

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА  
(Кафедра высшей математики  
и физико-математического моделирования)

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов А.В. Купцов

**ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО  
ИСЧИСЛЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЕ  
К ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Вариант. Исчисл. doc 12,3 Мб 14.03.2012 12,1 уч.-изд. л.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный  
технический университет »

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов  
А.В. Купцов

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО  
ИСЧИСЛЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЕ  
К ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2012

УДК 517.53

Элементы вариационного исчисления и приложение к теории управления: учеб. пособие / А.А. Катрахова, Е.М. Васильев, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», 2012. -213 с.

Учебное пособие состоит из шести глав: в первых главах излагаются основы вариационного исчисления, а в последней – приложение этого материала к теории управления. Приводятся образцы решения задач и упражнений.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям: 110800.68 «Агроинженерия» (магистерские образовательные программы «Автоматизация и управление технологическими процессами в сельском хозяйстве», «Энергосберегающие технологии в сельском хозяйстве»), 140400.68 «Электроэнергетика и электротехника» (магистерские образовательные программы «Электроприводы и системы управления электроприводов», «Технология проектирования и производства электрических машин для устойчивой работы в заданных условиях с учетом геометрии воздушного зазора»), 220400.62 «Управление в технических системах» (профиль «Управление и информатика в технических системах»), дисциплине «Математика».

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе MS Word и содержится в файле «Вариационное исчисление.doc»

Табл. 1. Ил. 90. Библиогр.: 19 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений  
Воронежского государственного университета  
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф.  
А.И. Шашкин);  
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Г. Задорожний  
© Катрахова А.А., Васильев Е.М., Купцов В.С.,  
Купцов А.В., 2012  
© Оформление. ФГБОУ ВПО «Воронежский  
государственный технический университет», 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Кроме задач, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции  $z = f(x)$ , в задачах физики возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин, называемых функционалами.

Функционалами называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций.

Например, функционалом является длина  $l$  дуги плоской (или пространственной) кривой, соединяющей две заданные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  (см. рис. А). Величина  $l$  может быть вычислена, если задано уравнение кривой  $y = y(x)$ ; тогда

$$l[y(x)] = \int_x^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

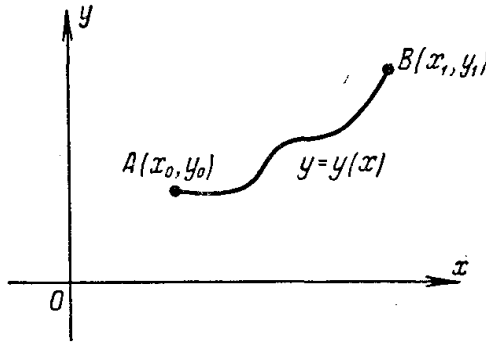


Рис. А.

Площадь  $S$  некоторой поверхности также является функционалом, так как она определяется выбором поверхности, т. е. выбором функции  $z(x, y)$ , входящей в уравнение поверхности  $z = z(x, y)$ . Как известно,

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

где  $D$  — проекция поверхности на плоскость  $Oxy$ .

Моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности также являются функционалами, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности.

Во всех этих примерах характерная для функционалов зависимость: функции (или вектор-функции) соответствует число, в то время как при задании функции  $z = f(x)$  числу соответствовало число.

*Вариационное исчисление* изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами*.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название *вариационных принципов* механики или физики. К числу таких вариационных принципов принадлежат: принцип наименьшего действия, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения количества движения, закон сохранения момента количества движения, различные вариационные принципы классической и релятивистской теории поля, принцип Ферма в оптике, принцип Кастилиано в теории упругости и т. д.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера (1707 — 1783 г.), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

*Задача о брахистохроне.* В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрейшего ската—*брахистохроне*. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки  $A$  и  $B$ , не лежащие на одной вертикальной пря-

мой, и обладающую тем свойством, что материальная точка скатится по этой линии из точки  $A$  в точку  $B$  в кратчайшее время (рис. Б).

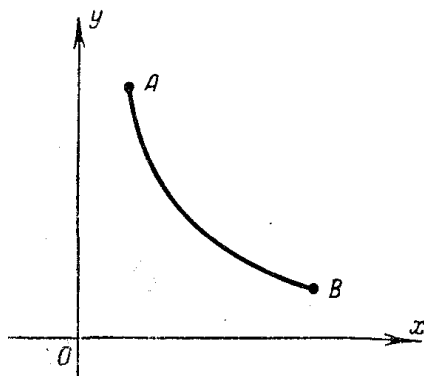


Рис. Б.

Легко видеть, что линией быстрого ската не будет прямая, соединяющая точки  $A$  и  $B$ , хотя она и является кратчайшим расстоянием между точками  $A$  и  $B$ , так как при движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмем кривую, более круто спускающуюся около точки  $A$  вниз, то хотя путь и удлинится, но значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстрого ската является циклоида.

*Задача о геодезических линиях.* Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$  (рис. В). Такие кратчайшие линии

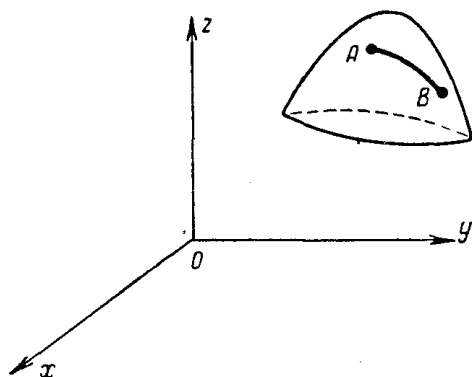


Рис. В.

называются геодезическими. Имеем типичную вариационную задачу на так называемый связанный или условный экстремум.

Необходимо найти минимум функционала

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

причем функции  $y(x)$  и  $z(x)$  должны быть подчинены условию. Эта задача была решена в 1698 году Я. Бернулли. Общий метод решения задач такого типа был изложен в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа.

*Изопериметрическая задача.* Требуется найти замкнутую линию заданной длины  $l$ , ограничивающую максимальную площадь  $S$ . Такой линией, как было известно еще в древней Греции, является окружность. В этой задаче требуется определить экстремум функционала  $S$  при наличии своеобразного дополнительного условия—длина кривой должна быть постоянна, т. е. функционал

$$l = \int \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

сохраняет постоянное значение. Условия такого типа называются изопериметрическими. Общие методы решения задач с изопериметрическими условиями были разработаны Л. Эйлером.

Ниже излагаются методы решения различных вариационных задач, где в основном исследуются на экстремум следующие часто встречающиеся в приложениях функционалы:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx$$

$$\iint_D F(x, y, z(x, y), z'_x, z'_y) dx dy,$$

в которых функции заданы, а функции являются аргументами функционалов.

## 1. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

### 1.1. Вариация и ее свойства

Методы решения вариационных задач, т. е. задач на исследование функционалов на максимум и минимум, весьма сходны с методами исследования на максимум и минимум функций. Поэтому ниже кратко приводится теория максимума и минимума функций и параллельно вводятся аналогичные понятия и доказать сходные теоремы для функционалов

1. Переменная величина  $z$  называется *функцией* переменной величины  $x$ , что обозначается так:  $z=f(x)$ , если каждому значению  $x$  из некоторой области изменения  $x$  соответствует значение  $z$ . Аналогично определяются и функции нескольких переменных.

1. Переменная величина  $v$  называется *функционалом* зависящим от функции  $y(x)$ , что обозначается так:  $v = v [y(x)]$ , если каждой функции  $y(x)$  из некоторого класса функций  $y(x)$  соответствует значение  $v$ , т. е. имеет место соответствие: функции  $y(x)$  соответствует число  $v$ . Также определяются и функционалы, зависящие от нескольких функций, и функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных



2. Приращением  $\Delta x$  аргумента  $x$  функции  $f(x)$  называется разность между двумя значениями этой переменной  $\Delta x = x - x_1$ . Если  $x$  - независимое переменное, то дифференциал  $x$  совпадает с приращением  $dx = \Delta x$ .

2. Приращением или вариацией  $\delta y$  аргумента  $y(x)$  функционала  $v[y(x)]$  называется разность между двумя функциями  $\delta y = y(x) - y_1(x)$ . При этом предполагается, что  $y(x)$  меняется произвольно в некотором классе функций.

3. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной*, если малому изменению  $x$  соответствует малое изменение функции  $f(x)$ .

3. Функционал  $v[y(x)]$  называется *непрерывным*, если малому изменению  $y(x)$  соответствует малое изменение функционала  $v[y(x)]$ .

Последнее определение нуждается в уточнении, так как сейчас же возникает вопрос, какие изменения функции  $y(x)$ , являющейся аргументом функционала, называются малыми или, что то же самое, какие кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  считаются мало отличающимися или близкими. Можно считать близкими функции  $y(x)$  и  $y_1(x)$  в том случае, если модуль их разности  $y(x) - y_1(x)$  мал для всех значений  $x$ , для которых задаются функции  $y(x)$  и  $y_1(x)$ , т. е. считать близкими кривые, близкие по координатам. Однако при таком определении близости кривых часто встречающиеся в приложениях функционалы вида

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

из-за наличия в подынтегральной функции аргумента  $y'$  лишь в исключительных случаях будут непрерывными. Поэтому более естественно считать близкими только те кривые, которые близки по ординатам и по направлениям касательных в соответствующих точках, т. е. требовать, чтобы для близких кривых не только модуль разности  $y(x) - y_1(x)$  был бы мал, но, кроме того, был бы мал и модуль разности  $y'(x) - y'_1(x)$ .

Иногда же оказывается необходимым считать близкими только те функции, для которых малы модули каждой разностей:

$$y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$$

В связи с этим приходится ввести следующие определения близости кривых  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$ . Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности  $y(x) - y_1(x)$  мал. Кривые  $y = y(x)$  и  $y = y_1(x)$  близки в смысле близости  $k$ -го порядка, если модули разностей малы.

$$\begin{aligned} & y(x) - y_1(x) \\ & y'(x) - y_1'(x) \\ & y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) \end{aligned}$$

На рис. 1.1 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка,

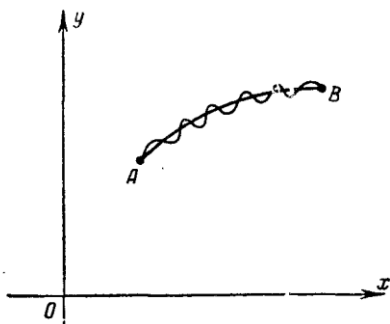


Рис. 1.1.

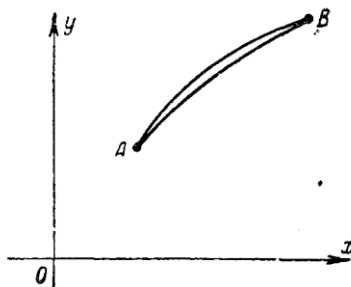


Рис. 1.2.

так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На рис. 1.2 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка. Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости  $k$ -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Теперь можно уточнить понятие непрерывности функционала.

3'. Функция  $f(x)$  непрерывна при  $x = x_0$ , если для любого положительного  $\varepsilon$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, |x - x_0| < \delta$$

3'. Функционал  $v[y(x)]$  непрерывен при  $y = y_0(x)$  в смысле близости  $k$ -го порядка, если для любого положительного  $\varepsilon$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что  $|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$ .

3'. Функционал  $v[y(x)]$  непрерывен при  $y = y_0(x)$  в смысле близости  $k$ -го. При этом подразумевается, что при  $|y(x) - y_0(x)| < \delta$   $x$  принимает значения, в которых функция  $f(x)$  определена

$$|y'(x) - y_0'(x)| < \delta, \dots, |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta$$

При этом подразумевается, что функция  $y(x)$  берется из класса функций, на котором функционал  $v[y(x)]$  определен. Можно определить понятие расстояния  $\rho(y_1, y_2)$  между кривыми  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  ( $x_0 \leq x \leq x_1$ ), и тогда близкими кривыми считать кривые, расстояние между которыми мало. Если считать  $\rho(y_1, y_2) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1(x) - y_2(x)|$ , т. е. ввести метрику пространства  $C_0$ , то приходим к понятию близости нулевого порядка. Если считать

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{p=1}^k \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y_1^p(x) - y_2^p(x)|$$

(предполагается, что  $y_1$  и  $y_2$  имеют непрерывные производные до порядка  $k$  включительно), то близость кривых понимается в смысле близости  $k$ -то порядка.

4. *Линейной функцией* называется функция  $l(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$l(cx) = cl(x)$ , где  $c$ -произвольная постоянная, и

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Линейная функция одной переменной имеет вид

$l(x) = kx$ , где  $k$  — постоянная.

4. *Линейным функционалом* называется функционал  $L[y(x)]$ , удовлетворяющий следующим условиям

$L[cy(x)] = cL[y(x)]$ , где  $c$  — произвольная постоянная и

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

Примером линейного функционала является

$$L[y\{x\}] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y') dx.$$

5. Если приращение функции  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  может быть представлено в виде,  $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x) \bullet \Delta x$  где  $A(x)$  не зависит от  $\Delta x$ ,  $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то функция называется *дифференцируемой*, а линейная по отношению к  $\Delta x$  часть приращения —  $A(x) \Delta x$  называется *дифференциалом функции* и обозначается  $df$ . Разделив на  $\Delta x$  и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим, что  $A(x) = f'(x)$ , и, следовательно,

$$df = f'(x) \Delta x$$

5. Если приращение функционала

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

можно представить в виде

$$\Delta v = L[y(x) + \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \max|\delta y|,$$

где  $L[y(x), \delta y]$  — линейный по отношению к  $\delta y$  функционал,  $\max|\delta y|$  — максимальное значение  $|\delta y|$  и  $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$  при  $\max|\delta y| \rightarrow 0$ , то линейная по отношению к  $|\delta y|$  часть приращения функционала, т. е.  $L[y(x), \delta y]$  называется *вариацией функционала* и обозначается  $\delta v$ . Итак, *вариация функционала* — это *главная, линейная по отношению к  $\delta y$ , часть приращения функционала*. При исследовании функционалов вариация играет такую же роль, какую играет дифференциал при исследовании функций. Можно дать и другое, почти эквивалентное, определение дифференциала функции и вариации функционала.

Рассмотрим значение функции  $f(x + \alpha \Delta x)$  при фиксированном  $x$  и  $\Delta x$  и изменяющихся значениях параметра  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  получим приращенное значение функции  $f(x + \Delta x)$ , при  $\alpha = 0$  получим исходное значение функции  $f(x)$ . Нетрудно проверить, что производная от  $f(x + \alpha \Delta x)$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  равна дифференциалу функции  $f(x)$  в точке  $x$ . Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0} = f'(x + \Delta x) \Delta x \Big|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x)$$

Точно так же для функции нескольких переменных

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно получить дифференциал путем дифференцирования

$$f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n)$$

по  $\alpha$ , полагая затем  $\alpha = 0$ . Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) \Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df$$

И для функционалов вида  $v[y(x)]$  или более сложных, зависящих от нескольких неизвестных функций или от функций нескольких переменных, можно определить вариацию как производную от функционала  $v[y(x) + \alpha \delta y]$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$ . Действительно, если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то его приращение имеет вид:

$$\Delta v = v[y(x) + \alpha \delta y] - v[y(x)] = L(y, \alpha \delta y) \alpha + \max |\delta y|$$

Производная от  $v[y(x) + \alpha \delta y]$  по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$  равна

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y) + \beta[y(x), \alpha \delta y] \alpha + \max |\delta y|}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] \alpha + \max |\delta y|}{\alpha} = L(y, \delta y) \end{aligned}$$

так как в силу линейности

$$L(y, \alpha \delta y) = \alpha L(y, \delta y), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \alpha \delta y] \alpha + \max |\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta[y(x), \alpha \delta y] \max |\delta y| = 0$$

потому что  $\beta[y(x), \delta y] \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Итак, если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует и вариация в смысле производной по параметру при начальном значении параметра, и оба эти определения эквивалентны.

Второе определение вариации несколько шире первого, так как существуют примеры функционалов, из приращения которых нельзя выделить главной линейной части, но вариация в смысле второго определения существует.

6. Дифференциал функции  $f(x)$  равен

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

6. Вариация функционала  $v[y(x)]$  равна

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0}$$

Определение. Функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума, если значения функционала  $v[y(x)]$  на любой близкой к  $y = y_0(x)$  кривой не больше, чем  $v[y_0(x)]$ , то

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0$$

Если  $\Delta v \leq 0$ , причем  $\Delta v = 0$  только при  $y(x) = y_0(x)$ , то говорят, что на кривой  $y = y_0(x)$  достигается строгий максимум. Аналогично определяется кривая  $y = y_0(x)$ , на которой реализуется минимум. В этом случае  $\Delta v \geq 0$  для всех кривых, близких к кривой  $y = y_0(x)$ .

7. Теорема. Если дифференцируемая функция  $f(x)$  достигает максимума или минимума во внутренней точке  $x = x_0$ , то в этой точке  $df = 0$ .

7. Теорема. Если функционал  $v[y(x)]$ , имеющий вариацию достигает максимума или минимума при  $y = y_0(x)$ , где  $y(x)$  - внутренняя точка области определения функционала, то при  $y = y_0(x)$ ,  $\delta v = 0$ .

*Доказательство теоремы для функционалов.* При фиксированных  $y_0(x)$  и  $\delta y$   $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$  является функцией  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$  достигает максимума или минимума, следовательно, производная  $\varphi'(0) = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

т. е.  $\delta v = 0$ . Итак, на кривых, на которых достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

Понятие *экстремума* функционала нуждается в уточнении. Говоря об относительном максимуме или минимуме, имеется в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала на близких кривых. Но, как было указано выше, близость кривых может быть понимаема различно, поэтому в определении максимума

или минимума надо указывать, какого порядка близость имеется в виду.

Если функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности  $y(x) - y_0(x)$  мал, т. е. по отношению к кривым, близким к  $y = y_0(x)$  в смысле близости нулевого порядка, то максимум или минимум называется *сильным*.

Если же функционал  $v[y(x)]$  достигает на кривой  $y = y_0(x)$  максимума или минимума лишь по отношению к кривым  $y = y(x)$ , близким к  $y = y_0(x)$  в смысле близости первого порядка, т. е. по отношению к кривым, близким к  $y = y_0(x)$  не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то максимум или минимум называется *слабым*. Очевидно, что если на кривой  $y = y_0(x)$  достигается сильный максимум (или минимум), то давно достигается и слабый, так как если кривая близка к  $y = y_0(x)$  в смысле близости первого порядка, то она близка и в смысле близости нулевого порядка. Однако возможно, что на кривой  $y = y_0(x)$  достигается слабый максимум (минимум) и в то же время не достигается сильный максимум (минимум), т. е. среди кривых  $y = y(x)$ , близких к  $y = y_0(x)$  как по ординатам, так и по направлению касательных, может не быть таких, для которых  $v[y(x)] > v[y_0(x)]$  (в случае минимума  $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ ), а среди кривых  $y = y(x)$ , близких только по ординатам, но уже не близких по направлению касательных, могут найтись и такие, для которых  $v[y(x)] > v[y_0(x)]$  (в случае минимума  $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ ). Различие между сильным и слабым экстремумом не будет иметь существенного значения при выводе основного необходимого условия экстремума. Заметим еще, что если на кривой  $y = y_0(x)$  достигается экстремум для

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x, \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$$

где  $y(x, \alpha)$ -любое семейство допустимых кривых, причем при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  функция  $y(x, \alpha)$  должна соответственно превращаться в  $y_0(x)$  и  $y_0(x) + \delta y$ .

## 1.2. Уравнение Эйлера

Исследуем на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1.1)$$

причем граничные точки допустимых кривых закреплены:  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$  (рис. 1.3).

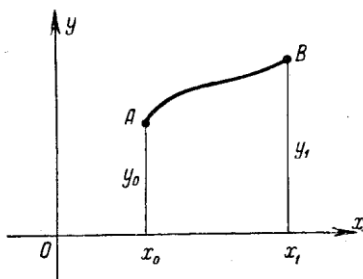


Рис. 1.3.

Функцию  $F(x, y, y')$  будем считать трижды дифференцируемой. Необходимым условием экстремума является обращение в нуль вариации функционала. Покажем, как применяется эта основная теорема к рассматриваемому функционалу, причем мы еще раз повторим предыдущее рассуждение применительно к функционалу (1.1). Предположим, что экстремум достигается на дважды дифференцируемой кривой  $y = y(x)$  (требуя лишь существования производных первого порядка у допустимых кривых, можно иным методом доказать, что у кривой, реализующей экстремум, существует и вторая производная). Возьмем какую-нибудь близкую к  $y = y(x)$  допустимую кривую  $y = \bar{y}(x)$  и включим кривые  $y = y(x)$  и  $y = \bar{y}(x)$  в однопараметрическое семейство кривых

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))$$

при  $\alpha = 0$  получим кривую  $y = y(x)$ , при  $\alpha = 1$  имеем  $y = \bar{y}(x)$  (рис. 1.4). Как мы уже знаем, разность  $\bar{y}(x) - y(x)$  называется вариацией функции  $y(x)$  и обозначается  $\delta y$ .



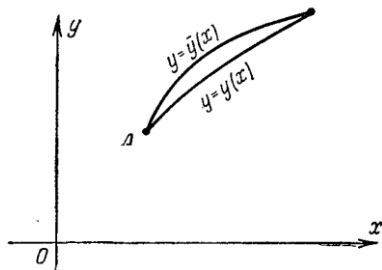


Рис. 1.4.

Вариация  $\delta y$  в вариационных задачах играет роль, аналогичную роли приращения независимого переменного  $\Delta x$  в задачах на исследование экстремумов функций  $f(x)$ . Вариация функции  $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$  является функцией  $x$ . Эту функцию можно дифференцировать один или несколько раз, причем  $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x)$ , т. е. производная вариации равна вариации производной, и аналогично

$$(\delta y)'' = \bar{y}''(x) - y''(x)$$

.....

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)$$

Рассмотрим семейство  $y = y(x, \alpha)$ , где  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ , содержащее при  $\alpha = 0$  кривую, на которой достигается экстремум, а при  $\alpha = 1$  — некоторую близкую допустимую кривую — так называемую кривую сравнения. Если рассматривать значения функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

только на кривых семейства  $y = y(x, \alpha)$ , то функционал превращается в функцию:  $v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha)$ , так как значение параметра  $\alpha$  определяет кривую семейства  $y = y(x, \alpha)$  и тем самым определяет и значение функционала  $v[y(x, \alpha)]$ . Функция  $\varphi(\alpha)$  достигает своего экстремума при  $\alpha = 0$ , так как при  $\alpha = 0$  получаем  $y = y(x)$ , и функционал, по предположению, достигает

экстремума по сравнению с любой близкой допустимой кривой и, в частности, по отношению к близким кривым семейства  $y = y(x, \alpha)$ . Необходимым условием экстремума функции  $\varphi(\alpha)$  при  $\alpha = 0$ , как известно, является обращение в нуль ее производной при  $\alpha = 0$ :  $\varphi'(0) = 0$ . Так как

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx$$

Вычислим производную:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx,$$

где  $F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$ ,  $F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$  и

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \delta y'] dx;$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)) \delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \delta y'] dx.$$

$\varphi'(0)$  называется вариацией функционала и обозначается  $\delta v$ .

Необходимое условие экстремума функционала  $v$  заключается в обращении в нуль его вариации:  $\delta v = 0$ . Для функционала:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

это условие имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0$$

Интегрируем второе слагаемое по частям и, принимая во внимание, что  $\delta y' = (\delta y)'$ , получим

$$\delta v = \left[ F_y \cdot \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_y \right) \delta y dx$$

Так как

$$\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \text{ и } \delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

(допустимые кривые в рассматриваемой простейшей задаче проходят через фиксированные граничные точки). Необходимое условие экстремума приобретает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_y \right) \delta y dx = 0 \tag{1.2}$$

причем первый множитель  $F_y - \frac{d}{dx} F_y$ , кривой  $y = y(x)$ , реализующей экстремум, является заданной непрерывной функцией, а второй множитель  $\delta y$ , ввиду произвола в выборе кривой сравнения  $y = y(x)$ , является произвольной функцией, удовлетворяющей лишь некоторым весьма общим условиям, а именно: функция  $\delta y$  в граничных точках  $x = x_0$  и  $x = x_1$  обращается в нуль, непрерывна и дифференцируема один или несколько раз,  $\delta y$  или  $\delta y$  и  $\delta y'$  малы по абсолютной величине. Для упрощения полученного условия (1.2) воспользуемся следующей леммой:

*Основная лемма вариационного исчисления. Если для каждой непрерывной функции  $\eta(x)$*

$$\int_{x_0}^{x_1} \hat{O}(x) \eta(x) dx = 0$$

где функция  $\hat{O}(x)$  непрерывна на отрезке  $[x_0, x_1]$ , то  $\hat{O}(x) \equiv 0$  на том же отрезке.

**Замечание.** Утверждение леммы и ее доказательство не изменяются, если на функции  $\eta(x)$  наложить следующие ограничения:  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ ;  $\eta(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p$ ,  $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon (s = 0, 1, \dots, q; q \leq p)$ .

Доказательство. Предположив, что в точке  $x = \bar{x}$ , лежащей на отрезке  $x_0 < x < x_1$ ,  $\Phi(x) \neq 0$ , придем к противоречию. Действительно, из непрерывности функции  $\Phi(x)$  следует, что если  $\Phi(x) \neq 0$ , то  $\Phi(x)$  сохраняет знак в некоторой окрестности  $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$  точки  $\bar{x}$ ; но тогда, выбрав функцию  $\eta(x)$  также сохраняющей знак в этой окрестности и равной нулю вне этой окрестности (рис. 1.5), получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0$$

Так как произведение  $\Phi(x)\eta(x)$  сохраняет знак на отрезке  $(\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1)$  и обращается в нуль вне этого отрезка. Мы пришли к противоречию, следовательно,  $\Phi(x) \equiv 0$ . Функцию  $\eta(x)$  можно выбирать, например, так:  $\eta(x) = 0$  вне отрезка  $(\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1)$   $\eta(x) = k(x - \bar{x}_0)^{2n}(x - \bar{x}_1)^{2n}$  на отрезке  $(\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1)$ , где  $n$  — целое положительное число,  $k$  — постоянный множитель. Очевидно, что функция  $\eta(x)$  удовлетворяет упомянутым выше условиям: она непрерывна, имеет непрерывные производные до порядка  $2n-1$ , обращается в нуль в точках  $x_0$  и  $x_1$  и может сделана по модулю сколь угодно малой вместе со своими производными за счет уменьшения модуля множителя  $k$ .

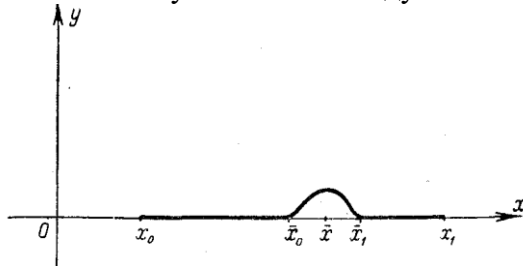


Рис. 1.5.

Замечание. Дословно так же можно доказать, что если функция  $\Phi(x, y)$  непрерывна в области  $D$  на плоскости  $(x, y)$  и

$$\iint_D \Phi(x, y)\eta(x, y)dx dy = 0$$

При произвольном выборе функции  $\eta(x, y)$ , удовлетворяющей лишь некоторым общим условиям (непрерывность,

дифференцируемость один или несколько раз, обращение в нуль на границах области  $D$ ,  $|\eta| < \varepsilon$ ,  $|\eta'_x| < \varepsilon$ ,  $|\eta'_y| < \varepsilon$ , то  $\Phi(x, y) \equiv 0$  в области  $D$ , Функцию  $\eta(x, y)$  при доказательстве основной леммы можно выбрать, например, так:  $\eta(x, y) = 0$  вне круговой окрестности достаточно малого радиуса точки  $(x, y)$ , в которой  $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , а в этой окрестности точки  $\varepsilon_1(x, y)$  функция  $\eta(x, y) = k [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - \varepsilon_1^2]^{2n}$  (рис. 1.6). Аналогичная лемма справедлива и для  $n$ -кратных интегралов.

Применим теперь основную лемму для упрощения полученного выше необходимого условия (1.2) экстремума простейшего функционала (1.1)

$$\int_{x^0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0$$

Все условия леммы выполнены: на кривой, реализующей экстремум, множитель  $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})$  является непрерывной функцией, а вариация  $\delta y$  является произвольной функцией, на которую наложены лишь предусмотренные в основной лемме ограничения общего характера, следовательно  $(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) = 0$  на кривой  $y = y(x)$ , реализующей экстремум рассматриваемого функционала, т. е.  $y = y(x)$  является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'} = 0, \quad F_y - F_{xy'} - F_{yy'} - F_{y'y'} y'' = 0$$

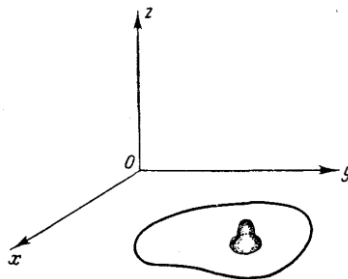


Рис. 1.6.

Это уравнение называется *уравнением Эйлера*. Интегральные кривые уравнения Эйлера  $y=y(x, C_1, C_2)$  называются экстремалиями. Только на *экстремалиях* может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

Для нахождения кривой, реализующей экстремум функционала (1.1), интегрируем уравнение Эйлера и определяем обе произвольные постоянные, входящие в общее решение этого уравнения, из условий на границе  $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ . Только на удовлетворяющих этим условиям экстремалиях может реализоваться экстремум функционала. Однако для того чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться достаточными условиями экстремума.

Напомним, что краевая задача

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным. Во многих вариационных задачах существование решения очевидно из физического или геометрического смысла задачи, и если решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, единственно, то эта единственная экстремаль и будет решением рассматриваемой вариационной задачи.

Пример 1. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx;$$

$$y(\pi/2) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ ; его общим решением является  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ ; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = \sin x$ .

Пример 2. На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx;$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' - 6x = 0$ , откуда  $y = x^3 + C_1x + C_2$ . Используя граничные условия, получаем:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ; следовательно, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = x^3$ .

*Рассмотрим некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.*

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_y(x, y) = 0$ , так как  $F_y \equiv 0$ .

Решение полученного конечного уравнения  $F_y(x, y) = 0$  не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$ . Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая  $F_y(x, y) = 0$  проходит через граничные точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ , существует кривая, на которой достигается экстремум.

*F не зависит от y':  $F = F(x, y)$ .*

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_y(x, y) = 0$ , так как  $F_y \equiv 0$ .

Решение полученного конечного уравнения  $F_y(x, y) = 0$  не содержит элементов произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$ . Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи, вообще говоря, не существует. Лишь в исключительных случаях, когда кривая  $F_y(x, y) = 0$

Пример 3.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y_2 dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_y = 0$  или  $y = 0$ .

Экстремаль  $y = 0$  проходит через граничные точки только при  $y_0 = 0$  и  $y_1 = 0$  (рис. 1.7).

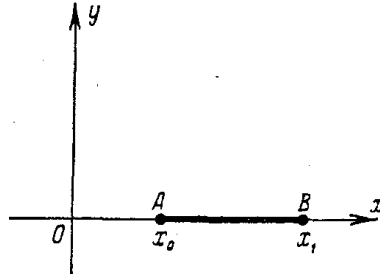


Рис. 1.7.

Если  $y_0 = 0$  и  $y_1 = 0$ , то, очевидно, функция  $y=0$  реализует минимум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

так как  $v[y(x)] \geq 0$ , причем  $v = 0$  при  $y = 0$ .

Если же хотя бы одно из  $y_0$  и  $y_1$  не равно нулю, то минимум функционала на непрерывных функциях не достигается, что и понятно, так как можно выбрать последовательность непрерывных функций  $y_n(x)$ , графики которых состоят из все более и более круто спускающейся из точки  $(x_0, y_0)$  к оси абсцисс дуги кривой, затем из отрезка оси абсцисс, почти совпадающего со всем отрезком  $(x_0, x_1)$ , и, наконец, возле точки  $x_1$  круто поднимающейся к точке  $(x_1, y_1)$  дуги кривой (рис. 1.8). Очевидно, что на кривых такой последовательности значения функционала сколь угодно мало отличаются от нуля и, следовательно, нижняя грань значений функционала равна нулю, однако эта нижняя грань не может достигаться на непрерывной кривой, так как для любой непрерывной кривой  $y = y(x)$ , отличной от тождественного нуля, интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx > 0$$

Эта нижняя грань значений функционала достигается на разрывной функции (рис. 1.9)



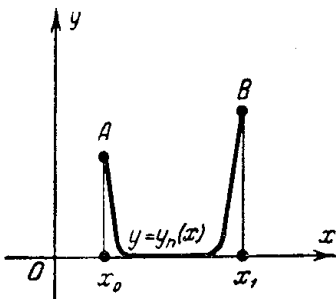


Рис. 1.8.

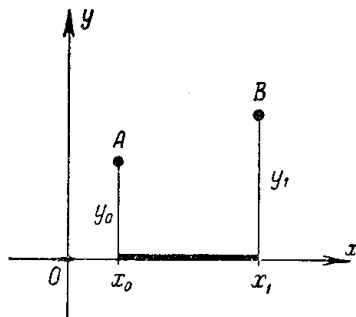


Рис. 1.9.

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = 0, \quad x_0 < x < x_1$$

$$y(x_1) = y_1$$

Функция  $F$  линейно зависит от  $y'$ :

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$$

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left( M + N \frac{dy}{dx} \right) dx$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} N(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Но это опять, как и в предыдущем случае, конечно, не дифференциальное уравнение. Кривая  $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0$ , вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, следовательно, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе

непрерывных функций. Если же  $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \equiv 0$ , то  $Mdx + Ndy$  является точным дифференциалом и

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left( M + N \frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} (Mdx + Ndy)$$

не зависит от пути интегрирования, значение функционала  $v$  постоянно на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

#### Пример 4

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = a.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0$  или  $y - x = 0$ .

Первое граничное условие  $y(0) = 0$  удовлетворяется, но второе граничное условие удовлетворяется лишь при  $a = 1$ . Если же  $a \neq 1$ , то экстремали, удовлетворяющей граничным условиям, не существует.

#### Пример 5.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy') dx \quad [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y dx + x dy)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1$$

Уравнение Эйлера превращается в тождество  $1 \equiv 1$ . Подынтегральное выражение является точным дифференциалом, и интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} d(yx) = x_1 y_1 - x_0 y_0$$

по какой бы кривой мы ни интегрировали. Вариационная задача не имеет смысла.

*F зависит лишь от  $y'$ :  $F = F(y')$ .*

Уравнение Эйлера имеет вид  $F_{y'y'} y'' = 0$ , так как  $F_y = F_{xy} = F_{yy} = 0$ . Отсюда  $y'' = 0$  или  $F_{y'y'} = 0$ . Если  $y'' = 0$ , то  $y = C_1 x + C_2$  — двухпараметрическое семейство прямых линий. Если же уравнение  $F_{y'y'}(y') = 0$  имеет один или несколько действительных корней  $y' = k_i$ , то  $y = k_i x + C$ , и мы получаем однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе  $y = C_1 x + C_2$ . Таким образом, в случае  $F = F(y')$  экстремалиями являются всевозможные прямые линии  $y = C_1 x + C_2$ .

Пример 6. Длина дуги кривой

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

имеет экстремалиями прямые линии  $y = C_1 x + C_2$

Пример 7. Время  $t[y(x)]$ , затрачиваемое на перемещение по некоторой кривой  $y = y(x)$  из точки  $A(x_0, y_0)$  в точку  $B(x_1, y_1)$ , если скорость  $\frac{ds}{dt} = v(y')$  зависит только от  $y'$ , является функционалом вида. Следовательно, экстремалиями этого функционала являются прямые линии.

*F* зависит лишь от  $x$  и  $y'$ :  $F = F(x, y')$ .

Уравнение Эйлера приобретает вид  $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$  и, следовательно, имеет первый интеграл.  $F_{y'}(x, y') = C_1$ , причем так как полученное уравнение первого порядка  $F_{y'}(x, y') = C_1$  не содержит  $y$ , то уравнение может быть проинтегрировано или путем непосредственного разрешения относительно  $y'$  и интегрирования, или путем введения подходящим образом выбранного параметра.

Пример 8. Функционал

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx$$

( $t$  — время, затрачиваемое на перемещение по кривой  $y = y(x)$  из одной точки в другую, если скорость движения  $v = x$ , так как

если  $\frac{ds}{dt} = x$ , то  $\frac{ds}{x} = dt$  и

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

Первый интеграл уравнения Эйлера  $F_{y'} = C_1$  имеет вид

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

Это уравнение проще всего интегрируется, если ввести параметр, полагая  $y' = tg t$ ; тогда

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \sin t$$

$$x = \bar{C}_1 \sin t, \quad \text{где} \quad \bar{C}_1 = \frac{1}{C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = tg t, \quad dy = tg t dx = tg t \cdot \bar{C}_1 \cos t dt = \bar{C}_1 \sin t dt$$

интегрируя, получаем  $y = -\bar{C}_1 \cos t + C_2$ . Итак,

$$x = \bar{C}_1 \sin t, \quad y - C_2 = -\bar{C}_1 \cos t$$

или, исключая  $t$ , получаем  $x^2 - (y - C_2)^2 = \bar{C}_1^2$  — семейство окружностей с центрами на оси ординат.

$F$  зависит лишь от  $y$  и  $y'$ :  $F = F(y, y')$ .

Уравнение Эйлера имеет вид:  $F_y - F_{yy'} - F_{y'y'} y'' = 0$  так как  $F_{xy'} = 0$ . Если умножить почленно это уравнение на  $y'$ , то, как нетрудно проверить, левая часть превращается в точную производную. Действительно,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = y' (F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'')$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл  $F - y' F_{y'} = C_1$ , причем так как это уравнение первого порядка не содержит явно  $x$ , то оно может быть проинтегрировано путем разрешения относительно  $y'$  и разделения переменных или путем введения параметра.

Пример 9. Задача о наименьшей поверхности вращения: определить кривую с заданными граничными точками, от вращения которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади (рис. 1.10).

Как известно, площадь поверхности вращения

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_2}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

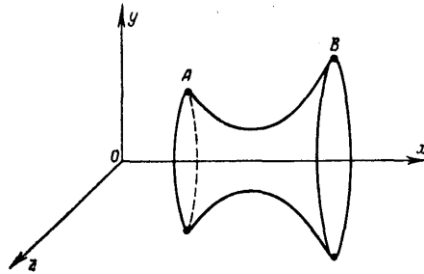


Рис. 1.10.

Подынтегральная функция зависит лишь от  $y$  и  $y'$  и, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера будет иметь вид  $F - y'F_{y'} = C_1$  или в данном случае  $y$

$$y = \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

После упрощений получаем

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

Проще всего это уравнение интегрируется подстановкой  $y' = \operatorname{sh}t$ . тогда  $y = C_1 \operatorname{ch} t$ , а

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh}t dt}{\operatorname{sh}t} = C_1 dt, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Итак, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$x = C_1 t + C_2$$

$$y = C_1 \operatorname{ch} t$$

Исключая параметр  $t$ , будем иметь  $y = C_1 ch \frac{x-C_2}{C_1}$  семейство цепных линий, от вращения которых образуются поверхности, называемые катеноидами. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия прохождения искомой линии через заданные граничные точки (в зависимости от положения точек  $A$  и  $B$  может существовать одно, два или ни одного решения).

Пример 10. Задача о брахистохроне: определить кривую, соединяющую заданные точки  $A$  и  $B$ , при движении по которой материальная точка скатится из точки  $A$  в точку  $B$  в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Поместим начало координат в точку  $A$ , ось  $Ox$  направим горизонтально, ось  $Oy$  — вертикально вниз. Скорость движения материальной точки  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$  откуда находим время, затрачиваемое на перемещение точки из положения  $A(0, 0)$  в положение  $B(x_1, y_1)$ :

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Так как этот функционал также принадлежит к простейшему виду и его подынтегральная функция не содержит явно  $x$ , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл  $F - y'F_{y'} = C$ , или в данном случае  $(\sqrt{1+y'^2} / \sqrt{y}) - (y'^2 / \sqrt{y(1+y'^2)}) = C$ . Откуда после упрощений будем иметь  $1/\sqrt{y(1+y'^2)} = C$  или  $y(1+y'^2) = C_1$ .

Введем параметр  $t$ , полагая  $y' = ctg t$ ; тогда получим:

$$y = \frac{C_1}{1+ctg^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{ctg t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t) dt$$

$$x = C_1 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$$

Следовательно, в параметрической форме уравнение искомой линии имеет вид

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

Если преобразовать, параметр подстановкой  $2t=t_1$  и принять во внимание, что  $C_2=0$ , так как при  $y=0, x=0$ , то мы получим уравнение семейства циклоид в обычной форме:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1),$$

где  $C_1/2$ - радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку  $B(x_1, y_1)$ . Итак, брахистохроной является циклоида.

### 1.3. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$

Для получения необходимых условий экстремума функционала в более общего вида

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при заданных граничных значениях всех функций

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

$$y_1(x_1) = y_{11}, y_2(x_1) = y_{21}, \dots, y_n(x_1) = y_{n1}$$

будем варьировать лишь одну из функций

$$y_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал  $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$  превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от  $y_i(x)$ ,

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \tilde{v}[y_i]$$

рассмотренного в 1.2. и функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

Так как это рассуждение применимо к любой функции  $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ , то мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

определяющих, вообще говоря,  $2n$ -параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  — семейство экстремалей данной вариационной задачи. Если, в частности, функционал зависит лишь от двух функций  $y(x)$  и  $z(x)$ :

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

$$y(x_0) = y_0 \quad z(x_0) = z_0 \quad y(x_1) = y_1 \quad z(x_1) = z_1$$

т. е. определяется выбором пространственной кривой  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  (рис. 1.11), то, варьируя только  $y(x)$  и фиксируя  $z(x)$ , мы изменяем нашу кривую так, что ее проекция на плоскости  $xOz$  не изменяется, т. е. кривая все время остается на проектирующем цилиндре  $z = z(x)$  (рис. 1.12).

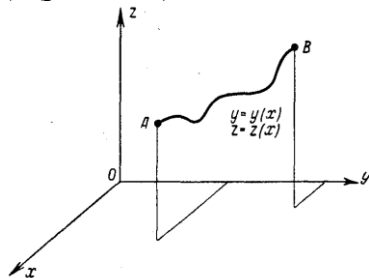


Рис. 1.11.

Аналогично, фиксируя  $y(x)$  и варьируя  $z(x)$ , мы варьируем кривую так, что она все время лежит на проектирующем цилиндре  $y = y(x)$ . При этом получаем систему двух уравнений Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$



Пример 1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz] dx$$

$$y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = -1.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид:  $y'' - z = 0, z'' - y = 0$ . Исключая одну из неизвестных функций, например  $z$ , получаем  $y^{IV} - y = 0$ .

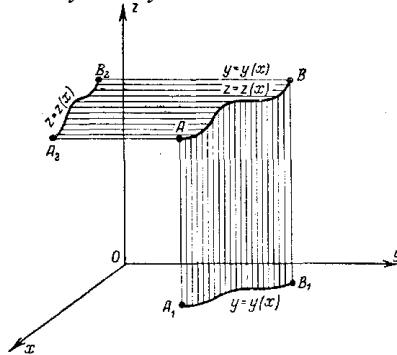


Рис. 1.12.

Интегрируя, это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, будем иметь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$z = y''; z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

Используя граничные условия, находим:  $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 1$  следовательно,  $y = \sin x, z = -\sin x$ .

Пример 2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z') dx$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$F_{y'y''} y'' + F_{y'y'} y' = 0 \quad F_{z'z''} z'' + F_{z'z'} z' = 0$$

откуда, считая  $F_{y'y'} F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ , получим  $y'' = 0$  и  $z'' = 0$  или  $y = C_1 x + C_2$ ,  $z = C_3 x + C_4$  — семейство прямых линий в пространстве.

**Пример 3.** Найти дифференциальные уравнения линий распространения света в оптически неоднородной среде, в которой скорость распространения света равна  $v(x, y, z)$ .

Согласно принципу Ферми свет распространяется из одной точки  $A(x_0, y_0)$  в другую  $B(x_1, y_1)$  по кривой, для которой время  $T$  прохождения света будет наименьшим.

Если уравнение искомой кривой  $y = y(x)$  и  $z = z(x)$ , то

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx$$

Система уравнений Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

будет определять линии распространения света.

#### 1.4. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка

Исследуем на экстремум функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

где функцию  $F$  будем считать дифференцируемой  $n + 2$  раза по всем аргументам и будем предполагать, что граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}, \end{aligned}$$

т. е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее, производных до порядка  $n - 1$  включительно. Предпо-

ложим, что экстремум достигается на кривой  $y = y(x)$ , дифференцируемой  $2n$  раз, и пусть  $y = y(x)$  — уравнение некоторой кривой сравнения, также дифференцируемой  $2n$  раз.

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[y(x) - y(x)]$  или  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ . При  $\alpha = 0$   $y(x, \alpha) = y(x)$ , при  $\alpha = 1$   $y(x, \alpha) = \bar{y}(x)$ . Если рассматривать значение функционала  $v[y(x)]$  только на кривых семейства  $y = y(x, \alpha)$ , то функционал превратится в функцию параметра  $\alpha$ , достигающую экстремума при  $\alpha = 0$ ; следовательно,  $\frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0} = 0$ . Эта производная называется вариацией функционала  $v$  и обозначается  $\delta v$ :

$$\delta v = \left[ \frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right]_{\alpha=0} = \int_{x_2}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx$$

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части один раз:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx$$

третье слагаемое — два раза:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[ \frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx$$

последнее слагаемое —  $n$  раз:

$$\int_{x_2}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = [F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[ \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_{x_0}^{x_1} + \dots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \delta y dx$$

Принимая во внимание граничные условия, в силу которых при  $x = x_0$  и при  $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$  вариации, окончательно получим

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx$$

при произвольном выборе функции  $\delta y$  и так как первый множитель под знаком интеграла является непрерывной функцией  $x$  на той же кривой  $y=y(x)$ , то в силу основной леммы первый множитель тождественно равен нулю:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

Итак, функция  $y = y(x)$ , реализующая экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

должна быть решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение порядка  $2n$  носит название уравнения Эйлера—Пуассона, а его интегральные кривые называются экстремальми рассматриваемой вариационной задачи. Общее решение этого уравнения содержит  $2n$  произвольных постоянных, которые могут быть, вообще говоря, определены из  $2n$  граничных условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (1 + y'^2) dx$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} (2y'') = 0 \text{ или } y'' = 0; \text{ его общим решением является}$$

$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$ . Используя граничные условия, получаем:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 0$ . Итак, экстремум может достигаться лишь на прямой  $y=x$ .

Пример 2. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(y'' - y^2 + x^2) dx$$

удовлетворяющую условиям:

$$y(0)=1, \quad y'(0) = 0. \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид  $y^{iv} - y = 0$ ; его общим решением  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 0$ . Итак, экстремум может достигаться лишь на кривой  $y = \cos x$ .

Пример 3. Определить экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{-l}^l \left( \frac{1}{2} \mu y''^2 + p y \right) dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям:  $y(-l)=0$ ,  $y'(-l)=0$ ,  $y(l)=0$ ,  $y'(l)=0$

К этой вариационной задаче сводится нахождение оси изогнутой упругой цилиндрической балки, заделанной на концах. Если балка однородна, то  $p$  и  $\mu$  постоянны и уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$p + \frac{d^2}{dx^2} (\mu y'') = 0 \quad \text{или} \quad y^{(4)} = -\frac{p}{\mu}$$

откуда

$$y = -\frac{px^4}{24\mu} + y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Используя граничные условия, окончательно находим

$$y = -\frac{px^4}{24\mu}(x^4 - 2l^2x^2 + l^4) \quad \text{или} \quad y = -\frac{px^4}{24\mu}(x^2 - 2l^2)^2$$

Если функционал  $v$  имеет вид

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^n, z, z', \dots, z^m) dx$$

то, варьируя только  $y(x)$  и считая  $z(x)$  фиксированным, мы находим, что функции  $y(x)$  и  $z(x)$ , реализующие экстремум, должны удовлетворять уравнению Эйлера — Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0.$$

Варьируя  $z(x)$  и считая  $y(x)$  фиксированным, получим, что те же функции должны удовлетворять уравнению

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^m} = 0.$$

Функции  $z(x)$  и  $y(x)$  должны удовлетворять системе двух уравнений

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0,$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^m} = 0$$

Точно так же можно рассуждать и при исследовании на экстремум функционала, зависящего от любого числа функций:

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y_1^{n_1}, y_2, y_2', \dots, y_2^{n_2}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{n_m}) dx.$$

Варьируя какую-нибудь одну функцию  $y_i(x)$  и сохраняя остальные неизменными, получим основное необходимое

условие экстремума в виде:  $F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{n_i}} = 0$

## 1.5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Исследуем на экстремум функционал

$$v[z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

причем на границе  $C$  области  $D$  значения функции  $z(x, y)$  заданы, т.е. задан пространственный контур  $C$ , через который должны

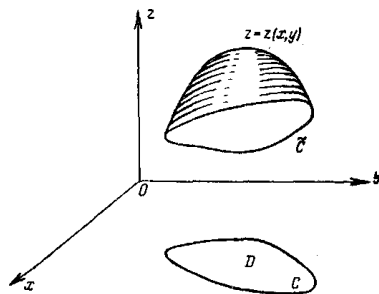


Рис.1.13.

проходить все допустимые поверхности (рис. 1.13). Для сокра-

щения записи обозначим  $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ . Функцию  $F$  будем

считать трижды дифференцируемой. Поверхность  $z = z(x, y)$ , на которой реализуется экстремум, будем предполагать дважды дифференцируемой.

Рассмотрим опять однопараметрическое семейство поверхностей  $z = z(x, y, a) = z(x, y) + a \delta z$ , где  $\delta z = z(x, y) - z(x, y)$ , включающее при  $a = 0$  поверхность  $z = z(x, y)$ , на которой реализуется экстремум, а при  $a = 1$  — некоторую допустимую поверхность  $z = z(x, y)$ . На функциях семейства  $z(x, y, a)$  функционал  $v$  превращается в функцию  $a$ , которая должна иметь экстремум при  $a = 0$ ; следовательно,  $\frac{\partial}{\partial a} v[z(x, y, a)]_{a=0} = 0$ . Называя производную от  $v[z(x, y, a)]$  по  $a$  при  $a = 0$  вариацией функционала и обозначая ее  $\delta v$ , будем иметь:

$$\delta v = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha)) dx dy \right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy,$$

где

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z,$$

$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha \delta p,$$

$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha \delta q$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q,$$

то

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy =$$

$$= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy -$$

$$- \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

где  $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$  - так называемая полная частная производная по  $x$ .

При ее вычислении  $y$  считается фиксированным, но зависимость  $z$ ,  $p$  и  $q$  от  $x$  учитывается:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}$$

По известной формуле Грина



$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (N dy - M dx)$$

получим

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] \delta z dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

Последний, интеграл равен нулю, так как на контуре  $C$  вариация  $\delta z = 0$ , потому что все допустимые поверхности проходят через один и тот же пространственный контур  $\tilde{C}$ . Следовательно,

$$- \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy = \iint_D [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy \text{ и не-}$$

обходимое условие экстремума

$$\iint_D (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dx dy = 0$$

принимает вид

$$\iint_D \left( F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right) \delta z dx dy = 0.$$

Так как вариация  $\delta z$  произвольна (на  $\delta z$  наложены лишь ограничения общего характера, касающиеся непрерывности и дифференцируемости, обращения в нуль на контуре), а первый множитель непрерывен, то по основной лемме на поверхности  $z = z(x, y)$ , реализующей экстремум,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0.$$

Следовательно,  $z(x, y)$  является решением уравнения

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которому должна удовлетворять функция  $z(x, y)$ , реализующая экстремум, носит название *уравнения Остроградского*.

Пример 1.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

на границе  $C$  области  $D$  значения функции  $z$  заданы:  $z = f(x, y)$ .  
Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

или в краткой записи  $\Delta z = 0$ , т.е. является известным уравнением Лапласа, причем надо найти непрерывное в  $D$  решение этого уравнения, принимающее заданные значения на границе области  $D$ . Это — одна из основных задач математической физики, называемая задачей Дирихле.

Пример 2.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy$$

на границе области  $D$  функция  $z$  задана. Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

или в краткой записи  $\Delta z = f(x, y)$ . Это уравнение, называемое уравнением Пуассона, также весьма часто встречается в задачах математической физики.

Пример 3. Задача о нахождении поверхности минимальной площади, натянутой на данный контур  $C$ , сводится к исследованию на минимум функционала

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

т. е. средняя кривизна в каждой точке равна нулю. Известно, что физической реализацией минимальных поверхностей являются мыльные пленки, натянутые на заданный контур  $C$ . Для функционала

$$v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \iint_D \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

где  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ , из основного необходимого условия экстремума

$\delta v = 0$  совершенно аналогично получим следующее уравнение Остроградского:

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{F_{p_i}\} = 0,$$

которому должна удовлетворять функция  $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  реализующая экстремум функционала  $v$ . Например, для функционала

$$v = \iiint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

уравнение Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Если подынтегральная функция функционала  $v$  зависит от производных более высокого порядка, то, применяя несколько раз преобразования, использованные при выводе уравнения Остроградского, в качестве необходимого условия экстремума получаем, что функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению, аналогичному уравнению Эйлера—Пуассона. Например, для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx dy$$

получим уравнение

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} = 0$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Этому уравнению четвертого порядка в частных производных должна удовлетворять функция, реализующая экстремум функционала  $v$ . Например, для функционала

$$v = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

функция  $z$ , реализующая экстремум, должна удовлетворять так называемому бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$$

которое обычно кратко записывается так:  $\Delta \Delta z = 0$ .

Для функционала

$$v = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2zf(x, y) \right] dx dy$$

функция  $z(x, y)$ , реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению  $\Delta \Delta z = f(x, y)$ .

К бигармоническому уравнению приводят также задачи на экстремум функционала

$$v = \iint_D \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

или функционала более общего вида

$$v = \iint_D \left\{ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

где  $\mu$  — параметр.

## 1.6. Вариационные задачи в параметрической форме

Во многих вариационных задачах решение удобнее искать в параметрическом виде. Например, в изопериметрической задаче о нахождении замкнутой кривой заданной длины  $l$ , ограничивающей максимальную площадь  $S$ , неудобно искать решение в виде  $y = y(x)$ , так как по самому смыслу задачи функция  $y(x)$  неоднозначна (рис. 1.14), поэтому в рассматриваемой задаче целесообразно искать решение в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Следовательно, в данном случае надо искать экстремум функционала

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

при наличии условия  $l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , где  $l$  — постоянная.

Пусть при исследовании на экстремум некоторого функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

оказалось более целесообразным искать решение в параметрической форме  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ; тогда функционал преобразуется к следующему виду:

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F \left( x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) \dot{x}(t) dt$$

Заметим, что полученная после преобразования переменных подынтегральная функция

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

не содержит  $t$  явно и является по отношению к переменным  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  однородной функцией первой степени однородности.

Таким образом, функционал  $v[x(t), y(t)]$  является не произвольным функционалом вида

$$\int_{t_2}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$$

зависящим от двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , а лишь весьма частным случаем такого функционала, так как его подынтегральная функция не содержит

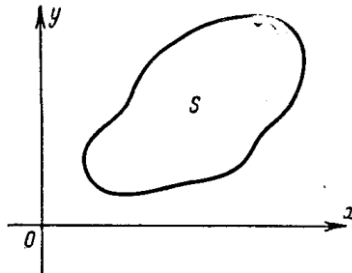


Рис.1.14.

явно  $t$  и однородна первой степени однородности по отношению к переменным  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ . Если бы мы перешли к какому-нибудь другому параметрическому представлению искомой кривой  $x=x(\tau), y=y(\tau)$ , то функционал  $v[x, y]$  преобразовался

бы к виду  $\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right)\dot{x}_\tau d\tau$ . Следовательно, подынте-

гральная функция функционала  $v$  не меняет своего вида при изменении параметрического представления кривой. Таким образом, функционал  $v$  зависит от вида кривой, а не от ее параметрического представления. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: если подынтегральная функция функционала

$$v[x(y), y(t)] = \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$$

не содержит  $t$  явно и является однородной функцией первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , то функционал  $v[x(t), y(t)]$  зависит лишь от вида кривой  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , а не от ее параметрического представления. Действительно, пусть

$$v[x(y), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$$

где  $\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ .

Перейдем к новому параметрическому представлению, полагая  $\tau = \varphi(t)$  ( $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ ),  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau), y(\tau), \dot{x}(\tau)\dot{\varphi}(t), \dot{y}(\tau)\dot{\varphi}(t)) \frac{d\tau}{\dot{\varphi}(t)}$$

В силу того, что  $\Phi$  является однородной функцией первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , будем иметь

$$\Phi(x, y, \dot{x}\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

откуда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}_t, \dot{y}_t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau) d\tau$$

т.е., подынтегральная функция не изменилась при изменении параметрического представления.

Длина дуги  $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  площадь, ограниченная некоторой кривой  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$  являются примерами таких функционалов.

Для нахождения экстремалей функционалов рассматриваемого типа

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

где  $\Phi$  — однородная функция первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  как и для функционалов с произвольной подынтегральной функцией  $\Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$  надо решить систему уравнений Эйлера

$$\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{y}} = 0$$

Однако в рассматриваемом частном случае эти уравнения не являются независимыми, так как им должны удовлетворять наряду с некоторым решением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  и любые другие пары функций, дающие другое параметрическое представление той же кривой, что в случае независимости уравнений Эйлера привело бы к противоречию с теоремой существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений.

Это указывает на то, что для функционалов вида

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

где  $\Phi$  — однородная функция первой степени однородности относительно  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , одно из уравнений Эйлера является следствием другого. Для нахождения экстремалей надо взять одно из уравнений Эйлера и проинтегрировать его совместно с уравнением, определяющим выбор параметра. Например, к уравнению  $\Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{\dot{x}} = 0$  можно присоединить уравнение

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$  указывающее, что за параметр взята длина дуги кривой.

## 1.7. Некоторые приложения

Основным вариационным принципом в механике является принцип стационарного действия Остроградского - Гамильтона, утверждающий, что среди возможных, т. е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действи-



тельности осуществляется движение, дающее стационарное значение (т. е. значение, соответствующее аргументу, для которого вариация функционала равна нулю) интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

где  $T$ —кинетическая, а  $U$  — потенциальная энергия системы.

Применим этот принцип к нескольким задачам механики.

Пример 1. Дана система материальных точек с массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  на которую действуют силы  $\overline{F}_i$ , обладающие силовой функцией (потенциалом) —  $U$ , зависящей только от координат:

$$F_i x = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_i y = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_i z = -\frac{\partial U}{\partial z_i};$$

где  $F_i x, F_i y, F_i z$  — координаты вектора  $\overline{F}_i$ , действующего на точку  $(x_i, y_i, z_i)$ . Найти дифференциальные уравнения движения системы.

В данном случае кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

а потенциальная энергия системы равна  $U$ .

Система уравнений Эйлера для интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

имеет вид

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0;$$

или

$$m_i \ddot{x}_i - F_{i^x} = 0, \quad m_i \ddot{y}_i - F_{i^y} = 0, \quad m_i \ddot{z}_i - F_{i^z} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Если бы движение было подчинено еще некоторой системе независимых связей  $\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m, m < 3n$ ) Из уравнений связей можно было бы выразить  $m$  переменных через  $3n - m$  независимых переменных (не считая времени  $t$ ) или выразить все  $3n$  переменных через  $3n - m$  новых, уже независимых, координат  $q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$ . Тогда  $T$  и  $U$  можно было бы также рассматривать как функции  $q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}$  и  $t$ :

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n-m}, t)$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, t)$$

и система уравнений Эйлера имела бы вид

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3n - m)$$

**Пример 2.** Выведем дифференциальное уравнение свободных колебаний струны. Поместим начало координат в один из концов струны. Струна в состоянии покоя под влиянием натяжения расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс (рис. 1.15). Отклонение от положения равновесия  $u(x, t)$  будет функцией абсциссы  $x$  и времени  $t$ .

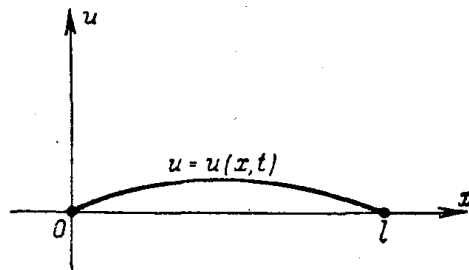


Рис.1.15.

Потенциальная энергия  $U$  элемента абсолютно гибкой струны пропорциональна растяжению струны. Участок струны  $dx$  в деформированном состоянии, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, имеет длину  $ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx$  и,

следовательно, удлинение элемента равно  $(\sqrt{1+u_x'^2} - 1)dx$ . По формуле Тейлора  $\sqrt{1+u_x'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x'^2$ . Считая их малым и пренебрегая более высокими степенями  $u_x'$ , получим, что потенциальная энергия элемента равна  $\frac{1}{2}ku_x'^2 dx$ , где  $k$  — множитель пропорциональности, а потенциальная энергия всей струны равна  $\frac{1}{2} \int_0^1 ku_x'^2 dx$ .

Кинетическая энергия струны равна  $\frac{1}{2} \int_0^1 pu_t'^2 dx$

где  $\rho$  - плотность. Интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} (T-U)dt$  имеет в данном случае вид

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} pu_t'^2 - \frac{1}{2} ku_x'^2 \right] dx dt$$

Уравнение движения струны будет уравнением Остроградского для функционала  $v$ . Итак, уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (pu_t') - \frac{\partial}{\partial x} (ku_x') = 0$$

Если струна однородна, то  $p$  и  $k$  — постоянные, и уравнение колеблющейся струны упрощается:

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Допустим теперь, что на струну действует еще внешняя сила  $f(t,x)$ , перпендикулярная к струне в ее положении равновесия и рассчитанная на единицу массы. Как легко проверить, силовая функция этой внешней силы, действующей на элемент

струны, равна  $pf(t,x)udx$ ; следовательно, интеграл Остроградского-Гамильтона

$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} p u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_x'^2 + pf(t, x)u \right] dx dt$$

а уравнение вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial t} (p u_t') - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x') - pf(t, x) = 0$$

или, если струна однородна,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$$

Также можно получить уравнение колеблющейся мембраны.

**Пример 3.** Выведем уравнение колебаний прямолинейного стержня. Направим ось абсцисс по оси стержня, находящегося в положении равновесия. Отклонение от положения равновесия  $u(x, t)$  будет функцией  $x$  и времени  $t$ , кинетическая энергия стержня длины  $l$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l p u_t'^2 dx$$

Будем считать стержень нерастяжимым. Потенциальная энергия упругого стержня при постоянной кривизне пропорциональна квадрату кривизны. Следовательно, дифференциал  $dU$  потенциальной энергии стержня равен

$$dU = \frac{1}{2} k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}^2,$$

а потенциальная энергия всего стержня, кривизна оси которого, вообще говоря, переменна, будет равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}^2 dx$$

Предположим, что отклонения стержня от положения равновесия малы и членом  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  в знаменателе можно пренебречь, тогда

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Интеграл Остроградского — Гамильтона имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} p u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_{xx}''^2 \right] dx dt$$

Следовательно, в случае свободных колебаний упругого стержня будем иметь следующее уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (p u_t') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k u_{xx}'') = 0$$

Если стержень однороден, то  $p$  и  $k$  — постоянные, и уравнение колебаний стержня преобразуется к виду

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

Если на стержень действует внешняя сила  $f(t, x)$ , то надо еще учесть потенциал этой силы (см. предыдущий пример). Принцип, стационарного действия может быть применен при выводе уравнений поля. Рассмотрим скалярное, векторное или тензорное поле  $\varpi = \varpi(x, y, z, y)$ . Интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  в данном случае, вообще говоря, будет равен четырехкратному интегралу по пространственным координатам  $x, y, z$  и по времени  $t$  от некоторой функции  $L$ , называемой *плотностью функции Ла-*

гранжа или лагранжианом. Обычно лагранжиан является функцией  $\varpi, \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \frac{\partial \varpi}{\partial t}$

$$L=L(\varpi, \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \frac{\partial \varpi}{\partial t})$$

и, следовательно, действие имеет вид

$$\iiint\limits_D L\left(\varpi, \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \frac{\partial \varpi}{\partial t}\right) dx dy dz dt$$

Согласно принципу стационарного действия уравнение поля является уравнением Остроградского для функционала

$$L_{\varpi} - \frac{\partial}{\partial x} \{L_{p_1}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{L_{p_2}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{L_{p_3}\} - \frac{\partial}{\partial t} \{L_{p_4}\} = 0$$

$$p_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial \varpi}{\partial z}, \quad p_4 = \frac{\partial \varpi}{\partial t}$$

*Задачи для самостоятельного решения.*

1. Найти экстремали функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

*Ответ:*  $(x-c_1)^2 + y^2 = c_2^2$ .

2. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy') dx;$$

*Ответ:* Интеграл не зависит от пути интегрирования. Задача не имеет решения.

3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2xy^2 y') dx;$$

*Ответ:* В классе непрерывных функций экстремум не достигается.

4. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1+x^2y') dx$$

*Ответ:* Экстремальями – это гиперболы  $y=C_1/x+C_2$ .

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx$$

*Ответ:*  $y=C_1\sin(4x-C_2)$

6. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx$$

*Ответ:*  $y=-x^2/4+C_1x+C_2$ .

7. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx$$

*Ответ:*  $y=sh(C_1x+C_2)$ .

8. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x) dx$$

*Ответ:*  $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+0,5\sin x$ .

9. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y'' + x^2) dx$$

*Ответ:*  $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$ .

10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y''^2) dx$$

*Ответ:*  $y=x^7/7!+C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$ .

11. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx$$

Ответ:  $y = (C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x$ ,  $z = 2y + y''$  - вычисляется.

12. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

13. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

14. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_2}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx$$

Ответ:  $y = C_1x^4 + C_2$ .

15. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

Ответ:  $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 0,5 e^x x$ .

16. Найти экстремали функционала



$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx$$

Ответ:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x / 2$ .

17. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left( y^2 + y'^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x} \right) dx$$

Ответ:  $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \ln(\operatorname{ch} x)$ .

18. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y'^2 + 2y^2 + 2xy) dx$$

Ответ:  $y = C_1/x^2 + C_2 x + x \ln(x) / 3$ .

19. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x) dx$$

Ответ:  $y = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x - x^2 \sin x / 4$ .

## 2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

### 2.1. Простейшая задача с подвижными границами

При исследовании функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

предполагалось, что граничные точки заданы.

Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, — кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой  $y = y(x)$  достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой  $y = y(x)$ , и, следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие — функция  $y(x)$  должна быть решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Итак, кривые  $y = y(x)$ , на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалими. Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными граничными точками такими условиями были  $y(x_0) = y_0$  и  $y(x_1) = y_1$ .

В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума — равенства нулю вариации  $\delta v$ . Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях  $y = y(x, C_1, C_2)$  уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал  $v[y(x, C_1, C_2)]$  превращается

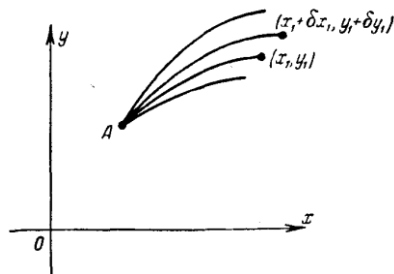


Рис. 2.1.

в функцию параметров  $C_1$  и  $C_2$  и пределов интеграции  $x_0$  и  $x_1$  а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции. Для упрощения будем считать, что одна из граничных точек, например  $(x_0, y_0)$ , закреплена, а другая  $(x_1, y_1)$  может перемещаться и переходит в точку  $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$ , или, как обычно обозначают в вариационном исчислении,  $(x + \delta x_1, y + \delta y_1)$ . Допустимые кривые  $y = y(x)$  и  $y = y(x) + \delta y$  будем считать близкими, если модули вариаций  $\delta x$  и  $\delta y$  малы, и 'малы модули приращений  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  (приращения  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  обычно называют вариациями предельных значений  $x_1$  и  $y_1$ ). Экстремали, проходящие через точку  $(x_0, y_0)$ , образуют пучок экстремалей  $y = y(x, C_1)$ . Функционал  $v[y(x, C_1)]$  на кривых этого пучка превращается в функцию  $S$ , и  $x_1$ . Если кривые пучка  $y = y(x, C_1)$  в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то  $v[y(x, C_1)]$  можно рассматривать как однозначную функцию  $x_1$  и  $y_1$ , так как задание  $x_1$  и  $y_1$ , определяет экстремаль пучка (рис. 2.1) и тем самым определяет значение функционала. Вычислим вариацию функционала  $v[y(x, C_1)]$  на экстремальных пучка  $y = y(x, C_1)$  при перемещении граничной точки из положения  $(x_1, y_1)$  в положение  $(x + \delta x_1, y + \delta y_1)$ . Так как функционал  $v$  на кривых пучка превратился в функцию  $x_1$  и  $y_1$ , то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции. Выделим из приращения  $\Delta v$  главную линейную по отношению к  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  часть:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx + \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') dx \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части преобразуем с помощью теоремы о среднем значении:

$$\int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F \Big|_{x=x_1 + \theta \delta x_1} \delta x_1$$

в силу непрерывности функции  $F$  будем иметь:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1$$

Итак,

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1 \delta x_1$$

Второе слагаемое правой части преобразуем путем разложения подынтегральной функции по формуле Тейлора

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y, y') \delta y + F_{y'}(x, y, y') \delta y' dx + R,$$

где  $R$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\delta y$  или  $\delta y'$ . В свою очередь линейная часть

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx$$

может быть преобразована путем интегрирования по частям второго слагаемого подынтегральной функции к виду

$$\left[ F_{y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Значения функционала берутся лишь на экстремалих, следовательно,  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ . Так как граничная точка  $(x_0, y_0)$  закреплена.

Следовательно,  $\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \left[ F_{y'} \delta y \right]_{x=x_1}$ . Заметим, что

$\delta y|_{x=x_1}$  не равно  $\delta y_1$  — приращению  $y_1$ , так как  $\delta y_1$  — это приращение  $y_1$  при перемещении граничной точки в положение  $(x + \delta x_1, y + \delta y_1)$ , а  $\delta y|_{x=x_1}$  — это приращение ординаты в точке  $x_1$  при переходе от экстремали, проходящей через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  и к экстремали, проходящей через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x + \delta x_1, y + \delta y_1)$  (рис. 2.2). Из чертежа видно, что

$$BD = \delta y|_{x=x_1}; FC = \delta y_1; EC \approx y(x_1) \delta x_1; BD = FC - EC \text{ или}$$

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1$$

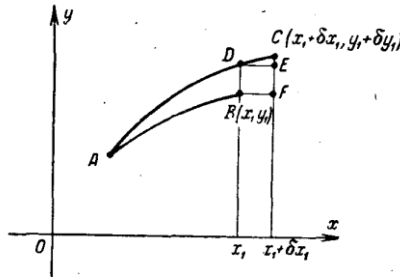


Рис. 2.2.

При этом приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

Итак, окончательно имеем: 
$$\int_x^{x+\delta x} F dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') dx \approx F_y|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1)$$

где приближенные равенства также справедливы с точностью до членов порядка выше первого относительно  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta v &= F|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1) = \\ &= (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 \end{aligned}$$

или

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1$$

где  $\bar{v}(x_1, y_1)$ - функция, в которую превратился функционал  $v$  на экстремалях  $y = y(x, C_1)$ ,  $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$ ,  $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$  - приращение координат граничной точки. Основное необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  приобретает вид

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 = 0$$

Если вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  независимы, то отсюда следует, что

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \text{ и } F_{y'}|_{x=x_1} = 0$$

Однако чаще приходится рассматривать случай, когда вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  зависимы.

Пусть, например, правая граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по некоторой кривой  $y_1 = \varphi(x_1)$ .

Тогда  $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$  и, следовательно, условие принимает вид  $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]\delta x_1 = 0$  или, так как  $\delta x_1$  изменяется произвольно, то  $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$ . Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами  $\varphi'$  и  $y'$  в граничной точке. Оно называется *условием трансверсальности*. Условие трансверсальности совместно с условием  $y_1 = \varphi(x_1)$  позволяет, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка  $y = y(x, C_1)$ , на которых может достигаться экстремум. Если граничная точка  $(x_0, y_0)$  может перемещаться по некоторой кривой  $y_0 = \psi(x_0)$ , то совершенно так же обнаружим, что в точке  $(x_0, y_0)$  должно удовлетворяться условие трансверсальности

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0.$$

**Пример 1.** Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Условие трансверсальности  $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$  имеет в данном случае

$$\text{вид } A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + A(x, y)y'(\varphi' - y')/\sqrt{1 + y'^2} = 0 \text{ или}$$

$A(x, y)(1 + \varphi'y')/\sqrt{1 + y'^2} = 0$  предполагая, что  $A(x, y) \neq 0$  в граничной точке, получим  $1 + \varphi'y' = 0$  или  $y' = -\frac{1}{\varphi'}$ , т.е. условие трансверсальности свелось в данном случае к условию ортогональности.

**Пример 2.** Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^{x_1} (\sqrt{1+y'^2} / y) dx, \text{ причем } y(0)=0, \text{ а } y_1=x_1-5 \text{ (рис. 2.3).}$$

Интегральными кривыми уравнения Эйлера являются окружности

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

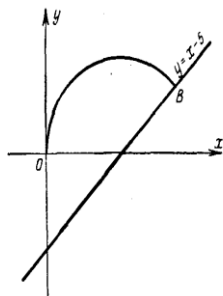


Рис. 2.3.

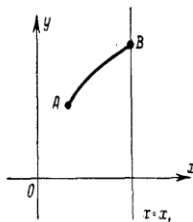


Рис. 2.4.

Первое граничное условие дает  $C_1 = C_2$ . Так как условие трансверсальности для данного функционала сводится к условию ортогональности (см. предыдущий пример), то прямая  $y_1=x_1-5$  должна быть диаметром окружности и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке  $(0, 5)$  пересечения прямой  $y_1=x_1-5$  с осью абсцисс. Следовательно,

$$(x-5)^2 + y^2 = 25, \text{ или } y = \pm\sqrt{10x - x^2}.$$

Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности  $y = \pm\sqrt{10x - x^2}$ .

Если граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться лишь по вертикальной прямой (рис.2.4) и, следовательно,  $\delta x_1 = 0$  то  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ .

Пусть, например, в задаче о брахистохроне левая граничная точка закреплена, а правая может перемещаться по вертикальной прямой.

Экстремальми функционала  $v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$  являются

циклоиды, уравнения которых, если принять во внимание условие  $y(0) = 0$ , будут иметь вид

$$x = C_1(t - \sin t)$$

$$y = C_1(1 - \cos t)$$

Для определения  $C_1$  используем условие  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ , которое в данном случае имеет вид

$$\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \Big|_{x=x_1} = 0$$

откуда  $y'(x_1) = 0$ , т. е. искомая циклоида должна пересекать прямую  $x = x_1$  под прямым углом и, следовательно, точка  $x = x_1, y = y_1$  должна быть вершиной циклоиды (рис. 2.5).

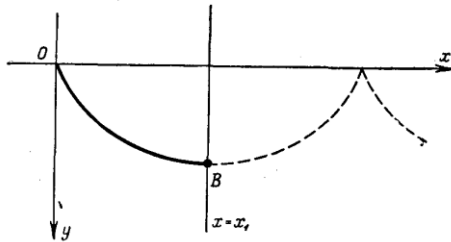


Рис. 2.5.

Так как вершине соответствует значение  $t = \pi$ , то  $x_1 = C_1\pi, C_1 = \frac{x_1}{\pi}$ . Следовательно, экстремум может реализо-

ваться лишь на циклоиде  $x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t); y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t)$ .

Если граничная точка  $(x_1, y_1)$  в задаче об экстремуме функцио-

нала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  может перемещаться по горизонтальной

прямой  $y = y_1$  и условие  $\delta x_1 = 0$ , или условие трансверсальности, принимает вид  $[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0$ .



## 2.2. Задача с подвижными границами для функционалов вида

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

Если при исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

одна из граничных точек, например  $B(x_1, y_1, z_1)$  перемещается, а другая,  $A(x_0, y_0, z_0)$ , неподвижна (или обе граничные точки подвижны), то очевидно, что экстремум может достигаться лишь на интегральных кривых системы уравнений Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

Действительно, если на некоторой кривой  $C$  реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, т. е. достигается максимальное или минимальное значение  $v$  по сравнению со значениями  $v$  на всех близких допустимых кривых, среди которых находятся как кривые, имеющие общие граничные точки с кривой  $C$ , реализующей экстремум, так и кривые, у которых граничные точки не совпадают с граничными точками кривой  $C$ , то тогда подавно на кривой  $C$  достигается экстремум по отношению к более узкому классу близких кривых, имеющих общие граничные точки с кривой  $C$ . Следовательно, на кривой  $C$  должны удовлетворяться необходимые условия экстремума задачи с неподвижными граничными точками, и, в частности, кривая  $C$  должна быть интегральной кривой системы уравнений Эйлера.

Общее решение системы уравнений Эйлера содержит четыре произвольные постоянные. Зная координаты граничной точки  $A(x_0, y_0, z_0)$ , которую мы считаем неподвижной, можно, вообще говоря, исключить две произвольные постоянные.

Для определения двух других произвольных постоянных необходимо иметь еще два уравнения, которые будут получены из условия  $\delta v = 0$ , причем при вычислении вариации мы уже

будем считать, что функционал задается лишь на решениях системы уравнений Эйлера, так как только на них может достигаться экстремум. При этом функционал  $v$  превращается в функцию  $\Phi(x_1, y_1, z_1)$  координат  $x_1, y_1, z_1$  точки  $B(x_1, y_1, z_1)$ , и вариация функционала превращается в дифференциал этой функции. Вычисление вариации  $v$  может быть проведено совершенно так же, как :

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x+\delta x} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y, z, y', z') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x+\delta x} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx + \\ &\quad + \int_{x_0}^x F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') - F(x, y, z, y', z') dx. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем значении к первому интегралу и воспользуемся непрерывностью функции  $F$ , а во втором интеграле выделим главную линейную часть с помощью формулы Тейлора. После этих преобразований получим

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z'] dx$$

Интегрируя по частям два последних слагаемых, стоящих под знаком интеграла, будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta v &= F \Big|_{x=x_1} \delta x + [F_{y'} \delta y]_{x=x_1} + [F_{z'} \delta z']_{x=x_1} + \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y + \left( F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) \delta z' \right] dx \end{aligned}$$

Так как значения  $v$  вычисляются лишь на экстремальных, то

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0 \qquad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \left[ F_{y'} \delta y' \right]_{x=x_1} + \left[ F_{z'} \delta z' \right]_{x=x_1}$$

и

$$\delta v \Big|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \text{ и } \delta v \Big|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1) \delta x_1$$

следовательно,

$$\delta v = \left[ F - y'F_{y'} - z'F_{z'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

Если вариации  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$  независимы, то из условия  $\delta v = 0$  получаем

$$\left[ F - y'F_{y'} - z'F_{z'} \right]_{x=x_1} = 0; \quad F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_{z'} \Big|_{x=x_1} = 0$$

Если граничная точка  $B(x_1, y_1, z_1)$  может перемещаться по некоторой кривой  $y_1 = \varphi(x_1)$ ;  $z_1 = \psi(x_1)$ , то  $\delta y_1 = \varphi'(x_1) \delta x_1$ , а  $\delta z_1 = \psi'(x_1) \delta x_1$  и условие  $\delta v = 0$  или

$$\left[ F - y'F_{y'} - z'F_{z'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

переходит в условие

$$\left[ F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 = 0$$

откуда в силу произвольности  $\delta x_1$  получим

$$\left[ F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'} \right]_{x=x_1} = 0$$

Это условие носит название *условия трансверсальности* в задаче об исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$$

Условие трансверсальности совместно с уравнениями  $y_1 = \varphi(x_1)$   $z_1 = \psi(x_1)$  дает недостающие уравнения для определения произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если граничная точка  $B(x_1, y_1, z_1)$  может перемещаться по некоторой поверхности  $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$ , то  $\delta z_1 = \varphi'_{x_1} \delta x_1 + \varphi'_{y_1} \delta y_1$  причем вариации  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  произвольны. Следовательно, условие  $\delta v = 0$  или, в развернутом виде,

$$\left[ F - y'F_{y'} - z'F_{z'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

преобразуется в условие

$$\left[ F - y'F_{y'} - z'F_{z'} + \varphi'_x F_{z'} \right]_{x=x_1} \delta x_1 + \left[ F_y + F_{z'} \varphi'_y \right]_{x=x_1} \delta y_1 = 0$$

Отсюда в силу независимости  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  получим

$$\left[ F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'} \right]_{x=x_1} = 0, \left[ F_y + F_{z'} \varphi'_y \right]_{x=x_1} = 0$$

Эти два условия вместе с уравнением  $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$  вообще говоря, дают возможность определить две произвольные постоянные в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если подвижной является граничная точка  $A(x_0, y_0, z_0)$ , то тем же методом в этой точке получим совершенно аналогичные условия.

Если рассмотреть функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

то без изменения метода доказательства получим, что в случае подвижной точки  $B(x, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1})$  в этой точке

$$\left( F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0$$

**Пример 1.** Найти условие трансверсальности для функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad \text{если} \quad z_1 = \varphi(x_1, y_1)$$

Условия трансверсальности  $\left( F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'} \right) \Big|_{x=x_1} = 0$   $\left[ F_y + F_{z'} \varphi'_y \right] = 0$  в данном случае имеют вид  $1 + \varphi'_x z' = 0$  и

$y + \varphi'_y z' = 0$  при  $x=x_1$  или  $\frac{1}{\varphi'_x} = \frac{y'}{\varphi'_y} = \frac{z'}{-1}$  при  $x=x_1$  т. е. являются

условием параллельности вектора касательной  $\vec{t}(1, y', z')$  к искомой экстремали в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  и вектора нормали к  $\vec{N}(\varphi'_x, \varphi'_y, -1)$  поверхности  $z = \varphi(x, y)$  в той же точке.

Следовательно, условие трансверсальности становится в данном случае условием ортогональности экстремали к поверхности  $z = \varphi(x, y)$ .

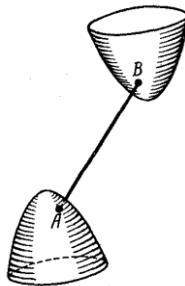


Рис. 2.6.

Пример 2. Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями  $z = \varphi(x, y)$  и  $z = \Psi(x, y)$ . Иначе говоря, найти экстремум интеграла  $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$  при условии, - что координаты одной из граничных точек  $(x_0, y_0, z_0)$  удовлетворяют уравнению  $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$  а координаты другой граничной точки  $(x_1, y_1, z_1)$  удовлетворяют уравнению  $z_1 = \Psi(x_1, y_1)$

Так как подынтегральная функция зависит лишь от  $y'$  и  $z'$ , то экстремальными являются прямые линии. Так как функционал  $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$  является частным случаем рассмотренного

в предыдущем примере функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$ , то условия трансверсальности как в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , так и в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  переходят в условия ортогональности. Следовательно, экстремум может достигаться лишь на прямых, ортогональных как к поверхности  $z = \varphi(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , так и к поверхности  $z = \psi(x, y)$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 2.6).

Пример 3. Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx, \text{ причем } y(0) = 0; z(0) = 0, \text{ а точка } (x_1, y_1, z_1)$$

может перемещаться по плоскости  $x = x_1$ .

Система уравнений Эйлера имеет вид  $z'' - y = 0$ ;  $y'' - z = 0$ , откуда  $z'' - y = 0$ ;  $y = C_1 chx + C_2 shx + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ ;  $z = y''$ ;

$z = C_1 chx + C_2 shx - C_3 \cos x - C_4 \sin x$  Из условий  $y(0) = 0$  и  $z(0) = 0$  имеем  $C_1 + C_3 = 0$  и  $C_1 - C_3 = 0$ , откуда  $C_1 = C_3 = 0$ . Усло-

вие в подвижной граничной точке

$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$  переходит в условия  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$  и  $F_{z'}|_{x=x_1} = 0$ , так как  $\delta x_1 = 0$ , а  $\delta y_1$  и  $\delta z_1$  произвольны.

В рассматриваемом примере  $F_{y'} = 2y'$ ;  $F_{z'} = 2z'$  следовательно  $y'(x_1) = 0$  и  $z'(x_1) = 0$  или  $C_2 chx + C_4 \cos x_1 = 0$  и  $C_2 chx - C_4 \cos x_1 = 0$ .

Если  $\cos x \neq 0$ ,  $C_2 = C_4 = 0$  и экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = 0$ ;  $z = 0$ . Если же  $\cos x_1 = 0$ , т.е.

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n$  - целое число, то  $C_2 = 0$ ,  $C_4$  — произвольная постоянная,  $y = C_4 \sin x$ ,  $z = -C_4 \sin x$ . Нетрудно проверить, что в последнем случае при любом  $C_4$  функционал  $v = 0$ .

### 2.3. Экстремали с угловыми точками

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, в которых искомая функция  $y = y(x)$  предполагалась непрерывной и имеющей непрерывную производную. Однако во многих задачах последнее требование является неестественным, более того, в некоторых классах вариационных задач решение, как правило, достигается на экстремалих, имеющих угловые точки. К числу таких задач принадлежат, например, задачи на отражение и преломление экстремалей, являющиеся обобщением соответствующих задач на отражение и преломление света.

Задача об отражении экстремалей. Найти кривую, реализующую экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$  и проходящую через заданные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_2, y_2)$  - причем кривая должна попасть в точку  $B$  лишь после отражения от заданной линии  $y = \varphi(x)$  (рис. 2.7). Естественно считать, что в точке отражения  $C(x_1, y_1)$ , может быть угловая точка искомой экстремали и, следовательно, в этой точке левая производная  $y'(x_1 - 0)$  и правая производная  $y'(x_1 + 0)$ , вообще говоря, различны. Поэтому удобнее функционал  $v[y(x)]$  представить в виде

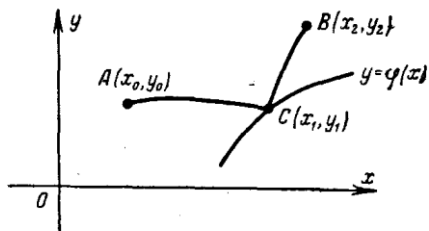


Рис.2.7.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

причем на каждом из интервалов  $x_0 \leq x \leq x_1$  и  $x_1 \leq x \leq x_2$  производная  $y'(x)$  предполагается непрерывной и, следовательно, мы можем пользоваться изложенными выше результатами.

Основное, необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  принимает вид

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = 0$$

Так как точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по кривой  $y = \varphi(x)$ , то при вычислении вариаций  $\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  и  $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$  мы находимся в условиях задачи с подвижной

граничной точкой, движущейся по заданной кривой, и можем использовать результаты 1.1. Очевидно, что кривые  $AC$  и  $CB$  являются экстремалиями. Действительно, на этих участках  $y = y(x)$  является решением уравнения Эйлера, так как если считать одну из этих кривых уже найденной и варьировать лишь другую, то задача сводится к нахождению экстремума функционала  $\int_x^{x_1} F dx$  (или  $\int_{x_1}^{x_2} F dx$ ) в задаче с закрепленными граничными точками. Поэтому, вычисляя вариацию функционала, будем уже считать, что функционал рассматривается лишь на экстремалиях, имеющих угловую точку  $C$ . Тогда

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1-0} \delta x_1$$

и

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1+0} \delta x_1,$$

где знаки  $x = x_1 - 0$  и  $x = x_1 + 0$  означают, что берется предельное значение величины, стоящей в скобках при приближении к точке  $x_1$  в первом случае слева (со стороны значений  $x$ , меньших  $x_1$ ) и во втором случае справа (со стороны значений  $x$ , больших  $x_1$ ). Так как в точке отражения разрывная лишь производная  $y$ , то в первом случае надо взять в угловой точке левую производную, а во втором случае — правую производную.

Условие  $\delta v = 0$  принимает вид

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1-0} \delta x_1 - [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1+0} \delta x_1 = 0$$



или, так как  $\delta x_1$  изменяется произвольно, то

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0} = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0},$$

или

$$\begin{aligned} & F(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 - 0))F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) = \\ & = F(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) + (\varphi'(x_1) - y'(x_1 + 0))F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) \end{aligned}$$

Это условие отражения приобретает особенно простой вид для функционалов типа

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где

$$A(x_1, y_1) \left[ \sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_1-0} = A(x_1, y_1) \left[ \sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=x_1+0}$$

или, упрощая и сокращая на  $A(x_1, y_1)$  в предположении, что

$A(x_1, y_1) \neq 0$ , получим

$$\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1-0} = \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1+0}.$$

Обозначив угол между касательной к кривой  $y = \varphi(x)$  и осью абсцисс буквой  $\alpha$ , а углы наклона к оси абсцисс левой и правой касательных к экстремали в точке отражения  $C$ , соответственно  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (рис. 2.8), получим

$$y'(x_1 - 0) = \operatorname{tg} \beta_1, \quad y'(x_1 + 0) = \operatorname{tg} \beta_2, \quad \varphi'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha$$

Условие в точке отражения приобретает вид

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_1}{-\sec \beta_1} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta_2}{\sec \beta_2}$$

или после упрощения и умножения на  $\cos \alpha$ :

$$-\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2).$$

Отсюда следует равенство угла падения и угла отражения.

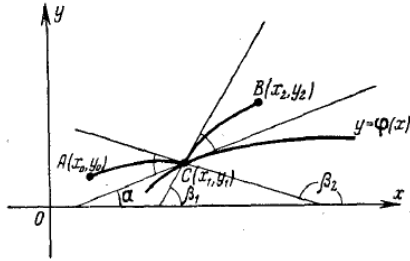


Рис.2.8.

Если точка движется в некоторой среде со скоростью  $v(x, y)$ , то время  $t$ , затрачиваемое на перемещение точки из положения  $A(x_0, y_0)$  в положение  $B(x_1, y_1)$ , равно

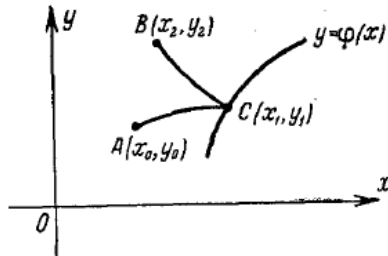


Рис. 2.9.

интегралу  $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)} dx$ , который принадлежит к рассматриваемому

виду функционалов  $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$ , и следовательно,

при любом законе изменения скорости  $v(x, y)$  в точке отражения угол падения равен углу отражения. Если бы точки  $A, B$  и  $C$  были расположены иначе, например так как они расположены на рис. 2.9, то для получения того же условия в точке отражения из-за двужначности функции  $y = y(x)$  удобнее было бы проводить исследование в параметрической форме.

*Преломление экстремалей.*

Предположим, что подынтегральная функция функционала  $\nu = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$  в рассматриваемой области имеет линию

разрыва  $y = \varphi(x)$ , а граничные точки  $A$  и  $B$  расположены по разные стороны линии разрыва (рис. 2.10).

Представим функционал  $\nu$  в виде

$$\nu = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx,$$

где  $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$  с одной стороны линии разрыва, а  $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$  с другой стороны линии разрыва.

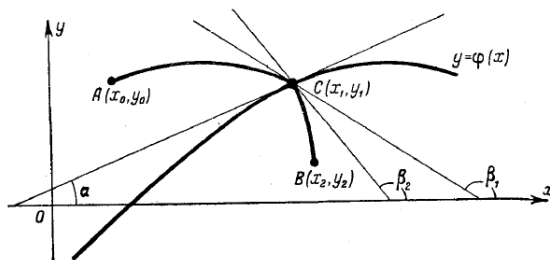


Рис. 2.10.

Предположим, что  $F_1$  и  $F_2$  трижды дифференцируемы. В точке  $C$  пересечения искомой кривой с линией разрыва естественно ожидать наличия угловой точки. Дуги  $AC$  и  $CB$ , очевидно, являются экстремальями (это опять следует из того, что, фиксируя одну из этих дуг и варьируя лишь другую, мы получим задачу с закрепленными граничными точками). Поэтому можно брать в качестве кривых сравнения лишь ломаные, состоящие из двух дуг экстремалей, и тогда вариация ввиду подвижности граничной точки  $C(x_1, y_1)$ , перемещающейся по кривой  $y = \varphi(x)$ , принимает следующий вид:

$$\delta \nu = \delta \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx = [F_1 + (\varphi' - y') F_{1y'}]_{x=x_0} \delta x_1 - [F_2 + (\varphi' - y') F_{2y'}]_{x=x_0+0} \delta x_1$$

и основное необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  сводится к равенству

$$[F_1 + (\varphi' - y')F_{1y'}]_{x=x-0_1} = [F_2 + (\varphi' - y')F_{2y'}]_{x=x+0_1}.$$

Так как в точке преломления может быть разрывная лишь  $y'$ , то это условие преломления можно записать и в следующем виде:

$$\begin{aligned} & F_1(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) + (\varphi'(x_1) - \\ & - y'(x_1 - 0))F_{1y'}(x_1, y_1, y'(x_1 - 0)) = \\ & = F_2(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) + (\varphi'(x_1) - \\ & - y'(x_1 + 0))F_{2y'}(x_1, y_1, y'(x_1 + 0)) \end{aligned}$$

Это условие преломления вместе с уравнением  $y_1 = \varphi(x_1)$  дает возможность определить координаты точки С.

Если, в частности, функционал  $v$  равен

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x, y)\sqrt{1+y'^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} A_1(x, y)\sqrt{1+y'^2} dx + \int_{x_0}^{x_2} A_2(x, y)\sqrt{1+y'^2} dx$$

то условие преломления приобретает вид

$$A_1(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1-0} = A_2(x, y) \frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1+0}$$

или,  $y'(x_1 - 0) = \operatorname{tg}\beta_1$ ,  $y'(x_1 + 0) = \operatorname{tg}\beta_2$ ,  $\varphi'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha$ , после упрощений и умножения на  $\cos$  а будем иметь:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)} \quad \text{или} \quad \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)}$$

что является обобщением известного закона преломления света: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления  $<$  отношению скоростей

$$v_1(x, y) = \frac{1}{A_1(x, y)} \quad \text{или} \quad v_2(x, y) = \frac{1}{A_2(x, y)}$$

в средах, на границе которых происходит преломление. Не следует, что экстремали с угловыми точками появляются лишь в задачах на отражение или преломление экстремалей. экстре-

мум может достигаться на экстремальных с угловыми точками

даже в задачах на экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ ,

где функция  $F$  трижды дифференцируема, и допустимые кривые должны проходить через граничные точки  $A$  и  $B$  без каких бы то ни было дополнительных условий.

Исследуем, например, функционал

$$v = \int_0^2 y'^2 (1 - y')^2 dx, \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 1.$$

Так как подынтегральная функция положительна, то  $v \geq 0$ , и следовательно, если на какой-нибудь кривой функционал  $v = 0$ , то на этой кривой заведомо реализуется абсолютный минимум функционала  $v$ , т. е. наименьшее значение функционала на допустимых кривых. Нетрудно видеть, что на ломаной  $y = x$  при  $0 \leq x \leq 1$  и  $y = 1$  при  $1 < x \leq 2$  (рис. 2.11) функционал  $v = 0$ , так как на этой ломаной подынтегральная функция тождественно равна нулю. Следовательно, на этой ломаной реализуется абсолютный минимум функционала.

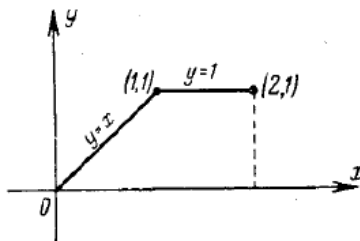


Рис. 2.11.

Абсолютный минимум функционала:  $v = 0$ , достигается также и на ломаных, изображенных на рис.2.13. С другой стороны, легко видеть, что на гладких кривых значения функционала строго больше нуля, хотя и могут быть сделаны сколь угодно близкими к нулю. Действительно, подынтегральная функция обращается в нуль только при  $y = x + C_1$  или при  $y = C_2$ , но линии, составленные из отрезков прямых этих семейств, проходящие через точки  $A(0, 0)$  и  $B(2, 1)$ , могут быть

лишь ломаными. Однако, сглаживая точки излома путем соответствующего изменения функции в сколь угодно малой окрестности этих точек, мы можем получить гладкую кривую, значение функционала на которой сколь угодно мало отличается от значений функционала на ломаной. Таким образом,  $\nu = 0$  является точной нижней гранью значений функционала  $\nu$  на гладких кривых, но эта точная нижняя грань на гладких кривых не достигается, а достигается на кусочно-гладких кривых.

Найдем условия, которым должны удовлетворять решения с угловыми точками задачи об экстремуме функционала

$$\nu[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx. \text{ Очевидно, что отдельные гладкие дуги,}$$

из которых составлена ломаная экстремаль, должны быть интегральными кривыми уравнения Эйлера. Это следует из того, что если зафиксировать все звенья ломаной, кроме одного, и варьировать лишь это одно звено, то задача сводится к простейшей задаче с закрепленными границами и, следовательно, это звено должно быть дугой экстремали. Считая для упрощения записи, что ломаная экстремаль имеет лишь одну угловую точку, найдем условия, которые должны удовлетворяться в угловой точке:

$$\nu = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

где  $x_1$  — абсцисса угловой точки (рис. 2.12). Считая, что кривые  $AC$  и  $CB$  есть интегральные кривые уравнения Эйлера

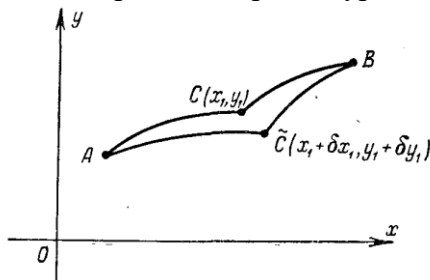


Рис. 2.12.

и что точка  $C$  может произвольно перемещаться, получим:

$$\delta v = (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1-0} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1-0} \delta y_1 - \\ - (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1+0} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1+0} \delta y_1 = 0$$

откуда

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1-0} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1-0} \delta y_1 = \\ = (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1+0} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1+0} \delta y_1$$

или, так как  $\delta x_1$  и  $\delta y_1$  независимы, имеем

$$(F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1-0} = (F - y'F_{y'}) \Big|_{x=x_1+0}$$

и

$$F_{y'} \Big|_{x=x_1-0} = F_{y'} \Big|_{x=x_1+0}$$

Эти условия вместе с условиями непрерывности искомой экстремали позволяют определить координаты угловой точки.

Пример 1. Найти ломаные экстремали (если они существуют) функционала  $v = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$ .

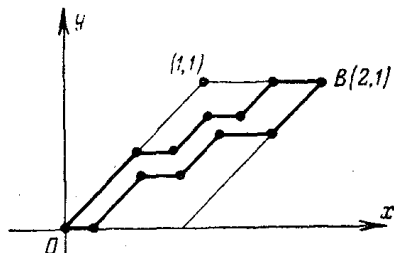


Рис. 2.13.

Напишем второе из условий, которые должны выполняться в точке перелома  $F_{y'} \Big|_{x=x_1-0} = F_{y'} \Big|_{x=x_1+0}$  или в данном случае  $2y'(x_1 - 0) = 2y'(x_1 + 0)$ , откуда  $y'(x_1 - 0) = y'(x_1 + 0)$ , т. е. производная  $y'$  в точке  $x_1$  непрерывна, и точки перелома нет.

Следовательно, в рассматриваемой задаче экстремум может достигаться лишь на гладких кривых.

Пример 2. Найти ломаные экстремали функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 (1 - y')^2 dx.$$
 Так как подынтегральная функция зависит

лишь от  $y'$ , то экстремальями являются прямые линии

$y = Cx + \bar{C}$ . Условия в точке перелома в данном случае принимают вид

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1-0} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1+0}$$

и

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1-0} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1+0}$$

Эти условия, не считая тривиальной возможности

$$y'(x_1 - 0) = y'(x_1 + 0),$$

удовлетворяются при  $y'(x_1 - 0) = 0$  и  $y'(x_1 + 0) = 1$  или

$y'(x_1 - 0) = 1$  и  $y'(x_1 + 0) = 0$ . Следовательно, ломаные экстремали могут состоять только из отрезков прямых, принадлежащих семействам  $y = C_1$  и  $y = x + C_2$  (рис. 2.13).

## 2.4. Односторонние вариации

В некоторых вариационных задачах об экстремуме функционала  $v[y(x)]$  на класс допустимых кривых может быть наложено ограничение, запрещающее им проходить через точки некоторой области  $R$ , ограниченной кривой  $\Phi(x, y) = 0$  (рис. 2.14).

В этих задачах кривая  $C$ , реализующая экстремум, или проходит целиком вне границы области  $R$ , и тогда она должна быть экстремалью, так как в этом случае наличие запрещенной области  $R$  совершенно не влияет на свойства функционала и его вариации в окрестности кривой  $C$ , или кривая  $C$  состоит из дуг, лежащих вне границы  $R$ , и из частей границы области  $R$ . В этом последнем случае возникает новая ситуация: на частях границы области  $R$  возможны лишь односторонние вариации кривой  $C$ , так как внутри области допустимые кривые заходить не могут. Части кривой  $C$ , лежащие вне границы области  $R$ , должны по-



прежнему быть экстремальями, так как если варьировать кривую  $C$  лишь на таком, допускающем двусторонние вариации, участке, то наличие области  $R$  на вариации  $y$  влиять не будет, и выводы главы 6 остаются справедливыми.

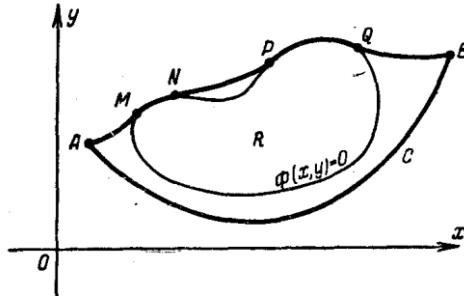


Рис. 2.14.

Таким образом, в рассматриваемой задаче экстремум может достигаться лишь на кривых, состоящих из дуг экстремалей и частей границы области  $R$ , а следовательно, для построения искомой кривой, реализующей экстремум, надо получить условия в точках перехода экстремали на границу области  $R$ , дающие возможность определить эти точки. В случае, изображенном на рис. 2.15, необходимо получить условия в точках  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$ . Получим, например, условие в точке  $M$ . Совершенно аналогично можно было бы получить условия и в других точках перехода экстремали на границу области.

При вычислении вариации  $\delta v$  функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y') dx + \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

мы можем считать, что вариация вызывается лишь смещением точки  $M(\bar{x}, \bar{y})$  на кривой  $\Phi(x, y) = 0$ , т.е. можно считать, что при всяком положении точки  $M$  на кривой  $\Phi(x, y) = 0$  дуга  $AM$  является экстремалью, а участок  $MNPQB$  не варьируется.

Функционал

$$v_1 = \int_{x_n}^{\bar{x}} F(x, y, y') dx$$

имеет подвижную граничную точку, перемещающуюся по границе области  $R$ , уравнение которой  $\Phi(x, y) = 0$ , или в разрешенном окрестности точки  $M$  относительно  $y$  виде:  $y = \varphi(x)$ .

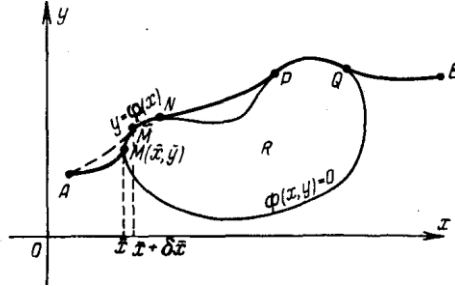


Рис. 2.15.

Следовательно,

$$\delta v_1 = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=\bar{x}} - \delta \bar{x}$$

Функционал  $v_2 = \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx$  так же имеет подвижную граничную точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ , однако в окрестности этой точки кривая, на которой может достигаться экстремум  $y = \varphi(x)$ , не варьируется. Следовательно, изменение функционала  $v_2$  при перемещении точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  в положение  $(\bar{x} + \delta \bar{x}, \bar{y} + \delta \bar{y})$  сводится лишь к изменению нижнего предела интегрирования и

$$\Delta v_2 = \int_{\bar{x} + \delta \bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y') dx = - \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta \bar{x}} F(x, y, y') dx = - \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta \bar{x}} F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$$

так как на интервале  $(\bar{x}, \bar{x} + \delta \bar{x})$   $y = \varphi(x)$ . Применяя теорему о среднем значении и пользуясь непрерывностью функции  $F$ , получим

$$\Delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \Big|_{x=\bar{x}} - \delta \bar{x} + \beta \cdot \delta \bar{x}$$

где  $\beta \rightarrow 0$  при  $\delta \bar{x} \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta v_2 &= -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))|_{x=\bar{x}} - \delta \bar{x}, \\ \delta v &= \delta v_1 + \delta v_2 = [F(x, y, y') + (\varphi' - y')F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} - \\ &- \delta \bar{x} - F(x, y, \varphi')|_{x=\bar{x}} - \delta \bar{x} = \\ &= [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} - \delta \bar{x} \end{aligned}$$

так как  $y(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$ .

Необходимое условие экстремума  $\delta v = 0$  ввиду произвольности  $\delta \bar{x}$  принимает вид

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi')F_{y'}(x, y, \varphi')]_{x=\bar{x}} = 0.$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$(y' - \varphi')[F_{y'}(x, y, q) - F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0,$$

где  $q$ - значение, промежуточное между  $\varphi'(\bar{x})$  и  $y'(\bar{x})$ .

Снова применяя теорему о среднем значении, будем иметь

$$(y' - \varphi')(q - y')F_{y'y'}(x, y, \bar{q})|_{x=\bar{x}} = 0$$

где  $\bar{q}$ —значение, промежуточное между  $q$  и  $y'(\bar{x})$ .

Предположим, что  $F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \neq 0$ . Это предположение является естественным для многих вариационных задач. В этом случае условие в точке  $M$  имеет вид  $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$  ( $q = y'$  только при  $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$ , так как  $q$  — значение, промежуточное между  $y'(\bar{x})$  и  $\varphi'(\bar{x})$ ). Следовательно, в точке  $M$  экстремаль  $AM$  и граничная кривая  $MN$  имеют общую касательную (левую касательную для кривой  $y = y(x)$ , правую — для кривой  $y = \varphi(x)$ ). Итак, экстремаль касается границы области  $R$  в точке  $M$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(4) = 2.$$

*Ответ:*  $y = -x, 0 \leq x \leq 1; y = x - 2, 1 \leq x \leq 4; y = x, 0 \leq x \leq 3;$   
 $y = -x + 6, 3 \leq x \leq 4;$  на ломанных функционал достигает абсолютного минимума.

2. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

*Ответ:* не существует.

3. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1.$$

*Ответ:* Ломанные, проходящие через заданные граничные точки, составленные из прямолинейных отрезков с угловыми коэффициентами  $\sqrt{3}$  и  $-\sqrt{3}$ .

4. Найти условие трансверсальности для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad A(x, y) \neq 0.$$

*Ответ:*  $\frac{\varphi' - y'}{1 + y'\varphi'} = 1$ , экстремали должны пересекать кривую

$y_1 = \varphi_1(x)$ , по которой скользит граничная точка, с углом  $45^\circ$ .

5. Пользуясь основным необходимым условием экстремума  $\delta v = 0$ , найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y'(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ — не задано.}$$

Ответ:  $y = x^5/5! + (x^2 - x^3)/4!$ .

6. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{10} (y^3 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(10) = 0.$$

при условии, что допустимые кривые не могут проходить внутри круга, ограниченного окружностью  $(x-5)^2 + y^2 = 9$ .

Ответ:

$$y = \pm 3x/4, \quad 0 \leq x \leq 16/5; \quad y = \pm \sqrt{9 - (x-5)^2}, \quad 16/5 \leq x \leq 34/5;$$

$$y = \pm 3(x-10)/4, \quad 34/5 \leq x \leq 10.$$

7. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = 0.$$

Если другая граничная точка может скользить по прямой  $x = \pi/4$ .

Ответ:  $y = 0$ .

8. Пользуясь лишь основным необходимым условием  $\delta v = 0$ , найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 0, \text{ если вторая}$$

граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по окружности  $(x-9)^2 + y^2 = 9$ .

Ответ:  $y = \pm \sqrt{8x - x^2}$ .

### 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

#### 3.1. Поле экстремалей

Если на плоскости  $(x, y)$  через каждую точку некоторой области  $D$  проходит одна и только одна кривая семейства  $y = y(x, C)$ , то говорят, что это семейство кривых в области  $D$  обра-

зует поле, или, точнее, собственное поле. Угловым коэффициентом касательной  $p(x, y)$  к кривой семейства  $y = y(x, C)$ , проходящей через точку  $(x, y)$ , называется *наклоном поля* в точке  $(x, y)$ .

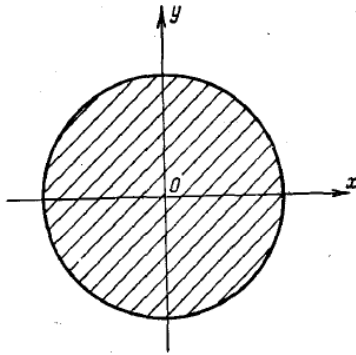


Рис. 3.1.

Например, внутри круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  параллельные прямые  $y = x + C$  образуют поле (рис. 3.1), причем наклон этого поля  $p(x, y) = 1$ . Напротив, семейство парабол  $y = (x - a)^2 - 1$  (рис. 3.2) внутри того же круга поля не образует, так как внутри этого круга параболы рассматриваемого семейства пересекаются. Если все кривые семейства  $y = y(x, C)$  проходят через некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , т. е. образуют пучок кривых, то они заведомо не образуют собственного поля в области  $D$ , если центр пучка принадлежит области  $D$ . Однако если кривые пучка покрывают всю область  $D$  и нигде не пересекаются в этой области, кроме центра пучка, т. е. во всех точках, отличных от центра пучка, требования, налагаемые на поле, выполнены, то говорят, что семейство  $y = y(x, C)$  тоже образует поле, но в отличие от собственного поля в рассматриваемом случае поле называется *центральным* (рис. 3.3) Например, пучок синусоид  $y = C \sin x$  при  $0 \leq x \leq a$ ,  $a < \pi$  образует центральное поле (рис. 3.4). Тот же пучок синусоид в

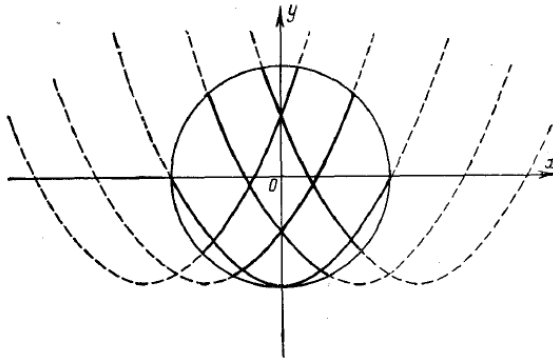


Рис. 3.2.

достаточно малой окрестности отрезка оси абсцисс  $\delta \leq x \leq a$ , где  $\delta > 0$ ,  $a < \pi$ , образует центральное поле (рис. 3.4). Тот же пучок

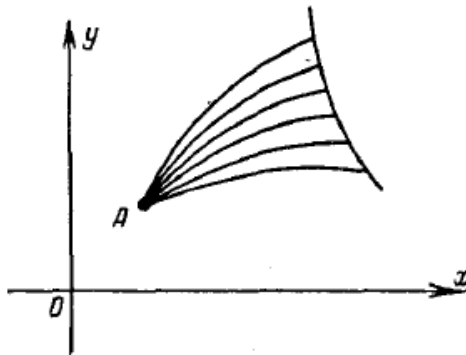


Рис. 3.3.

синусоид в окрестности отрезка оси абсцисс  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $a_1 > 0$  поля не образует (рис. 3.4).

Если собственное или центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*. Понятие поля почти без изменения переносится и на случай пространства любого числа измерений.

Семейство  $y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) образует поле в области  $D$  пространства  $x, y_1, \dots, y_n$ , если через каждую точку

области  $D$  проходит одна и только одна кривая семейства  $y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n)$ .

Функциями наклона поля  $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называют частные производные от функций  $y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  по  $x$ , вычисленные в точке  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ; следовательно, для получения  $p_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  надо взять  $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  и заменить  $C_1, C_2, \dots, C_n$  их выражениями через координаты  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Аналогично определяется и центральное поле.

Пусть кривая  $y = y(x)$  является экстремалью вариационной задачи об экстремуме простейшего функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, y') dx$$

причем граничные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  закреплены. Экстремаль  $y = y(x)$  включена в поле экстремалей, если найдено

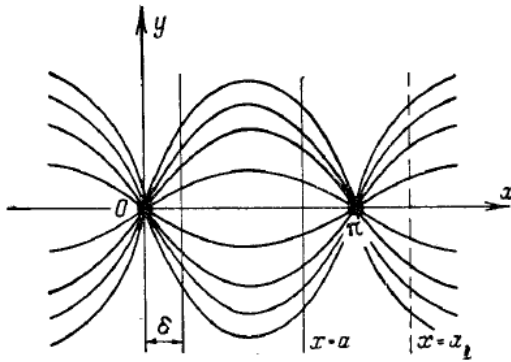


Рис. 3.4.

семейство экстремалей  $y = y(x, C)$ , образующее поле, содержащее при некотором значении  $C = C_0$  экстремаль  $y = y(x)$ , причем эта экстремаль  $y = y(x)$  не лежит на границе области  $D$ , в которой



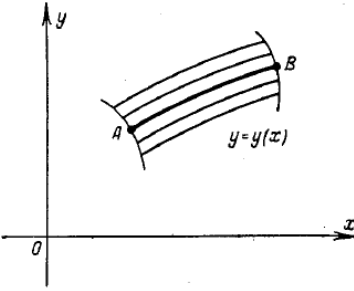


Рис. 3.5.

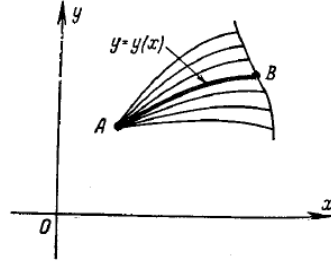


Рис. 3.6.

семейство  $y = y(x, C)$  образует поле (рис. 3.5). Если пучок экстремалей с центром в точке  $A(x_0, y_0)$  в окрестности экстремали  $y = y(x)$ , проходящей через ту же точку, образует поле, то тем самым найдено центральное поле, включающее данную экстремаль  $y = y(x)$ . За параметр семейства в данном случае можно взять угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке  $A(x_0, y_0)$  (рис. 3.6).

Пример 1. Дан функционал

$$\int_0^a (y'^2 - y^2) dx;$$

требуется включить дугу экстремали  $y = 0$ , соединяющую точки  $(0, 0)$  и  $(a, 0)$ , где  $0 < a < \pi$  в центральное поле экстремалей.

Общее решение уравнения Эйлера  $y'' + y = 0$  имеет вид  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

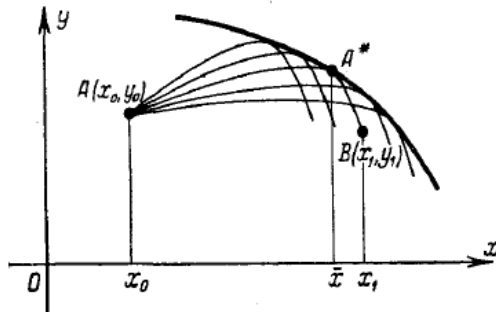


Рис. 3.7.

Из условия прохождения экстремалей через точку  $(0, 0)$  получаем  $C_1 = 0$ ,  $y = C_2 \sin x$ , причем кривые этого пучка на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $a < \pi$  образуют центральное поле, включающее при  $C_2 = 0$  экстремаль  $y = 0$ . Параметр семейства  $C_2$  равен производной  $y'_x$  в точке  $(0, 0)$ . Если в той же задаче  $a \geq \pi$ , то семейство  $y = C_2 \sin x$  поля не образует.

Известно, что две бесконечно близкие кривые семейства  $F(x, y, C) = 0$  пересекаются в точках  $C$ -дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$F(x, y, C) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Напомним, что в состав  $C$ -дискриминантной кривой, в частности, входит огибающая семейства и геометрические места кратных точек кривых семейства.

Если  $F(x, y, C) = 0$  является уравнением пучка кривых, то центр пучка также принадлежит  $C$ -дискриминантной кривой. Поэтому если взять пучок экстремалей  $y = y(x, C)$ , проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ , и определить его  $C$ -дискриминантную кривую  $\Phi(x, y) = 0$ , то близкие кривые семейства  $y = y(x, C)$  будут пересекаться вблизи кривой  $\Phi(x, y) = 0$  и, в частности, кривые этого семейства, близкие к рассматриваемой экстремали  $y = y(x)$ , проходящей через точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ , будут пересекаться в точках, близких к точкам касания (или пересечения) кривой  $y = y(x)$  с  $C$ -дискриминантной кривой (см. рис. 3.7, на котором  $C$ -дискриминантная кривая изображена жирной линией). Если дуга  $AB$  экстремали  $y = y(x)$  не имеет отличных от точки  $A$  общих точек с  $C$ -дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге  $AB$  экстремали пучка не пересекаются, т. е. образуют в окрестности дуги  $AB$  центральное поле, включающее эту дугу (рис. 3.8).

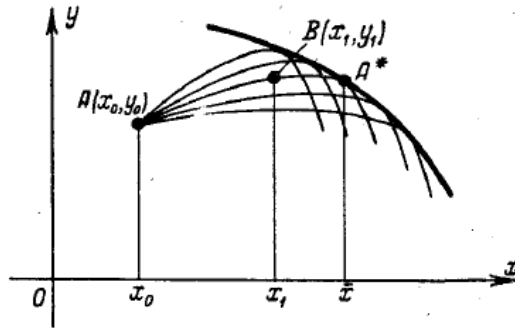


Рис. 3.8.

Если дуга  $AB$  экстремали  $y = y(x)$  имеет отличную от  $A$  общую точку  $A^*$  с  $C$ -дискриминантной кривой пучка  $y = y(x, C)$ , то близкие к  $y = y(x)$  кривые пучка могут пересекаться между собой и с кривой  $y = y(x)$  вблизи точки  $A^*$  и, вообще говоря, поля не образуют (рис. 3.7). Точка  $A^*$  называется точкой, сопряженной с точкой  $A$ .

Полученный результат можно сформулировать так: для построения центрального поля экстремалей с центром в точке  $A$ , содержащего дугу экстремали  $AB$ , достаточно, чтобы точка  $A^*$ , сопряженная с точкой  $A$ , не лежала на дуге  $AB$ . Это условие возможности построения поля экстремалей, включающего данную экстремаль, носит название условия Якоби.

*Нетрудно сформулировать это условие и аналитически.*

Пусть  $y = y(x, C)$  — уравнение пучка экстремалей с центром в точке  $A$ , причем параметр  $C$  можно для определенности считать совпадающим с угловым коэффициентом  $y'$  экстремалей пучка в точке  $A$ .  $C$ -дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$y = y(x, C); \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Вдоль каждой фиксированной кривой семейства производная  $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$  функция только  $x$ . Эту функцию кратко обозначим

буквой  $u$ :  $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ , где  $C$  задано; отсюда. Функции  $y = y(x, C)$  являются решениями уравнения Эйлера, поэтому

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x, C), y'_x(x, C)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по  $C$  и полагая  $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ , получим

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(F_{yy}u + F_{y'y'}u') = 0$$

или

$$\left( F_{yy'} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} u') = 0.$$

Здесь  $F_{yy}(x, y, y')$ ,  $F_{yy'}(x, y, y')$ ,  $F_{y'y'}(x, y, y')$  являются известными функциями  $x$ , так как второй аргумент  $y$  равен решению уравнения Эйлера  $y = y(x, C)$ , взятому при значении  $C = C_0$ , соответствующем экстремали  $AB$ . Это линейное однородное уравнение второго порядка относительно  $u$  и называется уравнением Якоби.

Если решение этого уравнения  $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ , обращающееся в нуль в центре пучка при  $x = x_0$  (центр пучка всегда принадлежит  $C$ -дискриминантной кривой), обращается в нуль еще в какой-нибудь точке интервала  $x_0 < x < x_1$  то сопряженная с  $A$  точка, определяемая уравнениями

$$y = y(x, C_0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \quad \text{или} \quad u = 0,$$

лежит на дуге экстремали  $AB$ . Если же существует решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль при  $x = x_0$  и более не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка  $x_0 \leq x \leq x_1$ , то точек, сопряженных с  $A$ , на дуге  $AB$  нет,—условие Якоби вы-

полнено, и дугу экстремали  $AB$  можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке  $A$ .

Замечание. Можно доказать, что условие Якоби необходимо для достижения экстремума, т. е. для кривой  $AB$ , реализующей экстремум, сопряженная с  $A$  точка не может лежать в интервале  $x_0 < x < x_1$

Пример 2. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала  $a$

$$v = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx, \text{ проходящей через точки } A(0, 0) \text{ и } B(a, 0)?$$

Уравнение Якоби имеет вид

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad \text{или} \quad u'' + u = 0$$

откуда

$$u = C_1 \sin(x - C_2).$$

Так как и  $u(0) = 0$ , то  $C_2 = 0$ ;  $u = C_1 \sin x$ . Функция и обращается в нуль в точках  $x = k\pi$ , где  $k$  — целое число, и, следовательно, если  $0 < a < \pi$ , то на отрезке  $0 \leq x \leq a$  функция и обращается в нуль только в точке  $x = 0$  и условие Якоби выполнено; если же  $a \geq \pi$ , то на отрезке  $0 \leq x \leq a$  функция и обращается в нуль еще по крайней мере в одной точке  $a = \pi$  и условие Якоби не выполнено.

Пример 3. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx$$

проходящей через точки  $A(0, 0)$  и  $B(a, 0)$ ?

Уравнение Якоби имеет вид  $u'' - u = 0$ . Его общее решение возьмем в форме  $u = C_1 \operatorname{sh}x + C_2 \operatorname{ch}x$ . Из условия  $u(0) = 0$  находим  $C_2 = 0$ .  $u = C_1 \operatorname{sh}x$ . Кривые пучка  $u = C_1 \operatorname{sh}x$  пересекают ось  $Ox$  лишь в точке  $x = 0$ . Условие Якоби выполнено при любом  $a$ .

### 3.2. Функция $E(x, y, p, y')$

Предположим, что в простейшей задаче об экстремуме функционала

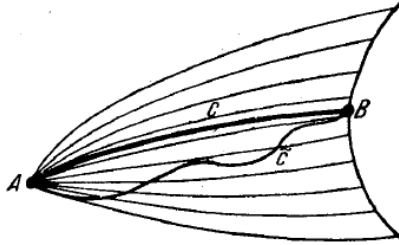


Рис. 3.9.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

условие Якоби выполнено и, следовательно, экстремаль  $C$ , проходящая через точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ , может быть включена в центральное пале, наклон которого равен  $p(x, y)$  (рис. 3.9). Для определения знака приращения  $\Delta v$  функционала  $v$  при переходе от экстремали  $C$  к некоторой близкой допустимой кривой  $\bar{C}$  преобразуем приращение

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx$$

к более удобному для исследования виду. Символы

$$\int_{\bar{C}} F(x, y, y') dx \quad \text{и} \quad \int_C F(x, y, y') dx$$

представляют значения функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , взятые

соответственно по дугам кривых  $\bar{C}$  и  $C$ .

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\int_{\bar{C}} \left[ F(x, y, p) + \left( \frac{dy}{dx} - p \right) F_p(x, y, y') \right] dx,$$

который на экстремали  $C$  обращается в  $\int_C F(x, y, y') dx$ , так как

на экстремальных поля  $\frac{dy}{dx} = p$ . С другой стороны, тот же вспомогательный функционал

$$\int_C [F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p(x, y, p)] dx$$

или

$$\int_C [F(x, y, p) + p F_p(x, y, p)] dx + F_p(x, y, p) dy \quad (3.1)$$

является интегралом от точного дифференциала. Действительно, дифференциал функции  $\bar{v}(x, y)$ , в которую превращается функционал на экстремальных поля, имеет вид

$$d\bar{v} = [F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y')] dx + F_{y'}(x, y, y') dy$$

и лишь обозначением углового коэффициента касательной к экстремальям поля отличается от подынтегрального выражения в рассматриваемом вспомогательном интеграле (3.1). Итак, интеграл  $\int_C [F(x, y, p) + (y' - p) F_p] dx$  на экстремали  $C$  совпадает с

интегралом  $\int_C F(x, y, y') dx$ , а так как функционал

$\int_C [F(x, y, p) + (y' - p) F_p] dx$  является интегралом от точного диф-

ференциала и, следовательно, не зависит от пути интегрирования, то

$$\int_C F(x, y, y') = \int_C [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p)] dx$$

не только при  $\bar{C} = C$ , но и при любом выборе  $\bar{C}$ .

Следовательно, приращение

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x, y, y') dx - \int_C F(x, y, y') dx$$

может быть преобразовано к следующему виду:

$$\Delta v = \int_C F(x, y, y') dx - \int_C [F(x, y, p) dx + (y' - p) F_p(x, y, p)] dx =$$

$$= \int_C [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p)] dx$$

Подынтегральная функция носит название функции Вейерштрасса и обозначается  $E(x, y, p, y')$ :

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p).$$

В этих обозначениях

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y') dx.$$

Очевидно, что достаточным условием достижения функционалом  $v$  минимума на кривой  $C$  будет неотрицательность функции  $E$ , так как если  $E \geq 0$ , то и  $\Delta v \geq 0$ , а достаточным условием максимума будет  $E \leq 0$ , так как в этом случае и  $v \leq 0$ .

При этом для слабого минимума достаточно, чтобы неравенство  $E(x, y, p, y') \geq 0$  (или  $E \leq 0$  в случае максимума) выполнялось для значений  $x, y$ , близких к значению  $l$ ,  $y$  на исследуемой экстремали  $C$ , и для значений  $y'$ , близких к  $p(x, y)$  на той же экстремали, а для сильного минимума то же неравенство должно быть справедливо для тех же  $x, y$ , но уже для произвольных  $y'$ , так как в случае сильного экстремума близкие кривые могут иметь произвольные направления касательных, а в случае слабого экстремума значения  $y'$  на близких кривых близки к значениям  $y' = p$  на экстремали  $C$ .

Следовательно, достаточными для достижения функционалом  $v$  экстремума на кривой  $C$  будут следующие условия.

*Для слабого экстремума:*

1. Кривая  $C$  является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Экстремаль  $C$  может быть включена в поле экстремалей. Это условие можно заменить условием Якоби.



3. Функция  $E(x, y, p, y')$  не меняет знака во всех точках  $(x, y)$ , близких к кривой  $C$ , и для близких к  $p(x, y)$  значений  $y'$ . В случае минимума  $E \geq 0$ , в случае максимума  $E \leq 0$ .

Для сильного экстремума:

1. Кривая  $C$  является экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям.

2. Экстремаль  $C$  может быть включена в поле экстремалей. Это условие можно заменить условием Якоби.

3. Функция  $E(x, y, p, y')$  не меняет знака во всех точках  $(x, y)$ , близких к кривой  $C$  и для произвольных значений  $y'$ . В случае минимума  $E \geq 0$ , в случае максимума  $E \leq 0$ .

Замечание. Можно доказать, что условие Вейерштрасса необходимо. Точнее, если в центральном поле, включающем экстремаль  $C$ , в точках экстремали для некоторых  $y'$  функция  $E$  имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается. Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к  $p$  значениях  $y'$ , то не достигается и слабый экстремум.

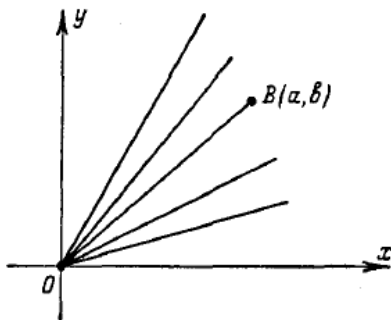


Рис. 3.10.

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_0^a y^3 dx; \quad y(0)=0,$$

$$y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Экстремальями являются прямые линии  $y = C_1x + C_2$ . Экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = \frac{b}{a}x$ . Пучок прямых  $y = C_1x$  с центром в точке  $(0,0)$  образует центральное поле, включающее экстремаль  $y = \frac{b}{a}x$  (рис. 3.10).

Функция

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p)^2(y' - 2p).$$

На экстремали  $y = \frac{b}{a}x$  наклон поля  $p = \frac{b}{a} > 0$ , и если  $y'$  принимает значения, близкие к  $p = \frac{b}{a}$ , то  $E \geq 0$  и, следовательно, все условия, достаточные для достижения слабого минимума, выполнены. Итак, на экстремали  $y = \frac{b}{a}x$  достигается слабый минимум. Если же  $y'$  принимает произвольные значения, то  $(y' + 2p)$  может иметь любой знак и, следовательно, функция  $E$  знака не сохраняет — условия, достаточные для достижения сильного минимума, не выполнены. Можно утверждать, что сильный минимум на прямой  $y = \frac{b}{a}x$  не достигается.

Пример 2. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') dx; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = b; \quad a > 0 \text{ и } b > 0$$

в классе непрерывных функций с непрерывной первой производной. Экстремальями являются прямые  $y = C_1x + C_2$ . Граничным условиям удовлетворяет прямая  $y = \frac{b}{a}x$ , которая включается в пучок экстремалей  $y = C_1x$ , образующих центральное поле.

## Функция

$$E(x, y, p, y') = 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + p^4 - yp - (y' - p)(12p - 4p^3 + y) =$$

$$= -(y' - p)^2 [y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$$

Знак функции  $E$  противоположен знаку последнего множителя  $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$ . Этот множитель обращается в нуль и может изменить знак лишь при переходе  $y'$  через значение  $y' = -p \pm \sqrt{6 - 2p^2}$ . При  $6 - 2p^2 \leq 0$  или  $p \geq \sqrt{3}$  при любом  $y'$  имеем  $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)] \geq 0$ , если же  $6 - 2p^2 > 0$  или  $p < \sqrt{3}$ , то выражение  $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$  меняет знак. Если же при этом  $y'$  достаточно мало отличается от  $p$ , то последнее выражение сохраняет положительный знак при  $p > 1$  и отрицательный знак при  $p < 1$ .

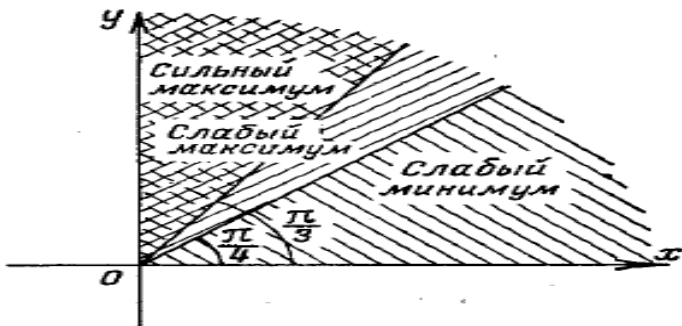


Рис. 3.11.

Следовательно, при  $p = \frac{b}{a} < 1$  или  $b < a$  имеем слабый минимум, так как  $E \geq 0$  при значениях  $y'$ , близких к  $p$ ; при  $p = \frac{b}{a} > 1$  или  $b > a$  имеем слабый максимум. При  $p = \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$  имеем сильный максимум, так как  $E \leq 0$  при любых значениях  $y'$ . При  $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ , нет ни сильного минимума, ни сильного максимума (рис. 3.11). Даже в приведенных выше весьма простых примерах исследование знака функции  $E$  было сопряжено

с некоторыми затруднениями, и поэтому желательно условие сохранения знака функцией  $E$  заменить более легко проверяемым условием. Предположим, что функция  $F(x, y, y')$  трижды дифференцируема по аргументу  $y'$ . По формуле Тейлора получим

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2l} F_{y'y'}(x, y, q)$$

где  $q$  заключено между  $p$  и  $y'$ .

Функция

$$F(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$$

после замены функции  $F(x, y, y')$  ее разложением по формуле Тейлора примет вид

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2l} F_{y'y'}(x, y, q).$$

Отсюда видно, что функция  $E$  сохраняет знак, если сохраняет знак  $F_{y'y'}(x, y, q)$ . При исследовании на слабый экстремум функция  $F_{y'y'}(x, y, q)$  должна сохранять знак для значений  $x$  и  $y$  в точках, близких к точкам исследуемой экстремали, и для значений  $q$ , близких к  $p$ . Если  $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$  в точках экстремали  $C$ , то в силу непрерывности эта вторая производная сохраняет знак и в точках, близких к кривой  $C$ , и для значений  $y'$ , близких к значениям  $y'$  на кривой  $C$ . Таким образом, при исследовании на слабый минимум условие  $E \geq 0$  может быть заменено условием  $F_{y'y'} > 0$  на экстремали  $C$ , а при исследовании на слабый максимум условие  $E \leq 0$  может быть заменено условием  $F_{y'y'} < 0$  на кривой  $C$ . Условие  $F_{y'y'} > 0$  (или  $F_{y'y'} < 0$ ) носит название *условия Лежандра*.

При исследовании на сильный минимум условие  $E \geq 0$  может быть заменено требованием  $F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0$  в точках  $(x, y)$ , близких к точкам кривой  $C$  при произвольных значениях  $q$ . При этом, конечно, предполагается, что разложение по формуле Тейлора

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2l} F_{y'y'}(x, y, q)$$

справедливо при любых  $y'$ . При исследовании на сильный максимум получим условие  $F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0$ , при тех же предположениях относительно области изменения аргументов и разложимости функции  $F(x, y, y')$  по формуле Тейлора.

Пример 3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx, \quad a > 0; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ , его общее решение  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Используя граничные условия, получаем  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , если  $a \neq k\pi$ , где  $k$  — целое число.

Итак, при  $a \neq k\pi$  экстремум может достигаться лишь на прямой  $y = 0$ . Если  $a < \pi$ , то пучок экстремалей  $y = C_1 \sin x$  с центром в точке  $(0, 0)$

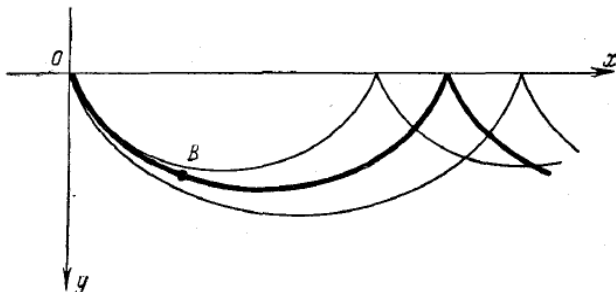


Рис. 3.12.

образует центральное поле. При  $a > \pi$  условие Якоби не выполнено. Так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по  $y'$  при любых  $y'$  и  $F_{y'y'} = 2 > 0$  при любых значениях  $y'$ , то на прямой  $y = 0$  при  $a < \pi$  реализуется сильный минимум. Можно утверждать, что при  $a > \pi$  минимум на прямой  $y = 0$  не достигается.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0)=0, \quad y(x_1) = y_1$$

(см. задачу о брахистохроне). Экстремальными являются циклоиды

$$\begin{aligned} x &= C_1(t - \sin t) + C_2, \\ x &= C_1(t - \cos t). \end{aligned}$$

Пучок циклоид  $x = C_1(t - \sin t)$ ,  $x = C_1(1 - \cos t)$  с центром в точке  $(0, 0)$  образует центральное поле, включающее экстремаль

$$x = a(t - \sin t), \quad x = a(1 - \cos t)$$

где  $a$  определено из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку  $B(x_1, y_1)$ , если  $x_1 < 2\pi a$  (рис. 3.12).

Имеем

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}; \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

при любых  $y'$ . Следовательно, при  $x_1 < 2\pi a$  на циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad x = a(1 - \cos t)$$

реализуется сильный минимум.

Пример 5. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a y'^3 dx; \quad y(0)=0, \quad y(a)=b, \quad a>0, \quad b>0.$$

Экстремальными являются прямые линии. Пучок  $y = Cx$  образует центральное поле, включающее экстремаль  $y = \frac{b}{a}x$ . На

экстремали  $y = \frac{b}{a}x$  вторая

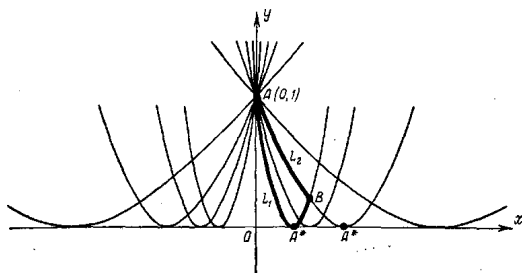


Рис. 3.13.

производная  $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{b}{a} > 0$ . Следовательно, прямая,

$y = \frac{b}{a}x$  реализует слабый минимум. При произвольных  $y'$  вто-

рая производная  $F_{y'y'} = 6y'$  знака не сохраняет; следовательно, указанные выше достаточные условия для достижения сильного минимума не выполнены. Однако отсюда еще нельзя заключить, что сильный экстремум не достигается.

Пример 6. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx; \quad y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид

$$\frac{y}{y'^2} + y' \frac{2y}{y'^3} = C \quad \text{или} \quad y'^2 = 4C_1 y;$$

извлекая корень, разделяя переменные и интегрируя, получаем  $y = (C_1 x + C_2)^2$  — семейство парабол. Из условия  $y(0) = 1$  находим  $C_2 = 1$ . Пучок парабол  $y = (C_1 x + 1)^2$  с центром в точке  $A(0, 1)$  имеет  $C_1$ -дискриминантную кривую  $y = 0$  (рис. 3.13). Через точку  $B(a, b)$  проходят две параболы этого пучока. На дуге  $AB$  одной из них ( $L_1$ ) лежит точка  $A^*$ , сопряженная с точкой  $A$ , на другой же ( $L_2$ ) сопряженной точки нет, и следовательно, на дуге  $L_2$  условие Якоби выполнено и на этой дуге параболы может реализоваться экстремум.

В окрестности исследуемой экстремали  $F_{y'y'} = \frac{6y}{y^4} > 0$  для произвольных  $y'$ , однако на этом основании нельзя утверждать, что на дуге  $L_2$  реализуется сильный минимум, так как функция  $F(x, y, y') = \frac{y}{y^2}$  не может быть представлена в виде

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2l} F_{y'y'}(x, y, p)$$

при произвольных значениях  $y'$  ввиду наличия разрыва функции  $F(x, y, y')$  при  $y' = 0$ . Можно лишь утверждать, что на  $L_2$  реализуется слабый минимум, так как для значений  $y'$ , близких к наклону поля на кривой  $L_2$ , такое разложение функции  $F(x, y, y')$  по формуле Тейлора имеет место.

Для полного исследования этого функционала на экстремум необходимо рассмотреть функцию  $E(x, y, p, y')$ :

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3}(y' - p) = \frac{y(y' - p)^2(2y' + p)}{y^2 p^3}$$

Так как множитель  $(2y' + p)$  не сохраняет знака при произвольных  $y'$ , то можно утверждать, что сильный минимум на дуге  $L_2$  не достигается. Изложенная теория без значительных изменений переносится и на функционалы вида

$$U[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Функция  $E$  принимает вид

$$\begin{aligned} E &= F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) - \\ &- F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) - \\ &- \sum_{i=1}^n (y'_i - p_i) F_{p_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned}$$

где  $p_i$  — функции наклона поля, на которое наложены некоторые ограничения (при этих ограничениях поле называется спе-



циальным). Условие Лежандра  $F_{y'y'} \geq 0$  заменяется следующими условиями

$$F_{y_1'y_1} \geq 0, \left| \begin{array}{cc} F_{y_1'y_1} & F_{y_1'y_2} \\ F_{y_2'y_1} & F_{y_2'y_2} \end{array} \right| \geq 0, \dots, \left| \begin{array}{cccc} F_{y_1'y_1} & F_{y_1'y_2} & \dots & F_{y_1'y_n} \\ F_{y_2'y_1} & F_{y_2'y_2} & \dots & F_{y_2'y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{y_n'y_1} & F_{y_n'y_2} & \dots & F_{y_n'y_n} \end{array} \right| \geq 0$$

Достаточные условия *слабого минимума* как в простейшей задаче, так и в более сложных, можно получить иным методом, основанным на изучении знака второй вариации.

По формуле Тейлора преобразуем приращение функционала в простейшей задаче к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx + \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2] dx + R \end{aligned}$$

где  $R$  имеет порядок выше второго относительно  $\delta y$  и  $\delta y'$ . При исследовании на слабый экстремум  $\delta y$  и  $\delta y'$  достаточно малы, и в этом случае знак приращения  $\Delta v$  определяется знаком члена, стоящего в правой части и содержащего наиболее низкие степени  $\delta y$  и  $\delta y'$ . На экстремали первая вариация

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0$$

и, следовательно, знак приращения  $\Delta v$ , вообще говоря, совпадает со знаком второй вариации

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2) dx \quad (3.2)$$

Условие Лежандра в соединении с условием Якоби и являются условиями, обеспечивающими постоянство знака вто-

рой вариации, а вместе с тем и постоянство знака приращения  $\Delta v$  в задаче о слабом экстремуме.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\delta y^2 + 2\omega(x)\delta y\delta y'] dx$$

где  $\omega(x)$  — произвольная дифференцируемая функция. Этот интеграл равен нулю:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\delta y^2 + 2\omega(x)\delta y\delta y'] dx = \int_{x_0}^{x_1} d(\omega\delta y^2) dx = [\omega(x)\delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0$$

(так как  $\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$ ).

Прибавляя интеграл (3.2) ко второй вариации, получим

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy}\delta y^2 + \omega')\delta y^2 + 2(F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}\delta y'^2)] dx$$

Выбираем функцию  $\omega(x)$  так, чтобы подынтегральная функция, с точностью до множителя, превратилась в точный квадрат, для чего функция  $\omega(x)$  должна удовлетворять уравнению  $F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$ . При такой выбор функции  $\omega$  вторая вариация принимает вид

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left( \delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}} \delta y \right)^2 dx$$

и, следовательно, знак второй вариации совпадает со знаком  $F_{y'y'}$ . Однако такое преобразование возможно лишь в предположении, что дифференциальное уравнение

$$F_{y'y'}(\omega' + F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

имеет на отрезке  $(x_0, x_1)$  дифференцируемое решение  $\omega(x)$ .

Преобразовав это уравнение к новым переменным подстановкой

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

где  $u$  — новая неизвестная функция, получим

$$\left( F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} u') = 0$$

— уравнение Якоби.

Если существует не обращающееся в нуль при  $x_0 < x \leq x_1$  решение этого уравнения, т. е. выполнено условие Якоби, то существует для тех же значений  $x$  непрерывное и дифференцируемое решение

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

уравнения

$$F_{y'y'} (F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

Итак, условие Лежандра и условие Якоби гарантируют сохранение знака второй вариации и, следовательно, являются достаточными условиями для слабого минимума ( $F_{y'y'} > 0$ ) или максимума ( $F_{y'y'} < 0$ ).

### 3.3. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду

Систему уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.3)$$

можно заменить системой уравнений первого порядка.

Полагая в (3.3)

$$F_{y_k} = q_k \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (3.4)$$

получим

$$\frac{dq_x}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_k} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (3.5)$$

Разрешаем систему уравнений (3.4) относительно  $y'_k$  (для возможности такого разрешения предположим, что

$$\frac{D(F_{y'_1}, F_{y'_2}, \dots, F_{y'_n})}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} \neq 0 \quad (3.6)$$

$$y'_k = \omega_k(x, y_s, q_s),$$

где  $\omega_k(x, y_s, q_s) = \omega_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$

и подставляем (3.6) в (3.5). При этом получим систему  $2n$  уравнений первого порядка в нормальной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \omega_k(x, y_s, q_s), \\ \frac{dq_x}{dx} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Здесь и в дальнейшем фигурные скобки означают, что в скобках вместо  $y'_k$  подставлены  $\omega_k(x, y_s, q_s)$ .

С помощью функции

$$H(x, y_s, q_s) = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

система (3.7) может быть записана в каноническом вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_x}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial y_k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

( $k=1, 2, \dots, n$ )

Заметим, что если функция  $F(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$  не зависит явно от  $x$ , то система (3.8) имеет первый интеграл

$$H=C. \text{ Действительно, в этом случае } H = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

также не содержит  $x$  явно и, следовательно,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dq_i}{dx}$$

В силу уравнений (3.8) получим

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad H = C$$

вдоль интегральных кривых системы (3.8). Для простейшей задачи этот первый интеграл уже был получен.

Пример 1. Закон сохранения энергии. Функция

$$H = \sum_{i=1}^n \omega_i q_i - \{F\}$$

для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt, \quad T = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

где  $T$ —кинетическая энергия системы материальных точек,  $U$ — потенциальная энергия), имеет следующий вид:

$$H = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (T - U) = T + U$$

— полная энергия системы.

Применим принцип стационарного действия. Если потенциальная энергия  $U$  не зависит явно от  $t$ , т.е. система консервативна, то уравнения Эйлера для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

имеют первый интеграл  $H = C, T + U = C$ .

Итак, полная энергия консервативной системы остается при движении постоянной.

Интегрирование канонической системы (3.8) равносильно интегрированию дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial x} + H \left( x, y_s, \frac{\partial v}{\partial y_s} \right) = 0 \tag{3.9}$$

где

$$H \left( x, y_s, \frac{\partial v}{\partial y_s} \right) = H \left( x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n} \right)$$

Уравнение (3.9) называется *уравнением Гамильтона—Якоби*.

Если известно однопараметрическое семейство его решений  $v(x, y_s, \alpha)$ , то известен и первый интеграл  $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$  системы (3.8),  $\beta$  — произвольная постоянная. Действительно,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \frac{\partial y_j}{dx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \frac{\partial H}{dq_j} \quad (3.10)$$

Дифференцируя тождество

$$\frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{d\alpha} \equiv -H \left( x, y_s, \frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{d\alpha} \right) \text{ по } \alpha$$

получим

$$\frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{d\alpha} = - \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_s \partial \alpha} \frac{\partial H}{dq_s} \quad (3.11)$$

и, подставляя (3.11) в (3.10), получим в правой части (3.10) тождественный нуль. Итак,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \equiv 0,$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$$

Следовательно, если известен полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$v = v(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

то известно и  $n$  первых интегралов системы (3.8):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.12)$$

Если якобиан системы (3.12) отличен от нуля

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha_i} \right| = 0,$$

то система (3.12) определяет  $y_i$  как функции остальных аргументов:

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Тем самым получено  $2n$ -параметрическое семейство экстремалей. Можно доказать, что (3.13) является общим решением системы уравнений Эйлера, а функции

$$y_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$$

и

$$q_i = \frac{\partial v(x, y_s, \alpha_s)}{\partial y_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

являются общим решением системы (3.8).

**Пример.** Найти уравнение геодезических линий на поверхности, на которой элемент длины кривой имеет вид  $ds^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)](dx^2 + dy^2)$ , т.е. найти экстремали функционала

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)](1 + y'^2)} dx$$

Так как

$$H = \frac{\sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)} \cdot \sqrt{1 - q^2}$$

$$q = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad H^2 + q^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

то уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

или

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \varphi_1(x) = \varphi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Для уравнения такого типа (уравнение с разделенными переменными)

$$\Phi_1\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \Phi_2\left(x, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

легко находится первый интеграл. Полагая

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \varphi_1(x) = \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \alpha \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\varphi_1(x) + \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\varphi_2(y) - \alpha} \quad \text{находим}$$

$$v = \int \sqrt{\varphi_1(x) + \alpha} dx + \int \sqrt{\varphi_2(y) - \alpha} dy$$

следовательно, уравнение геодезических линии  $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$  в данном

случае имеет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x) + \alpha}} - \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi_2(y) - \alpha}} = \beta$$

Замечание. К уравнению Гамильтона — Якоби можно прийти и из иных соображений. Рассмотрим центральное поле экстремалей с центром в точке  $A(x_0, y_0)$  для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

На экстремальных поля функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\bar{v}(x, y)$ , координат второй граничной точки  $B(x, y)$ .

Так как

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -H(x, y, q), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = q.$$

Исключая  $q$ , получим



$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -H \left( x, y, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)$$

Итак, функция  $\bar{v}(x, y)$  является решением уравнения Гамильтона — Якоби.

Совершенно аналогичные рассуждения справедливы и для функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx.$$

*Задачи для самостоятельного решения*

Исследовать на экстремум функционалы:

$$1. v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 0.$$

*Ответ:*  $y = -x^2/4$ -достигается сильный минимум.

$$2. v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx; \quad a > 0; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = 0.$$

*Ответ:*  $y = 0$ -достигается сильный минимум

$0 < \alpha < \pi/4$ , если  $\alpha > \pi/4$ , то минимума нет.

$$3. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

*Ответ:* экстремума из непрерывных кривых не достигается.

$$4. v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

*Ответ:*  $y = 7 - 4/x$ - сильный минимум.

$$5. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$$

*Ответ:*  $y = 1$ , сильный минимум.

$$6. \nu[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx; \quad y(0) = -1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Ответ:  $y = \sin(2x) - 1$  - сильный минимум.

$$7. \nu[y(x)] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 8$$

Ответ:  $y = x^3$  - сильный минимум.

$$8. \nu[y(x)] = \int_0^l (y^2 + y'^2 + 2ye^{2x}) dx; \quad y(0) = \frac{1}{3}; \quad y(l) = \frac{1}{3}e^2$$

Ответ:  $y = e^{2x}$  - сильный минимум.

$$9. \nu[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ответ:  $y = \sin(2x)$  - сильный минимум.

$$10. \nu[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0$$

Ответ: на прямой  $y = y_1 x / x_1$  - слабый минимум.

$$11. \nu[y(x)] = \int_1^{x_1} \frac{x^3}{y'^2} dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0$$

Ответ: на прямой  $y = y_1 x / x_1$  - слабый минимум

$$12. \nu[y(x)] = \int_1^{x_1} \frac{x^3}{y'^2} dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

Ответ:  $y = x^2$  - слабый минимум.

$$13. \nu[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(3) = 26.$$

Ответ:  $y = x^3 - 1$  - сильный максимум.

$$14. \nu[y(x)] = \int_0^2 [y^2 + (y')^2 - 2xy] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 3$$

Ответ:  $y = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2} + x$  - сильный минимум.

## 4. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

### 4.1. Связи вида $\Phi(x_1, y_1, \dots, y_n) = 0$

Вариационными задачами на условный экстремум называются задачи, в которых требуется найти экстремум функционала  $v$ , причем на функции, от которых зависит функционал  $v$ , наложены некоторые связи. Например, требуется исследовать на экстремум функционал

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

при наличии условий

$$\Phi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m; \quad m < n).$$

Вспомним, как решается аналогичная задача при исследовании на экстремум функции  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при наличии связей

$$\Phi_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m; \quad m < n).$$

Наиболее естественный путь заключается в разрешении системы

$$\Phi_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Уравнения, которой мы будем считать независимыми относительно каких-нибудь  $m$  переменных, например, относительно  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n);$$

$$x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m = x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n).$$

И подстановки найденных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  в  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При этом функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  становится функцией  $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$

только  $n-m$  переменных  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ , которые уже независимы, и следовательно, задача свелась к исследованию функции  $\Phi$  на безусловный экстремум. Этим путем можно, конечно, решать и поставленную задачу.

Разрешая систему

$$(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \text{ относительно } y_1, y_2, \dots, y_m$$

(или каких-нибудь других  $m$  функций  $y_i$ ) и подставляя их выражения в  $v[y_1, y_2, \dots, y_n]$ , мы получим функционал  $W[y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n]$  зависящий только от  $n-m$  уже независимых аргументов, и, следовательно, к функционалу  $W$  применимы методы, изложенные выше.

Однако как для функций, так и для функционалов обычно более удобен другой метод решения, называемый метод неопределенных множителей, сохраняющий полное равноправие переменных. Как известно, этот метод при исследовании на экстремум функций  $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при наличии связей

$\varphi_i(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$  заключается в том, что составляется новая вспомогательная функция

$$z^* = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i,$$

где  $\lambda_i$  – некоторые постоянные множители, и функции  $z^*$  исследуются на безусловный экстремум, т.е. составляется система уравнений

$$\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

Дополненная уравнениями связей  $\varphi_i=0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$ , из которых определяется все  $m+n$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Совершенно аналогично может быть решена задача на условный экстремум и для функционалов, а именно: если

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

и

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

то составляют функционал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l \right) dx \quad \text{или} \quad v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l,$$

который уже исследуется на безусловный экстремум, т.е. решают систему уравнений Эйлера

$$\left. \begin{aligned} F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ \text{дополненную уравнениями связей} \\ \varphi_l &= 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Число уравнений  $m+n$ , вообще говоря, достаточно для определения  $m+n$  неизвестных функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , а граничные условия  $y_j(x_0) = y_{j0}$  и  $y_j(x_1) = y_{j1}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), которые не должны противоречить уравнениям связей, вообще говоря, дадут возможность определить  $2n$  произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Очевидно, что найденные этим путем кривые, на которых достигается минимум или максимум функционала  $v^*$ , будут решениями и исходной вариационной задачи. Действительно, при найденных из системы (4.1) функциях

$\lambda_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и  $y_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) все  $\varphi_i=0$  и, следовательно,  $v^*=v$ , причем если при  $y_j=y_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), определенных из системы (9.1), достигается безусловный экстремум функционала  $v^*$ , т.е. экстремум по отношению ко всем близким кривым, как удовлетворяющим уравнениям связи, так и не удовлетворяющим им, то, в частности, экстремум достигается и по отношению к более близкому классу кривых, удовлетворяющих уравнениям связей. Однако из этого рассуждения отнюдь не следует, что все решения исходной задачи на условный экстремум будут давать безусловный экстремум функционалу  $v^*$  и, следовательно, остается невыясненным, все ли решения могут быть найдены этим методом. Мы ограничимся доказательством более слабого утверждения.

Теорема. Функции  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , реализующие экстремум функционала

$$v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

при наличии условий

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m; m < n)$$

Удовлетворяют при соответствующем выборе множителей  $\lambda_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$v^* = \int_{x_1}^{x_2} \left( F + \sum_{l=1}^m \lambda_l(x) \varphi_l \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} F^* dx.$$

Функции  $\lambda_i(x)$  и  $y_i(x)$  определяются из уравнений Эйлера

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

и

$$\varphi_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Уравнения  $\varphi_i=0$  можно также считать уравнениями Эйлера для функционала  $v^*$ , если аргументами функционала считать не только функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , но и  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ . Уравнения  $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) предполагаются независимыми, т.е. один из якобианов порядка  $m$  отличен от нуля, например

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Доказательство. Основное условие экстремума  $\delta v = 0$  принимает в данном случае вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n (F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j') dx = 0.$$

Интегрируя, по частям вторые слагаемые в каждой скобке и принимая во внимание, что

$$(\delta y_j)' = \delta y_j' \quad \text{и} \quad (\delta y_j)_{x=x_0} = 0; \quad (\delta y_j)_{x=x_1} = 0,$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0.$$

Так как функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  подчинены  $m$  независимым связям

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

то вариации  $\delta y_j$  не произвольны, и пока применять основной леммы нельзя. Вариации  $\delta y_j$  должны удовлетворять следую-

щим условиям, полученным путем варьирования уравнений связей  $\varphi_i=0$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) ^* ,$$

и следовательно, только  $n-m$  из вариации  $\delta y_j$  можно считать произвольным, например  $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \dots, \delta y_n$ , а остальные определяются из полученных уравнений. Умножая почленно каждое из этих уравнений на  $\lambda_i(x)dx$  и интегрируя в пределах от  $x_0$  и  $x_1$ , получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Складывая почленно все эти  $m$  уравнений, которым удовлетворяют допустимые вариации  $\delta y_j$ , с уравнением

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j dx = 0,$$

будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right] \delta y_j dx = 0,$$

или, если ввести обозначение

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i,$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

И здесь пока нельзя применять основной леммы ввиду того, что вариации  $\delta y_j$  не произвольны. Выберем  $m$  множителей  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  так, чтобы они удовлетворяли  $m$  уравнениям



$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Эти уравнения образуют линейную по отношению к  $\lambda_i$  систему с определением, отличным от нуля,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0;$$

следовательно, эта система имеет решение  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ .

При таком выборе  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  основное необходимое условие экстремума

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0$$

принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0.$$

Так как для функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  реализующих экстремум функционала  $v$ , это функциональное уравнение обращается в тождественное уже при произвольном выборе

$\delta y_i$  ( $j=m+1, m+2, \dots, n$ ), то теперь можно все  $\delta y_i$ , кроме одного, и применяя лемму, получим

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = m+1, m+2, \dots, n).$$

Принимая во внимание полученные выше уравнения

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

окончательно будем иметь, что функции, реализующие условный экстремум функционала  $v$ , и множители  $\lambda_i(x)$  должны удовлетворять системе уравнений

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}' = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Пример 1. Найти кратчайшее расстояние между двумя точками  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $B(x_1, y_1, z_1)$  на поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Расстояние между двумя точками на поверхности определяется, как известно, по формуле

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx.$$

В данном случае надо найти минимум  $l$  при условии  $\varphi(x, y, z) = 0$ .

Согласно предыдущему берем вспомогательный функционал

$$l^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x) \varphi(x, y, z) \right] dx$$

и для него пишем уравнения Эйлера:

$$\lambda(x) \varphi_y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

$$\lambda(x) \varphi_z - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Из этих трех уравнений определяются искомые функции

$$y = y(x) \quad \text{и} \quad z = z(x),$$

на которых может достигаться условный минимум функционала  $v$ , и множитель  $\lambda(x)$ .

Пример 2. Пользуясь принципом Остроградского-Гамильтона, найти уравнения движения системы материальных точек массы  $m_i (i=1, 2, \dots, n)$  с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  под действием сил, имеющих силовую функцию  $-U$ , при наличии связей  $\dot{\Phi}_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Интеграл Остроградского-Гамильтона

$$v = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

В данном случае имеет вид

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U \right] dt,$$

а вспомогательный функционал

$$v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \Phi_j \right] dt.$$

Уравнения движения будут уравнениями Эйлера для функционала  $v^*$ . Они будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= - \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}; \\ m_i \ddot{y}_i &= - \frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_i}; \\ m_i \ddot{z}_i &= - \frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_i} \\ &(i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

## 4.2 Связи вида

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0$$

В предыдущем параграфе мы рассматривали вопрос об исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx;$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

при наличии конечных связей

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (4.2)$$

Предположим теперь, что уравнения связей являются дифференциальными уравнениями

$$\varphi_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

В механике связи такого вида называются неголономными, а связи вида (4.2) - голономными.

В этом случае также можно доказать правило множителей, заключающееся в том, что условный экстремум функционала  $v$  достигается на тех же кривых, на которых реализуется безусловный экстремум функционала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i.$$

Однако доказательство значительно усложняется по сравнению со случаем конечных связей.

Если же ограничиться доказательством более слабого утверждения о том, что кривые, на которых достигается условный экстремум функционала  $v$ , при соответствующем выборе  $\lambda_i(x)$  являются экстремалами для функционала  $v^*$ , то доказа-

тельство, проведенное в предыдущем параграфе, может быть с незначительными изменениями повторено и для рассматриваемого случая.

Действительно, предположим, что одно из функциональных определителей порядка  $m$  отличен от нуля, например

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)} \neq 0.$$

Это гарантирует независимость связей. Разрешая уравнение  $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

относительно  $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ , что возможно, так как

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)} \neq 0,$$

получим

$$y'_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_{m+1}, y'_{m+2}, \dots, y'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Если считать  $y'_{m+1}, y'_{m+2}, \dots, y'_n$  произвольно заданными функциями, то из этой системы дифференциальных уравнений определяются  $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ . Таким образом,  $y'_{m+1}, y'_{m+2}, \dots, y'_n$  являются произвольными дифференцируемыми функциями с фиксированным граничными значениями и, следовательно, их вариации в том же смысле произвольны.

Пусть  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$  - произвольная, удовлетворяющая уравнениям связей  $\varphi_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), допустимая система функций. Варьируем уравнения связей

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \delta y'_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)^*.$$

Умножаем почленно каждое из полученных уравнений на пока неопределенный множитель  $\lambda_i(x)$  и интегрируем в пределах от  $x_0$  до  $x_1$ ; тогда получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial y'_j} \delta y'_j dx = 0;$$

Интегрируя каждое слагаемое второго интеграла по частям и принимая во внимание, что  $\delta y'_j = (\delta y_j)'$  и  $(\delta y_j)_{x=x_0} = (\delta y_j)_{x=x_1} = 0$ , будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left[ \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \right) \right] \delta y_j dx = 0. \quad (4.3)$$

Из основного необходимого условия экстремума  $\delta v = 0$  получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx = 0, \quad (4.4)$$

так как

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} \delta y_j + F_{y'_j} \delta y'_j \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j dx.$$

Сложив почленно все уравнения (4.3) и уравнение (4.4) и вводя обозначение

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i,$$

будем иметь

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0. \quad (4.5)$$

Так как вариации  $\delta y_i$  ( $j=1,2, \dots,n$ ) не произвольны, то пока нельзя применять основной леммы. Выберем  $m$  множителей  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Если написать эти уравнения в развернутом виде, то они представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений относительно

$$\lambda_i(x) \text{ и } \frac{d\lambda_i}{dx} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

которая при сделанных предположениях имеет решение  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ , зависящее от  $m$  произвольных постоянных. При таком выборе  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  уравнение (4.5) приводится к виду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^n \left( F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* \right) \delta y_j dx = 0,$$

Где вариации  $\delta y_i$  ( $j=m+1, m+2, \dots, n$ ) уже произвольны, и следовательно, полагая все вариации  $\delta y_i=0$ , кроме какой-нибудь одной  $\delta y_i$ , применяя основную лемму, получим

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j'}^* = 0 \quad (j = m + 1, m + 2, \dots, n).$$

Таким образом, функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , реализующие условный экстремум функционала  $v$ , и множители  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$  должны удовлетворять системе  $m+n$  уравнений:

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y_j}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\varphi_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

Т.е. должны удовлетворять уравнениям Эйлера вспомогательного функционала  $v^*$ , который рассматривается как функционал, зависящий от  $n+m$  функций

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m.$$

### 4.3. Изопериметрические задачи

Изопериметрическими задачами в узком смысле этого слова называется задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре.

Среди таких экстремальных задач, исследовавшихся еще в древней Греции, были и вариационные задачи, например задача о нахождении замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. Задавая кривую в параметрической форме  $x=x(t), y=y(t)$ , можно эту задачу формулировать так: найти максимум функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} x \dot{y} dt \quad \left( \text{или } S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \right)$$

при условии, что функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

сохраняет постоянное значение:



$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l$$

Таким образом, мы имеем здесь вариационную задачу на условный экстремум со своеобразным условием: интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

сохраняет постоянное значение.

В настоящее время изопериметрическими задачами называется значительно более общий класс задач, а именно: все вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

при наличии так называемых изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} F_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx = l_l$$

$$(l = 1, 2, \dots, m),$$

где  $l_l$  – постоянные,  $m$  может быть больше, меньше или равно  $n$ , а так же аналогичные задачи для более сложных функционалов.

Изопериметрические задачи могут быть сведены к задачам на условный экстремум, рассмотренным в предыдущем параграфе, путем введения новых неизвестных функций. Обозначим

$$\int_{x_0}^x F_l dx = z_l(x) \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

откуда  $z_l(x_0) = 0$  и из условия  $\int_{x_0}^{x_1} F_l dx = l_l$  имеем  $z_l(x_1) = l_l$ .

Дифференцируя  $z_l$  по  $x$ , будем иметь

$$z'_i(x) = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Тем самым интегральные, изопериметрические связи

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$$

заменились связями дифференциальными:

$$z'_i = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

и, следовательно, задача свелась к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Применяя правило множителей, можно вместо исследования на условный экстремум функционала  $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$  при наличии связей  $F_i - z'_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) исследовать на безусловный экстремум функционал

$$v^* = \int_x^{x_1} \left[ F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(F_i - z'_i) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

где

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(F_i - z'_i).$$

Уравнение Эйлера для функционала  $v^*$  имеют вид

$$F_{y_j}^* - \frac{d}{dx} F_{y'_j}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$F_{z_i}^* - \frac{d}{dx} F_{z'_i}^* = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

или

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx} \left( F_{y_j'} + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{i y_j'} \right) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Из последних  $m$  уравнений получаем, что все  $\lambda_i$  постоянны, а первые  $n$  уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) dx.$$

где  $\lambda_i$  – постоянные, и написать для него уравнение Эйлера.

Произвольные постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  в общем случае решении системы уравнений Эйлера и постоянные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  определяются из граничных условий

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и из изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Система уравнений Эйлера для функционала  $v^{**}$  не изменится, если  $v^{**}$  умножить на некоторый постоянный множитель  $\mu_0$  и, следовательно, представить его в виде

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^m \mu_i F_i dx,$$

где введены обозначения

$$F_0 = F, \quad \mu_j = \lambda_j \mu_0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Теперь все функции  $F_i$  входят симметрично, поэтому экстремали в исходной вариационной задаче и в задаче на нахож-

дение экстремума функционала  $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$  при наличии изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$$

$$(i=0,1,2,\dots,s-1,s+1,\dots,m)$$

Совпадают при любом выборе  $s(s=0,1,\dots,n)$

Это свойство носит название принципа взаимности. Например, задача о максимуме площади, ограниченной замкнутой кривой заданной длины, и задача о минимуме длины замкнутой кривой, ограничивающей площадь, взаимны и имеют общие экстремали.

Пример 1. Найти кривую  $y=y(x)$  заданной длины  $l$ , для которой площадь  $S$  изображенной на рис. 4.1 криволинейной трапеции  $CABD$  достигает максимума.

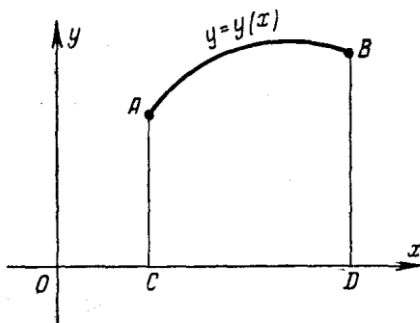


Рис. 4.1.

Исследуем на экстремум функционал

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y dx, \quad y(x_0) = y_0,$$

$y(x_1) = y_1$ , при изопериметрическом условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = l.$$

Составляем сначала вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1+y'^2}) dx.$$

Так как подынтегральная функция не содержит  $x$ , то уравнение Эйлера для  $S^{**}$  имеет первый интеграл

$$y + \lambda \sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

откуда

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Вводим параметр  $t$ , полагая  $y' = \operatorname{tg} t$ ; тогда получим

$$y - C_1 = -\lambda \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \text{ откуда } dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt;$$

$$x = \lambda \sin t + C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид:

$$x - C_2 = \lambda \sin t,$$

$$y - C_1 = -\lambda \cos t,$$

или, исключая  $t$ , получим  $(x-C_2)^2 + (y-C_1)^2 = \lambda^2$  — семейство окружностей. Постоянные  $C_1, C_2$  и  $\lambda$  определяются из условий

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x)) dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Составляем сначала вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Так как подынтегральная функция не содержит  $x$ , то уравнение Эйлера для  $S^{**}$  имеет первый интеграл  $F - y'F_{y'} = C_1$  или, в данном случае,

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

откуда

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Вводим параметр  $t$ , полагая  $y' = \operatorname{tg} t$ ; тогда получим

$$y - C_1 = -\lambda \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \text{ откуда } dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt;$$

$$x = \lambda \sin t + C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{aligned} x - C_2 &= \lambda \sin t, \\ y - C_1 &= -\lambda \cos t, \end{aligned}$$

Или, исключая  $t$ , получим  $(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$  — семейство окружностей. Постоянные  $C_1, C_2$  и  $\lambda$  определяются из условий

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x)) dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

при наличии условия

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Составляем вспомогательный функционал

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала не отличается от уравнения Эйлера в предыдущей задаче, и следовательно, в данной задаче максимум может достигаться лишь на дугах окружностей.

Пример 3. Найти форму абсолютно гибкого, нерастяжимого однородного каната длиной  $l$ , подвешенного в точках  $A$  и  $B$  (рис. 4.3).

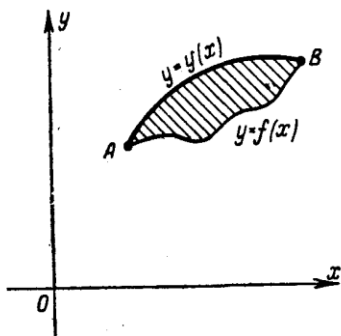


Рис. 4.2.

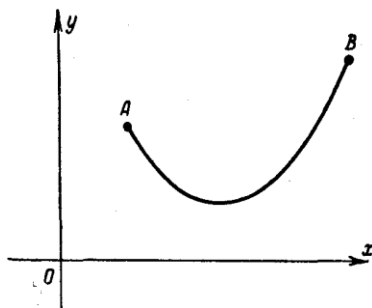


Рис. 4.3.

Так как в положении равновесия центр тяжести должен занимать наиболее низкое положение, то задача сводится к нахождению минимума статического момента  $P$  относительно  $Ox$ , которая предполагается направленной горизонтально. Исследуем на экстремум функционал  $P = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$  при

условии  $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx = l$ . Составляем вспомогательный функционал

$$P^{**} = \int_{x_1}^{x_1} (y + \lambda) \sqrt{1+y'^2} dx,$$

для которого уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y' F_{y'} = C,$$

или, в данном случае

$$(y + \lambda) \sqrt{1+y'^2} - \frac{(y + \lambda) y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

$y + \lambda = C_1 \sqrt{1+y'^2}$ . Выводим параметр, полагая  $y' = \text{sh}t$ , откуда

$$\sqrt{1+y'^2} = \text{ch}t; \quad y + \lambda = C_1 \text{ch}t; \quad \frac{dy}{dx} = \text{sh}t;$$

$$dx = \frac{dy}{\text{sh}t} = C_1 dt; \quad x = C_1 t + C_2$$

или, исключая  $t$ , получим  $y + \lambda = C_1 \text{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$  - семейство ценных линий.

Указанное выше правило решения изопериметрических задач распространяется и на более сложные функционалы.

Задача на условный экстремум – задача об оптимальном управлении. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (4.6)$$

с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ .



Это уравнение содержит управляющую функцию (или вектор-функцию)  $u(t)$ . Управляющую функцию  $u(t)$  надо выбрать так, чтобы функционал

$$v = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t)) dt$$

достигал экстремум.

Функция  $u(t)$ - решение поставленной задачи называется оптимальной функцией или оптимальным управлением.

Эта задача рассматривается как задача на условный экстремум функционала  $v$  с дифференциальными связями (4.6). Но в практических задачах оптимальные функции часто лежат на границе множества допустимых управляющих функций. Если оптимальная функция лежит на границе множества допустимых управляющих функций, то теория решения задач на условный экстремум (предполагавшая возможность двусторонних вариаций) не применима.

Поэтому для решения задачи оптимального регулирования обычно применяются иные методы, разработанные Л.Ц. Понтрягиным и Р. Беллман.

Пример. В системе дифференциальных уравнений (4.7) описывающей движение точки в плоскости с координатами  $x, y$  определить управляющую функцию  $u(t)$  так, чтобы точка  $A(x_0, y_0)$  переместилась в точку  $B(0, 0)$  за наименьший промежуток времени, причем  $|u| \leq 1$  (так как  $u = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , то и можно считать силой, действующей на точку с единичной массой).

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = u, \quad (t - \text{время}) \quad (4.7)$$

Управляющая функция  $u(t)$  кусочно-непрерывна. Для упрощения рассуждений предположим, что она имеет не более одной точки разрыва, однако окончательный результат верен и без этого предположения.

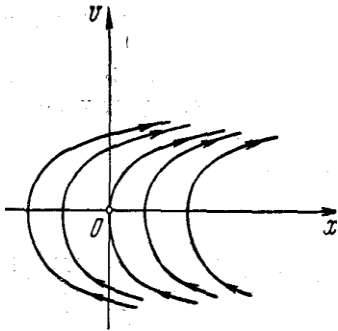


Рис. 4.4.

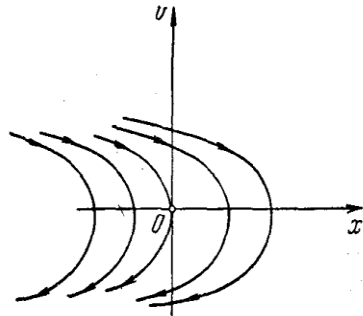


Рис. 4.5.

Почти очевидно, что на оптимальных траекториях  $u = \pm 1$ , так как при этих значениях  $\left| \frac{dx}{dt} \right|$  и  $\left| \frac{dv}{dt} \right|$  достигают наибольших значений и, следовательно, точка движется с наибольшей скоростью. Полагая в (4.7)  $u=1$ , получим

$$v = t + C_1, \quad x = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

или  $v^2 = 2(x - C)$ , и аналогично при  $u=-1$ :

$$v = -t + C_1, \quad x = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad v^2 = -2(x - C).$$

На рис. 4.4 и 4.5 изображены эти семейства парабол, причем стрелки указывают направление движения при возрастании  $t$ . Если  $A(x_0, v_0)$  лежит на проходящих через начало координат дугах парабол

$$v = -\sqrt{x} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{-x}$$

(рис. 4.6), то оптимальной траекторией является дуга одной из этих парабол, соединяющая точку  $A$  с точкой  $B$ . Если же точка  $A$  не лежит на этих параболах, то оптимальной траекторией будет дуга параболы  $AC$ , проходящая через точку  $A$ , и дуга  $CB$  одной из парабол (4.8) (см. рис. 4.6, на котором указаны два возможных положения точек  $A$  и  $C$ ).

В этой задаче время  $T$  перемещения точки из положения  $A$  в положение  $B$  является функционалом, определяемым первым из уравнений (4.7), второе уравнение из (4.7) можно рассматривать как уравнение связи. Однако применение к этой задаче изложенных выше классических методов решения было бы затруднительным, так как оптимальное управление лежит на границе области допустимых управлений  $|u| \leq 1$  и двусторонние вариации здесь невозможны, кроме того, решение ищется в классе кусочно- непрерывных управлений.

Оба эти обстоятельства характерны для большинства практических задач на оптимальное управление.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx \text{ при условии } \int_0^1 y^2 dx = 2; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

*Ответ:*  $y = \pm 2 \sin n\pi x$ , где  $n$  – целое число.

2. Найти геодезические линии круглого цилиндра  $r-R$ .

*Указание.* Применить цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ .

*Ответ:*  $\varphi = C_1 + C_2 z; \quad r = R$ .

3. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 dx \text{ при условии } \int_{x_1}^{x_2} y dx = a, \text{ где } a - \text{ постоянная.}$$

*Ответ:*  $y = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$ , где  $C, C_2, \lambda$  – вычисляются из граничных условий и из изопериметрического условия.

4. Найти экстремаль изопериметрической задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x); z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx \text{ при условии}$$

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2; \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1.$$

Ответ :  $y = -2,5x^2 + 3,5x; \quad z = x.$

## 5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

### 5.1. Прямые методы

Дифференциальные уравнения вариационных задач интегрируются в конечном виде лишь в некоторых случаях. В связи с этим естественно возникает потребность в иных методах решения этих задач. Основная идея так называемых *прямых методов* заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Эта задача на экстремум функции конечного числа переменных решается обычными методами, а затем предельным переходом получается решение соответствующей вариационной задачи.

Функционал  $v[y(x)]$  можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных. Это утверждение становится совершенно очевидным, если предположить, что допустимые функции могут быть разложены в степенные ряды:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

или в ряды Фурье:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

или вообще в какие-нибудь ряды вида

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

где  $\varphi_n(x)$  — заданные функции. Для задания функции  $y(x)$ , представимой в виде ряда  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ , достаточно задать значения всех коэффициентов  $a_n$ , и следовательно, значение функционала  $v[y(x)]$  в этом случае определяется заданием бесконечной последовательности чисел:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Т. е. функционал является функцией бесконечного множества переменных:  $v[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ .

Следовательно, различие между вариационными задачами и задачами на экстремум функций конечного числа переменных состоит в том, что в вариационном случае приходится исследовать на экстремум функции бесконечного множества переменных. Поэтому основная идея прямых методов, заключающаяся, как уже сказано выше, в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для задачи на экстремум функций конечного числа переменных, является весьма естественной.

## 5.2. Конечно-разностный метод Эйлера

Идея конечно-разностного метода заключается в том, что значения функционала  $v[y(x)]$ , например

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b,$$

рассматриваются не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче, кривых, а лишь на ломаных, составленных из заданного числа  $n$  прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин:

$$x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \dots, x_0 + (n-1)\Delta x, \quad \text{где } \Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n} \quad (\text{рис.5.1}).$$

На таких ломаных функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  ординат  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  вершин ломаной, так как ломаная вполне определяется этими ординатами.

Выбираем ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  так, чтобы функция  $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  достигала экстремума, т.е. определяем  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  из системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

а затем переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . В пределе при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию  $F$ , получим решение вариационной задачи.

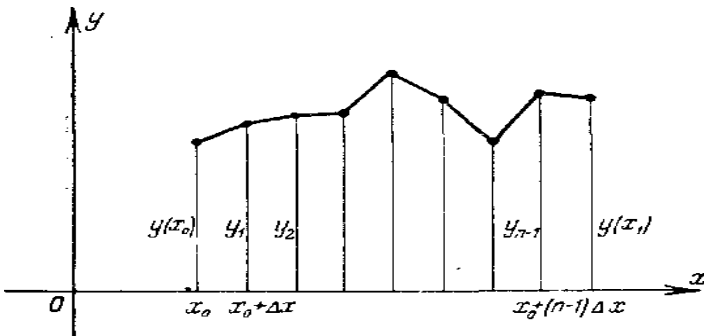


Рис. 5.1.

Удобнее, однако, значение функционала на указанных  $v[y(x)]$  выше ломаных вычислять приближенно, например в простейшей задаче заменять интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F\left(x, y, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) dx$$

интегральной суммой  $\sum_{i=1}^n F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) \Delta x$ .

В качестве примера выведем уравнение Эйлера для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

В этом случае на рассматриваемых ломаных

$$v[y(x)] \approx \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Так как от  $y_i$  зависят лишь два слагаемые  $i$ -е и  $(i-1)$ -е этой суммы:

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x \quad , \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \Delta x$$

то уравнения  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) принимают вид

$$\begin{aligned} & F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) \Delta x + \\ & + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \frac{1}{\Delta x} \Delta x = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, (n-1)), \end{aligned}$$

или

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right) \Delta}{\Delta x} = 0,$$

или

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

которому должна удовлетворять искомая функция  $y(x)$ , реализующая экстремум. Аналогично может быть получено основное необходимое условие экстремума в других вариационных задачах.

Если не совершать предельного перехода, то из системы уравнений  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) можно определить иско-  
мые ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  и тем самым получить ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи.

### 5.3. Метод Ритца

Идея *метода Ритца* заключается в том, что значения некоторого функционала  $v[y(x)]$  рассматриваются не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а

лишь на всевозможных линейных комбинациях  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$

с постоянными коэффициентами, составленных из  $n$  первых функций некоторой выбранной последовательности функций

$$W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$$

Функции  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  должны быть допустимыми в рассматриваемой задаче, что налагает некоторые ограничения на выбор последовательности функций  $W_i(x)$ . На таких линейных комбинациях функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Эти коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  выбираются так, чтобы функция  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  достигала экстремума; следовательно,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Совершая предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , получим в случае существования предела функцию  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  являющуюся (при некоторых ограничениях, налагаемых на функ-



ционал  $v[y(x)]$  и на последовательность  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$ ) точным решением рассматриваемой вариационной задачи. Если не совершать предельного перехода, а ограничиться лишь  $n$  первыми членами  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ , то получим приближенное решение вариационной задачи. Если таким методом определяется абсолютный минимум функционала, то приближенное значение минимума функционала находится с избытком, так как минимум функционала на любых допустимых кривых не больше, чем минимум того же функционала на части этого класса допустимых кривых — на кривых вида  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ .

При нахождении методом максимального значения функционала получаем приближенное значение максимума функционала. Для того чтобы функции  $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$  были допустимыми, прежде всего необходимо удовлетворить граничным условиям (конечно, не следует забывать и о других ограничениях, которые могут быть наложены на допустимые функции, например требованиях, касающихся их непрерывности или гладкости). Если граничные условия линейны и однородны, например, в простейшей задаче  $y(x_0) = y(x_1) = 0$  или

$$\beta_{1j} y(x_j) + \beta_{2j} y'(x_j) = 0 \quad (j = 0, 1),$$

где  $\beta_{ij}$  — постоянные, то проще всего и координатные функции выбрать удовлетворяющими этим граничным условиям.

Очевидно, что  $y_n$  при любых  $\alpha_i$  будут удовлетворять тем же граничным условиям. Пусть, например, граничные условия имеют вид  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ , тогда в качестве координатных функций можно выбрать  $W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x)$ , где  $\varphi_i(x)$  — какие-нибудь непрерывные функции, или

$$W_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

или какие-нибудь другие функции, удовлетворяющие:

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0.$$

Если условия неоднородны, например  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ , где хотя бы одно из чисел  $y_0$  или  $y_1$  отлично от нуля, то проще всего искать решение вариационной задачи в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) + W_0(x),$$

где  $W_0(x)$  удовлетворяет заданным граничным условиям  $W_0(x) = y_0$ ,  $W_0(x_1) = y_1$ , а все остальные  $W_i(x)$  удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям, т. е. в рассматриваемом случае  $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$ . Очевидно, что при таком выборе при любых  $\alpha_i$  функции  $y_n(x)$  удовлетворяют заданным граничным условиям. В качестве функции  $W_0(x)$  можно выбрать, например, линейную функцию

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0.$$

Решение системы уравнений  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), во-

обще говоря, является весьма сложной задачей. Эта задача значительно упрощается, если на экстремум исследуется квадратичный относительно неизвестной функции и ее производных функционал  $\nu$ , так как в этом случае уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$
 линейны относительно  $\alpha_i$ . Выбор по-

следовательности функций  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$ , называемых координатными функциями, сильно влияет на степень сложности дальнейших вычислений, и поэтому от удачного выбора координатной системы функций в значительной мере зависит успех применения этого метода.

Все сказанное выше в полной мере относится и к функционалам  $\nu[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , причем, конечно, в этом случае функ-

ции  $W_i$  должны быть уже функциями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а также — к функционалам, зависящим от нескольких функций.

Метод Ритца часто применяется для точного или приближенного решения задач математической физики. Например, если требуется найти в некоторой области  $D$  решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

при заданных значениях  $z$  на границе области  $D$ , то можно заменить эту задачу вариационной задачей об экстремуме функционала, для которого данное уравнение является уравнением Остроградского.

В рассматриваемом случае таким функционалом будет

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy.$$

Функцию  $z$ , реализующую экстремум этого функционала, можно находить любым из прямых методов.

Задачи математической физики обычно сводятся к исследованию на экстремум функционалов, квадратичных относительно неизвестной функции и ее производных, и следовательно, как указывалось выше, применение метода Ритца в этом случае упрощается. Вопрос о сходимости приближений, получаемых по методу Ритца, к искомому решению вариационной задачи, а также об оценке степени точности этих приближений является весьма сложным.

Для определенности будем иметь в виду функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

и предполагать, что речь идет о его минимуме. Последовательность координатных функций  $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots$  будем считать полной в том смысле, что каждая допустимая функция может быть с любой степенью точности аппроксимирована в смысле близости первого порядка линейной комбинацией

цией  $\sum_{k=1}^n \alpha_k W_k(x)$  координатных функций, где  $n$  достаточно велико. Тогда, очевидно, что методом Ритца можно получить

функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  где  $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k(x)$ , образующие

так называемую минимизирующую последовательность, т. е. последовательность, для которой значения функционала  $v[y_1], v[y_2], \dots, v[y_n], \dots$  сходятся к минимуму или к нижней грани значений функционала  $v[y(x)]$ . Однако из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} v[y(x)] = \min v[y(x)]$ , отнюдь не следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ .

Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций. Действительно, функционал

$$v[y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

может мало отличаться от  $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$

не только в том случае, когда на всем отрезке интегрирования  $y_n(x)$  близка в смысле близости первого порядка к  $y(x)$ , но и в том случае, когда на достаточно малых частях отрезка  $(x_0, x_1)$  функции  $y_n(x)$  и  $y(x)$  или их производные резко отличаются друг от друга, оставаясь близкими на остальной части отрезка  $(x_0, x_1)$  (рис. 5.2). Поэтому минимизирующая последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n$  может даже не иметь предела в классе допустимых функций, хотя функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  сами и будут допустимыми.

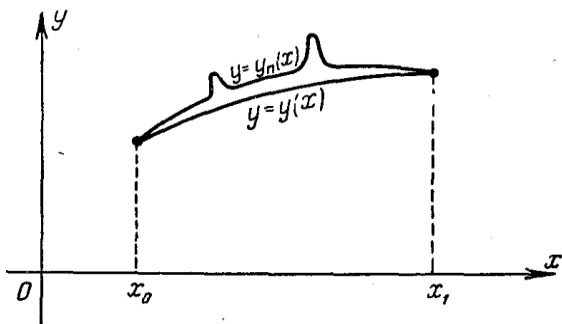


Рис. 5.2.

Условия сходимости последовательности  $y_n$  полученной методом Ритца, к решению вариационной задачи и оценка быстроты сходимости для конкретных, часто встречающихся функционалов были разработаны в трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Так, например, для функционалов вида

$$v = \int_0^1 [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + f(x)y] dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

где  $p(x) > 0$ ;  $q(x) \geq 0$ , часто встречающихся в приложениях, не только доказана сходимость приближений, получаемых по методу Ритца, к функции  $y(x)$ , реализующей минимум функционала, при координатных функциях

$$W_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

но и даны весьма точные оценки погрешности  $|y(x) - y_n(x)|$ .

Приведем одну из этих оценок максимума  $|y(x) - y_n(x)|$  на отрезке  $(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} & \max |y - y_n| \leq \\ & \leq \frac{1}{n+1} \left[ \max p(x) + \frac{\max q(x)}{(n+1)^2 \pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}}{\pi^2 \sqrt{2} [\min p(x)]^{\frac{5}{2}}} \times \\ & \times \left[ \max |p'(x)| + \frac{1}{\pi} \max q(x) + \pi \min p(x) \right] \end{aligned}$$

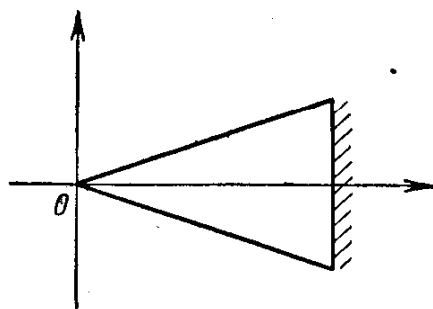


Рис. 5.3.

Даже в этом, сравнительно простом случае, оценка погрешности очень сложна. Поэтому для оценки точности результатов, полученных методом Рунца или другими прямыми методами, обычно пользуются следующим теоретически, конечно, несовершенным, но практически достаточно надежным приемом: вычислив  $y_n(x)$  и  $y_{n+1}(x)$ , сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка  $[x_0, x_1]$ . Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи равно  $y_n(x)$ . Если же значения  $y_n(x)$  и  $y_{n+1}(x)$  хотя бы в некоторых из выбранных точек в пределах заданной точности не совпадают, то вычисляют  $y_{n+2}(x)$  и сравнивают значения  $y_{n+1}(x)$  и  $y_{n+2}(x)$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения  $y_{n+k}(x)$  и  $y_{n+k+1}(x)$  не совпадут в пределах заданной точности.

**Пример 1.** При изучении колебаний заделанного клина постоянной толщины (рис. 5.3) приходится исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_0^1 (ax^3 y''^2 - bxy'^2) dx; \quad y(1) = y'(1) = 0,$$

где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные. За координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, можно взять  $(x-1)^2$ ,  $(x-1)^2 x$ ,  $(x-1)^2 x^2$ , ...,  $(x-1)^2 x^{k-1}$ , ...;

следовательно,

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x-1)^2 x^{k-1}.$$

Ограничиваясь лишь двумя первыми членами, будем иметь

$$y_2 = (x-1)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x).$$

тогда

$$\begin{aligned} v_2 = v[y_2] &= \int_0^1 [ax^3(6\alpha_2 x + 2\alpha_1 - 4\alpha_2)^2 - bx(x-1)^4(\alpha_1 + \alpha_2 x)^2] dx = \\ &= a \left[ (\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 + \frac{24}{5} \alpha_2 (\alpha_1 - 2\alpha_2) + 6\alpha_2^2 \right] - b \left( \frac{\alpha_1^2}{30} + \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{105} + \frac{\alpha_2^2}{280} \right) \end{aligned}$$

Необходимые условия экстремума  $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} = 0$ ;  $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} = 0$  при-

нимают в данном случае вид

$$\begin{aligned} \left( a - \frac{b}{30} \right) \alpha_1 + \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) \alpha_2 &= 0 \\ \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right) \alpha_1 - \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для получения решений, отличных от решения  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , которое соответствует отсутствию колебаний клина, необходимо, чтобы определитель этой однородной линейной системы уравнений был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \frac{b}{30} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \\ \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left( a - \frac{b}{30} \right) \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) - \left( \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right)^2 = 0.$$

Это уравнение называется уравнением частот. Оно определяет частоту  $b$  собственных колебаний клина, описываемых функцией  $u(x,t) = y(x) \cos bt$ . Меньший из двух корней  $b_1$ , и  $b_2$  уравнения частот дает приближенное значение частоты основного тона колебаний клина.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

внутри прямоугольника  $D$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , обращаясь в нуль на границе  $D$ . Функция  $f(x, y)$  предполагается разложимой внутри рассматриваемого прямоугольника в равномерно сходящийся двойной ряд Фурье:

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

Эту краевую задачу можно свести к вариационной задаче, т. е. подобрать функционал, для которого заданное уравнение было бы уравнением Остроградского, и затем одним из прямых методов найти функцию, реализующую экстремум этого функционала, и тем самым найти решение исходной краевой задачи.

Как легко проверить,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

является уравнением Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy$$

Граничное условие сохраняется:  $z = 0$  на границе области  $D$ . Исследуем этот функционал на экстремум методом Ритца.

В качестве системы координатных функций возьмем



$$\sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Каждая из этих функции и их линейные комбинации удовлетворяют граничному условию  $z = 0$  на границе области  $D$ . Свойством полноты эти функции также обладают. Взяв

$$z_{nm} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \alpha_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

будем иметь

$$\begin{aligned} v[z_{n,m}] &= \iint_0^a \iint_0^b \left[ \left( \frac{\partial z_{n,m}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{n,m}}{\partial y} \right)^2 + 2z_{n,m} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \right] dx dy = \\ &= \frac{\pi^2 ab}{4} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \alpha_{pq}^2 + \frac{ab}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \alpha_{pq} \beta_{pq}. \end{aligned}$$

Этот результат легко получить, если принять во внимание, что координатные функции

$\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \quad (p, q = 1, 2, \dots)$  образуют в области  $D$  ортогональную систему т. е.

$$\iint_D \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \sin p_1 \frac{\pi x}{a} \sin q_1 \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$$

при любых целых положительных  $p, q, p_1, q_1$ , за исключением случая  $p = p_1, q = q_1$ . При  $p = p_1, q = q_1$ , получаем

$$\iint_D \sin^2 p \frac{\pi x}{a} \sin^2 q \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

Поэтому из всех членов, стоящих под знаком двойного интеграла, равно  $v[z_{n,m}]$ , надо учитывать лишь те, которые содержат квадраты функций

$\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$ ,  $\sin p \frac{\pi x}{a} \cos q \frac{\pi y}{b}$  и  $\cos p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$ . Очевидно,  $v[z_{n,m}]$  является функцией  $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm})$  коэффициентов

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm}$ , которые определяются из основного необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{pq}} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, m)$$

Эта система уравнений в данном случае имеет вид

$$\alpha_{pq} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \pi^2 + \beta_{pq} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, m)$$

откуда

$$\alpha_{pq} = - \frac{\beta_{pq}}{\pi^2 \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}.$$

Следовательно,

$$z_{nm} = - \frac{1}{\pi^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}.$$

Переходя к пределу при  $n$  и  $m$ , стремящихся к бесконечности, в данном случае получим точное решение:

$$z = - \frac{1}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

#### 5.4. Метод Канторовича

При применении метода Ритца к функционалам  $v[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ , зависящим от функций нескольких независимых переменных, выбирается координатная система функций  $W_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $W_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $W_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и приближенное решение вариационной задачи, ищется в виде

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{где коэффициенты } \alpha_k \text{ - постоянные.}$$

Метод Канторовича также требует выбора координатной системы функций

$W_1(x_1, x_2, \dots, x_n), W_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, W_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и приближенное решение также ищется в виде

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

однако коэффициенты  $\alpha_k(x_i)$  не постоянные, а являются неизвестными функциями одной из независимых переменных.

Функционал  $v[z]$  на классе функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

превращается в функционал  $\tilde{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i) \dots \alpha_m(x_i)]$ , зависящий от  $m$  функций одной независимой переменной

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i) \dots \alpha_m(x_i).$$

Функции  $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i) \dots \alpha_m(x_i)$  выбираются так, чтобы функционал  $\tilde{v}$  достигал экстремума. Если после этого перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , то при некоторых условиях можно получить точное решение, если же предельного перехода не осуществлять, то этим методом будет получено приближенное решение и притом, вообще говоря, значительно более точное, чем при применении метода Рунге с теми же координатными функциями и с тем же числом членов. Большая точность этого метода вызвана тем, что класс функций

$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с переменными  $\alpha_k(x_i)$  значи-

тельно шире класса функций  $z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при постоянных  $\alpha_k$  и, следовательно, среди функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

можно подобрать функции, лучше аппроксимирующие решение вариационной задачи, чем среди функций вида

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ где } \alpha_k \text{ постоянны.}$$

Пусть, например, требуется исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy.$$

распространенный на область  $D$ , ограниченную кривыми  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  и двумя прямыми  $x = x_0$  и  $x = x_1$  (рис. 5.4). На границе области  $D$  заданы значения функции  $z(x, y)$ . Выбираем последовательность координатных функций:

$$W_1(x, y), W_2(x, y), \dots, W_n(x, y), \dots$$

Ограничиваясь пока  $m$  первыми функциями этой последовательности, мы будем искать решение вариационной задачи в виде суммы функций  $z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) W_k(x, y)$  или меняя обозначения  $\alpha_k(x)$  на  $u_k(x)$ , получим:

$$z_m(x, y) = u_1(x) W_1(x, y) + u_2(x) W_2(x, y) + \dots + u_m(x) W_m(x, y),$$

где  $W_k$  — выбранные нами функции, а  $u_k$  — неизвестные функции, которые мы определяем так, чтобы функционал  $v$  достигал экстремума.

Имеем

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z_m, \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy.$$

Так как подынтегральная функция является известной функцией  $y$ , то интеграция по  $y$  может быть выполнена, и функционал  $v[z_m(x, y)]$  будет функционалом вида

$$v[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u'_1, \dots, u'_m) dx.$$

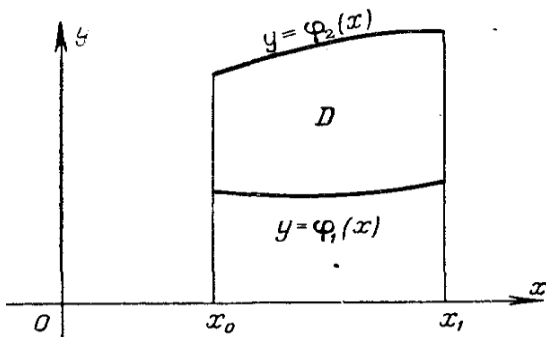


Рис. 5.4.

Функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$  выбираются так, чтобы функционал  $v[z_m(x, y)]$  достигал экстремума. Следовательно,  $u_i(x)$  должны удовлетворять системе уравнений Эйлера:

$$\varphi_{u_1} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_1'} = 0.$$

$$\varphi_{u_2} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_2'} = 0$$

.....

$$\varphi_{u_m} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_m'} = 0$$

Произвольные постоянные выбираются так, чтобы  $z_m(x, y)$  удовлетворяла на прямых  $x = x_0$  и  $x = x_1$  заданным граничным условиям.

Пример 1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[z(x, y)] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2x \right] dx dy,$$

причем на границе области интегрирования  $z = 0$ . Областью интегрирования является прямоугольник  $-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b$ .

Решение ищем в виде  $z_1 - (b^2 - y^2)u(x)$ , при этом граничные условия на прямых  $y = \pm b$  будут удовлетворены.

Функционал

$$v[z_1] = \int_{-a}^a \left[ \frac{16}{15} b^5 u'^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{8}{3} b^3 u \right] dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала

$$u'' - \frac{5}{2b^2} u = -\frac{5}{4b^2}$$

является линейным уравнением с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$u = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2,5} x / b + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{2,5} x / b + 0,5.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий

$z(-a) = z(a) = 0$  откуда  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = -1 / \sqrt{2,5} a / b$ , и окончательно получаем:  $u = 0,5(1 - (\operatorname{ch} \sqrt{2,5}(x/b) / \operatorname{ch} \sqrt{2,5}(a/b)))$  и

$z = 0,5(1 - (\operatorname{ch} \sqrt{2,5}(x/b) / \operatorname{ch} \sqrt{2,5}(a/b)))$ . Если необходимо получить более точный ответ, то можно искать решение в виде

$$z_2 = (b^2 - y^2)u_1(x) + (b^2 - y^2)^2 u_2(x).$$

**Пример 2.** Найти непрерывное решение уравнения  $\Delta z = -1$  в области  $D$ , являющейся равносторонним треугольником, ограниченным прямыми  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$  и  $x = b$

(рис. 5.5) обращаемое в нуль на границе этой области.

Уравнение  $\Delta z = -1$  является уравнением Остроградского для функционала

$$v[z] = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy,$$

причем на границе области интегрирования  $z = 0$ . Следуя методу Канторовича, будем искать первое приближение в виде

$$z_1 = \left[ y^2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} x \right)^2 \right] u(x).$$

При таком выборе  $z_1$  граничные условия на прямых  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$  удовлетворяются.

Функционал  $v[z_1]$  после выполнения интегрирования по  $y$  принимает вид

$$v[z_1] = \frac{8\sqrt{3}}{405} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 u u' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u) dx.$$

Уравнением Эйлера для этого функционала будет  $x^2 u'' + 5x u' - 5u = 3,75$ . Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются уравнениями Эйлера. Одно частное решение этого неоднородного уравнения очевидно:  $u = -0,75$ . Решение соответствующего однородного уравнения ищем в виде  $u = x^k$  и окончательно получаем  $u = C_1 x + C_2 x^{-5} - \frac{3}{4}$ . Так как около точки  $x = 0$  решение  $u$  должно быть ограничено, то  $C_2$  следует выбрать равным нулю, а из условия  $u(b) = 0$  получаем  $C_1 = -0,75/b$ .

Итак,  $z_1 = -0,75(1-x/b)(y^2 - x^2/3)$ .

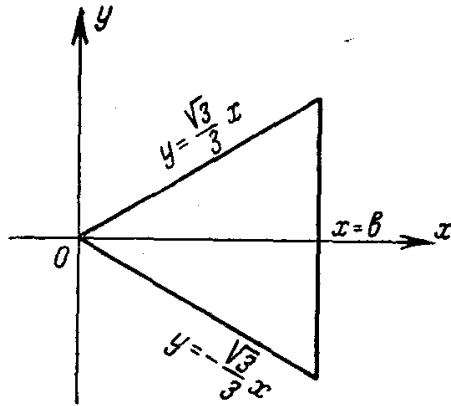


Рис. 5.5.

**З а м е ч а н и е.** Для приближенного решения краевых задач часто применяется еще один прямой не вариационный метод — метод Б. Г. Галеркина. Этот метод особенно удобен при решении линейных краевых задач, но может быть применен и ко многим нелинейным задачам.

Для определенности изложим *метод Галеркина* в применении к особенно часто встречающимся в приложениях линейным уравнениям второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.1)$$

с однородными граничными условиями  $y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0$  (неоднородные граничные условия  $y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$  заменой переменных

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

легко сводится к однородным).

Уравнение (5.1) кратко запишем в виде  $L(y) = f(x)$ . Выберем полную на отрезке  $[x_0, x_1]$  систему непрерывных линейно независимых функций

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x), \dots \quad (5.2)$$



удовлетворяющих граничным условиям

$$\omega_n(x_0) = \omega_n(x_1) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Приближенное решение краевой задачи будем искать в виде линейной комбинации первых  $n$  функций системы (5.2):

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x).$$

Подставляем  $y_n$  в уравнение (5.1) и выбираем коэффициенты  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), так чтобы функция

$$L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x)\right) - f(x)$$

была ортогональна на отрезке  $[x_0, x_1]$  каждой из функций

$$\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x)\right) - f(x) \right] \omega_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.3)$$

Естественно ожидать, что  $y_n$  стремится при  $n \rightarrow \infty$

к точному решению  $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i(x)$ , так как, если полученный

ряд сходится и допускает двукратное почленное дифференцирование, то функция  $L(\tilde{y}) - f(x)$  ортогональна на отрезке  $[x_0, x_1]$  каждой функции  $\omega_i(x)$  системы (5.2), а так как система (5.2) полна, то  $L(\tilde{y}) - f(x) = 0$ , а это означает, что  $\tilde{y}$  является решением уравнения (5.1). Очевидно,  $\tilde{y}$  удовлетворяет и граничным условиям  $\tilde{y}(x_0) = 0$ ,  $\tilde{y}(x_1) = 0$  (так как все  $\omega_i(x_0) = \omega_i(x_1) = 0$ ).

Определить все  $\alpha_i$  из линейной по отношению к ним системы (5.3) и совершить предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  удастся весьма редко, поэтому обычно ограничиваются лишь конечным и притом весьма небольшим числом  $n$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ , а иногда даже  $n = 1$ ). При этом, конечно, надо выбрать лишь  $n$  функций  $\omega_i(x)$ , поэтому условие полноты отпадает и их надо

выбирать линейно независимыми и удовлетворяющими граничным условиям  $\omega_i(x_0) = \omega_i(x_1) = 0$ . Часто в качестве так называемых координатных функций берут многочлены:  $(x - x_0)(x - x_1)$ ,  $(x - x_0)^2(x - x_1)$ ,  $(x - x_0)^3(x - x_1)$ , ...,  $(x - x_0)^n(x - x_1)$ , (удобно при этом начало координат перенести в точку  $x_0$ , и тогда  $x_0 = 0$ ) или тригонометрические функции

$$\sin \frac{n\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Этот метод применим к уравнениям любого порядка  $n$ , к системам уравнений и к уравнениям в частных производных.

#### *Задачи для самостоятельного решения*

1. Найти приближенное решение уравнения  $\Delta z = -1$  внутри квадрата  $-a \leq x \leq a$ ,  $-a \leq y \leq a$ , обращаясь в нуль на границе этого квадрата. Указание. Задача сводится к исследованию на экстремум функционала

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy.$$

Приближенное решение можно искать в виде

$$z_0 = \alpha(x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

Ответ:  $z_1 = 5(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)/(16a^2)$ .

2. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy) dx; \quad y(1) = y'(1) = 0$$

Указание. Решение можно искать в виде

$$y_n(x) = (x - 1)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n);$$

провести вычисления при  $n=1$ .

Ответ:  $y_1 = (x-1)^2 (0,124 + 0,218x)$ .

3. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y(1) = 0,$$

и сравнить с точным решением. Указание. Приближенное решение можно искать в виде

$$y_n = x(1-x)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n);$$

провести вычисление при  $n=0$  и  $n=1$ .

*Ответ:* точное решение  $y = (\sin x / \sin 1) - x$ .

4. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_1^2 (xy'^2 - \frac{x^2-1}{x} y^2 - 2x^2 y) dx; \quad y(1) = y(2) = 0,$$

и сравнить с точным решением.

Указание. Решение можно искать в виде

$$y = \alpha(x-1)(x-2).$$

*Ответ:* решение уравнения Эйлера

$y = 3,6072J_1(x) + 0,75195Y_1(x)$ , где  $J_1(x)$  и  $Y_1(x)$ -функции Бесселя.

5. Найти методом Ритца приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx; \quad y(0) = y(2) = 0,$$

и сравнить с точным решением. Указание. См. задачу 3.

*Ответ:* точное решение  $2(\operatorname{sh}x / \operatorname{sh}2) - x$ .

6. Найти методом Ритца приближенное решение дифференциального уравнения  $y'' + x^2 y = x$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Определить  $y_2(x)$  и  $y_3(x)$  и сравнить их значения в точках  $x=0,25$ ;  $x=0,5$  и  $x=0,75$ .

*Ответ:*  $y_2 = x(x-1)(0,1708 + 0,17436x)$ ,

$y_3 = x(x-1)(0,1705 + 0,176x - 0,0018x^2)$ .

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

### 6.1. Решение задачи оптимального управления с помощью уравнения Эйлера. Общая задача Лагранжа

Задача 1. Рассмотрим электрический привод постоянного тока, предназначенный для поворота платформы экскаватора. Задачей этого электропривода является угловое перемещение (поворот) платформы из положения  $\varphi(t_1)=\varphi_1$  в положение  $\varphi(t_2)=\varphi_2$ . В начальный  $t_1$  и конечный  $t_2$  моменты времени скорость платформы равна нулю:  $\dot{\varphi}(t_1)=0$ ;  $\dot{\varphi}(t_2)=0$ .

Найти закон управления током  $i(t)$  двигателя, соответствующий энергосберегающему режиму его работы: затраты энергии на поворот платформы должны быть минимальными.

Формализуем поставленную задачу.

Уравнения движения двигателя:

$$\begin{cases} J \frac{d\omega(t)}{dt} + M_c = M_\delta(t); \\ L \frac{di(t)}{dt} + i(t)R + E(t) = u(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $J$  – момент инерции двигателя, исполнительного механизма и платформы, приведённые к ротору двигателя,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $\omega$  – угловая частота вращения ротора двигателя,  $\text{с}^{-1}$ ;  $i$  – ток в якорной обмотке двигателя, А;  $M_c, M_\delta$  – момент сопротивления нагрузки (сухое трение) и момент, развиваемый на валу двигателя, Н·м:  $M_\delta=c_m i$ ,  $c_m$  – постоянная двигателя по моменту, Н·м/А;  $L, R$  – индуктивность и активное сопротивление цепи якоря, Гн, Ом;  $E$  – противоЭДС (В):  $E=c_e\omega$ ,  $c_e$  – постоянная двигателя для ЭДС, В·с;  $u$  – напряжение питания двигателя, В.

Затраты энергии на поворот платформы складываются из энергии  $S$ , необходимой для совершения полезной работы механической работы, и потерь в обмотке двигателя:

$$P = R \int_0^T i^2(t) dt,$$

где  $T$  – заданное время поворота платформы.

Очевидно, что именно потери  $P$  могут быть минимизированы путём выбора управления  $i(t)$ , т.е. искомая функция  $i(t)$  должна доставлять минимум функционалу:

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (6.2)$$

в котором константа  $R$  опущена как не влияющая на результат решения.

Ограничениями задачи являются: заданный угол  $\varphi$  поворота платформы, приведённый к ротору двигателя:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_0^T \omega(t) dt, \quad (6.3)$$

взаимосвязь между током  $i$  и частотой вращения  $\omega$ , вытекающая из (6.1):

$$i = \frac{J}{c_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m}. \quad (6.4)$$

Ограничение (6.4) можно исключить из явного вхождения в формулировку задачи путём его введения в функционал (6.2):

$$Q = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt \rightarrow \min, \quad (6.5)$$

где постоянный множитель  $1/c_m$  опущен.

Задача поиска экстремума функционала (6.5) с ограничением (6.3) может быть сформулирована как общая задача Лагранжа без ограничений путём перехода к расширенному функционалу:

$$\Theta = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt + \lambda \int_0^T \omega(t) dt \rightarrow \min,$$

в котором подынтегральное выражение образует так называемую вспомогательную функцию:

$$F = (J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda\omega \rightarrow \min, \quad (6.6)$$

содержащую неопределённый множитель  $\lambda$ .

Учитывая граничные условия  $\omega(0)=0$  и  $\omega(T)=0$ , получим окончательную формулировку решаемой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \int_0^T [(J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda\omega] dt \rightarrow \min, \\ \int_0^T \omega(t) dt = \varphi; \quad \omega(0) = 0; \quad \omega(T) = 0. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Задача (6.7) представляет собою изопериметрическую задачу с вспомогательной функцией  $F$  и закреплёнными концами. В ней необходимо найти две неизвестные функции  $\omega(t)$  и  $\lambda(t)$ , причём в данном частном случае в силу изопериметрического условия (6.3) справедливо:  $\lambda(t)=\lambda = \text{const}$ .

Для определения  $\omega(t)$  и  $\lambda$  имеем два уравнения – уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}} = 0,$$

и уравнение связи:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \varphi.$$

Подставляя (6.6) в уравнение Эйлера, получаем:

$$\lambda - \frac{d}{dt} (2J^2\dot{\omega} + 2JM_c) = \lambda - 2J^2\ddot{\omega} = 0. \quad (6.8)$$

Решение дифференциального уравнения (6.8) имеет вид:

$$\omega = \frac{\lambda}{4J^2} t^2 + c_1 t + c_0. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.3), получим:

$$\int_0^T \left( \frac{\lambda}{4J^2} t^2 + c_1 t + c_0 \right) dt = \left( \frac{\lambda t^3}{12J^2} + \frac{c_1 t^2}{2} + c_0 t \right) \Big|_0^T = \quad (6.10)$$

$$= \frac{\lambda T^3}{12J^2} + \frac{c_1 T^2}{2} + c_0 T = \varphi.$$

Положив, для общности,  $\omega(0)=\omega_1$  и  $\omega(T)=\omega_2$ , из (6.9) получим  $c_0=\omega_1$ . Тогда совместное решение (6.9) для  $t=T$  и (6.10) даёт:

$$\lambda = 12J^2 \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)T - 2\varphi}{T^3};$$

$$c_1 = \frac{6\varphi - 2(2\omega_1 + \omega_2)T}{T^2}.$$

Для условий (6.7)  $\omega(0)=0$  и  $\omega(T)=0$  имеем:

$$\lambda = -\frac{24J^2\varphi}{T^3}; \quad c_1 = \frac{6\varphi}{T^2},$$

и, с учётом (6.9), окончательно:

$$\omega(t) = -\frac{6\varphi}{T^3} t^2 + \frac{6\varphi}{T^2} t, \quad (6.11)$$

и

$$i(t) = \frac{J}{c_m} \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m} = \frac{1}{c_m} \left( -\frac{12J\varphi}{T^3} t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M_c \right). \quad (6.12)$$

Для определения вида найденного экстремума проверяем условие Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{\omega}^2} = \frac{\partial(2J^2 \dot{\omega} + 2JM_c)}{\partial \dot{\omega}} = 2J^2 > 0,$$

Таким образом, найденное решение (6.11) и (6.12) обеспечивает функционалу  $Q$  минимум.

Для иллюстрации полученного решения составим имитационную модель объекта (рис. 6.1) с параметрами:  $L=0,05$  Гн;  $R=0,06$  Ом;  $J=100$  кг·м<sup>2</sup>;  $U=400$  В;  $M=300$  Н·м;  $c_e=c_m=2,5$ ;  $i_{ном}=200$  А;  $\omega_{ном}=1500$  об/мин.

Функция момента сопротивления формируется в виде момента сухого трения:  $M_c = M \cdot \text{sign}(\omega)$ .

Двигатель снабжён пропорционально-интегрирующим регулятором с передаточной функцией  $W(s)$ :

$$W(s) = \frac{10s + 70}{s},$$

в совокупности с которым образует следящую систему регулирования тока двигателя по желаемому закону, в частности, вида (6.12).

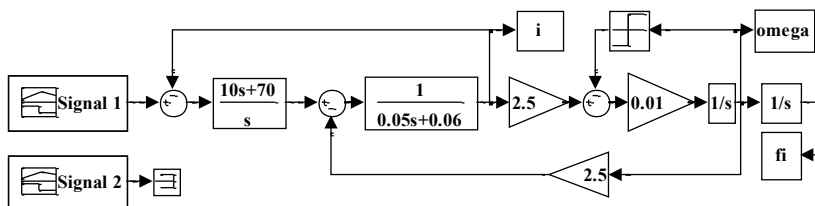


Рис. 6.1. Имитационная модель системы оптимального управления поворотом платформы

Графики изменения тока  $i(t)$  при оптимальном управлении (6.12), соответствующей частоты вращения  $\omega(t)$  и угла поворота  $\varphi(t)$  при заданном значении последнего 100 радиан за время  $T=5$  с, представлены на рис. 6.2а,б.

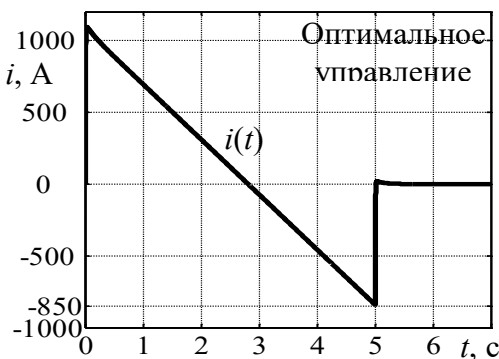


Рис.6.2а. Изменение тока при оптимальном управлении (6.12)



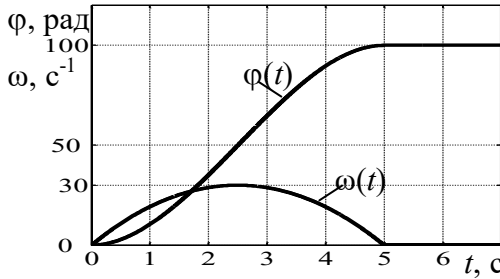


Рис. 6.2б. Изменение частоты вращения  $\omega(t)$

и угла поворота  $\varphi(t)$  при оптимальном управлении

Потери энергии при полученном оптимальном управлении (6.12) для  $T=5$  с,  $M=300$  Н·м и  $\varphi=100$  рад составляют:

$$\begin{aligned}
 P &= R \int_0^T i^2(t) dt = \int_0^T \frac{R}{c_m^2} \left( -\frac{12J\varphi}{T^3} t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M \right)^2 dt = \\
 &= R \frac{12J^2\varphi^2 + T^4 M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=5 \\ c_m=2,5 \\ R=0,06}} = 96,48 \text{ кДж}
 \end{aligned}$$

Для сравнения оптимального управления (6.12) с тривиальным решением задачи, при котором половину времени поворота платформы её частота вращения линейно возрастает до значения  $\omega_{\max}$ , а вторую половину – снижается до нуля.

В этом случае для того, чтобы за время  $T$  повернуть платформу на угол  $\varphi$ , потребуется выполнение равенства:

$$\varphi = \int_0^T \frac{\omega_{\max}}{2} dt = \frac{\omega_{\max} T}{2}. \text{ Отсюда: } \omega_{\max} = \frac{2\varphi}{T},$$

и, далее:

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{4\varphi}{T^2} t, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ -\frac{4\varphi}{T^2} (t - T), & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases}$$

С учётом (6.4) получаем:

$$i(t) = \frac{J}{c_m} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{c_m} = \begin{cases} \left( \frac{4J\varphi}{T^2} + M_c \right) \frac{1}{c_m}, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ \left( -\frac{4J\varphi}{T^2} + M_c \right) \frac{1}{c_m}, & \text{при } \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \quad (6.13)$$

Графики изменения тока  $i(t)$  при неоптимальном управлении (6.13), соответствующей частоты вращения  $\omega(t)$  и угла поворота  $\varphi(t)$  при тех же заданных значениях  $\varphi=100$  радиан и  $T=5$  с, представлены на рис. 6.3а,б.

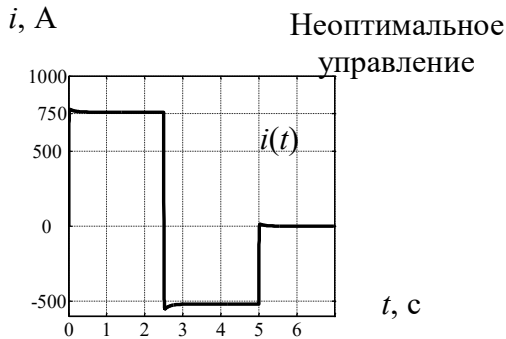


Рис. 6.3а. Изменение тока при неоптимальном управлении (6.13)

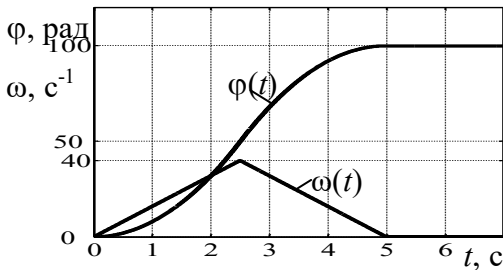


Рис. 6.3б. Изменение частоты вращения  $\omega(t)$

Потери энергии при неоптимальном управлении (6.13) составляют:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^T i^2(t) R dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left( \frac{4J\varphi}{T^2} + M \right)^2 \frac{R}{c_m^2} dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \left( -\frac{4J\varphi}{T^2} + M \right)^2 \frac{R}{c_m^2} dt = \\
 &= R \frac{16J^2\varphi^2 + T^4M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=5 \\ c_m=2,5 \\ R=0,06}} = 127,2 \text{ кДж.}
 \end{aligned}$$

Значение потерь при неоптимальном управлении (6.13) превышает найденные выше потери при управлении (6.12) на 30,72 кДж, причём эта разница растёт пропорционально второй степени всех основных рабочих характеристик объекта: угла поворота  $\varphi$ , момента инерции  $J$  и момента сухого трения  $M$ .

Найденные выражения для экстремалей (6.11) и (6.12) позволяют реализовать управление электроприводом не только по току  $i$  в соответствии с (6.12), но и по частоте вращения  $\omega$ , подавая на вход системы регулирования задающее воздействие вида (6.11).

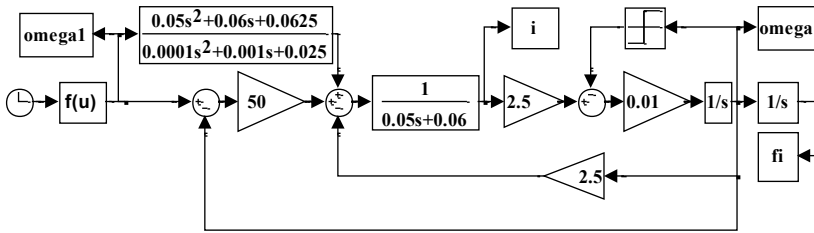


Рис. 6.4. Имитационная модель системы оптимального управления поворотом платформы с обратной связью по частоте вращения

На рис. 6.4 представлена имитационная модель такой системы регулирования с обратной связью по частоте вращения.

На рис. 6.5а,б представлены полученные на этой модели фактические законы изменения тока, частоты вращения и угла поворота платформы.

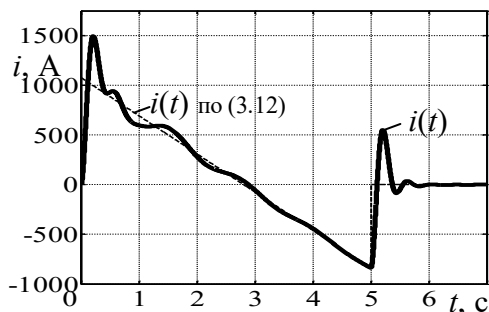


Рис. 6.5а. Изменение тока при оптимальном управлении частотой вращения (6.11)

Анализ этих рисунков показывает, что кинематические зависимости частоты вращения и угла поворота практически не отличаются от расчётных, однако отклонение функции тока от экстремали (6.12) уже достаточно заметно и снижает отмеченную выше эффективность оптимального управления. Из этого следует, что непосредственное управление физической величиной, входящей в выражение критерия оптимизации задачи является более предпочтительным по сравнению с математически эквивалентными, но опосредованными вариантами управления. Важно отметить, что оптимальное решение (6.12) задачи найдено без учёта технических ограничений на максимально допустимое значение тока  $i(t)$ , иными словами: рассмотренная задача решена без учёта ограничений на управляющее воздей-

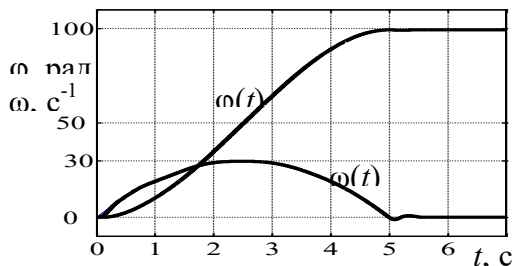


Рис. 6.5б. Изменение частоты вращения  $\omega(t)$  и угла поворота  $\varphi(t)$  при оптимальном управлении

ствии.

**Задача 2.** Управление электроприводом подъёмного крана с гибкой связью его подвижной тележки с перемещаемым по горизонтали грузом должно предусматривать демпфирование возникающих при этом раскачиваний (колебаний) груза (рис. 6.6).

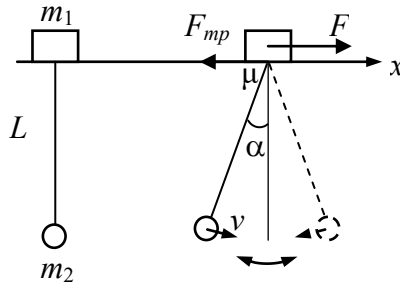


Рис. 6.6. Иллюстрация постановки задачи

На рис. 6.6 обозначены:  $m_1$ ,  $m_2$  – массы тележки и груза соответственно, кг;  $L$  – длина подвеса груза, м;  $x$  – координата горизонтального перемещения каретки, м;  $\alpha$  – угловое отклонение подвешенного груза от вертикали, рад;  $\mu$  – коэффициент сухого трения тележки (вязким трением в силу небольших значений скорости перемещения подвижных частей системы пренебрегаем);  $F_{mp}$  – сила сухого трения, действующая на каретку, Н.

Ставится задача: найти закон изменения силы  $F$ , прикладываемой со стороны электропривода к тележке, обеспечивающий за заданное время  $T$  перемещение груза на расстояние  $S$  без раскачиваний, т.е. проекция абсолютной скорости  $v$  груза на неподвижную ось  $x$  не должна менять своего знака.

Рассматриваемый в задаче объект представим схемой математического маятника со свободной и подвижной по горизонтали точкой подвеса: рис. 6.7, – на котором  $\omega(t) = -\dot{\alpha}(t)$  – частота вращения груза в момент времени  $t$ ,  $\text{с}^{-1}$ ;  $F_n$  – сила натяжения троса, Н;  $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

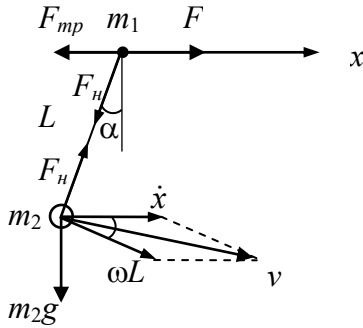


Рис. 6.7. Расчётная схема объекта “тележка-груз”

Для описания объекта составим дифференциальные уравнения его движения в координатах  $x$  и  $\alpha$  в виде уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = F - F_{mp}; \\ -\frac{\partial E}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} = -m_2 g L \sin \alpha, \end{cases} \quad (6.14)$$

где  $E$  – кинетическая энергия системы:

$$E = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2}.$$

Получая абсолютную скорость  $v$  груза в виде:

$$v^2 = \dot{x}^2 + (\omega L)^2 + 2\dot{x}\omega L \cos \alpha = \dot{x}^2 + L^2 \dot{\alpha}^2 + 2L\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha,$$

придём к развёрнутому выражению для  $E$ :

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2 L^2}{2} \dot{\alpha}^2 + m_2 L \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha. \quad (6.15)$$

Подставив (6.15) в (6.14) получаем:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 L (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = F - F_{mp}; \\ \ddot{x} \cos \alpha + L \ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Силу  $F_{mp}$  сухого трения определим в виде:  $F_{mp} = \mu F_n \cos \alpha$ ,

где сила натяжения  $F_H$ :

$$F_H = m_2 g \cos \alpha + m_2 \ddot{x} \sin \alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 L. \quad (6.17)$$

Система уравнений (6.16), (6.17) полностью описывает движение рассматриваемого объекта.

Имитационная модель, составленная по этим уравнениям в пакете Matlab, представлена на рис. 6.8 для параметров:  $m_1=100$  кг;  $m_2=200$  кг;  $L=5$  м;  $T=5$  с;  $S=10$  м;  $\mu=0,01$ .

Поведение тележки и груза при тривиальном управлении таким объектом (включение привода на постоянный номинальный режим и его выключение при достижении кареткой заданной координаты  $x$ ) показано на рис. 6.9 и хорошо иллюстрирует колебательность системы “тележка-груз”, причём при отсутствии активного торможения после отключения привода тележка продолжает двигаться по инерции, постепенно теряя избыточно запасённую энергию системы на преодоление силы трения.

Для дальнейшей работы с моделью (6.16), (6.17) линеаризуем её для диапазона малых значений  $\alpha$  и учтём некоторые упрощающие условия:

$$\ddot{\alpha} \cos \alpha \gg \dot{\alpha}^2 \sin \alpha; \cos \alpha \approx 1; \quad \sin \alpha \approx \alpha; g \cos \alpha \gg \ddot{x} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 L.$$

Получим:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 L \ddot{\alpha} = F - \mu m_2 g; \\ \ddot{x} + L \ddot{\alpha} + g \alpha = 0, \end{cases} \quad (6.18)$$

или, выразив в явном виде  $\ddot{x}$ :

$$\ddot{x} = -L \ddot{\alpha} - g \alpha, \quad (6.19)$$

и подставив (6.19) в первое уравнение из (6.18):

$$-m_1 L \ddot{\alpha} - (m_1 + m_2) g \alpha = F - \mu m_2 g. \quad (6.20)$$

Поскольку слагаемое  $\mu m_2 g$  не зависит от времени, то правую часть равенства (6.20) в дальнейшем будем обозначать как одну функцию  $F(t) = F - \mu m_2 g$ . Имитационная модель линеаризованной системы представлена на рис. 6.10.

Перейдём к нахождению оптимального управления  $F(t)$ .

В качестве критерия оптимальности, обеспечивающего наименьшую колебательность системы, выберем широко используемый в теории управления интегральный квадратичный критерий:

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(n)^2} + \dots + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha^2) dt \rightarrow \min. \quad (6.21)$$

Необходимый порядок  $n$  старшей производной в критерии  $Q$  определяется числом  $2n$  свободных коэффициентов  $c_1, \dots, c_{2n}$  в общем виде искомой экстремали  $\alpha(t)$ , которые требуется найти для обеспечения граничных условий задачи, вытекающих из её физического содержания:

$$\alpha(0) = 0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\alpha(T) = 0; \quad \dot{\alpha}(T) = 0; \quad \ddot{\alpha}(T) = 0; \quad x(T) = S; \quad \dot{x}(T) = 0; \quad \ddot{x}(T) = 0.$$

С учётом (3.19) из приведённых условий можно исключить требование  $\ddot{x}(T) = 0$  как вытекающее из  $\alpha(T) = 0$  и  $\ddot{\alpha}(T) = 0$ . Кроме того, заменив требование  $x(T) = S$  на

$$\int_0^T \dot{x}(t) dt = S, \text{ можно не учитывать также и условие } x(0) = 0, \text{ поскольку}$$

$x(t)$  в явном виде в (6.18) не входит и в момент времени  $t=0$  полностью определяется условием  $\dot{x}(0) = 0$ . В результате получаем систему из 8 граничных условий:

$$\alpha(0) = 0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\alpha(T) = 0; \quad \dot{\alpha}(T) = 0; \quad \ddot{\alpha}(T) = 0; \quad \int_0^T \dot{x}(t) dt = S; \quad \dot{x}(T) = 0. \quad (6.22)$$

Для выполнения (6.22) потребуется значение  $n=4$ .



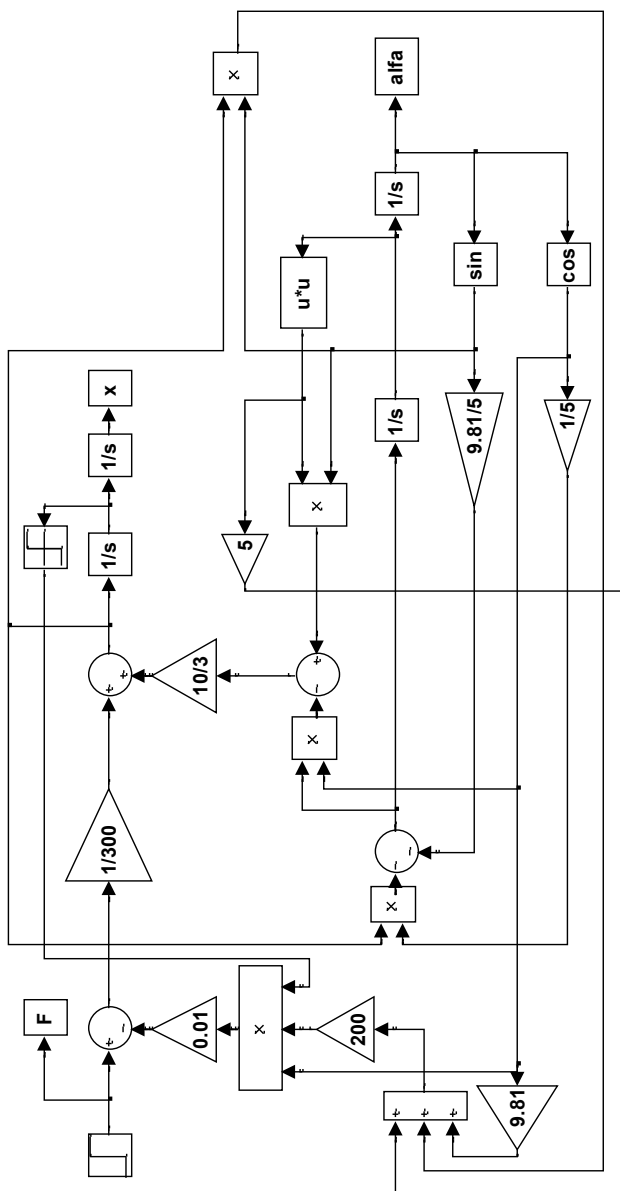


Рис. 6.8. Полная имитационная модель объекта

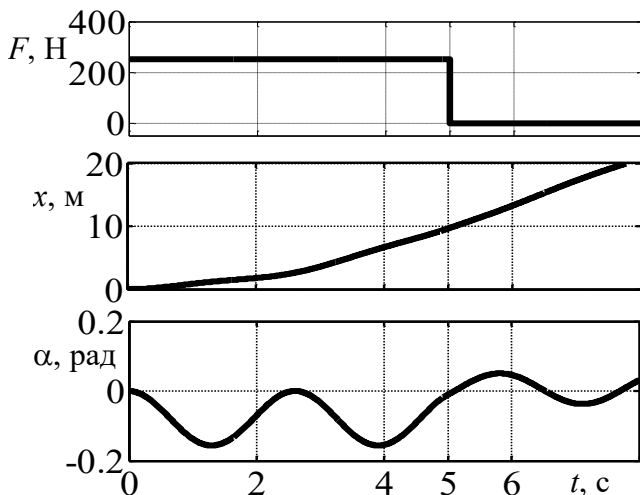


Рис. 6.9. Движение объекта при тривиальном управлении  $F$

Формируем критерий:

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(4)2} + \alpha^{(3)2} + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2 + \alpha^2) dt \rightarrow \min. \quad (6.23)$$

Система уравнений (6.22), (6.23) представляет собою формальную постановку решаемой вариационной задачи.

Обозначим подынтегральную функцию из (6.23) через  $\Phi(t, \alpha)$  и составим уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{\alpha}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^{(3)}} + \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^{(4)}} = 0. \quad (6.24)$$

После подстановки (6.23) в (6.24) придём к дифференциальному уравнению:

$$2\alpha - 2\ddot{\alpha} + 2\alpha^{(4)} - 2\alpha^{(6)} + 2\alpha^{(8)} = 0. \quad (6.25)$$

Характеристическое уравнение для (6.25):

$$p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1 = 0,$$

имеет корни:  $p_{1,2} = \sigma_1 \pm \beta_1 i$ ;  $p_{3,4} = -\sigma_1 \pm \beta_1 i$ ;  $p_{5,6} = \sigma_2 \pm \beta_2 i$ ;  $p_{7,8} = -\sigma_2 \pm \beta_2 i$ :

$$\sigma_1 = 0,25\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}; \quad \sigma_2 = 0,25\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$\beta_1 = 0,25(1 + \sqrt{5}); \quad \beta_2 = 0,25(-1 + \sqrt{5}).$$

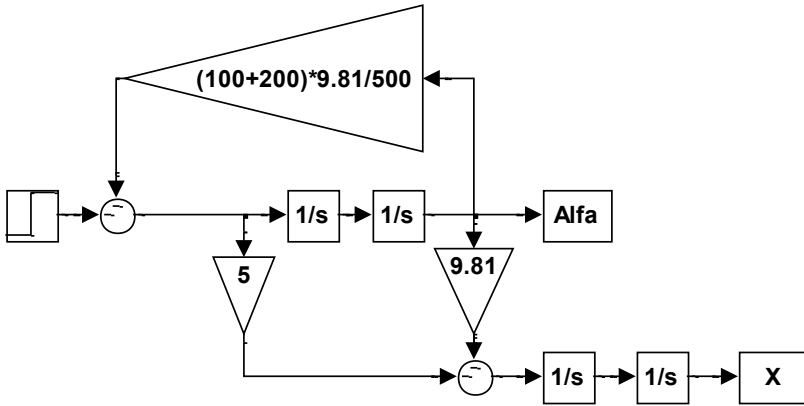


Рис. 6.10. Имитационная модель линейризованной системы

Соответствующее полученным корням решение дифференциального уравнения (6.25) является искомой экстремалью:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & e^{\sigma_1 t} (c_1 \cos(\beta_1 t) + c_2 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{-\sigma_1 t} (c_3 \cos(\beta_1 t) + c_4 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{\sigma_2 t} (c_5 \cos(\beta_2 t) + c_6 \sin(\beta_2 t)) + \\ & + e^{-\sigma_2 t} (c_7 \cos(\beta_2 t) + c_8 \sin(\beta_2 t)). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Подставляя (6.26) в выражения (6.22) для граничных условий, а также учитывая соотношение:

$$\dot{x}(t) = \int (-\ddot{L} - \alpha g) dt,$$

получим систему из 8 уравнений с 8 неизвестными и, далее, искомые коэффициенты:  $c_1=0,202$ ;  $c_2=-0,000723$ ;  $c_3=-1,24$ ;  $c_4=-7,42$ ;  $c_5=0,0724$ ;  $c_6=0,014$ ;  $c_7=0,961$ ;  $c_8=19,4$ .

Последовательность вычислений коэффициентов  $c_1, \dots, c_8$  в пакете Mathcad представлена на рис. 6.11, обозначения на котором очевидны из текста программы.

$$\alpha(t) := e^{\sigma^1 \cdot t} \cdot (c1 \cdot \cos(\beta1 \cdot t) + c2 \cdot \sin(\beta1 \cdot t)) + e^{-\sigma^1 \cdot t} \cdot (c3 \cdot \cos(\beta1 \cdot t) + c4 \cdot \sin(\beta1 \cdot t)) +$$

$$+ e^{\sigma^2 \cdot t} \cdot (c5 \cdot \cos(\beta2 \cdot t) + c6 \cdot \sin(\beta2 \cdot t)) + e^{-\sigma^2 \cdot t} \cdot (c7 \cdot \cos(\beta2 \cdot t) + c8 \cdot \sin(\beta2 \cdot t))$$

$$p\alpha(t) := \frac{d}{dt} \alpha(t) \qquad p2\alpha(t) := \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t)$$

$$p_x(t) := \left( - \int p2\alpha(t) dt \right) \cdot L - \left( \int \alpha(t) dt \right) \cdot g$$

□ Исходные данные m1, m2, L, S, T, g

□ выражения для alfa, palfa, p2alfa, px

Given

$$\alpha(0) = 0 \quad p\alpha(0) = 0 \quad p_x(0) = 0$$

$$\alpha(T) = 0 \quad p\alpha(T) = 0 \quad p2\alpha(T) = 0 \quad p_x(T) = 0$$

$$\int_0^T p_x(t) dt = S$$

$$R := \text{Find}(c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} .20214 \\ -.72286e-3 \\ -1.2356 \\ -7.4178 \\ .72453e-1 \\ .13952e-1 \\ .96105 \\ 19.408 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.11. Программа вычисления параметров экстремали  $\alpha(t)$  в пакете Mathcad

Графики всех полученных расчётных зависимостей от времени координат системы  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ ,  $x_2(t) = x(t) + L\sin\alpha(t)$  приведены на рис. 6.12, 6.13, 6.14, где  $x_2$  – абсолютная координата груза по горизонтали.

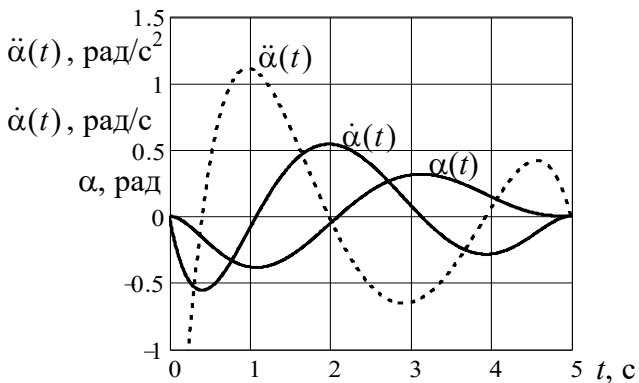


Рис. 6.12. Оптимальное изменение угловой координаты  $\alpha$  и её производных для груза

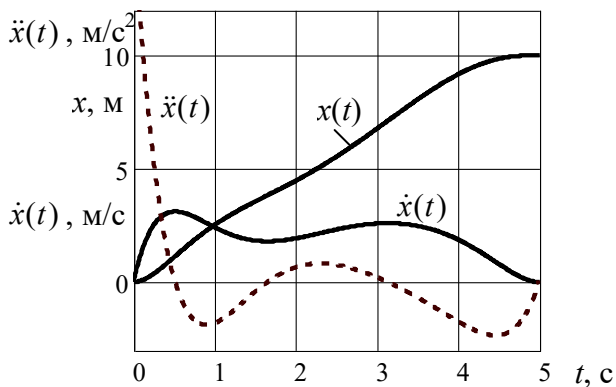


Рис. 6.13. Оптимальное изменение координаты  $x$  и её производных для каретки

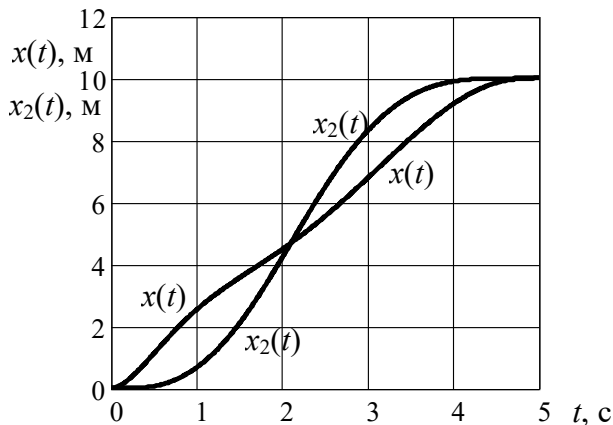


Рис. 6.14. Абсолютные перемещения тележки  $x(t)$  и груза  $x_2(t)$  по горизонтали

Рис. 6.12-6.14 показывают, что движение тележки и груза приобрело монотонный характер: в начале перемещения ( $t < 2,1$  с) груз отстаёт от тележки, а затем, при подходе к координате  $x=10$  м, опережает её и в точке  $x=10$ ,  $x_2=10$  система завершает движение (рис. 6.15).

Используемый для решения задачи критерий (6.21) имеет много модификаций, отличающихся весовыми коэффициентами его слагаемых, с помощью которых можно влиять на те или иные характеристики движения. В частности, показанные на рис. 6.12. и 6.13 графики вторых производных указывают на большие значения этих величин в момент трогания:  $\ddot{\alpha}(0) = -3,9$  рад/с<sup>2</sup>,  $\ddot{x}(0) = 15,9$  м/с<sup>2</sup>. С целью уменьшения этих значений можно повысить весомость старших производных в критерии (6.23), исключив, например, слагаемое  $\dot{\alpha}^2$ :

$$Q = \int_0^T (\alpha^{(4)^2} + \alpha^{(3)^2} + \ddot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^2) dt \rightarrow \min. \quad (6.27)$$

Уравнение Эйлера для (6.27):

$$-2\ddot{\alpha} + 2\alpha^{(4)} - 2\alpha^{(6)} + 2\alpha^{(8)} = 0. \quad (6.28)$$

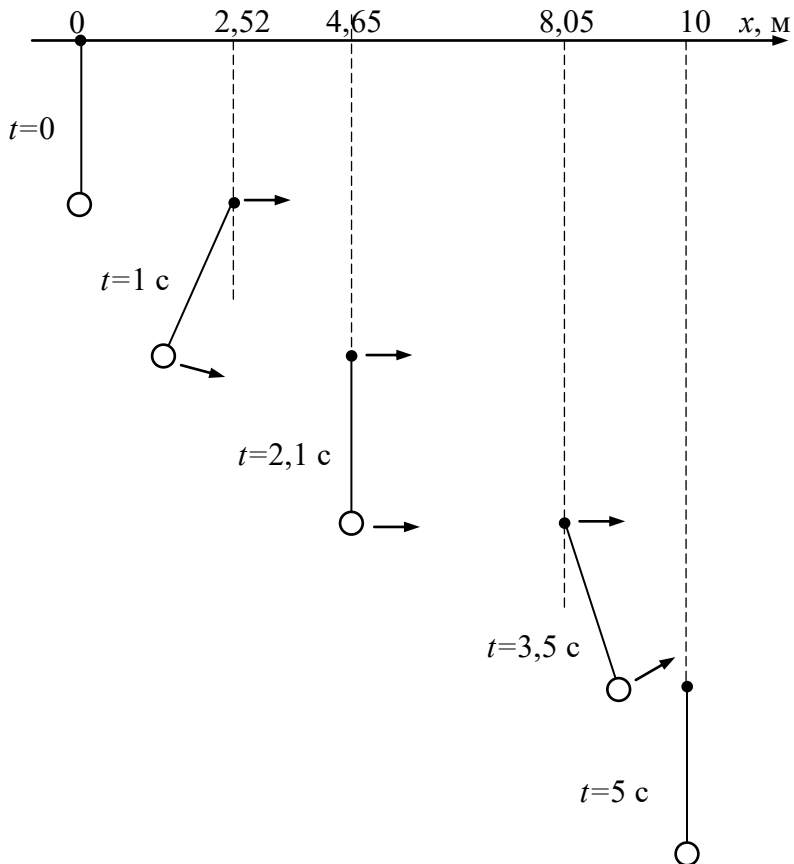


Рис. 6.15. Пошаговая иллюстрация движения “тележка-груз” при оптимальном управлении

Характеристический полином:

$$p^8 - p^6 + p^4 - p^2 = 0,$$

имеет корни:  $p_{1,2}=0$ ;  $p_{3,4}=\pm\sigma$ ;  $p_{5,6}=\sigma_1 \pm \beta_1 i$ ;  $p_{7,8}=-\sigma_1 \pm \beta_1 i$ ;  $\sigma=1$ ;  
 $\sigma_1 = 0,5\sqrt{2}$ ;  $\beta_1 = 0,5\sqrt{2}$ .

Общий вид искомой экстремали:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & c_1 + c_2 t + c_3 e^{\sigma_1 t} + c_4 e^{-\sigma_1 t} + \\ & + e^{\sigma_1 t} (c_5 \cos(\beta_1 t) + c_6 \sin(\beta_1 t)) + \\ & + e^{-\sigma_1 t} (c_7 \cos(\beta_1 t) + c_8 \sin(\beta_1 t)). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Найденные значения коэффициентов:  $c_1 = -3,11$ ;  $c_2 = 2,83$ ;  $c_3 = -0,0714$ ;  $c_4 = -4,95$ ;  $c_5 = 0,126$ ;  $c_6 = -0,289$ ;  $c_7 = 8,00$ ;  $c_8 = -2,73$ .

Характер движения системы по экстремали (6.29) практически совпадает с функцией (6.26), однако максимальные значения вторых производных  $\ddot{\alpha}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$ , как и следовало ожидать, уменьшились:  $\ddot{\alpha}(0) = -2,6 \text{ рад/с}^2$ ,  $\ddot{x}(0) = 12,9 \text{ м/с}^2$  (см. рис. 6.12, 6.13).

Следует заметить, что при решении данной задачи также можно воспользоваться критерием минимума энергии, требуемой на перемещение груза (аналогичный критерий использован в задаче 1). Эта возможность вытекает из того обстоятельства, что любые раскачивания груза являются проявлением запасённой в системе избыточной энергии, которая не расходуется на перемещение груза.

Таким образом, на практике выбор критерия оптимальности вариационной задачи является, как правило, многоальтернативным.

Для проверки найденного оптимального закона управления (6.29) использовалась полная имитационная модель объекта (рис. 6.8), к которой добавлены наблюдатель координат  $[\alpha(t) \dot{\alpha}(t)]^T$  и модальный регулятор  $R = [r_1 \ r_2] = [50 \ 2,8]$ .

Общая структура системы оптимального управления представлена на рис. 6.16, а результаты моделирования на рис. 6.17.

Полученные графики зависимостей  $x(t)$  и  $\alpha(t)$  показывают, что цель управления достигнута. При этом следует подчеркнуть, что при решении вариационной задачи применялась линеаризованная модель объекта (6.18), но при проверке результата решения (6.29) использовалась полная система нелинейных дифференциальных уравнений (6.16), (6.17).



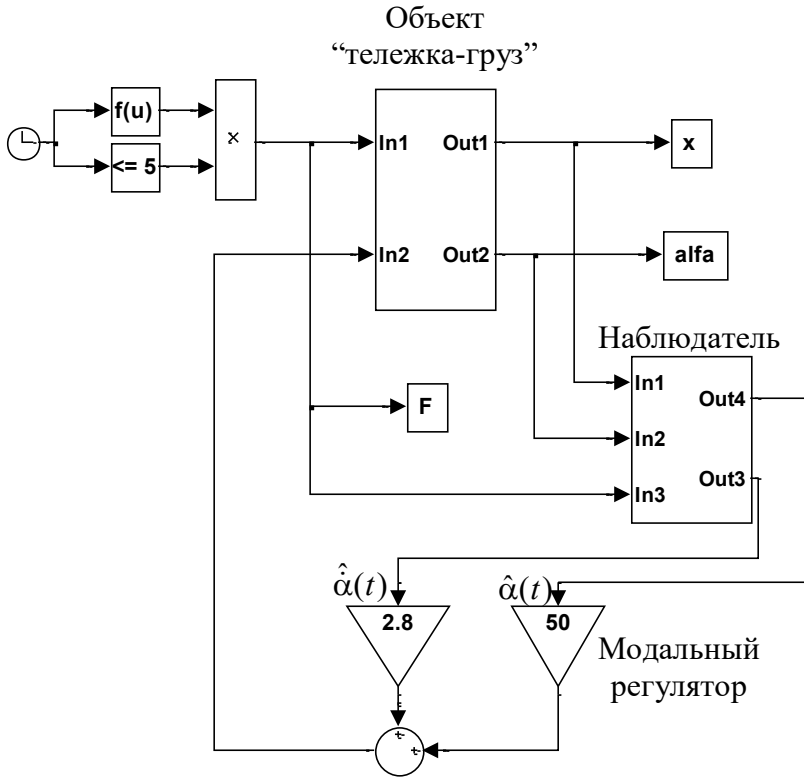


Рис. 6.16. Структурная схема системы оптимального управления с наблюдателем координат  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$  и модальным регулятором в пакете Matlab

В завершение раздела 6.1 отметим, что решения (6.26), (6.29) искались в классе непрерывных функций, в то время как приемлемые результаты могут быть получены и при разрывном управлении, пример которого представлен на рис. 6.18.

На этом рисунке управляющее воздействие  $F$  представляет собою разрывную кусочно-постоянную функцию, ограниченную по модулю. Это обстоятельство имеет важное практическое значение, так как в большинстве реальных задач необходимо учитывать ограничения, накладываемые на управление. Этим задачам посвящён раздел 6.2.

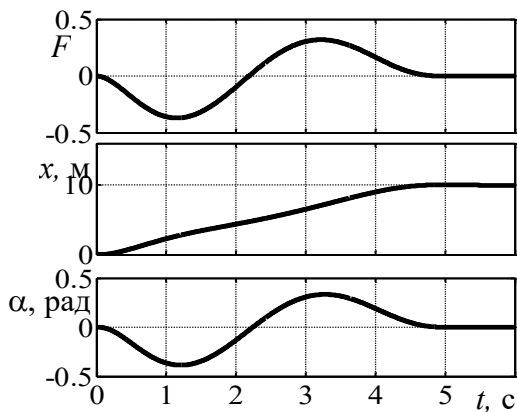


Рис. 6.17. Результаты проверки оптимального управления (6.29) на имитационной модели системы регулирования

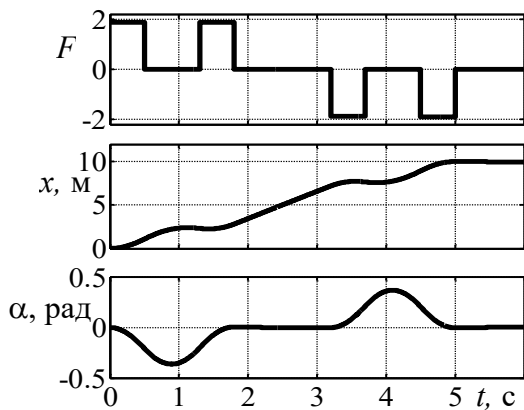


Рис. 6.18. Иллюстрация эмпирического способа импульсного управления объектом

## 6.2. Решение задачи оптимального движения объекта при ограничениях на управление. Принцип максимума Понтрягина

При рассмотрении задач 1 и 2 отмечалось, что найденные экстремали могут потребовать для своей реализации технически недопустимых значений управляющих воздействий, т.е. в условии задачи необходимо вводить соответствующие ограничения. Задачи с ограничениями могут быть решены с помощью уравнения Эйлера, однако в том случае, если уравнения движения объекта представимы в нормальной форме Коши и являются линейными относительно управления, то целесообразно воспользоваться другим методом вариационного исчисления – принципом максимума.

Рассмотрим примеры таких задач.

Задача 3. Вернёмся к задаче 1, где рассматривался электропривод поворота платформы экскаватора, для которой требовалось найти закон управления током  $i(t)$  двигателя, обеспечивающего поворот платформы за заданное время  $T$  на известный угол  $\varphi$  с минимальными затратами энергии.

Введём в эту задачу ограничение на управление:

$$|i(t)| \leq I_{\max},$$

где для конкретного примера примем  $I_{\max} = 200$  А.

Исходные уравнения движения электропривода:

$$\begin{cases} J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + M_c = c_m \cdot i; \\ L \frac{di}{dt} + iR + E = u, \end{cases}$$

(обозначения см. в задаче 1) перепишем в явном виде относительно регулируемой величины  $\varphi(t)$  и управления  $i(t)$ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J}. \quad (6.30)$$

Вводя обозначения  $x_1 = \varphi$ ;  $x_2 = \dot{\varphi}$  перейдём к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{c_m}{J}i - \frac{M_c}{J}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Минимизируемый функционал задачи:

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (6.32)$$

включим в число фазовых координат  $x$ :

$$\dot{x}_0(t) = i^2(t). \quad (6.33)$$

Составим вспомогательную функцию – гамильтониан  $H$ :

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i \dot{x}_i = \psi_0 i^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left( \frac{c_m}{J}i - \frac{M_c}{J} \right) \rightarrow \max. \quad (6.34)$$

Найдём максимум для (6.34) не учитывая ограничение на управление.

Для определения функции  $i(t)$ , доставляющей экстремум гамильтониану запишем необходимое условие существования экстремума:

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 0,$$

или: 
$$2\psi_0 i + \frac{\psi_2 c_m}{J} = 0,$$

откуда:

$$i(t) = -\frac{\psi_2(t)c_m}{2\psi_0(t)J}. \quad (6.35)$$

Для нахождения в выражении (6.35) двух неизвестных функций  $\psi_0(t)$  и  $\psi_2(t)$  воспользуемся известным соотношением между неопределёнными множителями  $\psi_i(t)$  и гамильтонианом  $H$ :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Для  $H$  вида (6.34) последнее соотношение образует систему трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0; \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.
\end{aligned}
\tag{6.36}$$

Из (6.36) получаем выражения для  $\psi_i$ :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \text{const} = c_0; \\
\psi_1 &= \text{const} = c_1; \\
\psi_2 &= -\int \psi_1 dt = c_2 - c_1 t,
\end{aligned}$$

и далее:

$$i(t) = -\frac{c_2 - c_1 t}{2c_0 J} = a_1 - a_2 t,
\tag{6.37}$$

где  $a_1 = -\frac{c_2}{2c_0 J}$ ;  $a_2 = -\frac{c_1}{2c_0 J}$ .

Выражение (6.37) является искомой экстремалью для управляющего воздействия  $i(t)$ , обеспечивающего минимум функционалу (6.32). Эта экстремаль найдена с использованием принципа максимума для гамильтониана  $H$ . Для того, чтобы сравнить (6.37) с аналогичным результатом (6.12), полученным с помощью уравнения Эйлера, найдём неизвестные параметры  $a_1$  и  $a_2$ , входящие в (6.37).

Интегрируем (6.30) с учётом (6.37):

$$\begin{aligned}
\omega = \dot{\phi} &= \int \ddot{\phi} dt = \int \left( \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) dt = \\
&= \int \left[ \frac{c_m}{J} (a_1 - a_2 t) - \frac{M_c}{J} \right] dt = -\frac{c_m a_2}{2J} t^2 + \left( \frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t + a_3.
\end{aligned}
\tag{6.38}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и постоянной интегрирования  $a_3$  обратимся к граничным условиям задачи:  $\omega(0)=0$ ,  $\omega(T)=0$ ,  $\int_0^T \omega(t)dt = \varphi$ .

$$\omega(0)=0, \omega(T)=0, \int_0^T \omega(t)dt = \varphi.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3 = 0; \\ -\frac{c_m a_2}{2J} T^2 + \left( \frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) T + a_3 = 0; \\ -\frac{c_m a_2}{6J} T^3 + \left( \frac{c_m a_1}{J} - \frac{M_c}{J} \right) \frac{T^2}{2} + a_3 T = \varphi, \end{cases}$$

решение которой:

$$a_1 = \left( \frac{6J\varphi}{T^2} + M_c \right) \cdot \frac{1}{c_m}; \quad a_2 = -\frac{12J\varphi}{T^3} \cdot \frac{1}{c_m}; \quad a_3 = 0,$$

приводит к выражениям (6.39) и (6.40), полностью совпадающим с соответствующими экстремалиями (6.11) и (6.12), полученными с помощью уравнения Эйлера в задаче 1:

$$\omega(t) = -\frac{6\varphi}{T^3} t^2 + \frac{6\varphi}{T^2} t, \quad (6.39)$$

$$i(t) = \frac{1}{c_m} \left( -\frac{12J\varphi}{T^3} t + \frac{6J\varphi}{T^2} + M_c \right). \quad (6.40)$$

Таким образом, мы показали, что принцип максимума позволяет решать вариационные задачи без ограничений на управление и даёт те же результаты, что и уравнения Эйлера.

Учтём теперь наличие ограничения  $|i(t)| \leq I_{\max}$ .

Анализ выражения (6.34) для гамильтониана показывает, что при  $\psi_0(t) \geq 0$  его максимум достигается при максимальных по модулю значениях управления  $|i(t)| = I_{\max}$ , точнее, если:

$$i(t) = I_{\max} \text{sign}(\psi_2). \quad (6.41)$$

Из (6.41) следует, что экстремаль  $i(t)$  имеет кусочно-постоянную форму (структуру), причём в силу вещественности корней характеристического уравнения для (6.30):

$$p^2=0; p_{1,2}=0,$$

$i(t)$  имеет два интервала постоянства.

Для получения неизвестной функции  $\psi_2(t)$ , входящей в (6.41), воспользуемся системой уравнений (6.36), из которой:

$$\psi_2(t)=c_2-c_1t,$$

и, окончательно:

$$i(t)=I_{\max}\text{sign}(c_2-c_1t); \psi_0=c_0\geq 0.$$

Для определения параметров  $c_1$  и  $c_2$  закона управления можно снова воспользоваться граничными условиями  $\omega(0)=0$ ,

$$\omega(T)=0, \int_0^T \omega(t)dt = \varphi, \text{ однако неизвестный коэффициент } c_0 \text{ не}$$

входит в выражения для  $i(t)$  и  $\omega(t)$  и останется неопределённым, т.е. исходная предпосылка о том, что  $\psi_0\geq 0$  не может быть подтверждена, и наше предположение о структуре управления вида (6.41) обосновать не удаётся.

Таким образом, наша попытка сформировать с помощью принципа максимума оптимальное управление  $i(t)$  с учётом ограничения  $|i(t)|\leq I_{\max}$  завершилась неудачей и была предпринята с учебными целями для иллюстрации основного условия применимости этого метода – линейности уравнений движения и функционала  $Q$  относительно управления. Это условие, как следует из (6.32) и (6.33) в поставленной задаче не выполняется.

Вместе с тем, нелинейность уравнения (6.33) не является препятствием для решения задачи с помощью уравнения Эйлера. Для этого ограничение-неравенство:

$$|i(t)|\leq I_{\max}$$

преобразуем в ограничение-равенство путём введения дополнительной переменной  $z$  (для  $i(t)\geq 0$ ):

$$i(t)=I_{\max}-z^2,$$

или

$$i-I_{\max}+z^2=0. \tag{6.42}$$

В результате, задача поиска минимума функционала:

$$Q = \int_0^T i^2(t) dt = \int_0^T (J\dot{\omega} + M_c)^2 dt \rightarrow \min,$$

должна содержать два ограничения равенства:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \varphi;$$

$$i - I_{\max} + z^2 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа, включающую эти ограничения:

$$F = i^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2(t) \cdot (i - I_{\max} + z^2),$$

или:

$$F = (J\dot{\omega} + M_c)^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2(t) \cdot (J\dot{\omega} + M_c - I_{\max} + z^2). \quad (6.43)$$

Сформировав указанным образом функцию Лагранжа, мы получаем классическую вариационную задачу без ограничений.

Решим её с помощью уравнений Эйлера для двух переменных  $\omega$  и  $z$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

С учётом изопериметрического условия получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \frac{d}{dt} (2J^2 \dot{\omega} + 2JM_c + \lambda_2(t)J) = \lambda_1 - 2J^2 \ddot{\omega} - \dot{\lambda}_2 J = 0; \\ 2\lambda_2 z = 0; \\ \int_0^T \omega(t) dt = \varphi. \end{cases} \quad (6.45)$$

Система трёх уравнений (6.45) для четырёх неизвестных  $\omega(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2(t)$  содержит одну свободную переменную, в качестве которой удобно взять  $\lambda_2 = \text{const}$ .

Тогда (6.45) распадается на два независимых уравнения:



$$\lambda_1 - 2J^2\ddot{\omega} = 0,$$

с решением:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\lambda}{4J^2}t^2 + c_1t + c_0; \\ i(t) &= \frac{J}{c_m}\dot{\omega} + \frac{M_c}{c_m} = \frac{1}{c_m} \left( \frac{\lambda}{2J^2}t + c_1 + M_c \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

полученным ранее в (6.9) – (6.12); и уравнение:

$$z=0 \text{ или } i(t)=I_{\max}.$$

Аналогично, для  $i(t) \leq 0$  запишем:  $i(t) \geq -I_{\max}$ , или  $i + I_{\max} - z^2 = 0$ , и придём к равенству:  $i(t) = -I_{\max}$ .

Общее решение:

$$|i(t)| = I_{\max}. \quad (6.47)$$

Вид полученного решения (6.46), (6.47) свидетельствует о том, что искомый экстремум функционала  $Q$  достигается на кривых, составленных из фрагментов экстремали (6.46) и отрезков границы допустимой области (6.47), и для завершения решения задачи осталось найти точки перехода (сопряжения) от экстремали к границе и обратно.

Рассмотрим общий случай такого перехода, когда имеются две точки сопряжения (рис.6.19).

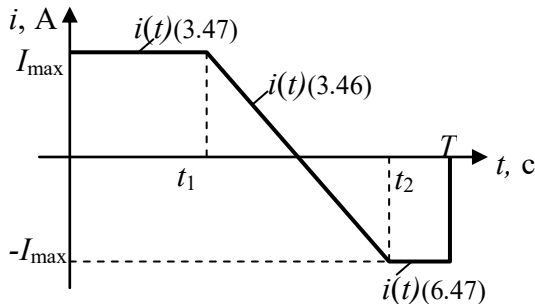


Рис. 6.19. Общий случай сопряжения экстремали (6.46) и границ допустимой области (6.47)

Из рис. 6.19 вытекает структура оптимального управления  $i(t)$ :

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} - \frac{2I_{\max}}{t_2 - t_1} t, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ -I_{\max}, & t_2 < t \leq T; \\ 0, & T < t. \end{cases} \quad (6.48)$$

Определим неизвестные параметры  $t_1$  и  $t_2$  в (6.48).

Из граничных условий  $\omega(0)=0$ ,  $\omega(T)=0$  следует, что

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = 0. \quad (6.49)$$

(Напомним, что  $\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = \omega(t)|_0^T = \omega(T) - \omega(0) = 0$ ).

Подставляя в (6.49) соотношение:

$$\dot{\omega} = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J},$$

(см. (6.30)), придём к интегралу:

$$\begin{aligned} & \frac{c_m}{J} \int_0^T i(t) dt - \frac{M_c}{J} \int_0^T dt = \\ & = \frac{c_m}{J} \left[ \int_0^{t_1} I_{\max} dt + \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt + \int_{t_2}^T (-I_{\max}) dt + \right] - \frac{M_c}{J} \int_0^T dt = 0. \end{aligned}$$

Поскольку из условия сопряжения участков экстремали  $i(t_1)=I_{\max}$ ;  $i(t_2)=-I_{\max}$ , то:

$$\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = 0,$$

и (6.49) получит вид:

$$\begin{aligned} & \frac{c_m I_{\max}}{J} t \Big|_0^{t_1} - \frac{c_m I_{\max}}{J} t \Big|_{t_2}^T - \frac{M_c}{J} t \Big|_0^T = \\ & = \frac{c_m I_{\max}}{J} t_1 - \frac{c_m I_{\max}}{J} (T - t_2) - \frac{M_c}{J} T = 0 \end{aligned}$$

или  $c_m I_{\max}(t_1 - (T - t_2)) = M_c T.$  (6.50)

Из (6.50), в частности, следует, что с ростом момента сопротивления  $M_c$  значение  $t_2$  приблизится к  $T$ , и участок экстремали с  $i(t) = -I_{\max}$  исчезнет.

Для определения двух неизвестных  $t_1$  и  $t_2$  одного уравнения (6.50) недостаточно, и в качестве второго уравнения используем граничное условие:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \varphi.$$

Поскольку

$$\omega(t) = \int \dot{\omega}(t) dt = \int \left( \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) dt,$$

то получим:

$$\omega(t) = \begin{cases} \left( \frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{c_m}{J} \left( \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t^2 \right) - \frac{M_c}{J} t + c_1, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \left( -\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t + c_2, & t_2 < t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (6.51)$$

где постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяются из условий сопряжения участков экстремали в точках  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\left( \frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 = \frac{c_m}{J} \left( \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_1 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_1^2 \right) - \frac{M_c}{J} t_1 + c_1;$$

$$\left(-\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J}\right)t_2 + c_2 = \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_2 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_2^2\right) - \frac{M_c}{J} t_2 + c_1,$$

откуда:

$$c_1 = \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J}\right)t_1 - \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_1 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_1^2\right) + \frac{M_c}{J} t_1;$$

$$c_2 = \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} + \frac{M_c}{J}\right)t_2 + \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t_2 - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t_2^2\right) - \frac{M_c}{J} t_2 + c_1.$$

Отметим, что постоянная  $c_2$  может найдена значительно проще из (6.51) и граничного условия  $\omega(T)=0$ , т.е.:

$$c_2 = \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} + \frac{M_c}{J}\right)T.$$

Интегрируем (6.51) по участкам  $[0; t_1]$ ,  $[t_1; t_2]$ ,  $[t_2; T]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \int_0^{t_1} \left(\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J}\right) t dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{c_m}{J} \left(\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} I_{\max} t - \frac{I_{\max}}{t_2 - t_1} t^2\right) - \frac{M_c}{J} t + c_1 \right] dt + \\ &+ \int_{t_2}^T \left[ \left(-\frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J}\right) t + c_2 \right] dt = \varphi. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Решая систему уравнений (6.50), (6.52) найдём  $t_1$  и  $t_2$  для заданных параметров привода:  $M_c=300$  Н·м;  $I_{\max}=200$  А;  $c_m=2,5$  Н·м/А;  $J=100$  кг·м<sup>2</sup>;  $T=5$  с;  $\varphi=100$  рад.

Вычисления в пакете Mathcad (рис. 6.20) дают не имеющие физического смысла комплексные значения  $t_1$  и  $t_2$ . Этот результат свидетельствует о том, что решение задачи с заданными параметрами не существует. Действительно, введение ограничения на значения тока  $|i(t)| \leq I_{\max}$  значительно снижает производительность электропривода и повернуть вал двигателя на угол  $\varphi=100$  рад за время  $T=5$  с с указанным ограничением, по-видимому, невозможно.

$$f1(t1, t2) := \int_0^{t1} \left( cm \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t \, dt$$

$$c1 := \left( cm \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t1 - \frac{cm}{J} \cdot \left( \frac{t2 + t1}{t2 - t1} \cdot im \cdot t1 - \frac{im}{t2 - t1} \cdot t1^2 \right) + \frac{M}{J} \cdot t1$$

$$f2(t1, t2) := \int_{t1}^{t2} \left[ \frac{cm}{J} \cdot \left( \frac{t2 + t1}{t2 - t1} \cdot im \cdot t - \frac{im}{t2 - t1} \cdot t^2 \right) - \frac{M}{J} \cdot t + c1 \right] dt$$

$$c2 := \left( \frac{cm \cdot im}{J} + \frac{M}{J} \right) \cdot T$$

$$f3(t1, t2) := \int_{t2}^T \left[ \left( -cm \cdot \frac{im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t + c2 \right] dt$$

$$cm := 2.5 \quad M := 300 \quad im := 200 \quad J := 100 \quad T := 5 \quad fi := 100$$

▣Выражения для f1, f2, f3

Given

$$cm \cdot im \cdot (t1 - T + t2) = M \cdot T$$

$$f1(t1, t2) + f2(t1, t2) + f3(t1, t2) = fi$$

$$r := \text{Find}(t1, t2) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 4. + 6.9282 \cdot i & 4. - 6.9282 \cdot i \\ 4. - 6.9282 \cdot i & 4. + 6.9282 \cdot i \end{pmatrix}$$

Рис. 6.20. Программа в пакете Mathcad для решения системы уравнений (6.50), (6.52)

Для проверки этого предположения на рис. 6.21 показано изменение угла поворота  $\varphi(t)$  при постоянном токе  $i(t)=I_{\max}$ . Видим, что при  $I_{\max}=200$  А угол  $\varphi(t)$  достигает заданное значение  $\varphi=100$  рад только через 10 с, т.е. имеющее физический

смысл решение вида (6.48) (см. рис. 6.19), можно получить только при  $T > 10$  с.

Пример такого решения задачи показан на рис 6.22:  $t_1 = 7,33$  с;  $t_2 = 11,07$  с, – а также на рис. 6.23а,б.

При увеличении  $T$  свыше 11,5 с граница экстремали  $i(t) = -I_{\max}$  исчезает, и вид оптимального управления будет соответствовать рис. 6.24.

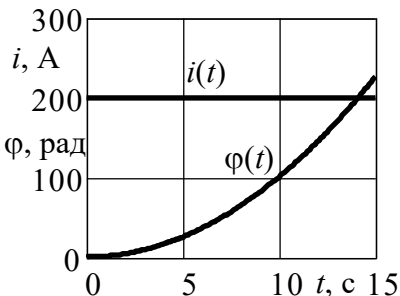


Рис. 6.21. Изменение угла поворота  $\varphi(t)$  при постоянном максимальном токе  $i(t) = I_{\max}$

cm := 2.5    M := 300    im := 200    J := 100    T := 11.5    fi := 100

▣ Выражения для fi1, fi2, fi3

Given

$$cm \cdot im \cdot (t_1 - T + t_2) = M \cdot T$$

$$fi_1(t_1, t_2) + fi_2(t_1, t_2) + fi_3(t_1, t_2) = fi$$

$$r := \text{Find}(t_1, t_2) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 11.065 & 7.3345 \\ 7.3345 & 11.065 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.22. Фрагмент программы для решения системы уравнений (6.50), (6.52) при  $T = 11,5$  с

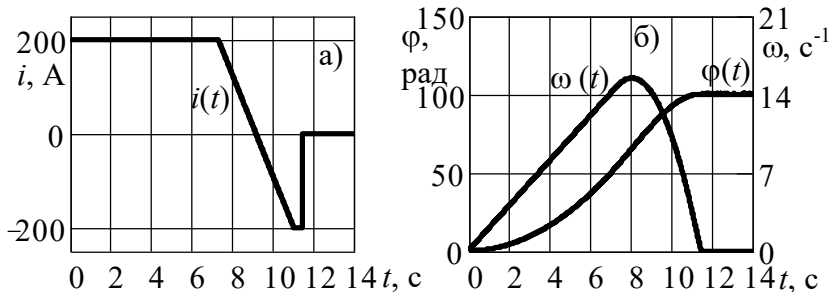


Рис. 6.23. Оптимальное движение привода при  $T = 11,5$  с

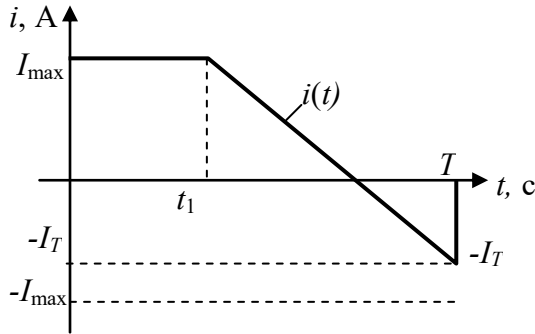


Рис. 6.24. Структура экстремали  $i(t)$  с одним участком, лежащим на границе допустимой области

Для экстремали вида, представленного рис. 6.24 имеем:

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ -I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot (T - t), & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (6.53)$$

где  $I_T$  – значение тока при  $t=T$ :  $i(T)=I_T$ .

Для определения в (6.53) неизвестных величин  $t_1$  и  $I_T$  снова воспользуемся условиями:

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^T \omega(t) dt = \varphi.$$

С учётом соотношения

$$\omega(t) = \int \dot{\omega}(t) dt = \int \left( \frac{c_m}{J} i(t) - \frac{M_c}{J} \right) dt, \quad (6.54)$$

получаем:

$$\int_0^T \dot{\omega}(t) dt = \frac{c_m I_{\max}}{J} t_1 + \frac{c_m}{J} \cdot \left[ \left( -I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} T \right) \cdot (T - t_1) - \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \frac{T^2 - t_1^2}{2} \right] - \frac{M_c T}{J} = 0 \quad (6.55)$$

Из (6.53) и (6.54) получаем выражение для  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \begin{cases} \left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \frac{c_m}{J} \left[ -I_T t + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left( Tt - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t + c, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases} \quad (6.56)$$

где постоянная интегрирования  $c$  определяется из условия сопряжения участка экстремали (6.53) в точке  $t_1$ :

$$\left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 = \frac{c_m}{J} \left[ -I_T t_1 + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left( Tt_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t_1 + c,$$

откуда:

$$c = \left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 - \frac{c_m}{J} \left[ -I_T t_1 + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left( Tt_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{M_c}{J} t_1.$$

Теперь интегрируем  $\omega(t)$  по участкам  $[0; t_1]$ ,  $[t_1; T]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \int_0^{t_1} \left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t dt + \\ &+ \int_{t_1}^T \frac{c_m}{J} \left[ -I_T t + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot \left( Tt - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M_c}{J} t + c dt = \varphi. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Совместное решение (6.55) и (6.57) (программа в пакете Mathcad на рис. 6.25) для  $T=12$  с даёт:  $t_1=6,5$  с и  $I_T=149,09$  А.



$$\phi_1(t_1, iT) := \int_0^{t_1} \left( \frac{cm \cdot im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t \, dt$$

$$c := \left( \frac{cm \cdot im}{J} - \frac{M}{J} \right) \cdot t_1 - \frac{cm}{J} \cdot \left[ -iT \cdot t_1 + \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \left( T \cdot t_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{M}{J} \cdot t_1$$

$$\phi_2(t_1, iT) := \int_{t_1}^T \left[ \frac{cm}{J} \cdot \left[ -iT \cdot t + \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \left( T \cdot t - \frac{t^2}{2} \right) \right] - \frac{M}{J} \cdot t + c \right] dt$$

$$cm := 2.5 \quad M := 300 \quad im := 200 \quad J := 100 \quad T := 12 \quad fi := 100$$

▣Выражения для  $\phi_1, \phi_2$

Given

$$\frac{cm \cdot im \cdot t_1}{J} + \frac{cm}{J} \cdot \left[ \left( -iT + \frac{im + iT}{T - t_1} \right) \cdot (T - t_1) - \frac{im + iT}{T - t_1} \cdot \frac{T^2 - t_1^2}{2} \right] - \frac{M \cdot T}{J} = 0$$

$$\phi_1(t_1, iT) + \phi_2(t_1, iT) = fi$$

$$r := \text{Find}(t_1, iT) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} 6.5000 & 12.000 & .20000e21 \\ 149.09 & .15068e22 & -200.00 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.25. Программа в пакете Mathcad для решения системы уравнений (6.55), (6.57)

Расчётные графики движения привода, построенные по аналитическим выражениям для тока (6.53), частоты вращения (6.56) и угла поворота привода, представлены на рис. 6.26а,б.

Найденное решение проверено на имитационной модели системы управления электроприводом см. рис. 6.1). В качестве управляющего воздействия использован ток двигателя  $i(t)$  (6.53).

Результаты проверки показаны на рис. 6.27а,б и полностью подтверждают расчётные графики рис. 6.26.

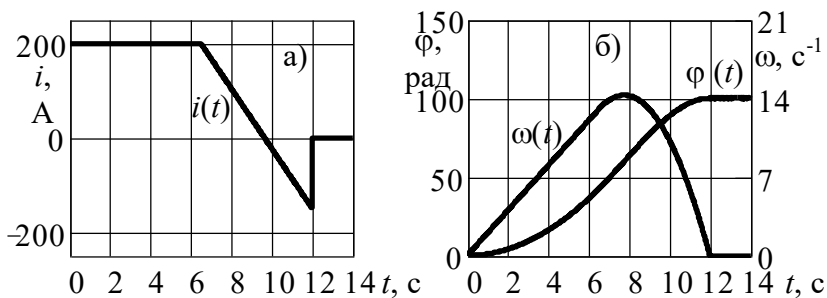


Рис. 6.26. Оптимальное движение привода по экстремалям (6.53) и (6.56)

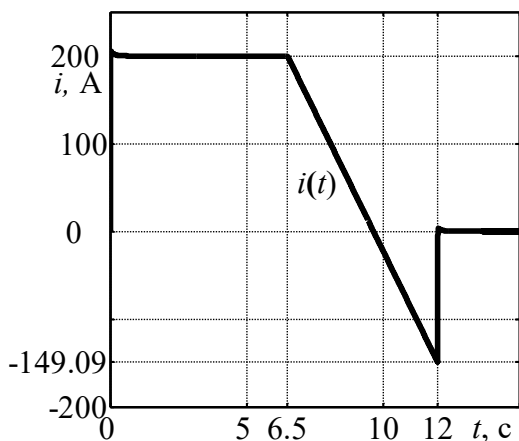


Рис. 6.27а. Изменение тока при оптимальном управлении (6.53)

Поставленная задача оптимального энергосберегающего управления с учётом ограничений по току решена для заданного времени угла поворота платформы  $T=12$  с. Потери энергии за это время составят:

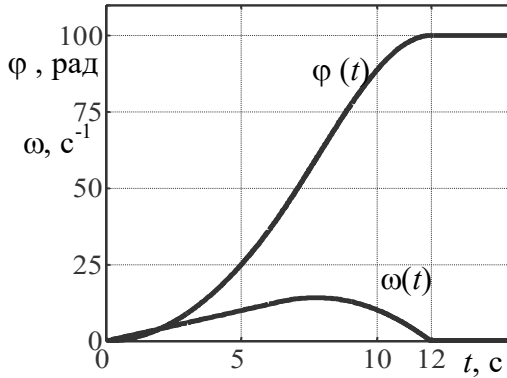


Рис. 6.276. Изменение частоты вращения  $\omega(t)$  и угла поворота  $\varphi(t)$  привода при оптимальном управлении (6.53)

$$\begin{aligned}
 P &= R \int_0^T i^2(t) dt = R \left[ \int_0^{t_1} I_{\max}^2 dt + \int_{t_1}^T \left( -I_T + \frac{I_{\max} + I_T}{T - t_1} \cdot (T - t) \right)^2 dt \right] = \\
 &= RI_{\max}^2 t_1 + R \frac{(I_T^2 - I_{\max} I_T + I_{\max}^2) \cdot (T - t_1)}{3} = 19,17 \text{ кДж}.
 \end{aligned}$$

Чтобы сравнить этот результат с эффективностью оптимального управления без ограничений (6.12) воспользуемся ранее найденным выражением для потерь (см. п. 6.1):

$$P = R \frac{12J^2 \varphi^2 + T^4 M^2}{c_m^2 T^3} \Bigg|_{\substack{J=100 \\ \varphi=100 \\ T=12 \\ c_m=2,5 \\ R=0,06}} = 17,03 \text{ кДж}.$$

Таким образом, управление без ограничений по току в энергетическом смысле эффективнее управления с ограничением. Однако ток при этом принимает значения  $i(0)=286,7 \text{ А}$  и  $i(12)=-46,7 \text{ А}$ , т.е. в начале движения превышает допустимое значение  $I_{\max}=200 \text{ А}$ .

Задача 4. Рассмотрим теперь пример линейной задачи с ограничением на управление, наиболее полно раскрывающий возможности принципа максимума.

Пусть требуется осуществить поворот платформы экскаватора (см. задачи 1,3) на угол  $\varphi=100$  рад за кратчайшее время  $T$ , при этом управляющее воздействие – ток  $i(t)$  – ограничен по модулю:

$$|i(t)| \leq I_{\max}.$$

Воспользуемся известным описанием объекта управления (6.31):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J}. \end{cases}$$

Целевой функционал в этой задаче по сравнению с задачами 1,3 изменится:

$$Q = T = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min. \quad (6.58)$$

Включим функционал (6.58) в число фазовых координат:

$$\dot{x}_0(t) = 1, \quad (6.59)$$

и составим гамильтониан:

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i \dot{x}_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left( \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right) \rightarrow \max. \quad (6.60)$$

Управление  $i(t)$  входит в гамильтониан  $H$  линейно, и максимум  $H$  достигается при максимальном значении слагаемого  $\psi_2 \left( \frac{c_m}{J} i - \frac{M_c}{J} \right)$ , из чего немедленно вытекает структура оптимального управления:

$$i(t) = I_{\max} \operatorname{sign} \psi_2. \quad (6.61)$$

Для определения  $\psi_2$  составим уравнения взаимосвязи гамильтониана  $H$  и функций  $\psi_i(t)$ :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Для  $H$  вида (6.60) последнее соотношение образует систему трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0; \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.\end{aligned}\tag{6.62}$$

Решение системы уравнений (6.62):

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \text{const} = c_0; \\ \psi_1 &= \text{const} = c_1; \\ \psi_2 &= -\int \psi_1 dt = c_2 - c_1 t,\end{aligned}$$

и искомая экстремаль опишется выражением:

$$i(t) = I_{\max} \text{sign}(c_2 - c_1 t),\tag{6.63}$$

имеющий, в силу линейности  $\psi_2(t)$  не более двух интервалов постоянства  $i(t)=I_{\max}$  или  $i(t)=-I_{\max}$  с точкой перехода (переключения) со значения  $I_{\max}$  на значение  $(-I_{\max})$  в некоторый момент  $t_1$ .

Определим момент  $t_1$  переключения.

Поскольку:

$$i(t) = \begin{cases} I_{\max}, & 0 \leq t < t_1; \\ -I_{\max}, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t, \end{cases}$$

$$\text{и } \omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \int \ddot{\varphi}(t) dt = \int \left( \frac{c_m}{J} i(t) - \frac{M_c}{J} \right) dt,$$

то величина скорости  $\omega(t)$  получит вид:

$$\omega(t) = \begin{cases} \left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t, & 0 \leq t < t_1; \\ \left( -\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t + c_3, & t_1 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t. \end{cases} \quad (6.64)$$

Условие сопряжения участков  $\omega(t)$  в точке переключения  $t_1$ :

$$\left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 = \left( -\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) t_1 + c_3 \quad (6.65)$$

даёт значение  $c_3$ :

$$c_3 = \frac{2c_m I_{\max}}{J} t_1.$$

Требуемый угол поворота платформы:

$$\begin{aligned} \int_0^T \omega(t) dt &= \left( \frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) \cdot \frac{t_1^2}{2} + \\ &+ \left( -\frac{c_m}{J} I_{\max} - \frac{M_c}{J} \right) \cdot \left( \frac{T^2 - t_1^2}{2} \right) + \frac{2c_m I_{\max} t_1}{J} \cdot (T - t_1) = \varphi. \end{aligned} \quad (6.66)$$

С другой стороны:

$$\frac{\omega_{\max} T}{2} = \varphi, \quad (6.67)$$

где  $\omega_{\max} = \left( \frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) t_1$ .

Отсюда получаем:

$$\left( \frac{c_m I_{\max}}{J} - \frac{M_c}{J} \right) \frac{t_1 T}{2} = \varphi. \quad (6.68)$$

При заданных параметрах  $c_m=2,5$  Н·м/А,  $I_{\max}=200$  А,  $J=100$  кг·м<sup>2</sup>,  $M_c=300$  Н·м система уравнений (6.66), (6.68) позволит определить две содержащиеся в них неизвестные величины  $t_1$  и  $T$ :  $t_1=8,944$  с;  $T=11,180$  с (см. программу решения в пакете Mathcad на рис. 6.28).

cm := 2.5 M := 300 im := 200 J := 100 fi := 100

given

$$\left(\frac{cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \frac{t1^2}{2} + \left(\frac{-cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \left(\frac{T^2 - t1^2}{2}\right) + \frac{2cm \cdot im \cdot t1}{J} \cdot (T - t1) = fi$$

$$\left(\frac{cm}{J} \cdot im - \frac{M}{J}\right) \cdot \frac{t1 \cdot T}{2} = fi$$

$$\text{find}(t1, T) \text{ float}, 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -10. & 10. & -8.9443 & 8.9443 \\ -10. & 10. & -11.180 & 11.180 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.28. Программа решения системы уравнений (6.66), 6.68) при синтезе управления, оптимального по быстродействию

Результаты проверки полученного решения на имитационной модели в пакете Matlab представлены на рис. 6.29а,б и подтверждают выполнение всех условий задачи.

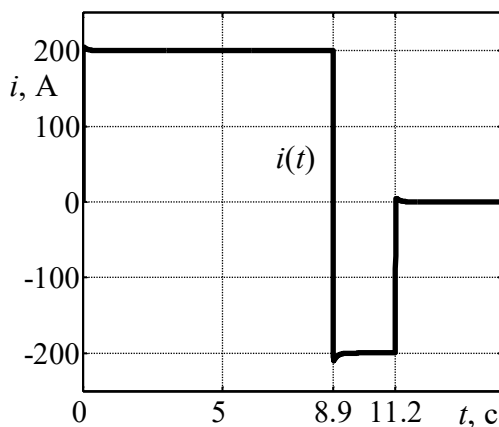


Рис. 6.29а. Изменение тока при управлении, оптимальном по быстродействию

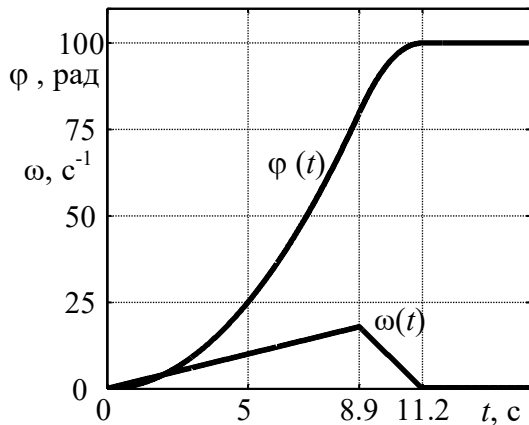


Рис. 6.296. Изменение угла поворота и частоты вращения при управлении, оптимальном по быстродействию

На рис. 6.296 следует обратить внимание на кусочно-линейный характер изменения частоты вращения  $\omega(t)$ , подтверждающий полученное выше аналитическое выражение (6.64) для  $\omega(t)$  и правомерность применения соотношения (6.67), связывающего частоту вращения и угол поворота  $\varphi$  платформы.

Потери энергии при управлении, оптимальном по быстродействию, составляют:

$$P = R \int_0^T i^2(t) dt = 0,06 \cdot 200^2 \cdot 11,18 = 26,83 \text{ кДж.}$$

Это значение значительно превышает потери при энергосберегающих управлениях, рассмотренных в предыдущих задачах (17,03 кДж и 19,17 кДж), причём полученный выигрыш в быстродействии оказался практически незначимым (в задаче 3 величина  $T=12$  с).



Контрольные задания к разделу

Варианты параметров электрических приводов  
для выполнения контрольных заданий

№	$J$ , кг·м <sup>2</sup>	$M_c$ , Н·м	$c_e$ , В·с; $c_m$ , Н·м/А	$T$ , с	$\varphi$ , рад	$R$ , Ом
1	500	100	3	5	100	0,06
2	100	100	3	10	200	0,06
3	200	300	2	10	100	0,06
4	300	200	2	20	200	0,06
5	400	400	2	20	100	0,06
6	500	400	2	25	100	0,06

Задание 1. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее наибольший угол поворота  $\varphi$  привода за заданное время  $T$ . Граничные условия по скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания двигателя;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком).

Задание 2. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее наименьшее время поворота привода на заданный угол  $\varphi$ .

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – напряжение питания;
- 2) нет ограничений на управление;
- 3) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком);

4) есть ограничение по нагреву (потери энергии на сопротивлении якоря двигателя) – задаётся разработчиком.

Задание 3. Для параметров объекта, описанного в задаче 2 раздела 3.1 построить оптимальное управление, переводящее груз по горизонтали на заданное расстояние за минимальное время. Граничные условия по скорости нулевые. Раскачивания груза не допускаются.

Варианты задания:

- 1) нет ограничений на управление;
- 2) есть ограничения на управление.

Задание 4. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее наименьшее значение потерь энергии при повороте привода на заданный угол  $\varphi$  и заданное время  $T$ . Момент сопротивления линейно зависит от частоты вращения. Граничные условия по скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания двигателя;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком).

Задание 5. Для заданного варианта параметров электропривода найти оптимальное управление, обеспечивающее поворот привода на заданный угол  $\varphi$  за минимальное время  $T$ . Момент сопротивления линейно зависит от частоты вращения. Граничные условия по скорости нулевые.

Варианты задания:

- 1) управляющее воздействие – ток двигателя;
- 2) управляющее воздействие – напряжение питания двигателя;
- 3) нет ограничений на управление;
- 4) есть ограничение на управление (задаётся разработчиком).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа, которая содержит четкое и краткое изложение теории, большое количество задач и разобранных примеров, существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по вышеуказанным разделам математики, особенно при использовании учебного пособия в качестве задачника.

Издание рекомендуется для работы на практических занятиях, при подготовке к контрольным работам, а также при выполнении типовых расчетов и при составлении комплексных заданий, аттестационных контрольных заданий по указанным темам. Считаем, что данное пособие поможет более глубокому и полному усвоению студентами учебного материала по данным в пособии разделам и будет соответствовать эффективной организации учебного процесса по курсу «Математика» для студентов очной формы обучения инженерно-технических специальностей.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. М.: Физматгиз, 1961.
2. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М.: Гостехиздат, 1950.
3. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление / В.И. Смирнов, В.И. Крылов, Л.В. Канторович. М.: Кубуч. 1933.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов М.: Физматгиз, 1958. Т.4.
5. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления / Н.М. Гюнтер. М.: Гостехиздат, 1941.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. М.: Гостехиздат, 1955.

7. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. М.: Гостехиздат, 1935. Ч.1, Ч.2
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский В.Г., Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961.
9. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман М.: ИЛ. 1960.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. М.: Физматгиз, 1962.
11. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике / С.Г. Михлин. М.: Гостехиздат, 1950.
12. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. М.: Наука, 1969.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления. Том 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова–М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 744 стр.
14. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.П. Лещёв. – Одесса: СМИЛ, 2008, с. 144-149.
15. Теория автоматического управления. Часть 1. / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. школа, 1986. – 367 с.
16. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
17. Ключев В.И. Электропривод и автоматизация общепромышленных механизмов / В.И. Ключев. – М.: Энергия, 1980. – 360 с.
18. Теория автоматического управления. Часть 2. / Под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высш. школа, 1972. – 432 с.
19. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров– Л.: Энергия, 1977.– 280 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ.....	7
1.1. Вариация и ее свойства.....	7
1.2. Уравнение Эйлера.....	15
1.3. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$ .....	30
1.4. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.....	33
1.5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.....	38
1.6. Вариационные задачи в параметрической форме.....	44
1.7. Некоторые приложения.....	47
2. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ.....	56
2.1. Простейшая задача с подвижными границами.....	56
2.2. Задача с подвижными границами для функционалов вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$ .....	64
2.3. Экстремали с угловыми точками.....	69
2.4. Односторонние вариации.....	79
3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА.....	84
3.1. Поле экстремалей.....	84
3.2. Функция $E(x, y, p, y')$ .....	93
3.3. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.....	106
4. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.....	113
4.1. Связи вида $\Phi(x_1, y_1, \dots, y_n)=0$ .....	113
4.2 Связи вида $\Phi(x_1, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')=0$ .....	122

4.3. Изопериметрические задачи.....	127
5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ...	139
5.1. Прямые методы.....	139
5.2. Конечно-разностный метод Эйлера.....	140
5.3. Метод Рунге.....	143
5.4. Метод Канторовича.....	153
6. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ.....	163
6.1. Решение задачи оптимального управления с помощью уравнения Эйлера. Общая задача Лагранжа.....	163
6.2. Решение задачи оптимального движения объекта при ограничениях на управление. Принцип максимума Понтрягина.....	186
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	210
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	210

Учебное издание  
Катрахова Алла Анатольевна  
Васильев Евгений Михайлович  
Купцов Валерий Семенович  
Купцов Андрей Валериевич

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО  
ИСЧИСЛЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЕ  
К ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В авторской редакции

Компьютерный набор:

А.А. Катраховой,  
Е.М. Васильева,  
В.С. Купцова,  
А.В. Купцова

Подписано к изданию 14.03. 2012.  
Объем данных 12,3 Мб

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»  
394026 Воронеж, Московский просп.,14