

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учрежде-
ние высшего образования**

«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра теплогазоснабжения и нефтегазового дела

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

*к выполнению практических расчетов
для студентов направления 13.04.01
«Теплоэнергетика и теплотехника»
всех форм обучения*

Воронеж 2022

УДК 519.87:620.9(07)
ББК 31.3я7

Составитель А. В. Кочегаров

Математическое моделирование в теплоэнергетике:
методические указания к выполнению практических расчетов для
студентов направления 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»
всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»; сост. А. В. Кочегаров.– Воронеж, 2022. –
35 с.

Представлены примеры математического моделирования с
применением современных информационных технологий для описа-
ния теплоэнергетических процессов: анализ распределения темпера-
туры в конструктивном элементе теплоэнергетического оборудования,
начальные и граничные условия распределения температуры в точках
среды на различные моменты времени, компьютерное моделирование
и вычислительный эксперимент, численные методы решения нели-
нейных уравнений, метод половинного деления и т.д.

Предназначены для магистрантов направления 13.04.01 «Теп-
лоэнергетика и теплотехника» всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и
содержатся в файле ММвТ.pdf.

Ил.10.

УДК 519.87:620.9(07)
ББК 31.3я7

***Рецензент** – А. П. Преображенский, д-р техн. наук, проф. кафедры
информационных систем и технологий
Воронежского института высоких технологий*

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

В данном методическом пособии нами приведены примеры получения адекватного описания теплоэнергетических процессов, при помощи математических методов. Во многих прикладных задачах, процес переноса тепла осуществляется различными способами (теплообмен со сложными переходами). При описании конвективности переноса необходимо учесть процессы теплопроводности между отдельными слоями среды (тепло- и массоперенос). Поэтому методология математического моделирования подобных процессов, состоит в замене исходного объекта его “прототипом” – математической моделью – и дальнейшей реализации работы модели с помощью различных методов на компьютерах, вычислительно-логических алгоритмах и т.д. Применение моделей для объектов (явлений, процессов), предлагает определить, относительно быстро и без существенных затрат свойства объекта, влияние на него входных параметров и поведение в любых возможных ситуациях (преимущества теории).

Таким образом, анализ распределения температуры в конструктивном элементе теплоэнергетического оборудования, начальные и граничные условия распределения температуры в точках среды на различные моменты времени, компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент, численные методы решения нелинейных уравнений, метод половинного деления и т.д. Позволят описать необходимые теплоэнергетические процессы, дать полное описание объекта, и выделить необходимые (значимые и менее значимые параметры), влияющие на адекватность описываемой модели процессов.

Практическая работа №1

Основные этапы математического моделирования.

Основные этапы численного решения задач на ПК

Любая наука обязательно предоставляет широкое применение математического моделирования. Методология применения математического моделирования состоит в замене исследуемого объекта на адекватно похожую и маленькими расхождениями – математической моделью – с дальнейшим изучением модели с помощью реализуемых на компьютерах регрессионной последовательности, алгоритмизации и оптимизации процессов. Математическое моделирование, как познание, в конструировании, проектировании сочетает в себе много достоинств как в теории, так и в эксперименте. Исследование не самого объекта (явление, процесс), а его модель дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать все свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В это же время многофакторные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на значимые и современные вычислительные методы и технические инструменты информатизации, глубоко изучить объекты с достаточной полнотой, и чисто теоретическим подходом (преимущества эксперимента) определить наиболее значимые факторы, влияющие на объект. Методология математического моделирования обширно развивается, охватывая все новые отрасли – от проектирования и конструирования до разработки техни-

ческих систем и кибернетизации ими, а так же позволяют анализировать сложнейшие теплоэнергетические процессы.

С появлением точных наук, начали использоваться математические модели, и не случайно, некоторые математические методы вычислений носят имена известных ученых науки, как Ньютон и Эйлер, а такие слова как “алгоритм” произошли от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми.

Спустя многие десятилетия у математического моделирования появилось второе “рождение”, эпоха этой методологии приходится на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено, двумя изменениями и продвижениями в науке.

Вначале появилась ЭВМ (персональный компьютер). Потом – выполнение сложных задач по организации программ государственного плана в бывшем СССР, где помимо планирования появилось моделирование, алгоритмизация и программирование процессов. Исследование и математическое моделирование какого-либо объекта порождает четкую матрицу планирования действий. Их можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа и к ним еще можно отнести численные методы и расчеты. Попробуем изобразить на рис. 1 схему исследования теплоэнергетического процесса.

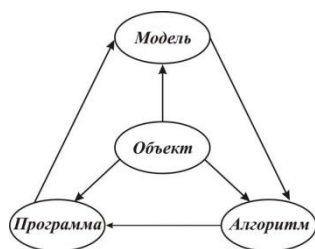


Рис. 1. Схема наложения теплоэнергетических процессов

На первом этапе выбирается (или строится) “имитация” объекта, отражающая в математической форме важнейшие свойства – законы, которым подчиняется объект исследования, связь, присущие составляющим его частям и т.д. Математическая модель (или ее часть) исследуется теоретическими методами, подчиняющимся законам, что позволяет получить предварительные знания об объекте (однофакторные исследования).

На втором шаге – разработка алгоритма для реализации модели при помощи формульных зависимостей на программах персонального компьютера. Модель трансформируется в форму, способной максимально применить численные методы. Должна быть определена последовательность вычислительных и логических шагов (операций), которые нужно произвести, чтобы определить искомые величины, адекватно описывающие объект. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

Третий этап предусматривает, создание программ, “переводящих” модели и алгоритмы на доступный персональному компьютеру язык. К ним также предъявляются требования адекватности и оптимальности.

В схеме математического раскрытия свойств объекта: “модель – алгоритм – программа”, экспериментатор получает в руки универсальный, быстро изменяемый и не сложный инструмент, который сначала должен быть выстроен, протестирован на “однофакторных” вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) математического раскрытия свойств объекта к исследованному объекту удовлетворена, с моделью может проводиться многофакторный “эксперимент”, дающий результаты всех требуемых качественных и количественных свойств и характеристик объекта (черного ящика). Рассмотрим некоторые примеры.

Пример

Для полного описания объекта, необходимо дать анализ работы элемента теплоэнергетического оборудования по распределению температуры, предположим (некоторый 3d объект). Для этого используем трехмерное нестационарное уравнение теплопроводности.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где ρ – плотность; C_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; величина температуры зависит $T=T(x,y,z,t)$; $\lambda = \lambda(x,y,z)$.

Самым сложным и ответственным в работе при постановке задачи заключается выбор связей и характеристик процесса, значимых для решения задачи и надлежащих включению в математическую модель.

Второй этап – это математическое исследование. В зависимости от точности исследования в моделях применяются различные математические методы и подходы. Для простых и линейных моделей зачастую удастся получить аналитические решения. Для более сложных процессов используют математические приближения, но с последующей проверкой на адекватность.

Для примера разберем, в нашей модели по определению температурного поля можно предположить $\lambda = \text{const}$.

Тогда

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

а если рассматривать бесконечно длинную и широкую пластину, то для описания модели необходимо добиться распределения температуры только по глубине пластины.

Отсюда, уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где $T = f(z, t)$; $\lambda = \text{const}$.



Рис. 2. Декомпозиция значимых характеристик теплопроводности

Учитывая, поэтапность для анализа теплопроводности и в соответствии с задачами, можно провести наиболее оптимальную декомпозицию для вычленения значимых параметров влияния.

Следующим моментом, будет определение тепловых потерь на теплотрубопроводе. Для этого можно использовать, известные методики по определению потерь, но все они будут строиться, в основном на интегральных (балансовых) соотношениях, и не учитывают пространственно-временные изменения определяемых параметров.

Для полного описания необходимо добавить в математическую модель процесса движения теплоносителя по трубопроводу некоторые составляющие, которые могут относиться как к управляемым параметрам так и могут быть просто константами, но без их участия выполнить задачу по выявлению воздействия на выходной параметр не возможно.



Рис. 3. Схема движения теплоносителя

На рис. 3 представлена схема, в которую входят традиционные: изолятор – утеплитель в виде минеральной ваты (толщина около 70 мм), пенополиуретан (ППУ, толщина 50 мм), где диаметр условного прохода 600 мм.

При помощи метода перебора ряд моделей, которые возможно применить для описания процесса, попробуем описать процесс прохождения теплоносителя.

Первая модель

- теплоноситель движется – турбулентно (работает уравнение Рейнольдса);
- теплофизические процессы зависят от температуры;
- процесс переноса тепла – динамический;
- изоляция – пористый материал.

Вторая модель

- теплоноситель движется – ламинарно (уравнения Навье-Стокса);
- теплофизические характеристики – постоянные;
- процесс переноса тепла – динамический;
- изоляция – плотная среда с эффективными параметрами теплоудержания.

Третья модель

- теплоноситель движется – ламинарно (модель пограничного слоя – уравнения Прандтля);
- теплофизические характеристики – постоянные;
- процесс переноса тепла – динамический;
- изоляция – сплошная среда с эффективными параметрами теплоудержания.

Методы численного решения математических моделей являются одним из правильных и адекватных математических средств решения задач. Есть такие задачи, когда без перебора решения численными методами сложных задач не удалось бы получить ответа. Помимо этого, зачастую требуется выполнить огромное число алгоритмических действий за быстрое время, где ответ не самое главное. Например, количество подаваемого сжиженного углеводорода, в зависимости от его физико-механических свойств или его температур.

Практическая работа №2

Составление уравнения теплопроводности

Основные положения теории теплопроводности, выявлены в законе Фурье, где предположено, что тепловой поток пропорционален (градиенту температуры) в однородной неподвижной среде:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T.$$

Для получения уравнения теплопроводности запишем закон сохранения энергии в виде математической модели:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + f \quad (4)$$

где f – определяет мощность внутренних источников тепла; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Подстановка выражения для теплового потока тепла в выражении (4) позволяет записать это в виде дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + f \quad (5)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (5) могут зависеть от точки пространства (неоднородная среда). В этом случае $C_p = C_p(x, y, z)$; $\rho = \rho(x, y, z)$; $\lambda = \lambda(x, y, z)$; $f = f(x, y, z)$, а само уравнение – линейное параболическое уравнение 2 порядка. Типичной в теплофизических исследованиях является ситуация, когда теплофизические

свойства среды зависят от T , т.е. в уравнении (5) $C_p = C_p(T)$; $\rho = \rho(T)$; $\lambda = \lambda(T)$; $f = f(T)$.

Таким образом, было получено квазилинейное уравнение теплопроводности.

Если теплофизические свойства среды постоянные (однородная среда), то уравнение теплопроводности (5) упрощается и принимает вид:

$$= a \Delta T + \frac{f}{\rho C_p} \quad (6)$$

Где, $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Другой частный случай уравнения теплопроводности (5) соответствует описанию установившихся тепловых полей. Стационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = -f \quad (7)$$

При моделировании теплопереноса в движущейся среде уравнение теплопроводности (5) соответствующим образом трансформируется, а именно:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (8)$$

В полученном выражении слагаемое $\vec{\text{grad}}T$ определяет изменение температуры за счет конвективного переноса.

Уравнение теплопроводности в прямоугольной декартовой системе координат (в плоском случае) имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (9)$$

в том случае, когда отсутствие внутренних тепловых источников.

В полярной системе координат $(r, \varphi) \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$, уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (10)$$

где $0 < r < \infty$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $T = T(r, \varphi, t)$; $\lambda = \lambda(r, \varphi, t, T)$.

Практическая работа №3

Начальные и граничные условия

Распределение температуры в точках среды на различные моменты времени определяется из уравнения в частных производных. Для однозначного определения температурного поля $T = T(x, y, z, t)$ помимо уравнения теплопроводности необходимо сформулировать дополнительные (замыкающие) соотношения:

1) условие для температуры во всей области решения в начальный момент времени, т.е.

$$T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma, \quad (11)$$

где Γ – область решения;

2) граничные условия:

а) граничные условия 1 рода

$$(x, y, z, t) = g(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma; \quad (12)$$

б) граничные условия 2 рода соответствуют заданию на границе теплового потока

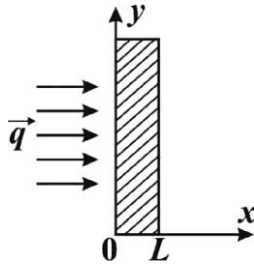


Рис. 4. Схема распределения температуры в однородном материале

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = q(x, y, z, t) \quad (x, y, z, t) \in \Gamma. \quad (13)$$

Например, на границе $x = 0$ – $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \big|_{x=0} = q$.

Если $q > 0 \Rightarrow$ происходит нагрев области.

Если $q < 0 \Rightarrow$ происходит охлаждение области.

На границе $x = L$ $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = q$.

в) граничные условия 3 рода моделируют конвективный теплообмен между поверхностью твердого тела с окружающей средой, которая имеет температуру T^e :

на границе $x = 0$:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T^e - T|_{x=0}), \text{ где } \alpha - \text{коэффициент теплообмена.}$$

г) граничные условия 4 рода (условия сопряжения). Эти условия ставятся на границе контакта двух сред с различными теплофизическими характеристиками.

$$-\lambda_1, \rho_1, C_{p1};$$

$$-\lambda_2, \rho_2, C_{p2};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 \leq x < x^* \\ \rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, x^* < x \leq L \end{array} \right. \quad (14)$$

на границе x^* рассматривают следующие условия:

$$T_1|_{x^*} = T_2|_{x^*}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x^*} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x^*} \end{array} \right\} \text{ условия идеального контакта}$$

В прикладных исследованиях большого внимания заслуживают условия неидеального контакта. Такой случай реализуется, напри-

мер, при недостаточно плотном соприкосновении шероховатых твердых тел. При неидеальном контакте тепловой поток непрерывен, т.е.

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x^*} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x^*} \quad (15)$$

Температура же при переходе границы неидеального контакта терпит разрыв, пропорциональный тепловому потоку

$$T_2 \big|_{x^*} - T_1 \big|_{x^*} = \frac{1}{\alpha} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (16)$$

где α - коэффициент контактного теплообмена, который связан с условиями контакта.

Практическая работа №4

Одномерная задача теплопроводности для неоднородного стержня

Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности для неоднородного стержня.

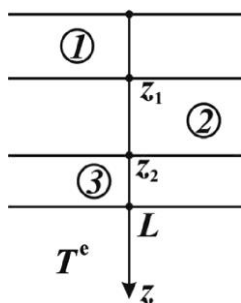


Рис. 5. Схема теплопроводности для неоднородного стержня

Математическая постановка задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} \rho_1 C_{p_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, & 0 \leq z < z_1; \\ \rho_2 C_{p_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, & z_1 < z < z_2; \\ \rho_3 C_{p_3} \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}, & z_2 < z \leq L; \end{cases} \quad (17)$$

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0: & \quad T(z) = T_0, \quad 0 \leq z \leq L; \\ z = 0: & \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T^e - T), \quad t > 0; \\ z = L: & \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T^e - T), \quad t > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T_1(t, z_1) = T_2(t, z_1), \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}; \\ \\ T_2(t, z_2) = T_3(t, z_2), \\ -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} \Big|_{z=z_2}. \end{cases} \quad (18)$$

Первым этапом при численном решении краевой задачи является построение разностной сетки. Рассмотрим равномерную пространственно-временную разностную сетку. Для этого введем шаг сетки по координате и по времени. Пусть h - шаг сетки по координате z ($h = \frac{L}{N-1}$, N – количество отрезков разбиения оси z), τ -шаг сетки по времени t .

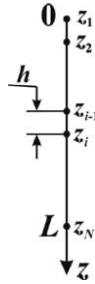


Рис. 6. Схема равномерной пространственно-временной разностной сетки

Формулы для вычисления всех узлов разностной сетки будут иметь следующий вид:

$$z_i = (i - 1) \cdot h, \quad i = 1, \dots, N$$

$$z_1 = 0;$$

$$z_2 = h;$$

$$z_{N-1} = (N - 2) \cdot h;$$

$$z_N = (N - 1) \cdot h = L.$$

$$t_n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, непрерывная функция $T(z, t)$ заменяется дискретной функцией $T(z_i, t_n) = T_i^n$.

После того как разностная сетка построена, необходимо провести дискретизацию дифференциального уравнения в частных производных (уравнения теплопроводности). Для аппроксимации частных производных воспользуемся конечными разностями, т.е. проведем следующую замену:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Тогда уравнение теплопроводности можно свести к разностному уравнению:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \alpha \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \left| \begin{array}{l} i = 2, \dots, N-1 \\ n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ - коэффициент температуропроводности.

Полученное разностное уравнение (1) решается методом прогонки. Для этого данное уравнение необходимо привести к канонической форме:

$$A_i = C_i = \frac{a}{h^2}, B_i = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, F_i = -\frac{T_i^n}{\tau}. \quad (20)$$

Сравнивая выражение (20) с уравнением (19) получаем следующие соотношения для коэффициентов уравнения (20):

$$A_i T_{i+1} - B_i T_i + C_i T_{i-1} = F_i, \quad i = 2, \dots, N-1.$$

Сравнивая выражения (20) с уравнением (19) получаем следующие соотношения для коэффициентов уравнения (20):

$$A_i = C_i = \frac{a}{h^2}, B_i = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad F_i = -\frac{T_i^n}{\tau}$$

Решение разностного уравнения (20) проводится на основе прогоночной формулы $T_i = aT_{i+1} + \beta_i$. Подставляя прогоночную формулу в виде $T_i = aT_{i+1} + \beta_i$.

В уравнение (20) получим соотношения для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (21)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (21) необходимо определить начальные прогоночные коэффициенты из левого граничного условия. В нашем случае имеем (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

$$\alpha_1 = \frac{2\alpha\tau\lambda}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(\lambda + h\alpha)},$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda h^2 T_1^n + 2\alpha\tau h \alpha T^e}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(\lambda + h\alpha)}.$$

Далее необходимо определить все прогоночные коэффициенты по формулам (21) за исключением узлов, в которых происходит сопряжение материалов, имеющих различные теплофизические характеристики. В этих узлах для определения прогоночных коэффициентов используют граничные условия IV рода из которых получают. Например, пусть в точке z_1 и z_2 (рисунок 6) находятся узлы z_{i*} и z_{i**} ,

соответственно, тогда прогоночные коэффициенты в этих узлах будут вычисляться по следующим формулам (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

$$\alpha_{i^*} = \frac{2\alpha_1\alpha_2\tau\lambda_2}{2\alpha_1\alpha_2\tau(\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)},$$

$$\beta_{i^*} = \frac{2\alpha_1\alpha_2\tau\beta_{i^*-1} + h^2(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)T_{i^*}^n}{2\alpha_1\alpha_2\tau(\lambda_2 + \lambda_1(1 - \alpha_{i^*-1})) + h^2(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)},$$

$$\alpha_{i^{**}} = \frac{2\alpha_2\alpha_3\tau\lambda_3}{2\alpha_2\alpha_3\tau(\lambda_3 + \lambda_2(1 - \alpha_{i^{**}-1})) + h^2(\lambda_2\alpha_3 + \lambda_3\alpha_2)},$$

$$\beta_{i^{**}} = \frac{2\alpha_2\alpha_3\tau\lambda_2\beta_{i^{**}-1} + h^2(\lambda_2\alpha_3 + \lambda_3\alpha_2)T_{i^{**}}^n}{2\alpha_2\alpha_3\tau(\lambda_3 + \lambda_2(1 - \alpha_{i^{**}-1})) + h^2(\lambda_2\alpha_3 + \lambda_3\alpha_2)}.$$

После того как найдены все прогоночные коэффициенты необходимо определить поле температуры по формулам $T_i = \alpha_i T_{i+1} + \beta_i$, $i = N-1, \dots, 1$, но для этого необходимо определить температуру на правой границе используя соответствующее граничное условия. Для рассматриваемой задачи получим (со вторым порядком аппроксимации относительно шага по пространственной координате):

$$T_N^{n+1} = \frac{\lambda h^2 T_N^n + 2\alpha\tau(\lambda\beta_{N-1} + h\alpha T^e)}{\lambda h^2 + 2\alpha\tau(\alpha h + \lambda(1 - \alpha_{N-1}))}.$$

В качестве примера определим температурное поле в составном стержне (рис. 3) через 3, 10 и 60 минут. Длина стержня $L = 0.09$ м. Начальная температура $T = 20$. Теплофизические характеристики пер-

вой части стержня (1) - $X = 0.6 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $c = 700 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{С)}$), теплофизические характеристики второй части стержня (2) - $X = 0.6 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 4220 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{С)}$ и для третьей части стержня (3) - $X = 46 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c = 460 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{С)}$. На границе $x = 0$ стержень контактирует с внешней средой с параметрами $\alpha = 20 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$, $T_{\text{ср}} = -20^\circ\text{С}$, а на границе $x = L$ также осуществляется теплообмен со средой с такими же параметрами.

Будем полагать, что при построении сетки в первой части пластины будет $n_1 = 20$ отрезков, во второй части - $n_2 = 40$ отрезков, а в третьей части - $n_3 = 30$. Тогда общее число узлов $N = n_1 + n_2 + n_3 + 1 = 91$.

Практическая работа №5

Численные методы решения нелинейных уравнений

Если законы функционирования модели не линейны, а моделируемые процесс или система обладают одной степенью свободы (т.е. имеют одну независимую переменную), то такая модель, описывается одним нелинейным уравнением.

Необходимость отыскания корней нелинейных встречается в расчетах систем автоматического управления и регулирования, собственных колебаний машин и конструкций, в задачах кинематического анализа и синтеза, плоских и пространственных механизмов и других задачах.

Дано нелинейное уравнение:

$$f(x) = 0$$

Необходимо решить это уравнение, т.е. найти его корень $\bar{x}$.

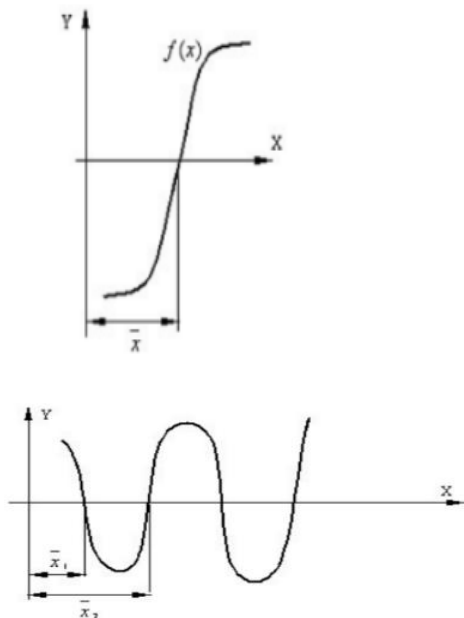


Рис. 7. График функции $f(x)$

Если функция имеет вид многочлена степени m ,

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad (22)$$

где a_i – коэффициенты многочлена, $i = \overline{1, m}$, то уравнение $f(x)=0$ имеет m корней (рис. 2).

Если функция $f(x)$ включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции от некоторого аргумента x , то уравнение (1) называется *трансцендентным уравнением*.

Примеры:

$$\arctg + 1 - x = 0,$$

$$x - e^{\frac{-x}{10}} = 0.$$

Такие уравнения обычно имеют бесконечное множество решений.

Как известно, не всякое уравнение может быть решено точно. В первую очередь это относится к большинству *трансцендентных уравнений*.

Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольные алгебраические уравнения степени, выше четвертой.

Однако точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задачу отыскания корней уравнения можно считать практически решенной, если мы сумеем найти корни уравнения с заданной степенью точности. Для этого используются приближенные (численные) методы решения.

Большинство употребляющихся приближенным методов решения уравнения являются, по существу, способами уточнения корней. Для их применения необходимо знание интервала изоляции $\square$ $a, b \sqsupset$, в котором лежит уточняемый корень уравнения (рис. 8).

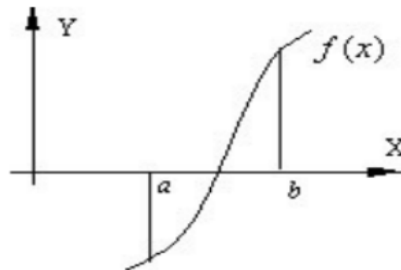


Рис. 8. Интервал изоляции

Процесс определения интервала изоляции $[a, b]$, содержащего только один из корней уравнения, называется отделением этого корня.

Процесс отделения корней проводят исходя из физического смысла прикладной задачи, графически, с помощью таблиц значений функции $f(x)$ или при помощи специальной программы отделения корней. Процедура отделения корней основана на известном свойстве непрерывных функций: если функция непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и на его концах имеет различные знаки, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то между точками a и b имеет хотя бы один корень уравнения (1). Если при этом знак функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не меняется, то корень является единственным на этом отрезке.

Процесс определения корней алгебраических и *трансцендентных уравнений* состоит из 2 этапов:

- отделение корней, - т.е. определение интервалов изоляции $[a, b]$, внутри которого лежит каждый корень уравнения;
- уточнения корней, - т.е. сужение интервала $[a, b]$ до величины равной заданной степени точности ε .

Для алгебраических и трансцендентных уравнений пригодны одни и те же методы уточнения приближенных значений действительных корней:

- метод половинного деления (метод дихотомии);

Практическая работа №6

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент для решения математических моделей

Компьютерное моделирование как новый метод научных исследований основывается на:

- построении математических моделей для описания изучаемых процессов;
- использовании новейших вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экспериментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель. Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. Более того, можно спрогнозировать поведение объекта в различных условиях.

Вычислительный эксперимент позволяет заменить дорогостоящий натурный эксперимент расчетами на ЭВМ. Он позволяет в короткие сроки и без значительных материальных затрат осуществить исследование большого числа вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации, что значительно сокращает сроки разработки сложных систем и их внедрение в производство.

Компьютерное моделирование вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования заставляет совершенствовать математический аппарат, используемый при построении математических моделей, позволяет, используя математические методы, уточнять, усложнять математические модели. Наиболее перспективным для проведения вычислительного эксперимента является его использование для решения крупных научно-технических и социально-экономических проблем современности (проектирование реакторов для атомных электростанций, проектирование плотин и гидроэлектростанций, магнитогидродинамических преобразователей энергии, и в области экономики- составление сбалансированного плана для отрасли, региона, для страны и др.).

В некоторых процессах, где натурный эксперимент опасен для жизни и здоровья людей, вычислительный эксперимент является единственно возможным (термоядерный синтез, освоение космического пространства, проектирование и исследование химических и других производств).

Для проверки адекватности математической модели и реального объекта, процесса или системы результаты исследований на ЭВМ

сравниваются с результатами для корректировки математической модели или решается вопрос о применимости построенной математической модели к проектированию либо исследованию заданных объектов, процессов или систем.

В заключение подчеркнем еще раз, что компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент позволяют свести исследование «нематематического» объекта к решению математической задачи. Этим самым открывается возможность использования для его изучения разработанного математического аппарата в сочетании с мощной вычислительной техникой. На этом основано применение математики и ЭВМ для познания законов реального мира и их использования на практике.

Итак, мы построили математическую модель рассматриваемого объекта, процесса или системы, т.е. представили прикладную задачу как математическую. После этого наступает второй этап решения прикладной задачи поиск или разработка метода решения сформулированной математической задачи. Метод должен быть удобным для его реализации на ЭВМ, обеспечивать необходимое качество решения.

Все методы решения математических задач можно разделить на 2 группы:

- точные методы решения задач;
- численные методы решения задач.

В точных методах решения математических задач ответ удастся получить в виде формул.

Например, вычисление корней квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

или, например, вычисление производных функций:

$$y = \sin(x), y' = \cos(x);$$

$$y = x^n, y' = nx^{n-1};$$

или вычисление определенного интеграла:

$$\int_b^a \cos(x) dx = \sin(b) - \sin(a); \quad (23)$$

Однако, подставляя числа в формулу в виде конечных десятичных дробей, мы все равно получаем приближенные значения результата.

Для большинства задач, встречающихся на практике, точные методы решения или неизвестны, или дают очень громоздкие формулы. Однако, они не всегда являются необходимыми. Прикладную задачу можно считать практически решенной, если мы сумеем с нужной степенью точности.

Для решения таких задач разработаны численные методы, в которых решение сложных математических задач сводится к последовательному выполнению большого числа простых арифметических операций. Непосредственная разработка численных методов относится к вычислительной математике.

Примером численного метода является метод прямоугольников для приближенного интегрирования, не требующий вычисления

первообразной для подынтегральной функции. Вместо интеграла вычисляется конечная квадратурная сумма:

$$\int_b^a f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \Delta x_i; \quad (24)$$

где

$x_i = a$ – нижний предел интегрирования;

$x_{n+1} = b$ – верхний предел интегрирования;

n – число отрезков, на которые разбит интеграл интегрирования (a, b) .

Δx_i – длина элементарного отрезка;

$f(x_i)$ – значение подынтегральной функции на концах элементарных отрезков интегрирования.

Чем больше число отрезков n , на которые разбит интервал интегрирования, тем ближе приближенное решение к истинному, т.е. тем точнее результат.

Таким образом, в прикладных задачах и при применении точных методов решения, и при применении численных методов решения результаты вычислений носят приближенный характер. Важно только добиться того, чтобы ошибки укладывались в рамки требуемой точности.

Численные методы решения математических задач известны давно, еще до появления ЭВМ, но ими пользовались редко и только в сравнительно простых случаях в силу чрезвычайной трудоемкости вычислений. Широкое применение численных методов стало возможным благодаря ЭВМ.

Практическая работа №7

Метод половинного деления

Дано нелинейное уравнение:

$$f(x) = 0$$

Найти корень уравнения, принадлежащий интервалу $[a, b]$, с заданной точностью ε .

Для уточнения корня методом половинного деления последовательно осуществляем следующие операции:

$$t = \frac{a + b}{2} \text{ координаты середины отрезка } [a, b];$$

В качестве нового интервала изоляции принимаем ту половину интервала, на концах которого функция имеет разные знаки (рис. 9).

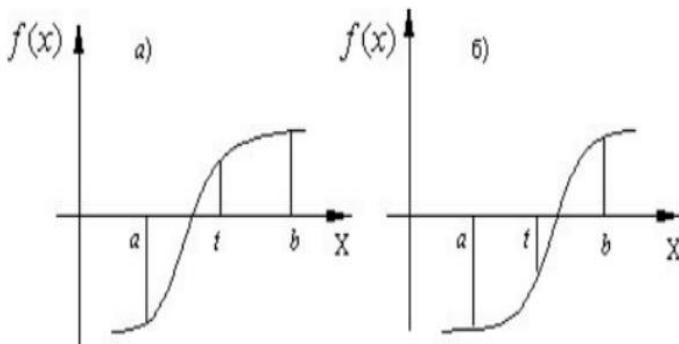


Рис. 9. Интервал изоляции

Для этого:

а) Вычисляем значение функции $f(x)$ в точках a и t .

б) Проверяем: если $f(a)f(t)<0$, то корень находится в левой половине интервала $[a,b]$ (рисунок 9.а) . Тогда отбрасываем правую половину интервала и делаем переприсвоение $b=t$.

с) Если $f(a)f(t)<0$ не выполняется, то корень находится в правой половине интервала $[a,b]$ (рисунок 9.б). Тогда отбрасываем левую половину и делаем переприсвоение $a=t$. В обоих случаях мы получим новый интервал $[a,b]$ в 2 раза меньше предыдущего.

Процесс, начиная с пункта 1, циклически повторяем до тех пор, пока длина интервала $[a,b]$ не станет равной либо меньше заданной точности, т.е.

$$|b - a| \leq \varepsilon \quad (25)$$

Схема алгоритма уточнения корней по методу половинного деления представлена на рис. 10.

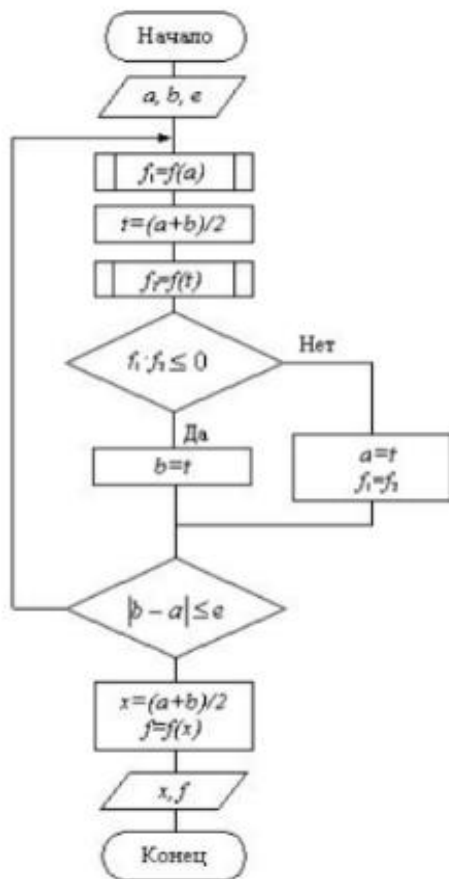


Рис. 10. Схема алгоритма уточнения

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
*к выполнению практических расчетов
для студентов направления 13.04.01
«Теплоэнергетика и теплотехника»*

Составитель
Кочегаров Алексей Викторович

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 28.11.2022.
Уч.- изд. л. 1,8 .

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический
университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84