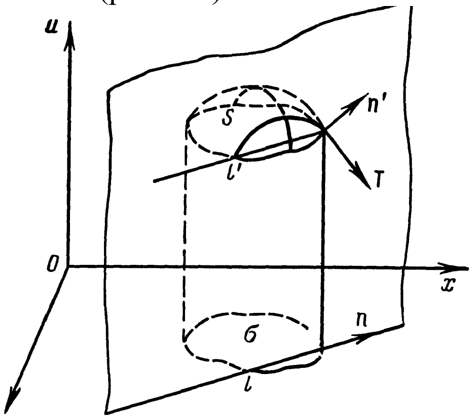

Рис. 1.2.

Отсюда в силу произвольности площадки следует, что

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x,y,t).$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны. В случае однородной мембраны ρ = const уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t).$$

где $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}, f(x,y,t) = \dfrac{p(x,y,t)}{\rho}.$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. p(x, y, t) = 0, то получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного этого уравнения недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y).$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть $u\big|_L = 0$ при любом t≥0. Тогда равнение поперечных колебаний мембраны имеет вид:

$$\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y, t).$$

В случае однородной мембраны ρ = const уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}.$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. p(x, y, t) = 0, то получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y).$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть $u\big|_L = 0$ при любом t≥0.

Решение задачи о радиальных колебаниях круглой мембраны

Задача о свободных колебаниях однородной круглой мембраны с закрепленной границей заключается в следующем. Найти функцию *u(t,x,y)*, удовлетворяющую в круге $x^2 + y^2 < R^2$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}\right],$$

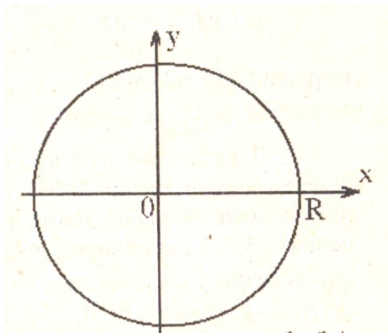

Рис. 1.3.

начальным условиям $\begin{cases} u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

и граничному условию $u(t,x,y)\Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0$ (рис.1.3) .

В полярных координатах r,θ эта задача формулируется следующим образом. Найти функцию $u(t,r,\theta)$, удовлетворяющую в круге $r < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,r,\theta)}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u(t,r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (t,r,\theta)}{\partial \theta^2}\right],$$

начальным условиям

$$\begin{cases} u(t,r,\theta)\big|_{t=0} = \varphi(r,\theta), \\ \dfrac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r,\theta) \end{cases}$$

и граничному условию $u(t,r,\theta)\big|_{r=R} = 0.$

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда начальные отклонения и начальные скорости не зависят от переменной θ. Это означает, что точки, одинаково удаленные от центра мембраны, в начальный момент времени имеют одинаковые отклонения и одинаковые скорости. В этом случае и при $t>0$ отклонение точек мембраны не будет зависеть от переменной θ. Таким образом, рассматривается следующая задача. Найти функцию $u(t,r)$, удовлетворяющую в круге $r < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t,r)}{\partial r}\right],$$

начальным условиям $\begin{cases} u(t,r)\big|_{t=0} = \varphi(r), \\ \dfrac{\partial u(t,r)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$

и граничному условию $u(t,r)\big|_{r=R} = 0.$

Для решения этой задачи используем метод разделения переменных. Найдем сначала ненулевые решения нашего уравнения , удовлетворяющие только граничному условию . Эти решения будем искать в виде $u(t,r) = T(t)X(x),$ где $X(0) \neq \infty, X(R) = 0.$

Дифференцируя функцию $u(t,r)$ и подставляя результаты дифференцирования в наше уравнение, получим

$$T''(t)X(r) = a^2\left[X'' + \frac{1}{r}X'(r)\right]T(t) = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(r) + \frac{1}{r}X'(r)}{X(r)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$T''(r)+\lambda a^2 T(t)=0, \qquad (***)$$

$$X''(r)+\frac{1}{r}X'(r)+\lambda X(r)=0,\ (0\le r\le R), \quad (X(0)\ne\infty, X(R)=0).$$

Уравнение можно записать в виде

$$r^2X''(r)+rX'(r)+\lambda r^2 X(r)=0.$$

Следовательно, это уравнение является уравнением Бесселя с *n=0*. Поэтому на отрезке [0,R] при *n=0*. Сделаем в уравнении замену независимой переменной $r=R\rho,$ тогда $\frac{d}{dr}=\frac{d}{d\rho}\frac{1}{R},\frac{d^2}{dr^2}=\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{1}{R^2}.$ В результате этой замены уравнение примет вид: $X''(\rho)+\frac{1}{\rho}X'(\rho)+\lambda R^2X(\rho)=0.$

Требуется найти ненулевые решения дифференциального уравнения , удовлетворяющие на отрезке [0,1] граничным условиям: $X(0)\ne\infty, X(1)=0.$ Ненулевые решения, удовлетворяющие условию $X(0)\ne\infty$, существуют только при $\lambda R^2=\mu_k^{(0)2},$ где $\mu_k^{(0)}-$ положительные решения уравнения $J_0(\mu)=0,$ и эти решения имеют вид $X_k(\rho)=J_0(\mu_k\rho), k=1,2,3.....$ Наша задача имеет ненулевые решения только при $\lambda=\lambda_k=\frac{\mu_k^{(0)2}}{R^2},$ и эти решения имеют вид $X_k(r)=J_0\left(\frac{\mu_k^0 r}{R}\right).$ Подставляя значения $\lambda=\lambda_k=\frac{\mu_k^{(0)2}}{R^2},$ в уравнение (***) и решая полученное уравнение, находим что $T_k(t)=A_k\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}+B_k\sin\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}.$ Таким образом, мы получили бесконечно много частных решений уравнения , удовлетворяющих граничному условию

$$u_k(t,r)=\left(A_k\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}+B_k\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right).$$

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u_k(t,r)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}+B_k\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right),$$

где A_k, B_k подбираются таким образом, чтобы выполнялись начальные условия . Имеем

$$\frac{\partial u(t,r)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-A_k\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}\sin\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}+B_k\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}\cos\frac{a\mu_k^{(0)}t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right).$$

Полагая в этих равенствах *t=0,* получим

$$\varphi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right),\psi(r)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{a\mu_k^{(0)}}{R}J_0\frac{a\mu_k^{(0)}}{R}.$$

Обозначим в этих формулах $\frac{r}{R}=\rho, r=R\rho.$ Тогда $\varphi(R\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0(\mu_k^{(0)}\rho),\psi(R\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}B_n\frac{a\mu_k^{(0)}}{R}J_0(\mu_k^{(0)}\rho).$ Отсюда следует, что

$$A_k=\frac{2}{J_1^2(\mu_k^{(0)})}\int_0^1\rho\varphi(R\rho)J_0(\mu_k^{(0)}\rho)d\rho,$$

$$B_k=\frac{2}{a\mu_k^{(0)}J_1^2(\mu_k^{(0)})}\int_0^1\rho\psi(R\rho)J_0(\mu_k^{(0)}\rho)d\rho,$$

или, если в интегралах сделать замену переменной $R\rho=r,$ то

$$A_k=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_k^{(0)})}\int_0^R R\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr,$$

$$B_k=\frac{2}{R\mu_k^{(0)}J_1^2(\mu_k^{(0)})}\int_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr, k=1,2,3,..$$

1.2. Уравнения параболического типа.

Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, x) в момент времени t определяется функцией u(x, y, z, t). Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Тогда можно получить уравнение теплопроводности неоднородного изотропного тела. Если тело однородно, то γ, ρ и к — постоянные и уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t),$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}$.

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т е. F(x, y, z, t) = 0, то получим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y и t, уравнение переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Наконец, для тела линейного размера, например для тонкого однородного стержня, уравнение теплопроводности примет вид: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного основного уравнения . Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе S тела (граничное условие).

Решение задачи теплопроводности бесконечного стержня

Пусть в стержне бесконечной длинны $(-\infty < x < \infty)$ задано начальное распределение температур. Требуется найти температуру $u(t,x)$ в любой точке $x \in (-\infty, \infty)$ в любой момент времени $t > 0$. Это означает, что требуется найти решение $u(t,x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial \mathrm{x}^2} \quad (x \in (-\infty, \infty), t > 0),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

Пусть $U(t,\xi), \phi(\xi)$ – преобразования Фурье по переменной x функций $u(t,x)$, $\varphi(x)$

$$U(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{-i\xi x} dx = F_x[u(t,x)],$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,x) e^{-i\xi x} dx = F_x[\varphi(t,x)],$$

тогда

$$F_x\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = \frac{\partial U(t,\xi)}{\partial t}, \; F_x\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right] = -\xi^2 U(t,\xi).$$

Применяя преобразование Фурье к левой и правой части основного уравнения и начального условия , приходим к следующей задаче. Найти решение дифференциального уравнения $\dfrac{\partial U(t,\xi)}{\partial t}=-a^2\xi^2U(t,\xi)$, удовлетворяющее начальному условию $U(t,\xi)\big|_{t=0}=\phi(\xi)$. Решение этой задачи имеет вид $U(t,\xi)=\phi(\xi)e^{-a^2\xi^2t}$. Искомая функция $u(t,x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье: $u(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(t,\xi)e^{i\xi x}d\xi$, или

$u(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{i\xi x}e^{-a^2\xi^2t}d\xi$, где $\phi(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-i\xi z}dz$, то есть

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-i\xi z}dz\right]e^{-a^2\xi^2t}e^{i\xi x}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2t}d\xi\right]dz.$$

Вычислим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2t}d\xi$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2t}d\xi=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\cos\xi(x-z)d\xi+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\sin\xi(x-z)d\xi.$$

Функция $e^{-a^2\xi^2t}\cos\xi(x-z)$ - четная, а функция $e^{-a^2\xi^2t}\sin\xi(x-z)$ - нечетная по переменной ξ. Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\cos\xi(x-z)d\xi=2\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\cos\xi(x-z)d\xi$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\sin\xi(x-z)d\xi=0.$

Следовательно $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2t}d\xi=2\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a^2\xi^2t}\cos(x-z)d\xi.$ В последнем интеграле сделаем замену переменной

$a^2\xi^2 t=\eta^2, \xi=\dfrac{\eta}{a\sqrt{t}}, d\xi=\dfrac{d\eta}{a\sqrt{t}}$ и обозначим $\dfrac{x-z}{a\sqrt{t}}=\beta,$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2 t}d\xi=\frac{2}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}\cos\beta\eta d\eta.$$

Положим $I(\beta)=\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}\cos\beta\eta d\eta.$

Тогда

$$I'(\beta)=-\int_0^{\infty}\eta e^{-\eta^2}\sin\beta\eta d\eta=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sin\beta\eta d(e^{-\eta^2})=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\eta^2}\sin\beta\Big|_0^{\infty}-\frac{\beta}{2}\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}\cos\beta\eta d\eta=-\frac{\beta}{2}I(\beta).$$

Так как $I(0)=\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона), то функция $I(\beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I'(\beta)=-\dfrac{\beta}{2}I(\beta)$ и начальному условию $I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Решение этой задачи $I(\beta)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}$. Таким образом,

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-z)}e^{-a^2\xi^2 t}d\xi=\dfrac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}$, следовательно

$u(t,x)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz.$ - называется формулой Пуассона.

Задача теплопроводности в бесконечном цилиндре

Пусть в бесконечном цилиндре $x^2+y^2\le R^2, -\infty<z<\infty$ задано начальное распределение температур, граничные точки цилиндра поддерживаются при нулевой температуре. Требуется найти температуру в любой точке цилиндра в любой момент времени $t>0$. Мы рассмотрим частный случай этой задачи, когда начальное распределение температур не зависит от переменной z и не зависит от полярного угла θ. Это значит, что и решение этой задачи не зависит от z и θ. Требуется найти решение $u(t,r)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(t,r)}{\partial t}=a^2\left[\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(t,r)}{\partial r}\right],$$

удовлетворяющее начальному условию $u(t,r)\big|_{t=0}=\varphi(r)$

и граничным условиям $u(t,0)\neq\infty, u(t,R)=0$.

Сначала найдем ненулевые решения нашего уравнения, удовлетворяющие только граничным условиям. Эти решения будем искать в виде $u(t,r)=T(t)X(r)$, где $X(0)\neq\infty, X(R)=0$.

Дифференцируя функцию $u(t,r)$ по t и по r дважды и подставляя результаты дифференцирования в наше уравнение, получим $T'(t)X(r)=a^2\left[T(t)X''(r)+\frac{1}{r}T(t)X'(r)\right]$, или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(r)+\frac{1}{r}X'(r)}{X(r)}=-\lambda.$$ Отсюда следует, что

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0,\ \ X''(r)+\frac{1}{r}X'(r)+\lambda X(r)=0,\ X(0)\neq 0, X(R)=0.$$

Как известно $X''(r)+\frac{1}{r}X'(r)+\lambda X(r)=0$ уравнение имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям только при $\lambda=\lambda_k=\frac{\mu_k^{(0)2}}{R^2}$, где $\mu_k^{(0)2}$ - положительные корни уравнения $J_0(\lambda)=0$, и этими решениями являются функции $X_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$ $(k = 1,2,....)$. При $\lambda = \lambda_k = \frac{\mu_k^{(0)2}}{R^2}$

уравнение принимает вид $T_k'(t) + \frac{a^2 \mu_k^{(0)2}}{R^2} T_k(t) = 0.$

Общим решением этого уравнения являются функции

$T_k(t) = A_k e^{-\frac{a^2 \mu_k^{(0)2} t}{R^2}}$, где A_k -произвольные постоянные.

Таким образом, ненулевыми решениями нашего уравнения, удовлетворяющими граничным условиям, являются функции

$u_k(t,r) = A_k e^{-\frac{a^2 \mu_k^{(0)2} t}{R^2}} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$, где $A_k \neq 0$. Решение задачи будем искать в виде ряда $u(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2 \mu_k^{(0)2} t}{R^2}} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$,коэффициенты, которого подбираются так, чтобы выполнялось начальное условие. При *t=0*, имеем $\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$. Отсюда следует, что $A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^1 \rho \varphi(R\rho) J_0(\mu_k^{(0)} \rho) d\rho$, или

$$A_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

Решение задачи теплопроводности в однородном шар

Пусть в шаре $x^2 + y^2 \leq R^2$ **задано начальное** распределение температур, и пусть в точках сферы $x^2 + y^2 = R^2$ поддерживается нулевая температура. Мы рассмотрим частный случай этой задачи, когда начальная температура зависит лишь от расстояния точки от центра шара и не зависит от угловых координат этой точки. Поэтому и при t>0 температура в точках шара зависит лишь от расстояния этой точки от центра шара. По этой причине задачу целесообразно решать в сферической системе координат ρ, θ, φ. Как известно, оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Следовательно, рассматриваемая задача заключается в следующем. Найти функцию $u(t,\rho)$, удовлетворяющую при $t > 0$ $0 \leq \rho < R$ дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(t,\rho)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u(t,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u(t,\rho)}{\partial \rho}\right].$$

Начальному условию

и граничным условиям

$$u(t,0) \neq \infty, u(t,R) = 0$$

Условие

$u(t,0) \neq \infty$ следует из того, что по физическим соображениям температура в центре шара не может быть бесконечной. Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию

$$u(t,\rho) = \rho u(t,\rho). \text{Тогда } u(t,\rho) = \frac{1}{\rho}\upsilon(t,\rho), \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}v, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^3}v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}.$$

Требуется найти функцию $\upsilon(t,\rho)$, удовлетворяющую при $t > 0$,

$0 < \rho < R$ дифференциальному уравнению $\frac{\partial v(t,\rho)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v(t,\rho)}{\partial \rho^2}$,

начальному условию $u(t,\rho)|_{t=0} = \rho g(\rho)$ и граничному условию

$u(t,0) = u(t,R) = 0.$ Решение этой задачи имеет вид

$$u(t,\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2t}{l^2}} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$A_k = \frac{2}{R}\int_0^R \rho g(\rho) \sin\frac{k\pi\rho}{R} d\rho.$$

Таким образом, решение задачи теплопроводности в однородном шаре имеет вид:

$$u(t,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2t}{R^2}} \sin\frac{k\pi\rho}{R},$$

1.3. Уравнения эллиптического типа

Установившаяся температура в однородном твердом теле. В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном телев случае отсутствия источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т. е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{du}{dt} = 0$ и наше уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Таким образом, уравнению Лапласа удовлетворяет темпера- тура и (x, y, z), установившаяся в однородном теле. Для определения и(x, y, z) теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени. Задача решения уравнения Лапласа по его значениям на границе рассматриваемой области называется задачей

Дирихле. Задача определения решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничному условию $\frac{du}{dn}\big|_S = 0$, называется задачей Неймана. Потенциальное движение несжимаемой жидкости. Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциальное, т. е. скорость v (x, y, z) есть потенциальный вектор v=grad φ. Для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, и из уравнения неразрывности имеем div φ=0. Далее получим

$$divgrad\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z} = 0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Решение задачи Дирихле в шаре для уравнения Лапласа

Пусть требуется найти функцию u(x,y,z), гармоничную в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ и принимающую заданные значения $\tilde{u}(x,y,z)$ в точках сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В сферической системе координат задача заключается в следующем. Найти функцию $u(\rho,\theta,\varphi)$, удовлетворяющую при $\rho < R$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{ctg\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и граничному условию

$$u(\rho,\theta,\varphi)|_{\rho=R} = \tilde{u}(\theta,\varphi).$$

Метод Фурье решения этой задачи заключается в следующем: сначала ищутся частные решения основного уравнения в виде $u(\rho,\theta,\varphi) = X(\rho)Y(\theta,\varphi)$, где функция $X(\rho)$ ограничена в точке $\rho = 0$, функция $Y(\theta, \varphi)$ ограничена по переменной θ и перидична по переменной φ с периодом 2π. Функции $Y(\theta, \varphi)$ являются собственными функциями отвечающими собственным значениям $\lambda = n(n+1)$, и этими функциями являются сферические функциями.

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} cosm\varphi + B_{nm} sinm\varphi) P_n^{(m)}(cos\theta), \quad (n = 0,1,2, \dots).$$

Функции $X(\rho)$ являются решениями уравнения (при $\lambda = n(n+1)$) $\rho^2 X''(\rho) + 2\rho X'(\rho) - n(n+1)X(\rho) = 0,$

ограниченными в точке $\rho = 0$. Частные решения этого уравнения будем искать в виде $X(\rho) = \rho^k$. Для определения k получаем $k(k-1) + 2k - n(n+1) = 0$, то есть $k^2 + k - n(n+1) = 0$, которое имеет решения $k_1 = n$ и $k_2 = -(n+1)$. Следовательно, это уравнение имеет два линейно независимых решения ρ^n и $\frac{1}{\rho^{n+1}}$. Второе решение не ограничено при $\rho \to 0$, но ограничено при $\rho > R$, поэтому оно используется для решения внешней задачи Дирихле для шара. Для решения внутренней задачи Дирихле для шара. Для решения внутренней задачи

Дирихле выбираем $X(\rho) = \rho^n$. Таким образом, мы получили бесконечное число частных решений уравнения

$$u_n(\rho,\theta,\varphi) = p^n \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} cosm\varphi + B_{nm} sinm\varphi) P_n^{(m)}(cos\theta),$$

где n=0,1,2,.. Решение задачи будем искать в виде ряда

$$u(\rho,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} cosm\varphi + B_{nm} sinm\varphi) \cdot$$
$$\cdot P_n^{(m)}(cos\theta).$$

Коэффициенты этого ряда определяются так, чтобы выполнялось граничное условие. Полагая в решении $\rho = R$, получим

$$\tilde{u}(\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} cosm\varphi + B_{nm} sinm\varphi) \cdot$$
$$\cdot P_n^{(m)}(cos\theta).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A_{nm} = \dfrac{1}{R^n \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \tilde{u}(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(cos\theta) cosm\varphi sin\theta d\theta, \\ B_{nm} = \dfrac{1}{R^n \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \tilde{u}(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(cos\theta) sinm\varphi sin\theta d\theta. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда решение задачи Дирихле для шара не зависит от переменной φ, то есть решение обладает осевой симметрией.

В этом случае функция $u(\rho,\theta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{ctg\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$$

и удовлетворяет граничному условию

$u(\rho,\theta)|_{\rho=R}=\tilde{u}(\theta).$

Частные решения нашего уравнения будут вида $u(\rho,\theta)=X(\rho)Y(\theta)$, ограниченные при $\rho=0$, $\theta=0, \theta=\pi$, находится из уравнений

$$Y''(\theta)+ctg\theta Y'(\theta)+\lambda Y(\theta)=0,$$

$$\rho^2X''(\rho)+2\rho X'(\rho)-\lambda X(\rho)=0.$$

Первое уравнение с помощью замены переменной $cos\theta=t$ приводится к уравнению Лежандра

$$(1-t^2)\frac{d^2Y}{dt^2}-2t\frac{dY}{dt}+\lambda Y=0.$$

Поэтому уравнение имеет решения, ограниченные в точках $\theta=0$ и $\theta=\pi$ только при $\lambda=n(n+1)$, и этими решениями являются функции $Y_n(\theta)=P_n(cos\theta)$, где $P_n(t)$- многочлен Лежандра n-ого порядка. Второе уравнение при $\lambda=n(n+1)$ имеет решение $X_n(\rho)=\rho^n$, ограниченное в точке $\rho=0$. Следовательно, частные решения уравнения , ограниченные при $\rho=0, \theta=0, \theta=\pi$, имеют вид

$u_n(\rho,\theta)=\rho^nP_n(cos\theta), n=1,2,3,\ldots$. Решение задачи

Дирихле в этом случае находится в виде ряда

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(cos\theta).$$

Коэффициенты этого ряда находятся так, чтобы выполнялось граничное условие. Полагая в равенстве $\rho = R$, получим

$$\tilde{u}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(cos\theta).\text{Отсюда следует,что}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} \tilde{u}(\theta) P_n(cos\theta) sin\theta d\theta.$$

2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Функционал

Кроме задач, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $z= f(x)$, в задачах физики возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин, называемых функционалами.

Функционалами называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций.

Например, функционалом является длина l дуги плоской (или пространственной) кривой, соединяющей две заданные точки $A(x_0,y_0)$ и $B(x_0, y_0)$ (см. рис. А). Величина l может быть вычислена, если задано уравнение кривой $y = y(x)$; тогда

$$l[y(x)] = \int_{x}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

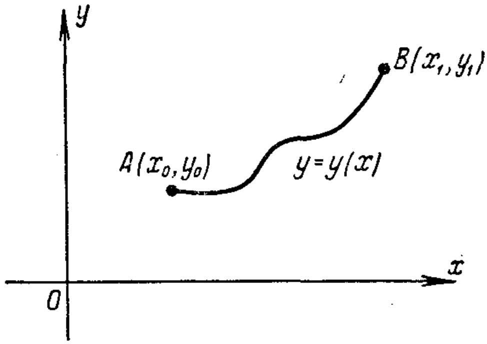

Рис. А.

Площадь S некоторой поверхности также является функционалом, так как она определяется выбором поверхности, т. е. выбором функции $z\ (x,\ y)$, входящей в уравнение поверхности $z = z\ (x,\ y)$. Как известно,

$$S[z(x,y)] = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dxdy$$

где D — проекция поверхности на плоскость Oxy.

Моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности также являются функционалами, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности.

Во всех этих примерах характерная для функционалов зависимость: функции (или вектор-функции) соответствует число, в то время как при задании функции $z = f(x)$ числу соответствовало число.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами.*

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

Задача о брахистохроне. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрейшего ската—*брахистохроне.* В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки A в точку B в кратчайшее время (рис. Б).

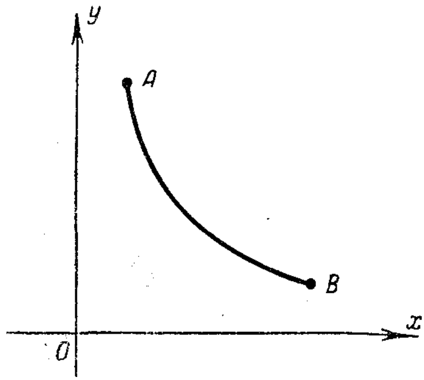

Рис. Б.

Легко видеть, что линией быстрейшего ската не будет прямая, соединяющая точки A и B, хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками A и B, так как при движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмем кривую, более круто спускающуюся около точки А вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстрейшего ската является циклоида.

Задача о геодезических линиях. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ (рис. В). Такие кратчайшие линии

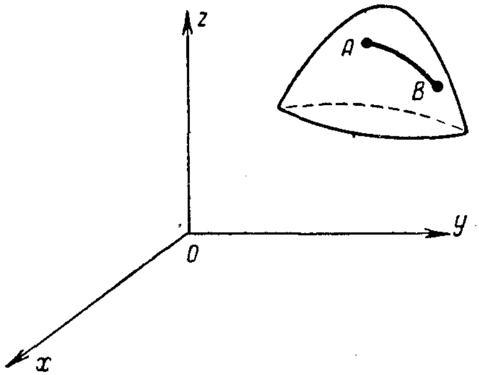

Рис. В.

называются геодезическими. Имеем типичную вариационную задачу на так называемый связанный или условный экстремум.

Необходимо найти минимум функционала

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

причем функции $y\ (x)$ и $z\ (x)$ должны быть подчинены условию. Эта задача была решена в 1698 году Я. Бернулли. Общий метод решения задач такого типа был изложен в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

Изопериметрическая задача. Требуется найти замкнутую линию заданной длины l, ограничивающую максимальную площадь S. Такой линией, как было известно еще в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала S при наличии своеобразного дополнительного условия—длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал

$$l = \int \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

сохраняет постоянное значение. Условия такого типа называются изопериметрическими. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л. Эйлером.

Ниже излагаются методы решения различных вариационных задач, где в основном исследуются на экстремум следующие часто встречающиеся в приложениях функционалы:

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y^{'}(x)\right)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y^{'}(x)......y^{n}(x)\right)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1(x)...., y_n(x), y_1^{'}(x)......y_n^{'}(x)\right)dx$$

$$\iint_D F(x, y, z(x, y), z_x^{/}, z_y^{/})dxdy,$$

в которых функции заданы, а функции являются аргументами функционалов.

2.2. Уравнение Эйлера

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y^{/}(x))dx \qquad (2.1)$$

причем граничные точки допустимых кривых закреплены:

$y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$ (рис. 2.1).

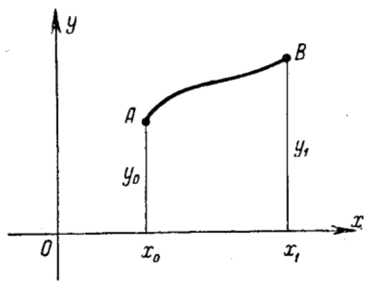

Рис. 2.1.

Функцию $F(x, y, y')$ будем считать трижды дифференцируемой. Необходимым условием экстремума является обращение в нуль вариации функционала. Покажем, как применяется эта основная теорема к рассматриваемому функционалу, причем мы еще раз повторим предыдущее рассуждение применительно к функционалу (2.1). Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой $y = y(x)$ (требуя лишь существования производных первого порядка у допустимых кривых, можно иным методом доказать, что у кривой, реализующей экстремум, существует и вторая производная).

Возьмем какую-нибудь близкую к $y = y(x)$ допустимую кривую $y = \bar{y}(x)$ и включим кривые $y = y(x)$ и $y = \bar{y}(x)$ в однопараметрическое семейство кривых

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\left(\bar{y}(x) - y(x)\right)$$

при $\alpha = 0$ получим кривую $y = y(x)$, при $\alpha = 1$ имеем $y = \bar{y}(x)$ (рис. 2.2). Как мы уже знаем, разность $\bar{y}(x) - y(x)$ называется вариацией функции $y(x)$ и обозначается δy.

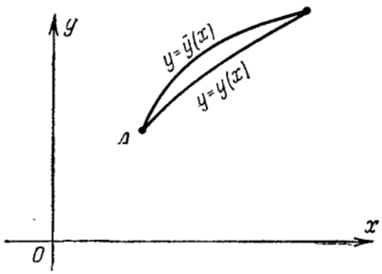

Рис. 2.2

Вариация δy в вариационных задачах играет роль, аналогичную роли приращения независимого переменного Δx в задачах на исследование экстремумов функций $f(x)$. Вариация функции $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$ является функцией x. Эту функцию можно дифференцировать один или несколько раз, причем

$(\delta y)' = \overline{y'}(x) - y'(x)$, т. е. производная вариации равна вариации производной, и аналогично

$$(\delta y)'' = \overline{y''}(x) - y''(x)$$

....

$$(\delta y)^{(k)} = \overline{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)$$

Рассмотрим семейство $y = y(x, \alpha)$, где $y(x, \alpha) = y(x)+\alpha\delta y$, содержащее при $\alpha = 0$ кривую, на которой достигается экстремум, а при $\alpha = 1$ — некоторую близкую допустимую кривую — так называемую кривую сравнения. Если рассматривать значения функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

только на кривых семейства $y=y(x,\alpha)$, то функционал превращается в функцию: $v[y(x,\alpha)] = \varphi(\alpha)$, так как значение параметра α определяет кривую семейства $y = y(x,\alpha)$ и тем самым определяет и значение функционала $v[y(x,\alpha)]$. Функция $\varphi(\alpha)$ достигает своего экстремума при $\alpha=0$, так как при $\alpha=0$ получаем $y=y(x)$, и функционал, по предположению, достигает экстремума по сравнению с любой близкой допустимой кривой и, в частности, по отношению к близким кривым семейства $y = y(x, \alpha)$. Необходимым условием экстремума функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$, как известно, является обращение в нуль ее производной при $\alpha = 0$: $\varphi'(0) = 0$. Так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x,\alpha), y'_x(x,\alpha))dx$$

Вычислим производную:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x, \alpha)\right] dx,$$

где $F_y = \dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))$, $F_{y'} = \dfrac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))$

и

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[y(x) + \alpha\delta y] = \delta y,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[y'(x) + \alpha\delta y'] = \delta y'$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y + F_{y'}(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y']\,dx;$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y + F_{y'}(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y']\,dx.$$

$\varphi'(0)$ называется вариацией функционала и обозначается δv.

Необходимое условие экстремума функционала v заключается в обращении в нуль его вариации: $\delta v = 0$. Для функционала:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

это условие имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y]dx = 0$$

Интегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание, что $\delta y' = (\delta y)'$, получим

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx$$

Так как

$$\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \text{ и } \delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

(допустимые кривые в рассматриваемой простейшей задаче проходят через фиксированные граничные точки). Необходимое условие экстремума приобретает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx=0 \tag{2.2}$$

причем первый множитель $F_y-\frac{d}{dx}F_{y\prime}$, кривой $y= y(x)$, реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель δy, ввиду произвола в выборе кривой сравнения $y = y(x)$, является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым весьма общим условиям, а именно: функция δy в граничных точках $x = x_0$ и $x = x_1$ обращается в нуль, непрерывна и дифференцируема один или несколько раз, δy или δy и δy ' малы по абсолютной величине. Для упрощения полученного условия (2.2) воспользуемся следующей леммой:

Основная лемма вариационного исчисления. *Если для каждой непрерывной функции* $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1}\hat{O}(x)\eta(x)dx=0$$

где функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$, то $\Phi(x)\equiv 0$ на том же отрезке.

Замечание. Утверждение леммы и ее доказательство не изменяются, если на функции η(x) наложить следующие ограничения: $\eta(x_0)=\eta(x_1)= 0$; $\eta(x)$ имеет непрерывные производные до порядка p , $\left|\eta^{(s)}(x)\right|<\varepsilon(s=0,1...q;q\le p)$.

Доказательство. Предположив, что в точке $x = \bar{x}$, лежащей на отрезке $x_0 < x < x_1$, $\Phi(x) \neq 0$, придем к противоречию. Действительно, из непрерывности функции $\Phi(x)$ следует, что если $\Phi(x) \neq 0$, то $\Phi(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1}$ точки $\bar{x}$; но тогда, выбрав функцию $\eta(x)$ также сохраняющей знак в этой окрестности и равной нулю вне этой окрестности (рис. 2.3), получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta(x)dx=\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\Phi(x)\eta(x)dx\neq 0$$

Так как произведение *Φ(x) η (x)* сохраняет знак на отрезке $(\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1})$ и обращается в нуль вне этого отрезка. Мы пришли к противоречию, следовательно, *Φ(x)* $\equiv$ *0*. Функцию *η (x)* можно выбирать, например, так: *η (x) = 0* вне отрезка $(\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1})$ $\eta(x)=k(x-\overline{x_0})^{2n}(x-\overline{x_1})^{2n}$ на отрезке $(\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1})$,, де *n*- целое положительное число*, k*- постоянный множитель. Очевидно, что функция *η (x)* удовлетворяет упомянутым выше условиям: она непрерывна, имеет непрерывные производные до порядка *2n-1*, обращается в нуль в точках x_0 и *x*, и может сделана по модулю сколь угодно малой вместе со своими производными за счет уменьшения модуля множителя *к*.

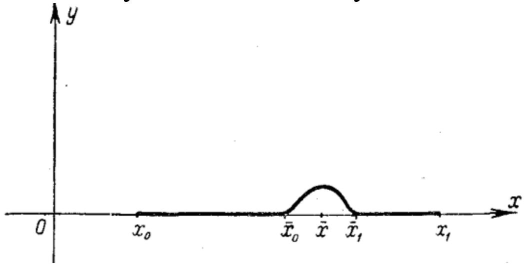

Рис. 2.3.

Замечание. Дословно так же можно доказать, что если функция *Φ(x, y)* непрерывна в области *D* на плоскости *(x, y)* и

$$\iint_D \Phi(x,y)\eta(x,y)dxdy=0$$

При произвольном выборе функции *η (x, y),* удовлетворяющей лишь некоторым общим условиям (непрерывность, дифференцируемость один или несколько раз, обращение в нуль на границах области *D*, $|\eta|<\varepsilon$, $|\eta'_x|<\varepsilon$, $|\eta'_y|<\varepsilon$), то

Φ(x, y) $\equiv$ *0* в области *D*, Функцию *η (x, y)* при доказательстве основной леммы можно выбрать, например, так: *η (x, y) = 0* вне круговой окрестности достаточно малого радиуса точки (x, y), в которой $\Phi(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, а в этой окрестности точки ε_1 *(x, y)* функция $\eta(x, y) = k\,[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - \varepsilon_1{}^2]^{2n}$ (рис. 2.4). Аналогичная лемма справедлива и для n-кратных интегралов.

Применим теперь основную лемму для упрощения полученного выше необходимого условия (2.2) экстремума простейшего функционала (2.1)

$$\int_{x^0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_y\right)\delta y dx = 0$$

Все условия леммы выполнены: на кривой, реализующей экстремум, множитель $(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})$ является непрерывной функцией, а вариация δy является произвольной функцией, на которую наложены лишь предусмотренные в основной лемме ограничения общего характера, следовательно $(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}) = 0$ на кривой $y = y(x)$, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, т. е. $y=y(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} = 0,\ F_y - F_{xy'} - F_{yy'} - F_{y'y'}y'' = 0$$

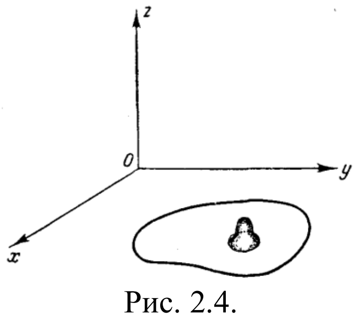

Рис. 2.4.

Это уравнение называется *уравнением Эйлера*. Интегральные кривые уравнения Эйлера *y=y(x,C₁,C₂)* называются экстремалями. Только на *экстремалях* может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

Для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала (2.1), интегрируем уравнение Эйлера и определяем обе произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границе $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. Только на удовлетворяющих этим условиям экстремалях может реализоваться экстремум функционала. Однако для того чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Напомним, что краевая задача

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \; y(x_0)=y_0, \; y(x_1)=y_1$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным. Во многих вариационных задачах существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то эта единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 \left[(y')^2 + 12xy\right]dx;$$

$$y(0) = 0, \; y(1) = 1$$

Уравнение Эйлера имеет вид $y''-6x=0$, откуда $y=x^3+C_1x+C_2$. Используя граничные условия, получаем: $C_1=0$, $C_2=0$; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой $y = x^3$.

Рассмотрим некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y(x, y) = 0$, так как $F_{y'} \equiv 0$.

Решение полученного конечного уравнения $F_y(x, y) = 0$ не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$. Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая $F_y(x, y) = 0$. Проходит через граничные точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1), существует кривая, на которой достигается экстремум.

F не зависит от y': F = F(x, y).

Уравнение Эйлера имеет вид $F_y(x, y) = 0$, так как $F_{y'} \equiv 0$.

Решение полученного конечного уравнения $F_y(x, y) = 0$ не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y(x_0) = y_0$ и $y(x_1) = y_1$.

Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, вообще говоря, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая $F_y(x, y) = 0$

Пример 2.

$$v[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right) dx$$

$$y(0)=0,\ y(1)=a.$$

Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0$ или $y-x=0$.

Первое граничное условие $y(0)= 0$ удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при $a = 1$. Если же $a \neq 1$, то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

Пример 3.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + xy'\right) dx \quad \text{или} \quad [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(y\,dx + x\,dy\right)$$

.

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1$$

Уравнение Эйлера превращается в тождество $1 \equiv 1$. Подынтегральное выражение является точным дифференциалом, и интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$v[y(x)] = \int_{0x_0}^{x_1} d(yx) = x_1 y_1 - x_0 y_0$$
,

по какой бы кривой мы ни интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

F зависит лишь от y': F = F (y').

Уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'y'}\ y'' = 0$, так как $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$. Отсюда $y'' = 0$ или $F_{y'y'} = 0$. Если $y'' = 0$, то

$y = C_1x + C_2$— двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение $F_{y'y'}(y') = 0$ имеет один или несколько действительных корней $y' = k_i$, то $y = k_{ix} + C$, и мы получаем однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе $y = C_1x + C_2$. Таким образом, в случае $F = F(y')$ экстремалями являются всевозможные прямые линии $y = C_1x + C_2$.

Пример 4. Длина дуги кривой

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

имеет экстремалями прямые линии $y = C_1x + C_2$

Пример 5. Время $t[y(x)]$, затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой $y = y(x)$ из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_1, y_1)$, если скорость $\frac{ds}{dt} = v(y')$ зависит только от y', является функционалом вида. Следовательно, экстремалями этого функционала являются прямые линии.

F зависит лишь от x и y':F = F(x, y').

Уравнение Эйлера приобретает вид $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$ и, следовательно, имеет первый интеграл. $F_{y'}(x, y') = C_1$, причем так как полученное уравнение первого порядка $F_{y'}(x, y') = C_1$ не содержит y, то уравнение может быть проинтегрировано или путем непосредственного разрешения относительно y' и интегрирования, или путем введения подходящим образом выбранного параметра.

Пример 6. Функционал

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

(t — время, затрачиваемое на перемещение по кривой $y = y\ (x)$ из одной точки в другую, если скорость движения $v = x$, так как если $\frac{ds}{dt} = x$, то $\frac{ds}{x} = dt$ и

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'} = C_1$ имеет вид

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Это уравнение проще всего интегрируется, если ввести параметр, полагая $y' = tg\ t$; тогда

$$x = \frac{1}{C_1}\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\sin t \qquad x = \overline{C_1}\sin t \text{, где } \overline{C_1} = \frac{1}{C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = tgt, \quad dy = tgtdx = tgt \cdot \overline{C_1}\cos tdt = \overline{C_1}\sin tdt$$

интегрируя, получаем $y = -\overline{C_1}\cos t + C_2$. Итак, $x = \overline{C_1}\sin t$, $y - C_2 = -\overline{C_1}\cos t$ или, исключая t, получаем $x^2 - (y-C_2)^2 = \overline{C_1^2}$ — семейство окружностей с центрами на оси ординат.

F зависит лишь от y и y': F = F(y, y').

Уравнение Эйлера имеет вид: $F_y - F_{yy'} - F_{y'y'}y'' = 0$ так как $F_{xy}' = 0$. Если умножить почленно это уравнение на y', то, как нетрудно проверить, левая часть превращается в точную производную. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = y'\left(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y''\right)$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C_1$, причем так как это уравнение первого порядка не содержит явно x, то оно может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и разделения переменных или путем введения параметра.

Пример 7. Задача о наименьшей поверхности вращения: определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 2.5).

Как известно, площадь поверхности вращения

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_2}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

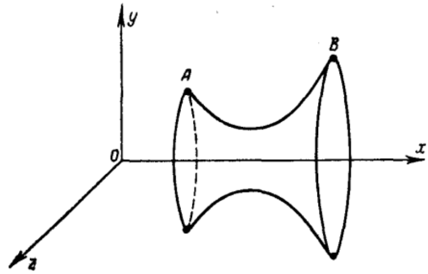

Рис. 2.5.

Подынтегральная функция зависит лишь от y и y' и, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера будет иметь вид $F\text{-}y'F_{y'}= C_1$ или в данном случае у

$$y = \sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

После упрощений получаем $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$.

Проще всего это уравнение интегрируется подстановкой $y'=sht$. тогда $y = C_1\, ch\, t$, а

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 sht dt}{sht} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Итак, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$x = C_1 t + C_2$$
$$y = C_1 cht$$

Исключая параметр t, будем иметь $y = C_1 ch\frac{x - C_2}{C_1}$ семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые катеноидами. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия прохождения искомой линии через заданные граничные точки (в зависимости от положения точек A и B может существовать одно, два или ни одного решения).

Пример 8. Задача о брахистохроне: определить кривую, соединяющую заданные точки A и B, при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Поместим начало координат в точку A, ось Ox направим горизонтально, ось Oy — вертикально вниз. Скорость движения материальной точки $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения $A\ (0,\ 0)$ в положение $B(x_1, y_1)$:

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Так как этот функционал также принадлежит к простейшему виду и его подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C$, или в данном случае $(\sqrt{1 + y'^2} / \sqrt{y}) - (y'^2 / \sqrt{y(1 + y'^2)}) = C$. Откуда после упрощений будем иметь $1/\sqrt{y(1 + y'^2)}) = C$ или $y(1 + y'^2) = C_1$. Введем параметр t, полагая $y' = ctg\ t$; тогда получим:

$$y=\frac{C_1}{1+ctg^2t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$$
.

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t dt}{ctgt}=2C_1\sin^2 t dt=C_1(1-\cos 2t)dt$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид $x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)$, $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$

Если преобразовать, параметр подстановкой $2t=t_1$ и принять во внимание, что $C_2=0$, так как при $y=0$, $x=0$, то мы получим уравнение семейства циклоид в обычной форме:

$$x=\frac{C_1}{2}(t_1-sint_1),, y=\frac{C_1}{2}(1-cost_1),$$

где $C_1/2$- радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку $B(x_1,,y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида.

Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,...,y_n,y_1^/,...,y_n^/)dx$

Для получения необходимых условий экстремума функционала v более общего вида

$$v[y_1,y_2,...,y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx$$

при заданных граничных значениях всех функций

$$y_1(x_0)=y_{10},y_2(x_0)=y_{20},...,y_n(x_0)=y_{n0}$$

$$y_1(x_1)=y_{11},y_2(x_1)=y_{21},...,y_n(x_1)=y_{n1}$$

будем варьировать лишь одну из функций

$$y_j(x)\ (j=1,2,...,n)$$

оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал $v[y_1,y_2,...,y_n]$ превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от $y_i(x)$,

$$v[y, y_2, ..., y_n] = \tilde{v}[y_i]$$

рассмотренного ранее функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 .$$

Так как это рассуждение применимо к любой функции $y_i (i=1,2,...,n)$,то мы получим системy дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

определяющих, вообще говоря, $2n$-параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве $x, y_1, y_2, ..., y_n$ — семейство экстремалей данной вариационной задачи. Если, в частности, функционал зависит лишь от двух функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

$$y(x_0) = y_0 \ z(x_0) = z_0 \ y(x_1) = y_1 \ z(x_1) = z_1$$

т. е. определяется выбором пространственной кривой $y = y(x)$, $z = z(x)$ (рис. 2.6), то, варьируя только $y(x)$ и фиксируя $z(x)$, мы изменяем нашу кривую так, что ее проекция на плоскости xOz не изменяется, т. е. кривая все время остается на проектирующем цилиндре $z = z(x)$ (рис. 2.7).

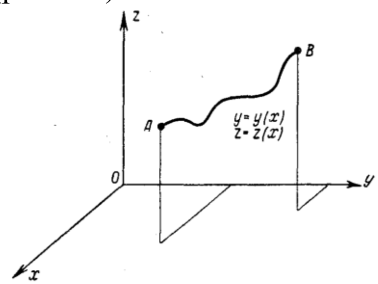

Рис. 2.6.

Аналогично, фиксируя $y(x)$ и варьируя $z(x)$, мы варьируем кривую так, что она все время лежит на проектирующем цилиндре $y = y(x)$. При этом получаем систему двух уравнений Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

<u>Пример 9.</u> Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz] dx,$$

$$y(0) = 0, , y(\pi/2) = 1, \; z(0) = 0, \; z(\pi/2) = -1.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид: $y''—z=0$, $z''—y=0$. Исключая одну из неизвестных функций, например z, получаем $y^{IV} — y = 0$.

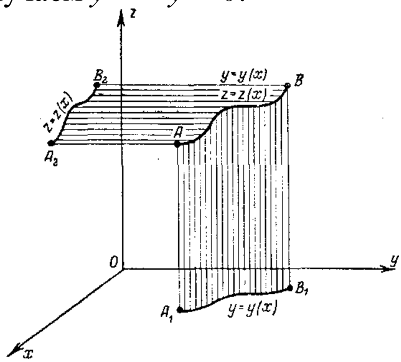

Рис. 2.7.

Интегрируя, это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, будем иметь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$z = y''; z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 cosx - C_4 sinx$$

Используя граничные условия, находим: $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=1$ следовательно, $y = sin\ x$, $z = -\ sin\ x$.

<u>Пример 10.</u> Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z')dx$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$F_{y'y'}y'' + F_{y'y'}z'' = 0 \quad F_{y'z'}y'' + F_{z'z'}z'' = 0$$

откуда, считая $F_{y'y'}F_{z'z'} - \left(F_{y'z'}\right)^2 \neq 0$, получим $y'' = 0$ и $z'' = 0$ или $y=C_1x+C_2$, $z=C_3x+C_4$— семейство прямых линий в пространстве.

Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), \ldots y^n(x)\right)dx$$

где функцию *F* будем считать дифференцируемой *n + 2* раза по всем аргументам и будем предполагать, что граничные условия имеют вид:

$$y(x_0) = y(0) \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

$$y(x_1) = y_1 \quad y'(x_1) = y_1', \ldots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

т. е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее, производных до порядка *n—1* включительно. Предположим, что экстремум достигается на кривой *y= y(x),* дифференцируемой *2n* раз, и пусть *y = y(x)*— уравнение некоторой кривой сравнения, также дифференцируемой *2n* раз.

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$y(x, \alpha) = y(x)+\alpha[y(x)- y(x)]$ или $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y$.

При $\alpha = 0$ y(x, α) = y(x), при $\alpha=1$ $y(x, \alpha) = \bar{y}(x)$. Если рассматривать значение функционала $v[y(x)]$ только на кривых семейства $y = y(x, \alpha)$, то функционал превратится в функцию параметра α, достигающую экстремума при $\alpha = 0$; следовательно, $\frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0$. Эта производная называется вариацией функционала *v* и обозначается δv:

$$\delta v = \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha), ..., y^{(n)}(x,\alpha)\right) dx \right]_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + ... + F_{y^n} \delta y^n \right) dx$$

.

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части один раз:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = \left[F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx$$

третье слагаемое — два раза:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = \left[F_{y''} \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y'} \delta y dx$$

последнее слагаемое — n раз:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y^n} \delta y^n dx = \left[F_{y^{n'}} \delta y^{n-1} \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y'^n} \delta y^{n-2} \right]_{x_0}^{x_1} + ... + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} \delta y dx$$

Принимая во внимание граничные условия, в силу которых при $x = x_0$ и при $\delta y = \delta y' = \delta y'' = ... = \delta y^{(n-1)} = 0$ вариации, окончательно получим

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} \right) \delta y dx$$

при произвольном выборе функции δy и так как первый множитель под знаком интеграла является непрерывной функцией x на той же кривой $y=y(x)$, то в силу основной леммы первый множитель тождественно равен нулю:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} \equiv 0.$$

Итак, функция $y = y(x)$, реализующая экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) dx$$

должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^n} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение порядка *2n* носит название уравнения Эйлера—Пуассона, а его интегральные кривые называются экстремалями рассматриваемой вариационной задачи. Общее решение этого уравнения содержит *2n* произвольных постоянных, которые могут быть, вообще говоря, определены из *2n* граничных условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \ldots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

Пример 11. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 \left(1 + y''^2\right) dx$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид $\frac{d^2}{dx^2}\left(2y''\right) = 0$ или $y^{IV}=0$; его общим решением является $y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Используя граничные условия, получаем: C_1 =0, C_2 = 0, C_3 =1, C_4 = 0. Итак, экстремум может достигаться лишь на прямой $y=x$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить практические занятия по вышеуказанным темам курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Ч 2. Дифференциальные и интегральные исчисления. Москва 2001 г.
2. Данко Л.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./Л.Е. Данко, А.Т. Попов, Т.Я. Кожевникова. Ч.2.М.:Высш. шк. 1987 г.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. / И.Г. Араманович , В.И.Левин. М: Наука. 1969 г.
4. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики./ Н. С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М.:Высш. шк. 1970 г.
5. Семенов М.П. Методы математической физики./ М.П. Семенов. Пособие: ВГТУ. 2002г.
6.Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
7. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М.: Гостехиздат, 1950.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. -М.: Наука, 1969.
9. Краснов М.Л. Вариационное исчисление./ М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. -188 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине «Дополнительные главы математики» направление подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», профиль «Электроприводы и системы управления электроприводов»

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.03. 2015.
Уч.-изд. л. 2,9. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14