.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет »

А.А. Катрахова Е.М. Васильев В.С. Купцов

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА», «СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Часть 1

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 517.53

Катрахова А.А. Задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по курсу «Математика», «Спецглавы математики». Ч. 1. : учеб.пособие [Электронный ресурс]. – Электрон.текстовые, граф. данные (2,98 Мб) / А.А. Катрахова, Е.М. Васильев, В.С. Купцов. – Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – 1 электрон.опт. диск (CD-ROM). – Систем.требования: ПК 500 и выше ; 256 Мб ОЗУ ; WindowsXP ; AdobeAcrobat ; 1024x768 ; CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

В учебном пособии приводятся задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по курсу «Математика», «Спецглавы математики». Материал иллюстрируется примерами,

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 27.03.04 «Управление в технических системах» ,13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», (все профили), дисциплине «Математика», «Спецглавы математики».

Табл.4. Ил. 30. Библиогр.: 36 назв.

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.- мат. наук, проф. А.И. Шашкин); д-р техн. наук, проф. Н.Д. Вервейко

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие содержит задачи и упражнения для организации самостоятельной работы по курсу «Математика», «Спецглавы математики».

Содержание учебного пособия соответствует программе курса математики для бакалавров инженерно-технических специальностей втузов, рассчитанной на 508 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

ЗАНЯТИЕ № 1

МЕТОД ГАУССА ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА

Литература: [3], с. 23-35; [5], с. 77-87; [4], с. 50-54; [7], с. 145-146; [15], с. 43-45; [16], с. 23-28.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод последовательного исключения неизвестных?

2. Какая матрица называется расширенной матрицей системы?

3. Какие преобразования матрицы системы называются элементарными?

4. Составить алгоритм решения линейных систем методом Гаусса.

5. Как исследовать систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса (в матричном виде)?

6. В чем состоит отличие метода Жордана-Гаусса от метода Гаусса?

7. Составить алгоритм решения линейных систем методом Жордана-Гаусса.

8. В каких инженерных задачах используют метод Гаусса?

Примеры решения задач

Пример 1. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=-9 \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1 \\ -7x_1+x_2+\ x_3-2x_4=8 \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=12 \end{cases}$$

Решение. Меняем местами первое и второе уравнения и записываем расширенную матрицу системы. Затем под 1 в первом столбце делаем нули. Для этого первую строку умножаем на –6 и прибавляем ко второй строке (складываются соответствующие элементы), первую строку умножаем на 7 и прибавляем к третьей строке, первую строку умножаем на 3 и прибавляем к четвертой строке:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) :$$

Делаем нули под –15 во втором столбце. Для этого прибавляем вторую строку к третьей и четвертой. Так как третья и четвертая строки состоят из нулей, то вычеркиваем их:

$$: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \end{array}\right)$$

.

Таким образом, расширенная матрица системы приведена к треугольному виду. Производим обратный ход метода Гаусса. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases}.$$

Будем считать базисными переменными x_1 и x_2, а свободными x_3 и x_4. Из второго уравнения выражаем x_2:

$$x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4,$$

подставляем в первое уравнение и выражаем x_1:

$$x_1 = 1 - 2\left(1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4\right) - 2x_3 - 3x_4 = -1 - \frac{7}{15}x_4.$$

Обозначая свободные переменные $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, получаем общее решение системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{15}c_2 \\ 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 \quad - \quad 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы. Затем умножаем первую строку на –1 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) :$$

Умножаем вторую строку на –2 и прибавляем к третьей:

$$: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Таким образом, расширенная матрица системы приведена к треугольному виду. Производим обратный ход метода Гаусса. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \\ 0 = -13 \end{cases}.$$

Замечаем, что третье уравнение системы не имеет решений, поэтому система несовместна (не имеет решений).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 3.190-3.194, 3.198-3.203, 3.208-3.212, 3.214, 3.240, 3.244 [7].

Составить программу решения системы линейных уравнений на ЭВМ (3.265) и решить задачи 3.266-3.268 [7].

Форма отчетности: краткий реферат с решением задач, который представляется по ходу изучения программы курса высшей математики. Решения задач на ЭВМ (программы и результаты счета) представляются по ходу изучения курса "Алгоритмические языки и программирование".

ЗАНЯТИЕ № 2

МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ. РАНГ МАТРИЦЫ

Литература: [3], с. 16-18, 86-92.; [15], с. 18-36.
[16], с. 21-22.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется матрицей, размерностью матрицы?
2. Какие операции можно выполнять с матрицами?
3. Какие матрицы можно складывать, перемножать?
4. Что такое ранг матрицы?
5. Как находится ранг матрицы методом окаймляющих миноров, методом элементарных преобразований?
6. Какие методы решения инженерных задач используют матрицы ?
7. Как с помощью ранга матрицы выяснить совместность системы?
8. Объяснить теорему Кронекера-Капелли.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение. $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3\neq 2$).

Пример 3. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение. Приводим матрицу к треугольному виду:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}:\left|\begin{matrix}\textit{меняем местами}\\ \textit{первую и вторую строки}\end{matrix}\right|:$$

$$:\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}:\left|\begin{matrix}\textit{умножаем первую строку на } -5\\ \textit{и прибавляем к третьей}\end{matrix}\right|:$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{matrix} \textit{умножаем вторую строку на } -10 \\ \textit{и прибавляем к третьей} \end{matrix} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{matrix} \textit{вычеркиваем} \\ \textit{нулевую} \\ \textit{строку} \end{matrix} \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Так как число ненулевых строк равно 2, то и ранг матрицы равен 2.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 3.76, 3.81, 3.83, 3.85, 3.92, 3.159-3.168.

Составить программу перемножения двух матриц: [7], 3.247.

Составить программу транспонирования квадратной матрицы: [7], 3.248.

Форма отчетности: краткий реферат с программой.

ЗАНЯТИЕ № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Литература: [1], с. 267-269; [4], с. 45-50; [7], с. 142-143; [15], с. 35-40; [16],с. 37-43.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система линейных уравнений называется однородной?
2. Может ли однородная система быть несовместной?
3. Каковы необходимые и достаточные условия наличия у однородной системы ненулевых решений (с доказательством)?
4. Что называется фундаментальной системой решений однородной системы?

5. Как найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0 \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=0 \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} : \left| \begin{matrix} \textit{умножим первое уравнение} \\ \textit{на } -6,\ 7,\ 3 \textit{ и прибавим} \\ \textit{последовательно} \\ \textit{ко } 2,\ 3,\ 4 \textit{ уравнению} \end{matrix} \right| :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix} : \left| \begin{matrix} \textit{умножим второе уравнение} \\ \textit{на } 1 \\ \textit{и прибавим последовательно} \\ \textit{к } 3,\ 4 \textit{ уравнению} \end{matrix} \right| :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Таким образом матрица коэффициентов имеет ранг $r=2$. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 15x_2+15x_3+19x_4=0 \end{cases}.$$

Так как ранг системы $r = 2 < n = 4$ - числа переменных, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных – x_3 и x_4. Из второго уравнения системы получим $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15} x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим

$$x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2x_3 + \frac{38}{15} x_4 - 2x_3 - 3x_4 = -\frac{7}{15} x_4 .$$

Обозначаем свободные переменные через произвольные постоянные $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и записываем

$$x_1 = -\frac{7}{15} c_2, \qquad x_2 = -c_1 - \frac{19}{15} c_2 .$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{15} c_2 \\ -c_1 - \frac{19}{15} c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot c_1 - \frac{7}{15} c_2 \\ -c_1 - \frac{19}{15} c_2 \\ c_1 + 0 \cdot c_2 \\ 0 \cdot c_1 + c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{7}{15} \\ -\frac{19}{15} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы решений общее решение может быть записано в виде $X = c_1E_1 + \overline{c}_2E_2$, где $\overline{c}_2 = c_2/15$.

Пример 2. Найти общее решение неоднородной системы $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2 \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Решение. Замечаем, что частным решением данной неоднородной системы является $X_{чн} = (-1, -2, 1, 2)$.

Приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & -6 & 3 \\ 12 & -7 & -9 & 5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 0 & -3 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однородная система примет вид

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение этой системы имеет вид $x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = \dfrac{3}{4}x_3$. Обозначая $x_3 = 4c$, получим общее решение однородной системы $X_0 = \begin{pmatrix} 3c \\ 0 \\ 4c \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение исходной неоднородной системы будет иметь вид

$$X = X_0 + X_{чн} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-1 \\ -2 \\ 4c+1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3c-1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4c+1$, $x_4 = 2$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения
Решить задачи: [7], 3.225-3.232; 3.236-3.239.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 4

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Литература: [1], с. 190-195; с. 25-31; [15], с. 61-65. [16],с. 50 -52.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение смешанного произведения векторов.
2. Каковы свойства смешанного произведения векторов?
3. Каково необходимое и достаточное условие компланарности векторов?

4. Как выражаются векторное и смешанное произведения через координаты перемножаемых векторов (с доказательством)?

5. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов?

6. Дайте определение векторного произведения.

7. Как находится двойное векторное произведение?

Примеры решения задач

Пример 1. Даны вершины пирамиды: $A(5,1,-4)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,3,-4)$, $D(2,2,2)$. Найти длину высоты h, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Так как объем пирамиды есть $V=\dfrac{1}{3}Sh$, то $h=\dfrac{3V}{S}$, где S – площадь основания ABC.

Находим V как $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Определяем координаты этих векторов: $\overline{AB}=(-4,1,3)$, $\overline{AC}=(-2,2,0)$, $\overline{AD}=(-3,1,6)$ и вычисляем объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4.$$

Находим площадь основания ABC:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-6\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}\right|=3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h = \dfrac{3 \cdot 4}{3 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. Даны векторы $\bar{a} = (2, -3, 1)$, $\bar{b} = (-3, 1, 2)$ и $\bar{c} = (1, 2, 3)$. Вычислить $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Решение. 1-й способ. Вычисляем сначала векторное произведение, стоящее в скобках:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\bar{i} - 7\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Полученный результат умножаем векторно на $\bar{c}$:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\bar{i} + 14\bar{j} - 7\bar{k}.$$

2-й способ. Воспользуемся формулой:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{b}(2 - 6 + 3) - \bar{a}(-3 + 2 + 6) =$$

$$= -\bar{b} - 5\bar{a} = (3 - 10, -1 + 15, -2 - 5) = (-7, 14, -7).$$

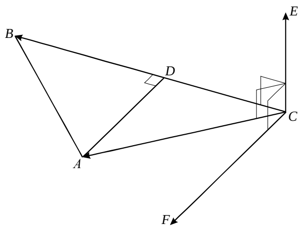


Рис. 1

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 871, 873, 874 (1,2), 875, 876, 877, 878, 879, 881.

Указание к решению задачи № 881. Вектор $\overline{CE}$ перпендикулярен векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$, а вектор $\overline{CF}$, параллельный высоте AD, перпендикулярен векторам $\overline{CE}$ и $\overline{CB}$ (рис. 1).

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 5

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Литература: [3], с. 80-114, 121-135; [8] с. 166-191; [15], с. 66-75; [16],с. 29-36.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение линейного пространства. Приведите примеры.
2. Что такое базис линейного пространства и его связь с размерностью линейного пространства?
3. Как определяется матрица перехода между старым и новым базисами?
4. Расскажите о линейном операторе.
5. Как выглядит матрица линейного преобразования в новом базисе?
6. Дайте определение собственных значений и собственных векторов.

Примеры решения задач

Пример 1. Является ли множество $\mathrm{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ линейным пространством?

Решение. Проверим выполнение условий, пользуясь операциями над матрицами:

1) $A+B=C$, где A, B и C – матрицы размера $m \times n$. Поэтому первое условие выполняется.

2) $\lambda A = B$, где A и B – матрицы размера $m \times n$, а λ – произвольное число. Поэтому второе условие выполняется.

3) Операции сложения матриц и умножения матрицы на число удовлетворяют следующим свойствам:

а) $A + B = B + A$;

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

в) $A + 0 = A$, где 0 – нулевая матрица;

г) $A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -A$;

д) $1 \cdot A = A$;

е) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, где α и β – произвольные числа;

ж) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

з) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Таким образом, множество $\mathrm{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ является линейным пространством.

Пример 2. Найти координаты геометрического вектора $\overline{x} = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ в новом базисе $\mathcal{B}' = (\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$, где $\overline{e}_1' = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{e}_2' = \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{e}_3' = \overline{i} + \overline{k}$.

Решение. Выпишем координаты векторов $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$ и $\overline{e}_3'$ в исходном базисе $\mathcal{B} = (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$:

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем столбцы матрицы перехода T от старого базиса к новому из записанных выше координат векторов и получаем

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Используя эту матрицу, получаем координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе:

$$X'=T^{-1}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\overline{x}=2\vec{e}_2'-\vec{e}_3'$.

Пример 3.В $\mathcal{L}_3$ задан линейный оператор, матрица которого в базисе $\mathcal{B}=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ равна

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&-1\\2&5&3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathcal{B}'=(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3')==(\overline{e}_1,\overline{e}_1+\overline{e}_2,\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3)$.

Решение. Выпишем координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ и $\vec{e}_3'$ в исходном базисе:

$$E_1'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad E_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad E_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Составляем столбцы матрицы перехода T от старого базиса к новому из записанных выше координат векторов и получаем

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -8 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [8], 1281, 1311, 1446, 1469.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 6

СИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ.
ПРИВЕДЕНИЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Литература: [2], с. 213-219; [5], с. 102-111, 119-122;
[7], с. 181-182; [15], с. 84-91; [16],с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая матрица называется симметричной?
2. Что называется собственным значением и собственным вектором матрицы?
3. Как находятся собственные значения и собственные векторы?
4. В каком базисе симметричная матрица имеет диагональный вид (теорема с доказательством)?
5. При изучении каких задач используются симметричные матрицы и процесс их диагонализации?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 .$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$.

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 + (-19-\lambda)x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Подставляем в систему $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}.$$

Разделив первое уравнение на 6, второе на 10, а третье на 12, замечаем, что эта система эквивалентна одному уравнению

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 .$$

Следовательно, система имеет два линейно независимых решения, соответствующих координатам двух собственных векторов, например:

$$\bar{a}_1 = (1,\ 0,\ -1) \quad \text{и} \quad \bar{a}_2 = (0,\ 1,\ 2).$$

Подставим теперь в систему $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}.$$

Прибавив первое уравнение ко второму, замечаем, что эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x_1 - 6x_3 + 3x_3 = 0 \\ 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_3 = (3,\ 5,\ 6)$.

Найденные собственные векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ образуют базис, в котором матрица A линейного оператора имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, определяются равенством $\bar{a}_{(\lambda=1)} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, где α и β – произвольные числа не равные одновременно нулю. Все собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$, определяются равенством $\bar{a}_{(\lambda=-1)} = \gamma\bar{a}_3$, где $\gamma \neq 0$ – произвольное число.

Пример 2. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором базисе симметричной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1=10$ и $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Составляем систему для определения координат собственных векторов:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=0 \end{cases}.$$

Подставляем в систему $\lambda_1=10$:

$$\begin{cases} -8x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2-5x_3=0 \end{cases} : \begin{cases} 2x_1-5x_2-4x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} : \begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_1=(1,\ 2,\ -2)$. Подставляем в систему $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2+4x_3=0 \end{cases} : \quad x_1+2x_2-2x_3=0.$$

Частному решению этой системы соответствует собственный вектор $\bar{a}_2=(2,\ 0,\ 1)$. Заметим, что $\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2=0 \Rightarrow \bar{a}_1\perp\bar{a}_2$.

Третий собственный вектор находим как векторное произведение: $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = (2, -5, -4)$.

Ортонормированный базис будут составлять векторы:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \qquad \bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\bar{e}_3 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right).$$

Матрица A линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи**:** [7], 4.134, 4.136, 4.172-4.175, 4.184.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 7

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ.РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ.УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ.

Литература: [1], с. 51-60; [2], с. 59-66,; [15], с. 111-116; [16], с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите общее уравнение прямой и частные случаи этого уравнения.

2.напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Как вычисляется угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки?

4. Как можно преобразовать общее уравнение прямой в нормальное уравнение?

5. Как находится угол между двумя прямыми на плоскости?

6. Напишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

7. По какой формуле определяется расстояние от точки до данной прямой на плоскости?

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение прямой 4x-3y+12=0 представить в различных видах: с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения.

Решение. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим данное уравнение относительно y , получим $y = \frac{4}{3}x + 4$ - это уравнение прямой с угловым коэффициентом $k\frac{4}{3}$, b = 4 – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Для получения уравнения прямой в отрезках перепишем его в виде $4x - 3y = -12$ и разделим обе части уравнения на -12, в результате получим $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ - уравнение прямой в отрезках, где a = -3,b = 4 – координаты пересечения прямой с осью Ox и Oy соответственно.

Приведём исходное уравнение к нормальному виду $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$. Для этого умножим обе части данного уравнения на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}$ (μ<0, так как C=12>0). В итоге получим нормальное уравнение $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$, где cos $\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $p=\frac{12}{5}$ - расстояние от точки O(0, 0) до прямой.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A(0 , 2) и B(-3, 7).

Решение. Используем уравнение. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.. Полагая в нем $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, т.е. -3y + 6 = 5x или 5x + 3y – 6 = 0.

Пример 3. Найти угол между прямыми $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $tg\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$, подставив в нее $A_1= 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$, получим $tg\varphi=\left|\frac{2\cdot(-1)-5\cdot(-3)}{2\cdot5+(-3)\cdot(-1)}\right|=1$, $\qquad \varphi=\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Через точку пересечения прямых 3x-2y+5=0 и x+2y-9=0 проведена прямая, параллельная прямой 2x+y+6=0. Составить ее уравнение.

Решение. Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases}3x-2y+5=0\\x+2y-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-4=0\\x+2y-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$$

Получаем M(1,4) – точка пересечения этих прямых. Угловой коэффициент прямой 2x+y+6=0 $k_1 = -2$, следовательно угловой коэффициент прямой, параллельно данной $k_2 =k_1 = -2$.

Запишем уравнение искомой прямой. По формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$ получаем y-4=-2(x-1), т.е. 2x+y-6=0.

Пример 5. Найти расстояние между параллельными прямыми 3x+4y-20=0 и 6x+8y+5=0.

Решение. Возьмём на первой прямой произвольную точку А. Пусть, например, x=0, тогда y=5, т.е. A(0,5).

По формуле $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$. найдем расстояние от точки до второй прямой, получим:

$$d = \left| \frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 5 + 5}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = \frac{45}{10} = 4{,}5.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Доказать, что условие принадлежности трех точек M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) и M_3 (x_3, y_3) одной прямой можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2) Решить задачи [6], №№ 215, 223, 227, 234, 266, 312, 322.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКАК КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Литература: [1], с. 129-139.; [15], с. 138 -146; [16],с. 45-48, с. 60-61.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет общее уравнение кривой второго порядка?

2. Какой вид имеют канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы, параболы?

3. Запишите преобразование координат при повороте системы координат на угол α.

4. Запишите преобразование координат при параллельном переносе системы координат.

5. Каков алгоритм приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью преобразования системы координат?

Примеры решения задач

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0,$$

изобразить на чертеже оси координатных систем и геометрический образ, определяемый данным уравнением.

Решение. Записываем формулы преобразования координат, соответствующего повороту осей на угол α

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

и подставляем их в исходное уравнение. После перегруппировки слагаемых получаем

$$x'^2\left(29\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha+36\sin^2\alpha\right)+$$

$$+y'^2\left(29\sin^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+36\cos^2\alpha\right)+$$

$$+x'y'\left(-24\cos^2\alpha+24\sin^2\alpha+14\sin\alpha\cos\alpha\right)+$$

$$+x'\left(82\cos\alpha-96\sin\alpha\right)-y'\left(82\sin\alpha+96\cos\alpha\right)-91=0.$$

Находим угол поворота α из условия равенства нулю коэффициента при $x'y'$, т.е.

$$12\sin^2\alpha + 7\sin\alpha\cos\alpha - 12\cos^2\alpha = 0\,.$$

Разделив это уравнение на $\cos^2\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Решая его, находим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3}{4}\,.$$

Выбираем значение $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} \approx 37^{\circ}$. Этому значению соответствуют $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Подставляем их в полученное выше уравнение и выделяем полные квадраты. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\left(x' + 1/5\right)^2}{9} + \frac{\left(y - 7/5\right)^2}{4} = 1\,.$$

Производим замену переменных, соответствующую параллельному переносу осей координат x' и y': $\tilde{x} = x' + \dfrac{1}{5}$, $\tilde{y} = y' - \dfrac{7}{5}$. Таким образом исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1\,.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 2$ (рис. 2).

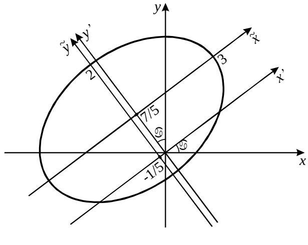


Рис. 2

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 676(1-5), 693(1-3).

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 9

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА .МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Литература: [3], с. 157-164; [1], с. 229-242 ; [15], с. 147-157; [16],с. 67-76.

Контрольные вопросы и задания

1. Классификация поверхностей второго порядка. Какие канонические уравнения и вид имеют эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды?

2. Как записать уравнение сферы радиуса R с центром в точке (a, b, c)? Как связано оно с уравнением эллипсоида?

3. Какие канонические уравнения и вид имеют эллиптический и гиперболический параболоиды?

4. Какие канонические уравнения и вид имеют цилиндрические поверхности?

5. Какое каноническое уравнение и вид имеет конус второго порядка?

6. Как определяется вид поверхности методом параллельных сечений?

Пример решения задачи

Пример. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением $x^2 + 2yz = 1$.

Решение.

1) В сечении поверхности плоскостью $z=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

2) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0>0$ имеем семейство парабол $y=\frac{1}{2z_0}-\frac{x^2}{2z_0}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении z_0.

3) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0<0$ имеем семейство парабол $y=-\frac{1}{2|z_0|}+\frac{x^2}{2|z_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении $|z_0|$.

4) В сечении поверхности плоскостью $y=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

5) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0>0$ имеем семейство парабол $z=\frac{1}{2y_0}-\frac{x^2}{2y_0}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении y_0.

6) В сечении поверхности плоскостями $y=y_0<0$ имеем семейство парабол $z=-\frac{1}{2|y_0|}+\frac{x^2}{2|y_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении $|y_0|$.

7) В сечении поверхности плоскостями $x=x_0$ имеем семейство гипербол $z=\frac{1-x_0^2}{2y}$ при $|x_0|<1$ и $z=-\frac{x_0^2-1}{2y}$ при $|x_0|>1$ (сопряженные гиперболы). В случае $|x_0|=1$ получается $z=0$, что совпадает с 1).

Замечаем симметричность сечений поверхности относительно прямой $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$. Поэтому дальнейшее исследование проводим с учетом этого обстоятельства.

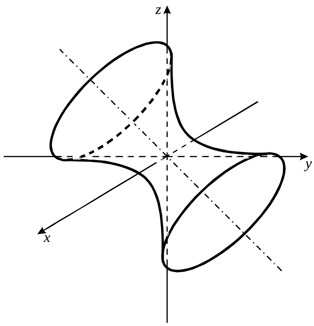


Рис. 3

8) В сечении поверхности плоскостями $z = -y + z_0$ имеем семейство гипербол $x^2 - 2\left(y - \frac{z_0}{2}\right)^2 = 1 - \frac{z_0^2}{2} > 0$ при $|z_0| < \sqrt{2}$ и $2\left(y - \frac{z_0}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{z_0^2}{2} - 1 > 0$ при $|z_0| > \sqrt{2}$ (сопряженные гиперболы). В случае $|z_0| = \sqrt{2}$ получаем две пересекающиеся прямые $x = \pm\sqrt{2}\left(y - \frac{z_0}{2}\right)$.

9) Сечения поверхности плоскостями $z = y + z_0$ имеют проекции на плоскость xOy, описываемые уравнениями $x^2 + 2\left(y + \frac{z_0}{2}\right)^2 = 1 + \frac{z_0^2}{2}$, т.е. эллипсы, у которых полуоси увеличиваются с увеличением $|z_0|$. Отношение полуосей этих эл-

липсов равно $\sqrt{2}$, а плоскости $z = y + z_0$ составляют угол 45° с плоскостью xOy, поэтому сами сечения имеют форму окружностей.Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 3). Этой поверхностью является однополостный гиперболоид, ось которого – прямая $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Методом сечений исследовать форму и построить поверхности, заданные уравнениями:1) $z = xy$;   2) $z^2 = xy$.

Форма отчетности: устный опрос. При отчете по теме занятия уметь определять вид поверхности 2-го порядка по виду канонического уравнения и строить поверхность методом параллельных сечений.

ЗАНЯТИЕ №10

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА, ГРАФИКИ

Литература: [12], с. 19-28, 89-96; [11], с. 137-139; [7], с. 19, 23-24, [16],с. 89-99.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции. Каковы способы ее задания?
2. Что такое график функции? Каковы способы построения графика функций?
3. Как представляется чаще всего функциональная зависимость величины в инженерных приложениях?

4. Какие функции называются четными, нечетными, периодическими? Каковы особенности их графиков?

5. Как строится график функции по методу "Деформации сдвига"?

6. В какой последовательности следует выполнять построение графика функции $y = k \cdot f\left(wx - a\right) + b$?

7. В каком соотношении находятся области определения и изменения взаимно обратных функций? Как строятся графики обратных функций?

8. Каковы области определения и изменения обратных тригонометрических функций? Каковы их графики?

9. Что называется абсолютной величиной (модулем) действительного числа?

10. Каковы особенности построения графиков функций, содержащих в своем задании знак модуля?

Пример решения задачи

Пример. Построить графики следующих функций:

а) $y = \log_2\left(x - 3\right)$; б) $y = \log_2\left(4x - 12\right)$;

в) $y = 2\log_2\left(x - 3\right)$; г) $y = \left|\log_2\left(x - 3\right)\right|$;

д) $y = \log_2\left|x - 3\right|$.

Решение.

а)График функции $y = \log_2\left(x - 3\right)$ получается из графика $y = \log_2 x$ сдвигом на три единицы вправо (рис. 4,а).

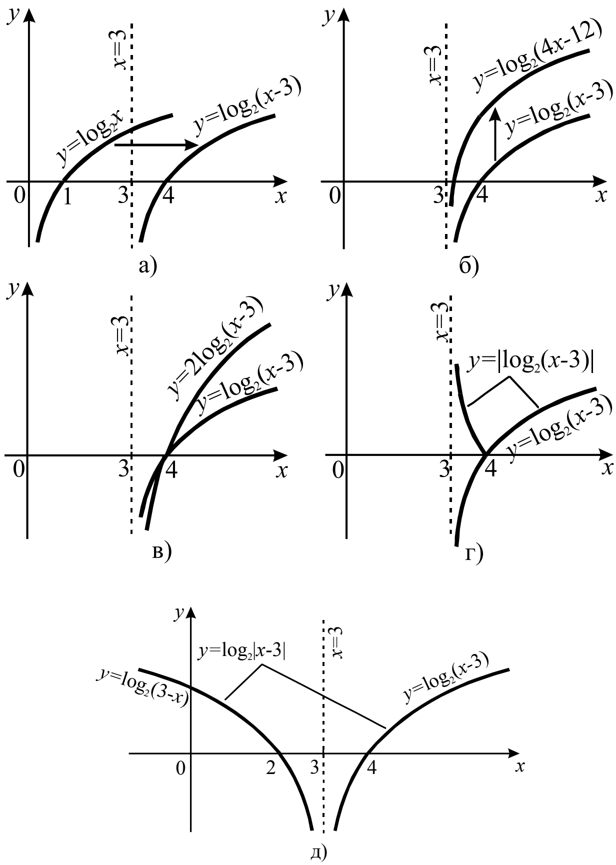


Рис. 4

б) График функции

$$\log_2(4x-12)=\log_2(4(x-3))=2+\log_2(x-3)$$

получается из предыдущего сжатием вдоль оси Ox в 4 раза относительно вертикальной прямой $x=3$ или сдвигом на две единицы вверх (рис. 4,б).

в) График функции $y=2\log_2(x-3)$ получается из графика $y=\log_2(x-3)$ растяжением вдоль оси Oy в два раза (рис. 4,в).

г) При построении графика функции $y=\left|\log_2(x-3)\right|$ участок кривой $y=\log_2(x-3)$, расположенный ниже оси Ox, отображается симметрично относительно этой оси (рис. 4,г).

д) График функции $y=\log_2|x-3|$ составляют две кривые: $y=\log_2(x-3)$ и симметричная ей относительно прямой $x=3$ кривая $y=\log_2(3-x)$ (рис. 4,д).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 1.106-1.111, 1.141-1.143, 1.146-1.151, 1.186, 1.188, 1.204, 1.209; [13], 47, 48, 54, 59, 77, 113, 117 (6,9,14,16), 129, 138, 145.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 11

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕЕИ ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.РАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Литература: [12], с. 39-42, с. 59-60, [16],с. 101-102.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение бесконечно малой функции.

2. Докажите следующие теоремы о бесконечно малых функциях:

– об алгебраической сумме двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых;

– о произведении бесконечно малой функции на ограниченную функцию;

– о частном от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля.

3. Какие бесконечно малые называются бесконечно малыми одного порядка?

4. Как определяется порядок одной бесконечно малой относительно другой?

5. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?

6. Как использовать эквивалентность бесконечно малых при вычислении пределов?

Примеры решения задач

Пример 1. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ и $\beta(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ при $x\to 0$.

Решение. Вычисляем предел отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\right)}=\left|\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\ :\ 1+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\frac{\sqrt[3]{x}}{3}}=\left|\sin\frac{x}{2}\ :\ \frac{x}{2}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^{4/3}/3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2/3}}{2}=0\,.$$

Из полученного следует, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка чем $\beta(x)$.

Пример 2. Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно x при $x\to 0$, если $\alpha(x)=\ln\left(1-\sqrt{\sqrt{x}+2}+\sqrt{2}\right)$.

Решение.При $x\to 0$ имеем

$$\ln\left(1-\sqrt{\sqrt{x}+2}+\sqrt{2}\right):\ -\left(\sqrt{\sqrt{x}+2}-\sqrt{2}\right)=\left|\begin{matrix}\textit{умножаем и делим}\\ \textit{на сопряженное}\\ \textit{выражение}\end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{\sqrt{x}+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{x}+2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}+2}+\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+2}+\sqrt{2}} \sim -\frac{x^{1/2}}{2\sqrt{2}}.$$

из полученного следует, что порядок малости $\alpha(x)$ относительно x при $x \to 0$ равен $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(4x-\pi)}{e^{2x-\frac{\pi}{2}}-1}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(4x-\pi)}{e^{2x-\frac{\pi}{2}}-1} = \left| \begin{matrix} \textit{делаем замену переменной} \\ y = x-\frac{\pi}{4}, \quad x = y+\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg}(4y)}{e^{2y}-1} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}(4y) \sim 4y \\ e^{2y}-1 \sim 2y \end{matrix} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{4y}{2y} = 2.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^x$, используя эквивалентные бесконечно малые.

Решение. Обозначаем $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^x = \left\{\infty^0\right\} = u$, а затем логарифмируем:

$$\ln u = \ln \lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0} \ln (\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0} x \ln \operatorname{ctg} x = \{0 \cdot \infty\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \ln \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \ln \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \left|\sin x \sim x\right| =$$

$$=\lim_{x\to 0} x\ln\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\left|\sqrt{1-x^2}\ :\ 1-\frac{x^2}{2}\right|=\lim_{x\to 0} x\ln\frac{1-\frac{x^2}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0} x\left(\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\ln x\right)=\left|\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right):\ -\frac{x^2}{2}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{x^2}{2}-\ln x\right)=-\lim_{x\to 0} x\ln x=\{0\cdot\infty\}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{применяем}\\ \textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0} x=0\,.$$

Таким образом $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x=e^0=1$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 210, 220, 245-251, 283-302, 344-348, 369-378, 396-401, 414.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 12

ПРОИЗВОДНАЯ.ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Литература: [12], с. 64-77, [16],с. 106-110.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение производной.
2. Каков физический смысл производной?
3. Что называется касательной к кривой?

4. В чем состоит геометрическое значение производной?

5. Докажите следующие теоремы:

– производная постоянной равна нулю;

– постоянный множитель можно выносить за знак производной;

– о производной суммы конечного числа дифференцируемых функций;

– о производной от произведения двух дифференцируемых функций;

– о производной частного от деления двух функций.

Примеры решения задач

В примерах 1-9 найти производную y' функции $y(x)$.

Пример 1. $y=\dfrac{0,1}{\sqrt[3]{x^2}}-5,2\sqrt{x}=0,1x^{-\frac{2}{3}}-5,2x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования суммы и дифференцирования степенной функции.

$$y'=\left(0,1x^{-\frac{2}{3}}-5,2x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(0,1x^{-\frac{2}{3}}\right)'-\left(5,2x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=0,1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}}-5,2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{15\sqrt[3]{x^5}}-\frac{2,6}{\sqrt{x}}.$$

Пример 2. $y=\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+x^3\right)$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования произведения, суммы и дифференцирования степенной функции.

$$y'=\left(\left(1+x^{1/2}\right)\left(1+x^3\right)\right)'=\left(1+x^{1/2}\right)'\left(1+x^3\right)+\left(1+x^{1/2}\right)\left(1+x^3\right)'=$$

$$=\left(1'+\left(x^{1/2}\right)'\right)\left(1+x^3\right)+\left(1+x^{1/2}\right)\left(1'+\left(x^3\right)'\right)=$$

$$=\left(0+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\left(1+x^3\right)+\left(1+x^{1/2}\right)\left(0+3x^2\right)=\frac{1+x^3}{2\sqrt{x}}+3x^2\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Пример 3. $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования частного, суммы и дифференцирования тригонометрических функций.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}.$$

Пример 4. $y=\dfrac{\arccos x}{x}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования частного и дифференцирования обратных тригонометрических функций.

$$y'=\frac{(\arccos x)'x-\arccos x(x)'}{x^2}=\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arccos x}{x^2}=$$

$$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arccos x}{x^2}.$$

Пример 5. $y=x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования произведения, обратных тригонометрических функций, сложной функции и степенной функции.

$$y' = \left(x \cdot \operatorname{arctg}(x-1)^{1/2}\right)' = x'\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + x\left(\operatorname{arctg}(x-1)^{1/2}\right)' =$$

$$= 1 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + x\frac{1}{1+\left((x-1)^{1/2}\right)^2}\left((x-1)^{1/2}\right)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{x}{1+(x-1)} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}(x-1)' =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \cdot 1 = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Пример 6. $y = 2^{\frac{\ln x}{x}}$.

Решение. Для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования показательной функции, сложной функции, частного и логарифмической функции.

$$y' = \left(2^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = 2^{\frac{\ln x}{x}} \ln 2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2^{\frac{\ln x}{x}} \ln 2 \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} =$$

$$= 2^{\frac{\ln x}{x}} \ln 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2^{\frac{\ln x}{x}} \ln 2 \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Пример 7. $y = (\operatorname{tg} x)^{8x}$.

Решение. Прологарифмируем данную функцию и получим

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{8x} = 8x \cdot \ln \operatorname{tg} x.$$

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства:

$$\left(\ln y\right)' = \left(8x \cdot \ln \operatorname{tg} x\right)'.$$

Применим к левой части правило дифференцирования сложной функции, а к правой – правила дифференцирования произведения, сложной функции, логарифмической функции и тригонометрических функций:

$$\frac{1}{y}y' = \left(8x\right)' \ln \operatorname{tg} x + 8x\left(\ln \operatorname{tg} x\right)' = 8\ln \operatorname{tg} x + 8x\frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\operatorname{tg} x\right)' =$$

$$= 8\ln \operatorname{tg} x + 8x \cdot \operatorname{ctg} x\frac{1}{\cos^2 x} = 8\ln \operatorname{tg} x + \frac{8x}{\sin x \cos x}.$$

В итоге, выражая производную из этого равенства, получаем

$$y' = \left(8\ln \operatorname{tg} x + \frac{8x}{\sin x \cos x}\right)y = \left(8\ln \operatorname{tg} x + \frac{16x}{\sin 2x}\right)\left(\operatorname{tg} x\right)^{8x}$$

Пример 8. $y = 5^{xy+1}$.

Решение. В данном примере функция $y = y\left(x\right)$ задана неявно. Дифференцируем обе части равенства по x, рассматривая y как функцию от x, а также применяя правила дифференцирования показательной функции, сложной функции и произведения:

$$y' = \left(5^{xy+1}\right)' = 5^{xy+1}\ln 5\left(xy+1\right)' = 5^{xy+1}\ln 5\left(y + xy'\right).$$

Выражаем производную y' из этого равенства:

$$y' - xy'5^{xy+1}\ln 5 = y5^{xy+1}\ln 5, \qquad y' = \frac{y5^{xy+1}\ln 5}{1 - x5^{xy+1}\ln 5}.$$

Пример 9. $\begin{cases} x = t\sin t^2 \\ y = 1 + t \end{cases}$.

Решение. Данная функция задана параметрически, поэтому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1+t)'}{\left(t\sin t^2\right)'} = \frac{(1)' + (t)'}{(t)'\sin t^2 + t\left(\sin t^2\right)'} = \frac{1}{\sin t^2 + t\cos t^2\left(t^2\right)'} =$$

$$= \frac{1}{\sin t^2 + t\cos t^2\,(2t)} = \frac{1}{\sin t^2 + 2t^2\cos t^2}.$$

Пример 10. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y^2 = 4x$ в точке $M(1,\ 2)$.

Решение. Запишем уравнения касательной и нормали:

$$y_к = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

$$y_н = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

В данном примере координаты точки $x_0 = 1$ и $y_0 = 2$. Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $\left(y^2\right)' = (4x)'$, т.е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \frac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = \frac{2}{y_0} = \frac{2}{2} = 1$. Отсюда получаем уравнение касательной в точке M

$$y_к = 2 + (x - 1), \quad \text{т.е.} \quad y_к = x + 1$$

и уравнение нормали в точке M

$$y_н = 2 - (x - 1), \quad \text{т.е.} \quad y_н = -x + 3.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 466-468, 492-497, 539-546, 547, 659-572, 593-596, 631-640, 662, 754.

Форма отчета: конспект, устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 13

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Литература: [12], с. 144-154.16],с. 41-45, [16], с. 117-132.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется возрастающей и убывающей?

2. Как применяется производная для исследования функции на возрастание и убывание (докажите теорему)?

3. Дайте определение максимума и минимума функции в точке.

4. Сформулируйте и докажите необходимое условие существования экстремума.

5. Каковы достаточные условия существования экстремума функции в точке?

6. Какова схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной.

Примеры решения задач

Пример 1. Провести исследование и построить график функции $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$.

Решение.

1. Область определения функции находим из условия $x^2-x-2\neq 0$. Решая квадратное уравнение $x^2-x-2=0$, находим значения корней $x_1=-1$, $x_2=2$. Таким образом

$$x\in(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,2)\cup(2,\,+\infty).$$

2. Находим точки пересечения с осями координат:

$$y(0)=-\frac{1}{2};\qquad y(x)=0 \text{ при } x=\frac{1}{2}.$$

3. Очевидно, что данная функция не является периодической, так как не содержит элементарных периодических функций. Для проверки функции на четность или нечетность находим

$$y(-x)=\frac{1-2(-x)}{(-x)^2-(-x)-2}=\frac{1+2x}{x^2+x-2}.$$

Полученное выражение не равно ни $y(x)$ ни $-y(x)$, поэтому данная функция не является ни четной ни нечетной.

4. Исследуем точки разрыва функции.

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1-0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot(-1)}{-0\cdot(-3)}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1+0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot(-1)}{+0\cdot(-3)}=\frac{3}{-0}=-\infty.$$

Так как пределы бесконечные, то $x=-1$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot 2}{3\cdot(-0)}=\frac{-3}{-0}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{1-2x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1-2\cdot 2}{3\cdot(+0)}=\frac{-3}{+0}=-\infty$$

.

Так как пределы бесконечные, то $x=2$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

5. Проверяем наличие у функции наклонных асимптот, имеющих уравнение $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{x\left(x^2-x-2\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Таким образом, функция имеет горизонтальную асимптоту $y=0$, совпадающую с осью Ox.

6. Исследуем функцию на экстремум и участки монотонности, для чего находим ее производную

$$y'=\left(\frac{1-2x}{x^2-x-2}\right)'=\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}=\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)^2(x-2)^2}.$$

Производная не существует при $x=-1$ и $x=2$. Производная не равна нулю, так как квадратное уравнение $2x^2-2x+5=0$ имеет отрицательный дискриминант. Результаты исследований первой производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty,\ -1)$		-1 $(-1,\ 2)$		2 $(2,\ \infty)$
y'	$+$		$\varnothing$ $+$		$\varnothing$ $+$

Из таблицы видно, что данная функция не имеет точек экстремума, так как производная всегда положительна.

7. Исследуем функцию на точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости, для чего находим ее вторую производную

$$y'' = \left(\frac{1-2x}{x^2 - x - 2} \right)'' = \left(\frac{2x^2 - 2x + 5}{\left(x^2 - x - 2\right)^2} \right)' =$$

$$= \frac{-4x^3 + 6x^2 - 30x + 14}{\left(x^2 - x - 2\right)^3} = \frac{-4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x + 7\right)}{(x+1)^3 (x-2)^3}.$$

Вторая производная не существует при $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Но в этих точках функция не определена, поэтому они не могут являться точками перегиба. Для нахождения других критических точек приравниваем вторую производную нулю и получаем $x_3 = \frac{1}{2}$. Результаты исследований второй производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty, -1)$		-1 $\frac{1}{2}$ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$		$\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 2		$(2, +\infty)$
y//	+		_ $\varnothing$		0 +		$\varnothing$ –
y	вогнутая		$\varnothing$ выпуклая		0 вогнутая		$\varnothing$ выпуклая

Из таблицы видно, что при $x = \frac{1}{2}$ вторая производная равна нулю и меняет знак, следовательно, эта точка является точкой перегиба графика функции.

8. По результатам всех исследований выполняем построение графика данной функции (рис. 5).

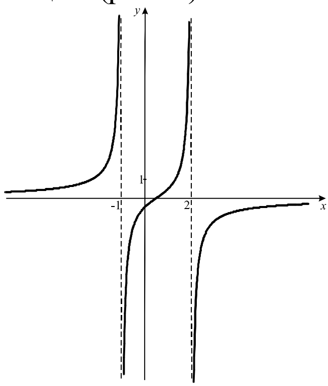


Рис. 5

Пример 2. Провести исследование и построить график функции $y=(x+4)e^{2x}$.

Решение

1. Областью определения функции является вся числовая ось. Таким образом $x\in(-\infty, +\infty)$.

2. Находим точки пересечения с осями координат:

$y(0)=4$; $y(x)=0$ при $x=-4$.3. Очевидно, что данная функция не является периодической, так как не содержит элементарных периодических функций. Для проверки функции на четность или нечетность находим

$$y(-x)=(-x+4)e^{-2x}.$$

Полученное выражение не равно ни $y(x)$ ни $-y(x)$, поэтому данная функция не является ни четной ни нечетной.

4. Данная функция определена всюду, поэтому точек разрыва нет и вертикальных асимптот тоже нет.

5. Проверяем наличие у функции наклонных асимптот, имеющих уравнение $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+4)e^{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)e^{2x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty.$$

Следовательно, правой асимптоты у функции нет.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+4)e^{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)e^{2x}}{1}=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+4)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{e^{-2x}}=0.$$

Таким образом, при $x\to-\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту $y=0$, совпадающую с осью Ox.

6. Исследуем функцию на экстремум и участки монотонности, для чего находим ее производную

$$y'=\left((x+4)e^{2x}\right)'=e^{2x}+(x+4)e^{2x}2=e^{2x}(2x+9).$$

Производная определена при любом значении x и равна нулю при $x=-4,5$. Результаты исследований первой производной помещаем в таблицу

x	$(-\infty;\,-4,5)$	$-4,5$	$(-4,5;\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$

Из таблицы видно, что функция при $x=-4,5$ имеет точку минимума, так как производная в этой точке равна нулю и меняет знак.

7. Исследуем функцию на точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости, для чего находим ее вторую производную

$$y'' = \left(\left(2x+9\right)e^{2x}\right)' = 2e^{2x} + \left(2x+9\right)e^{2x}2 = e^{2x}\left(4x+20\right).$$

Вторая производная определена при любом значении x и равна нулю при $x=-5$. Результаты исследований второй производной помещаем в таблицу

x	$\left(-\infty, -5\right)$	-5	$\left(-5, \infty\right)$
y''	$-$	0	$+$
y	выпуклая	$-e^{-10}$	вогнутая

Из таблицы видно, что при $x=-5$ вторая производная равна нулю и меняет знак, следовательно, эта точка является точкой перегиба графика функции.По результатам всех исследований выполняем построение графика данной функции (рис. 6).

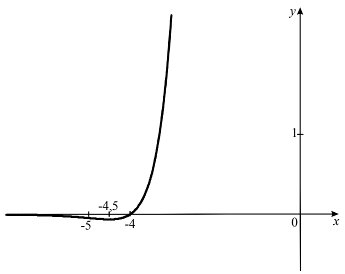


Рис. 6

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 1399-1414, 1437, 1462-1464, 1465-1469, 1472-1477.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 14

ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА. КРИВИЗНА КРИВОЙ

Литература: [12], с. 195-211, 305-313; [7], с. 237-247; [16],с. 41-45.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение вектор-функции скалярного аргумента. Где, в каких теоретических и практических приложениях используется эта функция?

2. Что такое годограф вектор-функции? Как найти его для конкретно заданной функции?

3. Что такое и как находится производная вектор-функции?

4. Как находится предел вектор-функции?

5. Как найти касательную к пространственной кривой? Как написать уравнение нормальной плоскости?

6. Что называется кривизной плоской и пространственной кривой в данной точке?

7. Что такое радиус кривизны? Как он находятся?

8. Что такое эволюта и эвольвента кривой? Как они находятся?

9. Что такое кручение пространственной кривой в заданной точке?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти траекторию точки, движущейся по закону $\overline{r}(t) = 2\sin t\,\overline{i} + 3\cos t\,\overline{j}$.

Решение. Параметрические уравнения траектории

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = 3\cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

поэтому траекторией движения является эллипс с полуосями 2 и 3 и центром в начале координат, направление движения показано стрелкой (рис. 7).

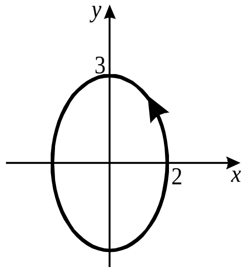


Рис. 7

Пример 2. Дано уравнение движения материальной точки $\overline{r} = (\operatorname{sh} t - 1)\overline{i} + \operatorname{ch}^2 t\, \overline{j} + 3\overline{k}$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения точки. Построить векторы скорости и ускорения для момента времени $t = 0$.

Решение. Параметрические уравнения траектории

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sh} t - 1, \\ y(t) = \operatorname{ch}^2 t, \\ z(t) = 3. \end{cases}$$

Воспользовавшись основным тождеством для гиперболических функций, исключаем параметр t и получаем

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = y - (x+1)^2 = 1.$$

Таким образом, траекторией движения точки является парабола $y = (x+1)^2 + 1$, лежащая в плоскости $z = 3$ (рис. 8). Для того, чтобы определить направление движения точки по траектории, вычислим пределы

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \lim_{t \to \pm\infty} (\operatorname{sh} t - 1) = \pm\infty,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{ch}^2 t = +\infty .$$

Полученное направление движения показано на рис. 8 стрелкой. Далее определяем вектор скорости

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t) = \mathrm{ch}t\,\bar{i} + \mathrm{sh}2t\,\bar{j}$$

и вектор ускорения

$$\bar{w}(t) = \bar{r}''(t) = x''(t)\bar{i} + y''(t)\bar{j} + z''(t)\bar{k} = \mathrm{sh}t\,\bar{i} + 2\mathrm{ch}2t\,\bar{j} .$$

Из записанных выражений получаем значения векторов скорости $\bar{v}_{|t=0} = \bar{i}$ и ускорения $\bar{w}_{|t=0} = 2\bar{j}$ в точке с координатами $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$. Эти векторы изображены на рис. 8.

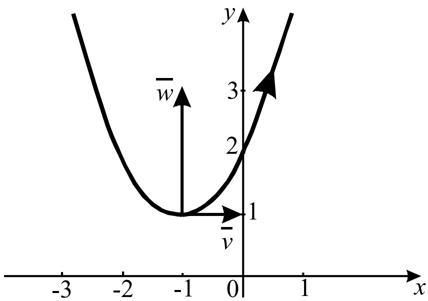


Рис. 8

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [7], 5.533, 5.537, 5.549, 5.550, 5.558-5.561, 5.563, 5.564, 5.566, 5.570, 5.581, 5.583; [13], 1529, 1337, 1544, 1554, 1556, 1572.

Форма отчетности: устный опрос, домашняя контрольная работа с последующим отчетом по ней.

ЗАНЯТИЕ № 15

КОРНИ МНОГОЧЛЕНА.ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИНА МНОЖИТЕЛИ

Литература: [12], с. 230-235, [16],с. 77-84.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое многочлен степени n?
2. Что называется корнем многочлена?
3. Как читается и доказывается теорема Безу?
4. Сформулируйте основную теорему алгебры.
5. Как раскладываются на множители многочлены n-ой степени (приведенные, не приведенные)?
6. Какие многочлены называются равными?
7. Что такое кратность корня многочлена? Как выглядит разложение многочлена на множители при наличии кратных корней?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Решение. Подставляя делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$ в уравнение, получаем, что его корнями являются числа: 1, -2, -3. Следовательно, уравнение можно записать в виде $(x-1)(x+2)(x+3)=0$.

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$Q_5(x) = 3x^5 - 6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 24.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что один из делителей свободного члена ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24 является корнем многочлена – $x_1 = 2$. Выполняем деление $Q_5(x)$ на $x-2$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5-6x^4-9x^3+18x^2-12x+24 & x-2 \\
\hline
\underline{3x^5-6x^4} & 3x^4-9x^2-12 \\
\quad -9x^3+18x^2-12x+24 & \\
\quad \underline{-9x^3+18x^2} & \\
\qquad -12x+24 & \\
\qquad \underline{-12x+24} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

и получаем $\dfrac{Q_5(x)}{x-2} = 3x^4 - 9x^2 - 12$. Приравниваем это выражение к нулю. Решения полученного биквадратного уравнения имеют вид: $x_{2,3}^2 = 4$, $x_{4,5}^2 = -1$. Отсюда $x_2 = +2$, $x_3 = -2$, $x_4 = +i$, $x_5 = -i$. Итак, многочлен $Q_5(x)$ имеет действительный корень $x = 2$, кратность которого равна 2, действительный простой корень $x = -2$ и два простых взаимно-сопряженных комплексных корня $x = \pm i$. Таким образом, разложение на множители данного многочлена будет иметь следующий вид:

$$
Q_5(x) = 3x^5 - 6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 24 =
$$
$$
= 3(x-2)^2(x+2)\left(x^2+1\right).
$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи**:** [7], 1.512, 1.514, 1.518, 1.523, 1.525.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 16

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БИНОМОВ. ПОДСТАНОВКИ ЧЕБЫШЕВА. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Литература: [12], с. 361-364, 369-370, [20], с. 138.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое выражение называется дифференциальным биномом?

2. В каких случаях интеграл от дифференциального бинома выражается через элементарные функции (является берущимся)?

3. С помощью каких подстановок интегрируются такие дифференциальные биномы?

4. Приведите пример интеграла от дифференциального бинома, не выражающегося через элементарные функции.

5. Какие интегралы берутся с помощью подстановок Эйлера?

6. Какова первая подстановка Эйлера и когда она применяется?

7. Какова вторая подстановка Эйлера и когда она применяется?

8. Какова третья подстановка Эйлера и когда она применяется?

9. Каким еще методом берутся те же интегралы, в которых применяются подстановки Эйлера?

10. Как и какие тригонометрические подстановки используются для вычисления интегралов?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\;dx$.

Решение. Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\;dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} dx .$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином, при этом $m=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$, $p=\dfrac{1}{3}$. Так как p - не целое число, то данный интеграл не относится к первому случаю. $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}}=2$ - целое число, поэтому данный интеграл относится ко второму случаю и соответствующая подстановка: $1+3x^{\frac{2}{3}}=t^3$. Выражаем отсюда $x=\left(\dfrac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ и находим $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt$. Таким образом,

$$\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\;dx = \int \frac{\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}\,t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^3-1\right)t^3dt=\frac{1}{2}\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{возвращаемся}\\ \textit{к исходной}\\ \textit{переменной}\end{array}\right|=\frac{1}{14}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^3}\right)^4}+C .$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} dx .$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином, при этом $m=-11$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$. Так как p - не целое число, то данный интеграл не относится к первому случаю. $\frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=-\frac{5}{2}$ - не целое число, значит данный интеграл не относится ко второму случаю. $\frac{m+1}{n}+p=-3$ - целое число, поэтому данный интеграл относится к третьему случаю и соответствующая подстановка: $\frac{1+x^4}{x^4}=x^{-4}+1=t^2$. Выражаем отсюда $x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}$ и находим $dx=-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}} t\,dt$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int \left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{5}{4}} t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(t^2-1\right)^2 dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены } t=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{10}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+C\,.$$

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Это интеграл вида $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. В нашем случае $a=1>0$, поэтому применим первую подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2+x+1=x^2+2xt+t^2$. Выражаем отсюда $x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}$ и находим $dx=-2\dfrac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt$. Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=-2\int\frac{\left(t^2-t+1\right)dt}{\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+1\right)\left(\dfrac{t^2-1}{1-2t}+t\right)(1-2t)^2}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-2t}=2\int\frac{dt}{t^2-2t+1-1}=2\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2-1}=\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|+C=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены } t=\sqrt{x^2+x+1}-x\end{array}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+C\,.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Решение. Это интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. В нашем случае квадратный трехчлен $2+x-x^2$ имеет действительные корни $x_1=-1$ и $x_2=2$, поэтому применим третью подстановку Эйлера: $\sqrt{2+x-x^2}=(x+1)t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $-(x+1)(x-2)=(x+1)^2t^2$. Выражаем отсюда $x=\frac{2-t^2}{t^2+1}$ и находим $dx=\frac{-6t}{\left(t^2+1\right)^2}dt$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=-6\int \frac{t\,dt}{\frac{2-t^2}{t^2+1}\left(\frac{2-t^2}{t^2+1}+1\right)t\left(t^2+1\right)^2}=2\int \frac{dt}{t^2-2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\left|\begin{matrix}\textit{возвращаемся к исходной переменной}\\ \textit{с помощью обратной замены}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x+1}-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2+x-x^2}}{x+1}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [13], 2076, 2078, 2080;

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЯ № 17

НЕСОБСТВЕННЫЕ МНТЕГРАЛЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Литература: [12], с. 429-448, [20], с. 141-146.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляются несобственные интегралы 1 рода (с бесконечными пределами) ?
2. Сформулируйте признаки сходимости несобственныхинтегралов 1 рода ?
3. Как вычисляются несобственные интегралы 2 рода (от неограниченной функции) ?
4. Сформулируйте признаки сходимости несобственныхинтегралов 2 рода.

5. Как вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры в случае задания ее границы в явном виде, в полярных координатах, параметрическими уравнениями?

6. Вычислите с помощью определенного интеграла длину дуги кривой в случае задания ее уравнением в явном виде, параметрическом виде, в полярных координатах?

7. Как вычислить объем тела по площадям поперечных сечений; объем тела вращения вокруг оси Ox, оси Oy?

8. Как вычислить поверхность тела вращения?

9. Как найти величину работы с помощью определенного интеграла?

10. Найдите координаты центра тяжести плоской линии, плоской фигуры?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

Решение. Это несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом. Так как подынтегральная дробь разлагается на простейшие дроби вида

$$\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),\text{ то}$$

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2-x+2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^b\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\bigg|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}|\ln\frac{b-1}{b+2}-\ln\frac{1}{4}|=\frac{2}{3}\ln 2.$$

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_2^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Воспользуемся признаком сходимости для несобственных интегралов 1-го рода в виде неравенства. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}>\frac{1}{x}$, при $x>2$. Вычислим $\int_2^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_2^\infty=\infty$ - расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. При $x\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}:\ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Так как $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$

Решение. Здесь подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$.Это несобственный интеграл от неограниченной функции (2-го рода). По определению

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon}-1) + \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\delta}-1) = \infty.$$

Значит данный интеграл расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет разрыв при $x=1$. воспользуемся признаком сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для сравнения возьмем функцию $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Очевидно, что $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$,

при $x \in [0,1]$. Найдем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\,.$$

Так как $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то сходится и $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.;

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases} \quad x = -1 \ (x \le -1).$$

Решение. Изобразим данные линии и заштрихуем искомую площадь (рис. 9). Найдем значения параметра t, соответствующие точкам пересечения данных кривых. Для этого решаем уравнение $8\cos^3 t = -1$ или $\cos t = -1/2$ и получаем $t_1 = 2\pi/3$ (соответствует точке *B*) и $t_2 = 4\pi/3$ (соответствует точке *C*).

Точке Aсоответствует значение параметра$t_0 = \pi$ так как $x(t_0) = -8$ и $y(t_0) = 0$.

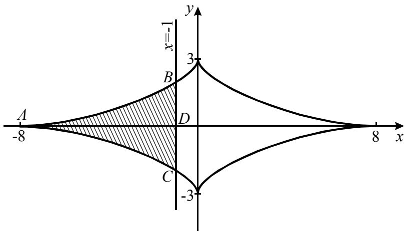


Рис. 9

Площадь фигуры ABC находим как удвоенную площадь верхней половины ABD, интегрируя при этом в направлении возрастания x от точки A до точки B:

$$S_{ABC} = 2\int_{\pi}^{2\pi/3} 3\sin^3 t\left(-8\cdot 3\cos^2 t\cdot \sin t\right)dt = 144\int_{2\pi/3}^{\pi} \sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= 18\int_{2\pi/3}^{\pi} (1-\cos 2t)^2 (1+\cos 2t)dt =$$

$$18\int_{2\pi/3}^{\pi} \left(1-\cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t\right)dt = 18\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi} -$$

$$-9\int_{2\pi/3}^{\pi} (1+\cos 4t)dt + 9\int_{2\pi/3}^{\pi} \left(1-\sin^2 2t\right)d\sin 2t =$$

$$= 18\left(\pi - \frac{2\pi}{3} - 0 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 9\left(t + \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi} + 9\left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi} =$$

$$= 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} - 9\left(\pi - \frac{2\pi}{3} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 3\pi .$$

Пример 7. Найти площадь фигуры, лежащей вне окружности $r = 1$ и ограниченной кривой $r = 2\cos 2\varphi$.

Решение. Так как функция $r = 2\cos 2\varphi$ имеет период $T = \pi$, то при изменении φ от 0 до 2π радиус-вектор описывает два равных лепестка кривой.При этом допустимыми для φ являются те значения, при которых $\cos 2\varphi \ge 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \ \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

Следовательно, один из лепестков описывается при изменении φ от $-\pi/4$ до $\pi/4$. Второй лепесток получается при изменении φ от $3\pi/4$ до $5\pi/4$ (рис. 10). Вырезая из лепестков части, принадлежащие кругу $r \le 1$, мы получим фигуру, площадь которой нужно определить. Ясно, что искомая площадь $S = 4S_{ABC}$. В свою очередь $S_{ABC} = S_{OAB} - S_{OAC}$. Точкам B и C соответствует значение полярного угла $\varphi_1 = 0$. Найдем полярные координаты точки A пересечения данных кривых. Для этого решим уравнение $2\cos 2\varphi = 1$ т.е. $\cos 2\varphi = 1/2$. Между 0 и $\pi/4$ находится только корень $\pi/6$. Таким образом, точке A соответствует полярный угол $\varphi_2 = \pi/6$.

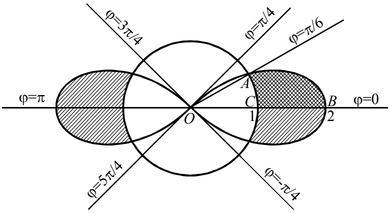


Рис. 10

Далее определяем искомую площадь:

$$S = 4S_{ABC} = 4\left(S_{OAB} - S_{OAC}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 4\cos^2 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 1^2 d\varphi\right) =$$

$$= 4\int_0^{\pi/6}\left(1 + \cos 4\varphi\right) d\varphi - 2\varphi\Big|_0^{\pi/6} = 4\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = \sin\varphi$ и $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$.

Решение. Так как $\sin\varphi \ge 0$ при $0 \le \varphi \le \pi$, то первая кривая лежит в верхней полуплоскости и проходит через полюс $r = 0$. Чтобы построить ее перейдем в декартовые координаты, пользуясь соотношениями $r^2 = x^2 + y^2$ и $\sin\varphi = y/r$. Получаем $x^2 + y^2 = y$. Приведя это уравнение к каноническому виду, будем иметь $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. Это уравнение окружности с центром $(0,\ 1/2)$ и радиусом равным $1/2$ (рис. 2). Вторая кривая определена при $\sin(\varphi - \pi/4) \ge 0$ т.е. при $\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$ и также проходит через полюс $r = 0$. Преобразуем уравнение второй кривой

$$r = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right) = \sin\varphi - \cos\varphi$$

и перейдем в декартовые координаты

$$r = \sin\varphi - \cos\varphi = y/r - x/r \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = y - x.$$

Приведем полученное уравнение к каноническому виду: $(x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2$. Видно, что это уравнение окружности с центром $(-1/2,\ 1/2)$ и радиусом равным $1/\sqrt{2}$ (рис. 11).

Из вышесказанного следует, что полюс есть точка пересечения окружностей. Другая точка пересечения окружностей находится из решения уравнения $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)$ или $\sin\varphi = \sin\varphi - \cos\varphi$, откуда $\varphi = \pi/2$. Из рис.11 видно, что искомая площадь S равна сумме площадей сегментов S_1 и S_2, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/2$. Дуга первого сегмента описывается концом полярного радиуса второй окружности при $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$, поэтому его площадь

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1 - \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\sin(2\varphi-\pi/2)}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\cdot$$

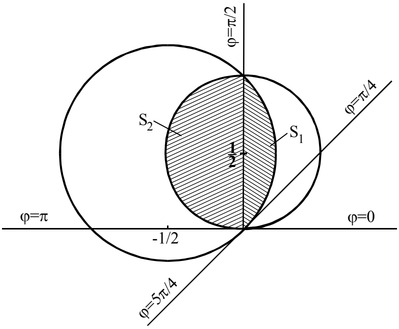


Рис. 11

Дуга второго сегмента описывается концом полярного радиуса первой окружности при $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, поэтому его площадь

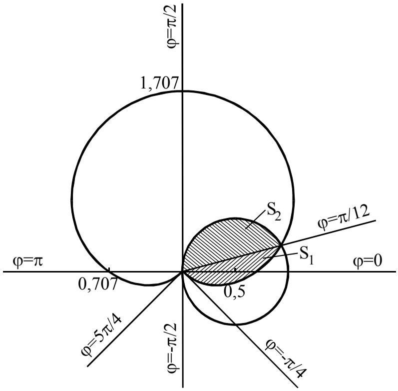
$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Таким образом, искомая площадь $S=S_1+S_2=\dfrac{\pi-1}{4}$.

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=\cos\varphi$ и $r=1/\sqrt{2}+\sin\varphi$.

Решение. Определим область, в которой расположена первая кривая. Для этого решим неравенство $\cos\varphi \ge 0$. Получаем $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Так как $\cos\varphi = x/r$, то в декартовых координатах уравнение первой кривой запишется следующим образом $x^2+y^2=x$ или в каноническом виде $(x-1/2)^2 + + y^2 = 1/4$ – это уравнение окружности с центром $(1/2,\ 0)$ и радиусом равным $1/2$. Окружность расположена в правой полуплоскости и



проходит через полюс $r = 0$ (рис. 12).

Рис. 12

Для построения второй кривой решаем неравенство $1/\sqrt{2} + \sin\varphi \geq 0$. Получаем $-\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$. Видно, что при граничных значениях полярного угла $r = 0$, а при $\varphi = \pi/2$ достигает максимального значения $r = 1/\sqrt{2} + 1 \approx 1{,}707$ (рис. 12).

Из вышеизложенного следует, что одной точкой пересечения данных кривых является полюс. Найдем остальные точки пересечения кривых. Для этого решим систему

$$\begin{cases} r = \cos\varphi, \\ r = 1/\sqrt{2} + \sin\varphi, \end{cases} \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Здесь указан диапазон углов, общих для обеих кривых. Приравнивая правые части уравнений, получаем

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 1/\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = 1/\sqrt{2},$$

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{12}.$$

Из рис. 12 видно, что искомая площадь равна сумме площадей S_1 и S_2 двух сегментов, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/12$. Дуга первого сегмента описывается концом полярного радиуса $r = 1/\sqrt{2} + \sin\varphi$ при изменении полярного угла φ от $-\pi/4$ до $\pi/12$, поэтому

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}\left(1/\sqrt{2} + \sin\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\sin\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2} - \sqrt{2}\cos\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/12} + \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/12}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + 1\right) + \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/12} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{16} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}}\,.$$

Дуга второго сегмента описывается концом полярного радиуса $r = \cos\varphi$ при изменении полярного угла φ от $\pi/12$ до $\pi/2$, поэтому

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/12}^{\pi/2}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/12}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{48} - \frac{1}{16}\,.$$

Таким образом, искомая площадь равна

$$S = S_1 + S_2 = \frac{13\pi}{48} + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{8}}\,.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [19], 6.456, 6.470, 6.478, 6.480, 6.485, 6.494, 6.502, 6.509, 6.512, 6.521, 6.534, 6.535, 6.537, 6.562, 6.575.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ № 18

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ.ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Литература: [12], с. 272-276; [13], с. 434-437;[20], с. 172-174, с. 183-189.

Контрольные вопросы и задания

1. Как находить производные неявных функций (случай функции одной переменной) ?

2. Как находить произволные неявных функций (случай функции нескольки переменных) ?

1. Дать определение касательной и нормали к поверхности и вычислить их уравнения.

4. Какова постановка задачи на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных?

5. Каковы необходимые условия условного экстремума? Докажите их.

6. В чем состоит метод множителей Лагранжа? Что такое функция Лагранжа?

7. Каковы достаточные условия условного экстремума?

8. Как по знаку второго дифференциала вспомогательной функции определить характер условного экстремума?

9. Как найти наибольшее или наименьшее значение функции нескольких переменных в замкнутой области?

10. Какие точки функции называются стационарными?

11. Как исследуются функции на границе области?

12. Как задача на нахождение наибольшего, наименьшего значения в замкнутой области связана с задачей на условный экстремум?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=-10xy^2+x^2+10x+1$ на отрезке AB, если координаты точек $A(-7,0)$, $B(0,2)$.

Решение. Уравнение прямой AB в отрезках $\frac{x}{-7}+\frac{y}{2}=1$. Таким образом, получаем задачу на условный экстремум: найти экстремум функции $z=-10xy^2+x^2+10x+1$ при условии $\frac{x}{-7}+\frac{y}{2}=1$. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=-10xy^2+x^2+10x+1+\lambda\left(-\frac{x}{7}+\frac{y}{2}-1\right).$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=-10y^2+x+10-\dfrac{\lambda}{7}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-20xy+\dfrac{\lambda}{2}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{2}-1=0 \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 7, второе на 2 и сложим их. Этим исключим параметр λ из системы:

$$\begin{cases} -70y^2 - 40xy + 14x + 70 = 0 \\ x = \dfrac{7y}{2} - 7 \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой приходим к уравнению, которое после сокращений имеет вид $30y^2 - 47y + 4 = 0$. Отсюда находим $y_1 = 1{,}5$, $y_2 = 0{,}1$ и из системы получаем точки $M_1(-1{,}75; 1{,}5)$, $M_2(-6{,}65; 0{,}1)$, принадлежащие отрезку AB. Вычисляем значения функции в стационарных точках

$$z(M_1) = z(-1{,}75; 1{,}5) \approx -25{,}9,$$

$$z(M_2) = z(-6{,}65; 0{,}1) \approx -22{,}9$$

и на концах отрезка

$$z(A) = z(-7; 0) = 20, \qquad z(B) = z(0; 2) = 1.$$

Сравнивая все полученные величины, приходим к выводу: наибольшее значение функции на отрезке достигается в точке A, а наименьшее в точке M_1.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = x^2/2$ при $x \geq 0$ (рис. 13).

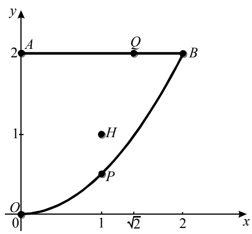


Рис. 13

Решение.

1) Находим стационарные точки функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y.$$

Решив систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$,

получим две стационарные точки $O(0{,}0)$ и $H(1{,}1)$. Первая из них принадлежит границе области. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке $H(1{,}1)$. Найдем $z(H) = z(1;1) = -1$.

2) Исследуем функцию на границе области

а) на отрезке OA имеем $x = 0$, поэтому $z = 3y^2$ $(0 \le y \le 2)$ - возрастающая функция одной переменой y; наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA. Найдем $z(O) = z(0;0) = 0$; $\quad z(A) = z(0;2) = 12$;

б) на отрезке AB имеем $y = 2$, следовательно,

$z = 2x^3 - 12x + 12$ $(0 \le x \le 2)$ представляет функцию одной переменной x; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Решая уравнение $z' = 6x^2 - 12 = 0$, находим $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $0 \le x \le 2$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка AB является точка $Q(\sqrt{2}; 2)$. Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z на отрезке AB находятся среди ее значений в точках A, Q и B.

Найдем $z(Q) = z(\sqrt{2}; 2) = 12 - 8\sqrt{2}$; $\quad z(B) = z(2;2) = 4$;

в) на дуге OB параболы $y = x^2/2$ имеем $z = \frac{3}{4}x^4 - x^3$ $(0 \le x \le 2)$. Решая уравнение $z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$, получим $x_1=0$ и $x_2=1$; соответствующими точками параболы являются точки $O(0,0)$ и $P(1;1/2)$. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции z на дуге OB находятся среди ее значений в точках O, P и B. Найдем $z(P)=z(1;1/2)=-1/4$.

3) Сравнивая значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в точках H, O, A, Q, B и P, получим решение задачи

$$z_{\text{наиб}}=z(A)=12, \qquad z_{\text{наим}}=z(H)=-1.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [6], 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.35, 3.36, 3.37, 3.38.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 19

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

Литература: [12], с. 25-30; [13], с. 113-114;
[20], с. 190-192; [33], с. 7-11.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются однородными?
2. Как решаются такие уравнения?
3. Укажите вид уравнений, приводящихся к однородным.
4. Какие два случая различают при решении таких уравнений? Каков алгоритм решения в каждом из этих случаев?

Пример решения задачи

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(y+2)dx-(2x+y+6)dy=0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду $y'=\dfrac{y+2}{2x+y+6}$. Это уравнение можно привести к однородному. Сделаем подстановку $x=u+x_0$, $y=v+y_0$. Подберем x_0 и y_0 так, чтобы $\begin{cases} y_0+2=0 \\ 2x_0+y_0+6=0 \end{cases}$. Решая систему, находим $x_0=-2$, $y_0=-2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{v}{2u+v}$, т.е. является однородным. Совершая подстановку $v=ut(u)$, получим $t+u\dfrac{dt}{du}=\dfrac{ut}{2u+ut}$. Далее, разделив переменные, получим уравнение $\dfrac{t+2}{t(t+1)}dt=-\dfrac{du}{u}$, проинтегрировав которое будем иметь $\dfrac{t^2}{t+1}=\dfrac{C}{u}$. Учитывая, что $t=\dfrac{v}{u}=\dfrac{y+2}{x+2}$ записываем общий интеграл исходного дифференциального уравнения $\dfrac{(y+2)^2}{x+y+4}=C$.

Разберите также решения примеров № 552, 553 [3].

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$; 2) $(x+y-2)dx-(3x-y-2)dy=0$;

3) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$; 4) $y'=\dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

5) Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью Ox равен отрезку, отсекаемому касательной от оси Ox.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 20

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Литература: [12], с. 30-35; [20], с. 192-194; [33], с. 11.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения первого порядка называются линейными?
2. Какими методами решаются линейные дифференциальные уравнения?
3. В чем состоит метод Бернулли?
4. В чем состоит метод Лагранжа?
5. Какой вид имеет уравнение Бернулли?
6. Приведение уравнения Бернулли к линейным уравнениям?
7. Можно ли решать уравнение Бернулли, не приводя его к линейному виду?

Пример решения задачи

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}\ .$$

Решение. Это уравнение Бернулли с $n = 1/2$. Полагаем $y(x) = u(x)v(x)$. Получаем уравнение $u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$ или $u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv}$. Подберем такую функцию $v(x)$, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим дифференциальное уравнение $v' - \frac{4}{x} v = 0$. Находим $v = x^4$. Решаем затем уравнение $u' x^4 = x\sqrt{u x^4}$ и получаем его общее решение $u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|$. Следовательно, общее решение исходного уравнения $y = uv = \frac{1}{4}x^4 \ln^2|Cx|$. Нетрудно заметить, что $y = 0$ является особым решение исходного уравнения.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4038, 4039, 4041, 4043, 4044 [17].

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 21

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ (КЛЕРО, ЛАГРАНЖА)

Литература: [12], с. 47-50; [33].

.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения называются уравнениями Клеро?
2. Какая вспомогательная замена вводится при решении уравнений Клеро?
3. Что такое особое решение уравнения Клеро и каким свойством оно обладает?
4. Каков общий вид уравнений Лагранжа?
5. Какой вид уравнений более общий Клеро или Лагранжа?
6. Какой заменой решается уравнение Лагранжа?

7. Что такое особое решение уравнения Лагранжа?
8. Как ищется общее решение уравнения Лагранжа?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение $y = xy' - (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.2), т.е. это уравнение Клеро. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = px - p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = p'x + p - 2pp'$, или $p'(x - 2p) = 0$ с учетом $y' = p$. Если $p' = 0$, то $p = C$ и общее решение данного уравнения есть $y = Cx - C^2$. Если $x - 2p = 0$, то получаем $y = p \cdot 2p - p^2$. Особое решение данного уравнения $\begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases}$.

Исключая параметр p, находим особое решение в явном виде $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $y = x(1 + y') + (y')^2$.

Решение. Уравнение имеет вид (5.1), т.е. это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид $y = x(1 + p) + p^2$. Продифференцировав его по x, имеем $y' = (1 + p) + xp' + 2pp'$, откуда $(x + 2p)\dfrac{dp}{dx} + 1 = 0$. Из этого уравнения получаем $\dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ – линейное относительное x и $\dfrac{dx}{dp}$ уравнение. Решим его методом Бернулли. Полагая $x(p) = u(p)v(p)$, получаем $u'v + uv' + uv = -2p$ или

$u'v+u(v'+v)=-2p$. Находим v, приравнивая скобку к нулю, разделяя переменные и интегрируя: $v'+v=0$, $\dfrac{dv}{v}=-dp$, $\ln|v|=-p$, $v=e^{-p}$. Тогда уравнение примет вид $u'e^{-p}=-2p$. Отсюда $u=-2\int pe^{p}dp=-2e^{p}(p-1)+C$. Учитывая, что $y=$ $=x(1+p)+p^2$, получим $y=\left(2-2p+Ce^{-p}\right)(1+p)+p^2$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид (в параметрической форме)

$$\begin{cases} x=2-2p+Ce^{-p} \\ y=\left(2-2p+Ce^{-p}\right)(1+p)+p^2 \end{cases}.$$

Особого решения данное уравнение не имеет.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) $y=xy'+y'-(y')^2$; 2) $y=xy'-3(y')^3$;

3) $y=x(y')^2+(y')^2$; 4) $y=x(1+y')+(y')^2$.

Форма отчетности: устный опрос, самостоятельная работа.

ЗАНЯТИЕ № 22

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

Литература: [12], с. 56-66; [29], с. 196-198; [33], с. 12.

Указание. Перед изучением этой темы повторите все виды уравнений первого порядка и способы их решения.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения второго порядка приводятся к уравнениям первого порядка?

2. Как решаются уравнения вида $y'' = f(x)$?

3. Как решаются уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$?

4. Как решаются уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$?

5. Как решаются уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$?

6. Как решаются уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$?

7. Можно ли понизить порядок дифференциального уравнения вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^{2x}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Интегрируя левую и правую части, находим $y' = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C_1$. Повторное интегрирование приводит к общему решению $y = \frac{1}{4}e^{2x}(x-1) + C_1x + C_2$. Учитывая начальные условия, записываем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + C_2 = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{4}\cdot(-1) + C_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{5}{4} \\ C_1 = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение уравнения, получаем искомое частное решение

$$y_ч=\frac{1}{4}e^{2x}\left(x-1\right)+\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''-y'\operatorname{ctg}x=2x\sin x$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F\left(x,y',y''\right)=0$. Положим $y'=p\left(x\right)$. Тогда $y''=p'\left(x\right)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $p'-p\operatorname{ctg}x=2x\sin x$ – линейное относительно неизвестной функции $p\left(x\right)$. Его общее решение $p=\left(x^2+C_1\right)\sin x$, т.е. $y'=\left(x^2+C_1\right)\sin x$. Интегрируя это равенство, найдем общее решение исходного уравнения $y=-\left(x^2+C_1\right)\cos x+2x\sin+2\cos x+C_2$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $\left(1+yy'\right)y''=\left(1+\left(y'\right)^2\right)y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1$.

Решение. Данное уравнение имеет вид $F\left(y,y',y''\right)=0$. Подстановка $y'=p\left(y\right)$, $y''=\frac{dp}{dy}p$ приводит его к виду $\left(1+py\right)p\frac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right)p$, откуда $p=0$, т.е. $y=C$ (это решение не удовлетворяет начальным условиям), или $\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{1+py}$. Полученное дифференциальное уравнение первого порядка не относится к уравнениям известного нам типа. Перепишем его в виде $\frac{dy}{dp}=\frac{1+py}{1+p^2}=\frac{p}{1+p^2}y+\frac{1}{1+p^2}$.

Это линейное уравнение относительно функции $y(p)$. Его общее решение имеет вид $y = p + C_1\sqrt{1+p^2}$.
Теперь необходимо решить дифференциальное уравнение

$$y = \frac{dy}{dx} + C_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} .$$

Но в общем виде решить его достаточно сложно. Так как нам нужно найти частное решение исходного уравнения, то воспользуемся начальными условиями для определения постоянной C_1, полагая в последнем равенстве $y=1$ и $y'=1$. Приходим к равенству $1=1+C_1\sqrt{2}$, из которого $C_1=0$. Таким образом, нам достаточно решить уравнение $y=\frac{dy}{dx}$, откуда $y=C_2e^x$.Учитывая начальное условие $y(0)=1$, находим $C_2=1$ и записываем искомое частное решение $y_ч = e^x$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4155, 4156, 4160, 4161, 4165, 4166, 6470, 4178 [17].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 23

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯВЫСШИХ ПОРЯДКОВС ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИСО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. МЕТОД ЛАГРАНЖА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 2- ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Литература: [12], с.79-80, 92-94; [13], с.135; [20], с. 198-204 ; [33], с. 33-35.

Указание. Перед изучением этой темы повторить тему "Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка".

Контрольные вопросы и задания

1. Какова структура общего решения неоднородного уравнения?
2. Что такое характеристическое уравнение и как оно составляется для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
3. Как строится общее решение однородного уравнения в зависимости от характера корней характеристического уравнения?
4. Какой вид правой части неоднородного уравнения называют специальным?
5. Как по виду правой части записывается частное решение неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами?
6. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного уравнения?
7. В чем состоит методметод Лагранжа для уравнений 2 - го порядка с переменными коэффициентами ?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' = f(x)$, где а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, б) $f(x) = 2xe^x$, в) $f(x) = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0$ и $k_3 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Найдем частные решения неоднородного уравнения для случаев а) – в).

а) Контрольное число $\alpha + i\beta = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 2 и в правой части стоит многочлен второй степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 3x^2 - 2x + 5$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^2 & -12A = 3 \\ x^1 & 24A - 6B = -2 \\ x^0 & 6B - 2C = 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = -2/3 \\ C = -9/2 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = x^2\left(-\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{9}{2}\right)$.

б) Контрольное число $\alpha + i\beta = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1 и в правой части стоит произведение экспоненты на многочлен первой степени. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $\left[Ax^2 + (6A + B)x + 6A + 3B\right]e^x -$ $-\left[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right]e^x = 2xe^x$ или $2Ax + (4A + B) =$ $= 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 2A=2 \\ x^0 & 4A+B=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = x(x-4)e^x$.

в) Контрольное число $\alpha + i\beta = 2i$ не является корнем характеристического уравнения и в правой части стоят произведения синуса и косинуса на многочлены, старшая степень которых равна 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{чн} = (Ax+B)\cos 2x + +(Cx+D)\sin 2x$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C, D вычисляем $y''_{чн}$, $y'''_{чн}$ и подставляем их в исходное уравнение. Получаем $(-8Cx-8D-12A)\cos 2x + +(8Ax+8B-12C)\sin 2x - (-4Ax-4B+4C)\cos 2x - (-4Cx-4D- -4A)\sin 2x = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$ или $(4A-8C)x\cos 2x + +(8A+4C)x\sin 2x + (-12A+4B-4C-8D)\cos 2x + (4A+8B- -12C+4D)\sin 2x = 3\sin 2x + 5x\cos 2x$, откуда имеем систему уравнений

$$\begin{array}{c|c} x\cos 2x & 4A-8C=5 \\ x\sin 2x & 8A+4C=0 \\ \cos 2x & -12A+4B-4C-8D=0 \\ \sin 2x & 4A+8B-12C+4D=3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B=-3/4 \\ C=-1/2 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Следовательно $y_{чн} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\sin 2x$.

Таким образом, общие решения неоднородного уравнения для случаев а) – в) имеют вид:

а) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{9}{2}\right)$;

б) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + \left(x^2 - 4x\right)e^x$;

в) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)\cos 2x - \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x$.

Пример 2. Дано уравнение $y''' - y' = 0$. Составляют ли фундаментальную систему решений функции e^x, e^x, ch x, являющиеся решениями этого уравнения?

Решение. Вычислим определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю. Следовательно функции e^x, e^x, ch x линейно зависимы и общее решение по этим функциям составить нельзя.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4314–4321 [17].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 24

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ)

Литература: [12], с. 103-107, [20], с. 204-206; [33], с. 49-50.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
2. В чем состоит метод исключения неизвестных в нормальной системе?
3. Каков алгоритм метода исключения?
4. Какой метод решения систем более общий: метод характеристического уравнения или метод исключения неизвестных?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$.

Решение. В данной системе $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – неизвестные функции. Дифференцируем первое уравнение системы по t: $x'' = -2x' - 2y' - 4z'$. Вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Тогда $x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z$. Полученное уравнение дифференцируем по t, а вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы: $x''' = -2x'' - 16x' - 10y' - 24z' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z$. Составим новую систему:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z \end{cases} .(*)$$

Из этой системы исключим неизвестные y и z. Для этого используем первые два уравнения системы , из которых, после преобразований, находим

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x \end{cases}$$

и эти выражения подставим в третье уравнение основной системы и получим однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $x(t)$: $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$. Решаем соответствующее характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$ и находим $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Следовательно, общее решение $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. Далее находим производные $x' = = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$, $x'' = C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 9C_3e^{3t}$ и подставляем $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ в систему(*). Получаем $2y = C_1e^t + +C_3e^{3t}$, $4z = -4C_1e^t - 4C_2e^{2t} - 6C_3e^{3t}$. В итоге, общее решение исходной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2}C_1e^t + \dfrac{1}{2}C_3e^{3t} \\ z(t) = -C_1e^t - C_2e^{2t} - \dfrac{3}{2}C_3e^{3t} \end{cases}.$$

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ при данных начальных условиях: $t_0 = 0$, $x_0 = -\dfrac{3}{17}$, $y_0 = \dfrac{4}{17}$.

Решение. Сначала приводим систему к нормальному виду

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t \end{cases}.$$

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения системы: $x'' = -3y' - \sin t - e^t = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t$. Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим новую систему $\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t \\ x'' = -12y + 3\cos t - \sin t - 7e^t \end{cases}$,

из первого уравнения которой выражаем $3y = -x' + \cos t - e^t$ и, подставляя во второе, получаем $x'' - 4x' = -3e^t - \cos t - \sin t$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 4 \Rightarrow$ $x_{oo} = C_1 + C_2 e^{4t}$. Частное решение ищем в виде $x_{чн} = Ae^t + B\cos t + C\sin t$. После определения коэффициентов получаем $x_{чн} = e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Следовательно $x = x_{oo} + x_{чн} = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Найдя производную $x' = 4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t$, получаем $3y = -\left(4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t\right) + \cos t - e^t$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = -\frac{4}{3}C_2 e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Подставляя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -\frac{3}{17} = C_1 + C_2 + 1 - \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} = -\frac{4}{3}C_2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Итак, частное решение исходной системы, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t \end{cases}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 4324.1–4324.4 [17], а также задачи:

1) $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x \\ x' = \cos t - y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' + 5x + y = t \\ y' - x - 3y = e^{2t} \end{cases}$.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 25

ПОНЯТИЕ О ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

Литература: [12], с. 113-127; [33], с. 158-160.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение устойчивости по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений.
2. Дайте определение асимптотической устойчивости решения системы дифференциальных уравнений.
3. Какое решение называется неустойчивым?
4. Какая система называется автономной?
5. Какая система называется динамической?

6. Что такое фазовая плоскость?

7. Что такое фазовые кривые?

8. Что такое положение равновесия?

9. Чем определяется качественное поведение фазовых траекторий вблизи положения равновесия?

10. Какими должны быть корни характеристического уравнения для системы вида (7.2), чтобы решение было устойчивым (неустойчивым)?

11. На примере системы вида (7.2) исследуйте вопрос о том каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы, чтобы решение было устойчивым (неустойчивым).

12. Что значит решение системы (7.2) устойчиво (неустойчиво)? Поясните на примере.

13. В каком случае особая точка называется устойчивым (неустойчивым) узлом?

14. Какая особая точка называется седлом?

15. Когда особая точка называется устойчивым (неустойчивым) фокусом?

16. В каком случае особая точка является центром?

17. В каких случаях фазовыми траекториями являются параллельные прямые?

18. Исследуйте вопрос о соответствии случая $ad - cb \neq 0$ ($ad - cb = 0$) различным видам фазовых траекторий.

19. Каков порядок исследования системы (7.3)?

20. В чем состоит глобальная задача качественной теории систем дифференциальных уравнений?

Примеры решения задач

Пример 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{t}x$ с начальным условием $x(1) = 0$.

Решение. Разделяем переменные $\frac{dx}{x} = a\frac{dt}{t}$ и получаем общее решение $x = Ct^a$. Частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию, есть $x_ч \equiv 0$. Нетрудно установить, что любое другое частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(1) = x_0 \neq 0$, имеет вид $\tilde{x}_ч = x_0 t^a$. Разность произвольного частного решения и частного решения при данном начальном условии равна $\tilde{x}_ч - x_ч = x_0 t^a - 0 = x_0 t^a$. Рассмотрим различные случаи постоянной a:

1) Если $a = 0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^a\right| = \left|x_0\right| < \varepsilon$, а модуль разности начальных условий $\left|x_0 - 0\right| = \left|x_0\right| < \delta$. Следовательно, при $\delta = \varepsilon$ по определению решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

2) Если $a < 0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^a\right| = t^a \left|x_0\right| \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, решение асимптотически устойчиво.

3) Если $a > 0$, то $\left|\tilde{x}_ч - x_ч\right| = \left|x_0 t^a\right| = t^a \left|x_0\right| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, решение неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$.

Решение. Положения равновесия данной системы определяются из системы уравнений $\begin{cases} -2x + y + x^3 = 0 \\ -x - 2y + 3x^5 = 0 \end{cases}$. Отсюда находим три положения равновесия $O(0,0)$, $A(1,1)$ и $B(-1,-1)$. Исследуем вопрос устойчивости каждого из них, для чего определяем производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x+y+x^3\right)=-2+3x^2$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x+y+x^3\right)=1, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(-x-2y+3x^5\right)=-1+15x^4,$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x-2y+3x^5\right)=-2$.

1) Для точки $O(0,0)$ получаем $a=-2$, $b=1$, $c=-1$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-2x+y \\ \frac{dy}{dt}=-x-2y \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+5=0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2}=-2\pm i$. Значит, положение равновесия $O(0,0)$ является устойчивым фокусом.

2) Для точки $A(1,1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$.

Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \frac{d(x-1)}{dt}=(x-1)+(y-1) \\ \frac{d(y-1)}{dt}=14(x-1)-2(y-1) \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-16=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=\frac{-1-\sqrt{65}}{2}<0$ и $\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{65}}{2}>0$. Значит, положение равновесия $A(1,1)$ неустойчиво и является седлом.

3) Для точки $B(-1,-1)$ получаем $a=1$, $b=1$, $c=14$, $d=-2$. Поэтому соответствующая система первого приближения имеет вид $\begin{cases} \dfrac{d(x+1)}{dt}=(x+1)+(y+1) \\ \dfrac{d(y+1)}{dt}=14(x+1)-2(y+1) \end{cases}$. Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-16=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=\dfrac{-1-\sqrt{65}}{2}<0$ и $\lambda_2=\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}>0$. Значит, положение равновесия $B(-1,-1)$ неустойчиво и является седлом.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

В задачах №№ 1, 2 исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ с начальным условием $x(0)=0$.

1) $\dfrac{dx}{dt}=1+t-x$. 2) $\dfrac{dx}{dt}=\sin^2 x$.

В задачах №№ 3–10 исследовать тип положения равновесия систем и построить фазовые траектории.

3) $\dfrac{dx}{dt}=-3x+2y$, $\dfrac{dy}{dt}=x-4y$. 4) $\dfrac{dx}{dt}=x$, $\dfrac{dy}{dt}=x+2y$.

5) $\dfrac{dx}{dt}=2y$, $\dfrac{dy}{dt}=2x+3y$. 6) $\dfrac{dx}{dt}=\alpha x+y$, $\dfrac{dy}{dt}=-x+\alpha y$.

7) $\dfrac{dx}{dt}=-4x+2y$, $\dfrac{dy}{dt}=2x-y$. 8) $\dfrac{dx}{dt}=0$, $\dfrac{dy}{dt}=x+y$.

9) $\dfrac{dx}{dt}=x+y$, $\dfrac{dy}{dt}=-x-y$. 10) $\dfrac{dx}{dt}=x$, $\dfrac{dy}{dt}=y$.

В задачах №№ 11, 12 исследовать на устойчивость все положения равновесия систем.

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x+y-2) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1-x) \end{cases}$, 12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x \end{cases}$.

Форма отчетности: конспект, устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 26.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [33], с. 14-16.

При изучении этой темы воспользуйтесь методическими указаниями к выполнению лабораторных работ на языках программирования высокого уровня .

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$? Опишите алгоритм метода?

2. Что такое ломаная Эйлера? Как она соотносится с интегральной кривой?

3. Каков алгоритм метода Адамса приближенного решения дифференциальных уравнений?

4. Как выводится формула Адамса? Как при этом используется формула Тейлора?

5. Какой метод более точный: метод Эйлера или метод Адамса?

6. В чем заключается метод Рунге-Кутта приближенного решения дифференциальных уравнений?

7. Какие Вы еще знаете методы численного решения дифференциальных уравнений?

8. Как ищется приближенное решение систем дифференциальных уравнений первого порядка?

9. Составить программу для приближенного решения уравнений или систем одним из перечисленных методов.

Форма отчета: программа и результаты счета.

ЗАНЯТИЕ № 27

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГЛОВ И ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [12], с. 290-294

.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях степенной ряд можно почленноинтегрировать и интеграл от суммы равен сумме интегралов?

2. Как используются степенные ряды для приближенных вычислений определенных интегралов?

3. Когда степенной ряд можно почленнодифференцировать и производная суммы равна сумме производных?

4. Как найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда?

5. Если решение представимо в виде ряда Тейлора, как находится приближенное решение?

6. В чем состоит метод решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов?

Примеры решения задач

Пример 1. С помощью разложения в степенной ряд вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд $(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$, полагая в нем $x=t^4$, $m=-\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}=1-\frac{1}{2}t^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}t^8-\ldots$. Этот ряд сходится при $|t|<1$. Интегрируя его, найдем

$$I=\int_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{8}t^8-\ldots\right)dt=\left(t-\frac{t^5}{10}+\frac{t^9}{24}-\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10\cdot 2^5}+\frac{1}{24\cdot 2^9}-\ldots\approx 0,50000-0,00313+0,00008-\ldots$$

.

Полученный результат представляет знакочередующийся сходящийся числовой ряд. Взяв сумму первых двух его членов, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью: $I\approx 0,50000-0,00313=0,49687\approx 0,4969$, так как абсолютное значение третьего члена меньше 0,0001. Заметим здесь, что промежуточные вычисления проводятся с одним лишним знаком после запятой.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y''+\frac{y'}{x}+y=0$ с начальными условиями $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Решение. Полагая, что искомое решение представляет сходящийся степенной ряд

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

найдем ряды для y' и y'' его почленным дифференцированием

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+(k+1)a_{k+1}x^k+(k+2)a_{k+2}x^{k+1}+\ldots$$

,

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots + (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \ldots .$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1$, $y'(0) = a_1 = 0$. Подставляя ряды для y, y' и y'' в исходное уравнение и сделав приведение подобных слагаемых, получим

$$1 + 4a_2 + 9a_3x + (a_2 + 16a_4)x^2 + (a_3 + 25a_5)x^3 +$$
$$+ \ldots + \left(a_k + \left(k^2 + 4k + 4\right)a_{k+2}\right)x^k + \ldots = 0.$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты ряда, стоящего в левой части этого равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 1 + 2^2 a_2 = 0 \\
x^1 & 3^2 a_3 = 0 \\
x^2 & a_2 + 4^2 a_4 = 0 \\
x^3 & a_3 + 5^2 a_5 = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^k & a_k + (k+2)^2 a_{k+2} = 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

из которой определяем значения остальных коэффициентов:

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2m+1} = \ldots = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2^2}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2 4^2},$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2 4^2 6^2}, \quad \ldots, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^2 4^2 6^2 \ldots (2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2}, \ldots$$

Таким образом, искомое частное решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = 1 - \frac{x^2}{4(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2(2!)^2} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}$$

.

Пример 3. Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y'' = x\sin y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде ряда Тейлора: $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$. Подставляя в исходное уравнение $x_0 = 1$ и $y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$, находим $y''(1) = 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$. Далее, последовательно дифференцируя уравнение, имеем

$$y''' = \sin y' + xy''\cos y', \qquad y'''(1) = 1,$$

$$y^{IV} = y''\cos y' + y''\cos y' + xy'''\cos y' - xy''y''\sin y' =$$

$$= 2y''\cos y' + xy'''\cos y' - x(y'')^2\sin y', \qquad y^{IV}(1) = -1,$$

$$y^{V} = 2y'''\cos y' - 2(y'')^2\sin y' + y'''\cos y' + xy^{IV}\cos y' -$$

$$- xy'''y''\sin y' - (y'')^2\sin y' - 2xy''y'''\sin y' - x(y'')^3\cos y' =$$

$$= 3y'''\cos y' - 3(y'')^2\sin y' - 3xy''y'''\sin y' + xy^{IV}\cos y' -$$

$$- x(y'')^3\cos y', \qquad y^{V}(1) = -3-3 = -6.$$

Так как первое слагаемое ряда $y(1) = 0$, то вычислим еще

$$y^{VI} = 3y^{IV}\cos y' - 3y'''y''\sin y' - 6y''y'''\sin y' - 3(y'')^3\cos y' -$$

$$- 3y''y'''\sin y' - 3x(y''')^2\sin y' - 3xy''y^{IV}\sin y' - 3x(y'')^2 y'''\cos y' +$$

$$+ y^{IV}\cos y' + xy^{V}\cos y' - xy^{IV}y''\sin y' - (y'')^3\cos y' -$$

$$- 3x(y'')^2 y'''\cos y' + x(y'')^4\sin y',$$

$$y^{VI}(1) = -3-6-3-3+3+1+1 = -10.$$

Таким образом, первые шесть членов разложения в ряд частного решения уравнения имеют вид

$$y(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4-$$
$$-\frac{1}{20}(x-1)^5-\frac{1}{72}(x-1)^6+K\ .$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 2930, 2931, 2935, 2936 [13]; 12.325, 12.326, 12.327, 12.329, 12.332 [19].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 28

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ (0, *l*)

Литература: [12], 331-333; [20], 257-259; [36], с. 31-35.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется тригонометрическим?
2. Сформулируйте достаточный признак разложимости функций в ряд Фурье.
3. Как разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π?
4. Выведите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье, если функция имеет период $2l$.
5. Как разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ l)$?
6. Что означает: "продолжить функцию четным образом", "нечетным образом"?
7. Как будет выглядеть график функции, продолженной четным или нечетным образом?

8. Как при таких продолжениях определяются коэффициенты разложения в ряд Фурье?

Примеры решения задач

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(0,\ 2)$: $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & 1<x<2\end{cases}$.

Решение. Продолжаем периодически данную функцию на всю числовую ось (рис. 14).

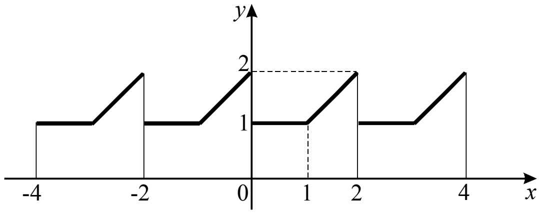


Рис. 14

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам , учитывая, что $T=l=2$:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 1dx+\int_1^2 xdx=x\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{5}{2},$$

$$a_k=\int_0^2 f(x)\cos k\pi x\,dx=\int_0^1\cos k\pi x\,dx+\int_1^2 x\cos k\pi x\,dx=$$

$$=\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_0^1+\left(x\frac{\sin k\pi x}{k\pi}+\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

$$b_k=\int_0^2 f(x)\sin k\pi x\,dx=\int_0^1\sin k\pi x\,dx+\int_1^2 x\sin k\pi x\,dx=$$

$$=-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\bigg|_0^1+\left(-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi}+\frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\right)\bigg|_1^2=-\frac{1}{k\pi}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x)=\frac{5}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\cos k\pi x-\sin k\pi x\right).$$

Пример 2. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2,0]$ четным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T=2l=4$) на всю числовую ось (рис.15).

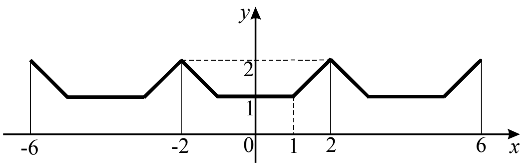


Рис. 15

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 dx+\int_1^2 x\,dx=\frac{5}{2},$$

$$a_k=\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\int_1^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^1+\left(\frac{2x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\bigg|_1^2=$$

$$=\frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-\cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд , окончательно получим

$$f(x)=\frac{5}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k-\cos\frac{k\pi}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{2}\,.$$

Пример 3. Функцию из примера 1 разложить в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-2,0]$ нечетным образом, а получившуюся функцию, в свою очередь, продолжим периодически (период $T=2l=4$) на всю числовую ось (рис. 16).

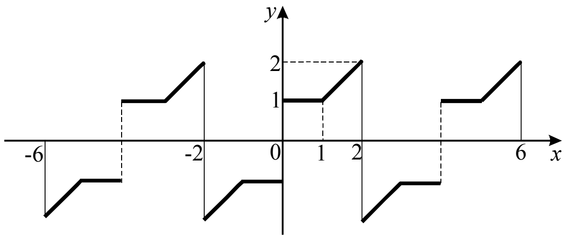


Рис. 16

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье по формулам

$$b_k=\int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1\sin\frac{k\pi x}{2}dx+\int_1^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^1+\left(-\frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}+\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)\bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2}{k\pi}-\frac{4}{k\pi}(-1)^k-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\,.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (10.5), окончательно получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-2(-1)^k-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: №№ 12.495, 12.497, 12.500 [19].

Форма отчетности: устный опрос, контрольна

ЗАНЯТИЕ № 29

ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Литература: [12], с. 166-168, 179-189, 194-195, 199-200; [35].

Основные понятия

Приложения двойных интегралов

Пусть G - материальная бесконечно тонкая пластинка с поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $S=\iint\limits_G dxdy$ - ***площадь плоской области*** G **;**

б) $m=\iint\limits_G \gamma(x,y)\,dxdy$ - ***масса пластинки*****;**

в) $M_x=\iint\limits_G y\gamma(x,y)\,dxdy$**,** $M_y=\iint\limits_G x\gamma(x,y)\,dxdy$ - ***статические моменты пластинки относительно осей*** Ox **и** Oy**;**

г) $x_c=\frac{M_y}{m}$**,** $y_c=\frac{M_x}{m}$ - ***координаты центра тяжести пластинки*****;**

д) $I_x=\iint\limits_G y^2\gamma(x,y)\,dxdy$**,** $I_y=\iint\limits_G x^2\gamma(x,y)\,dxdy$ **-** ***моменты инерции пластинки относительно осей*** Ox **и** Oy**;**

е) $I_0=I_x+I_y=\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy$ **-** ***момент инерции пластинки относительно начала координат*****;**

ж) если гладкая поверхность имеет уравнение $z=f(x,y)$**, то** ***площадь части поверхности, проектирующей-ся в область*** G **плоскости** xOy**, равна**

$$Q=\iint\limits_G\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,;$$

з) ***объем*** V ***цилиндра*****, ограниченного сверху непрерывной поверхностью** $z=f(x,y)$**, снизу плоскостью** $z=0$ **и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вы-резающей на плоскости** xOy **область** G**, выражается инте-гралом**

$$V=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy\,.$$

Приложения тройных интегралов

Пусть T - материальное тело с объемной плотностью $\gamma(x,y,z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $V=\iiint\limits_T dxdydz$ **-** ***объем тела*****;**

б) $m=\iiint\limits_T\gamma(x,y,z)\,dxdydz$ **-** ***масса тела*****;**

в) $$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_T y\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \quad M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ **-** ***статические моменты тела относительно координатных плоскостей*** yOz**,** xOz**,** xOy**;**

г) $x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}$**,** $y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}$**,** $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$ **-** ***координаты центра тяжести тела*;**

д) $$I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_T y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \quad I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ **-** ***моменты инерции тела относительно координатных плоскостей*** yOz**,** xOz**,** xOy**;**

е) $I_x = I_{xz} + I_{xy}$**,** $I_y = I_{yz} + I_{xy}$**,** $I_z = I_{yz} + I_{xz}$ **-** ***моменты инерции тела относительно осей координат*** Ox**,** Oy**,** Oz**;** $$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ **-** ***момент инерции тела относительно начала координат*.**

Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляется площадь плоской области с помощью двойного интеграла?
2. Как вычисляется объем тела с помощью двойного интеграла?
3. Выведите формулу для вычисления площади гладкой поверхности $z = z(x,y)$.
4. Как вычисляются площади поверхностей, заданных уравнениями $x = x(y,z)$ $y = y(x,z)$?
5. Что такое поверхностная плотность вещества?

6. Как определить общее количество вещества в плоской области D (массу пластинки) с помощью двойного интеграла?
7. Как находятся моменты инерции плоской фигуры относительно координатных осей?
8. Как находится момент инерции плоской фигуры относительно начала координат? Покажите его связь с моментами инерции относительно координатных осей.
9. Как определяются координаты центра масс плоской фигуры?
10. Что такое статические моменты плоской фигуры? Как они вычисляются?
11. Как вычисляется объем тела тройным интегралом?
12. Как вычисляется масса пространственного тела?
13. Как найти моменты инерции пространственного тела отсительно координатных плоскостей?
14. Как найти моменты инерции пространственного тела относительно осей координат?
15. Как найти момент инерции пространственного тела отностельно начала координат?
16. Как определить статические моменты пространственного тела относительно координатных плоскостей?
17. Как определить координаты центра масс пространственного тела?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти массу пластинки, ограниченной линией $x^2 + y^2 = 2x$, если ее плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния от начала координат.

Решение. Линия $x^2 + y^2 = 2x$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$ является окружностью с центром в точке $(1, 0)$ и радиусом 1 (рис. 17). Поэтому при вычислении интеграла удобно перейти к полярным координатам. Подставляя в уравнение окружности полярные координаты, получим $r = 2\cos\varphi$. Плотность пластинки в полярных координатах $\gamma = kr^2$, где k - коэффициент пропорциональности. Таким образом, получаем

$$m = \iint_D \gamma(x,y)\,dxdy = \iint_D kr^2 r\,dr\,d\varphi = k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= 4k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = k\left(\frac{3\varphi}{2} + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi k}{2}.$$

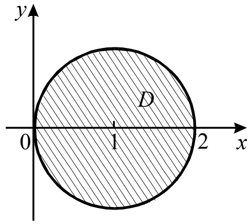


Рис. 17

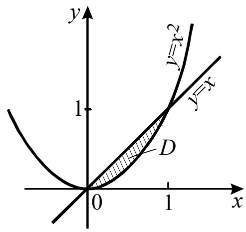


Рис. 18

Пример 2. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$.

Решение. Построим область D, ограниченную данными кривыми (рис. 18). Вычислим массу пластинки, учитывая, что ее плотность $\gamma(x,y) = const = \gamma$

$$m = \gamma\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = \gamma\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \gamma\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\gamma}{6}.$$

Вычислим статические моменты пластинки относительно координатных осей Ox и Oy

$$M_x = \iint_D y\gamma(x,y)\,dxdy = \gamma\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} y\,dy = \frac{\gamma}{2}\int_0^1 dx\left(x^2 - x^4\right) = \frac{\gamma}{15},$$

$$M_y=\iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dxdy=\gamma\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{x}dy=\gamma\int\limits_0^1 xdx\left(x-x^2\right)=\frac{\gamma}{12}$$

Окончательно имеем

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\gamma/12}{\gamma/6}=0,5;\qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\gamma/15}{\gamma/6}=0,4\,.$$

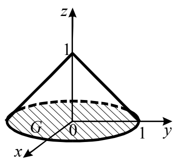


Рис. 19

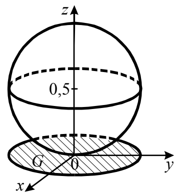


Рис. 20

Пример 3. Вычислить массу тела T, ограниченного поверхностями $z=0$, $(z-1)^2=x^2+y^2$, если плотность тела $\gamma(x,y,z)=(x+y)^2+z$.

Решение. Область T представляет собой конус с основанием G - круг радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 19). При вычислении интеграла удобнее перейти к цилиндрическим координатам (r,φ,z), в которых уравнение нижней половины конуса имеет вид $z=1-r$. Получаем

$$m=\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 rdr\int\limits_0^{1-r}\left(r^2(1+\sin 2\varphi)+z\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\left(r^2(1-r)(1+\sin 2\varphi)+\frac{1}{2}(1-r)^2\right)dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi)+\frac{1}{24}\right)d\varphi=\frac{11\pi}{60}.$$

Пример 4. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородного тела T плотности γ, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

Решение. Область T представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой удобно записать в виде $x^2+y^2+(z-1/2)^2=1/4$ (рис. 20), G - проекция шара на плоскость (X,Y). При вычислении интеграла удобнее перейти к сферическим координатам (r,θ,φ), в которых уравнение сферы принимает вид $r=\cos\theta$. Получаем

$$I_x=\iiint\limits_T\left(y^2+z^2\right)\gamma dxdydz=\left|\begin{array}{c}x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\theta\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}\gamma r^2\left(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)r^2dr=$$

$$=\frac{\gamma}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\varphi\sin^3\theta\cos^5\theta+\sin\theta\cos^7\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{\gamma}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi}{32}\left(-\cos 2\theta+\frac{\cos^3 2\theta}{3}+\frac{\sin^4 2\theta}{4}\right)-\frac{\cos^8\theta}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\gamma}{120}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi+3\right)d\varphi=\frac{7\pi}{120}\gamma\cdot$$

Пример 5. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy пластинки с плотностью $\gamma=1$, ограниченной кривыми $xy=1$, $xy=2$, $y=2x$, $x=2y$ и расположенной в первом квадранте.

Решение. Необходимо вычислить $I_x = \iint\limits_G y^2 dxdy$ и $I_y = \iint\limits_G x^2 dxdy$. В декартовой системе координат, чтобы свести каждый из этих двойных интегралов к повторному нужно область G (рис. 21) разбить на три части, поэтому удобнее перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда φ изменяется от $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ до $\varphi_2 = \operatorname{arctg}2$, а при каждом значении φ переменная r изменяется от $r_1(\varphi) = 1\big/\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$ (значения r на кривой $xy = 1$, уравнение которой в полярных координатах в первом квадранте имеет вид $r = 1\big/\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$) до $r_2(\varphi) = \sqrt{2}\big/\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$ (значения r на кривой $xy = 2$). Следовательно

$$I_x = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^3 \sin^2\varphi dr = \frac{1}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi \left(r_2^4(\varphi) - r_1^4(\varphi)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} = \frac{9}{8},$$

$$I_y = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^3 \cos^2\varphi dr = -\frac{3}{4}\operatorname{ctg}\varphi\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} = \frac{9}{8}.$$

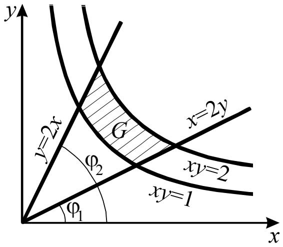


Рис. 21

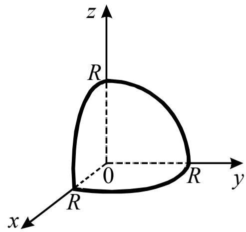


Рис. 22

Пример 6. Найти координаты центра масс части шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, расположенной в первом октанте, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Решение. Имеем $\gamma(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где k - коэффициент пропорциональности, и, вследствие симметрии, $x_c=y_c=z_c$. Вычислим статический момент тела (рис. 22) относительно плоскости yOz. Вычисления будем проводить в сферической системе координат, тогда получаем

$$M_{yz}=\iiint\limits_T x\gamma(x,y,z)dv=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R r\cos\varphi\sin\theta\frac{k}{r}r^2dr=$$

$$=k\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^R r^2dr=k\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{\pi k R^3}{12}.$$

Вычисляем массу тела

$$m=\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R\frac{k}{r}r^2dr=$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} k\frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \frac{\pi}{2}(1+1)k\frac{R^2}{2} = \frac{\pi k R^2}{2}.$$

В итоге получаем координаты центра масс

$$x_c = y_c = z_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\pi k R^3}{12} \Big/ \frac{\pi k R^2}{2} = \frac{R}{6}.$$

Пример 7. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной между плоскостями $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$ и $z = y$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

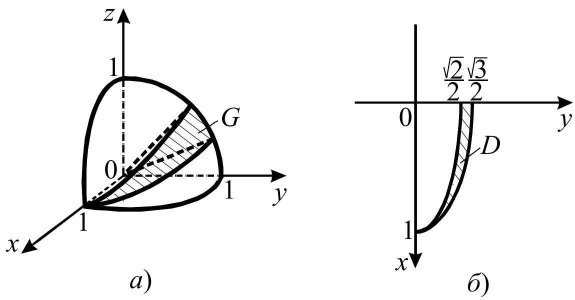


Рис. 23

Решение. Изображаем поверхность G, площадь которой требуется найти (рис. 23,*а*). Чтобы найти уравнение проекции линии пересечения плоскости $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ подставляем в уравнение сферы $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Получаем, что проекцией является часть эллипса $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3/4} = 1$. Чтобы найти уравнение проекции линии пересечения плоскости $z = y$ и сферы

$x^2+y^2+z^2=1$ подставляем в уравнение сферы $z=y$. Получаем, что проекцией является часть эллипса $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/2}=1$. Изображаем проекцию D поверхности G на плоскость xOy (рис. 23 ,*б*). Записываем уравнение верхней половины сферы $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и вычисляем искомую площадь

$$Q=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\begin{vmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{1/\sqrt{1+\sin^2\varphi}}^{1/\sqrt{1+\frac{\sin^2\varphi}{3}}}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{4-\cos^2\varphi}}-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=\left(\arcsin\frac{\cos\varphi}{2}-\arcsin\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{12}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи №№ 8.75, 8.92, 8.93, 8.94, 8.98, 8.130, 8.137, 8.142, 8.147 [19].

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 30

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНГО ПЕРЕМЕННОГО. ТЕОРЕМА КОШИ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Литература: [22], с. 117-125; [27], с. 32-46; [28], с. 142-157; [34], с. 42-53.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение интеграла от функции комплексного переменного.

2. Как вычислить интеграл от функции комплексного переменного?

3. Сформулируйте теорему Коши для простого и сложного контура.

4. Как применяется интегральная формула Коши для вычисления интегралов по замкнутым контурам?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить $\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z dz$, где C - отрезок прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$.

Решение. Выделим действительную и мнимую часть подынтегральной функции $f(z) = e^{|z|^2}\operatorname{Re} z$. Для этого перепишем ее в виде $e^{|z|^2}\operatorname{Re} z = e^{x^2+y^2}x$. Отсюда следует, что $u(x,y) = xe^{x^2+y^2}$, $v(x,0) = 0$. Применим формулу $\int\limits_C f(z)dz =$

$= \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$. Получаем, что вычисление $\int\limits_C f(z)dz$ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов: $\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} zdz = \int\limits_C xe^{x^2+y^2}dx + i\int\limits_C xe^{x^2+y^2}dy$.

Уравнение отрезка прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$, будет $y = x$, где $0 \le x \le 1$, а значит $dy = dx$. Поэтому

$$\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 x e^{2x^2} dx + i\int\limits_0^1 x e^{2x^2} dx = \frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1 + i\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^2-1\right) + i\frac{1}{4}\left(e^2-1\right) = \frac{1}{4}\left(e^2-1\right)\left(1+i\right).$$

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_C z^k dz$, где C - окружность единичного радиуса с центром в точке $z=0$ (обход против часовой стрелки, k - целое число).

Решение. Так как на окружности C $|z|=1$, то $z=e^{i\varphi}$ ($0\le\varphi\le 2\pi$) и $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$. Тогда $\oint\limits_C z^k dz = \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi =$

$$= i\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi}\left[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi\right]d\varphi =$$

$$= i\left[\frac{\sin(k+1)\varphi}{k+1} - \frac{\cos(k+1)\varphi}{k+1}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \begin{cases} 0, & k\ne -1 \\ 2\pi i, & k=-1 \end{cases}.$$

При $k\ge 0$ результат вычислений согласуется с теоремой Коши. При $k=-1$ функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ не определена и не дифференцируема в точке $z=0$. Интеграл не равен нулю. При $k=-2, -3, \ldots$ подынтегральная функция не определена в точке $z=0$ и теорема Коши также не применима, но интеграл равен нулю.

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_C z\bar{z}dz$, где C: $|z|=1$.

Решение. Аналогично примеру 2

$$\oint\limits_C z\bar{z}dz = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}e^{-i\varphi} ie^{i\varphi}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi} d(i\varphi) = e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= e^{2\pi i} - 1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi - 1 = 0 .$$

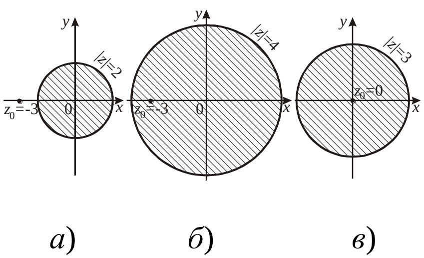
Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{i}^{1+i} z dz$.

Решение. Так как подынтегральная функция является аналитической, то можно использовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{i}^{1+i} z dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{i}^{1+i} = \frac{1}{2}\left[(1+i)^2 - i^2\right] = \frac{1}{2} + i .$$

Пример 5. Вычислить $\oint\limits_{C} \frac{e^z}{z+3} dz$, где C - окружность: а) $|z| = 2$, б) $|z| = 4$.

Решение. а) Если C - окружность радиуса 2, то подынтегральная функция $\frac{e^z}{z+3}$ является аналитической в каждой точке круга $|z| \le 2$ (рис. 24, *а*). Поэтому, в силу теоремы Коши $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z+3} dz = 0$.



а) *б*) *в*)

Рис. 24

б) Если C - окружность радиуса 4, то точка $z=-3$ (в ней функция не определена) принадлежит кругу $|z|\le 4$ (рис. 24,*б*). Представим подынтегральную функцию в виде $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$, где $f(z)=e^z$ является аналитической в каждой точке круга $|z|\le 4$. Применим интегральную формулу Коши ($z_0=-3$) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$. Получим $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^z dz}{z+3}=2\pi i\, e^z\Big|_{z=-3}=\dfrac{2\pi i}{e^3}$.

Пример 6. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{\cos z}{z^3}dz$, где $C:\ |z|=3$.

Решение. Подынтегральная функция $\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в круге $|z|\le 3$ всюду кроме точки $z_0=0$ (рис. 2,*в*). Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)=\cos z$, являющуюся аналитической в круге $|z|\le 3$. Воспользуемся интегральной формулой Коши для производной $f^{(n)}(z_0)=$
$=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

При $z_0=0$ и $n=2$ получим

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}=-\pi i.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{i} ze^{z}dz$; б) $\int\limits_{0}^{i} z\cos z dz$; в) $\int\limits_{1}^{i}\left(3z^{3}-2z^{2}\right)dz$.

2) Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{C} z\operatorname{Im} z^{2}dz$, где $C:\left\{|\operatorname{Im} z|\le 1,\ \operatorname{Re} z=1\right\}$;

б) $\int\limits_{C} z|z|dz$, где $C:\left\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\ge 0\right\}$;

в) $\int\limits_{AB} z\operatorname{Re} z^{2}dz$, где AB - отрезок прямой, $z_A=0$, $z_B=1+2i$.

3) Вычислить с помощью интегральной формулы Коши следующие интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{iz}}{z^{2}+1}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5}\frac{dz}{z^{2}+16}$; в) $\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^{2}+2z-3}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}^{2}z}{z^{3}}dz$; д) $\oint\limits_{|z-2i|=1}\frac{e^{1/z}}{\left(z^{2}+4\right)^{2}}dz$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ № 31-35

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Литература: [21] с. 125-132; [23], с. 46-70; [12], с. 160-172; [34], с. 55-66.

Контрольные вопросы и задания

1) Запишите ряд Тейлора для функции комплексного переменного $f(z)$, аналитической в круге $|z-z_0|<R$. Как определяются его коэффициенты?
2) Сформулировать теорему Тейлора. Каковы условия разложимости функции в ряд Тейлора?
3) Записать разложения в ряд Тейлора для основных элементарных функций: e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Ln}(1+z)$, $(1+z)^a$, $\operatorname{arctg} z$
4) Дать определение ряда Лорана функции $f(z)$. Как определяются его коэффициенты?
5) Сформулировать теорему Лорана. Каковы условия сходимости ряда Лорана? Какова его область сходимости?
6) Какие ряды называются правильной и главной частями ряда Лорана?
7) Какая точка называется особой точкой функции? В каком случае она называется изолированной особой точкой?
8) Какая особая точка называется:
   а) устранимой; б) полюсом; в) существенно особой?
9) Как зависит вид ряда Лорана от характера особой точки?
10) Как связаны полюсы функции $\dfrac{1}{f(z)}$ с нулями функции $f(z)$? Что такое кратность полюса?

Примеры решения задач

Пример 1. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$ в окрестности точки $z=0$ в ряд Тейлора.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы двух дробей: $f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{z^2+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z^2}{4}}\right)$ и воспользуемся разложением в ряд $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, сходящемся в круге $|z|<1$, подставляя вместо z для первой дроби z^2, а для второй - $\left(-\frac{z^2}{4}\right)$. Получим ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left(z^{2n}+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}\right)=$ $=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)z^{2n}$, который сходится в круге $|z|<1$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=$ $=\frac{1}{(1-z)(z+2)}$ в областях: а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы двух дробей: $f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+2}\right)$. Если $|z|<1$, то $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, а если $|z|>1$, то $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. Аналогично, при $|z|<2$ имеем разложение $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$, а если $|z|>2$, то $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{z\left(1+\dfrac{2}{z}\right)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}$. Отсюда следует:а) в круге

$|z|<1$ $\quad f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$. Это ряд Тейлора;б) в кольце

$1<|z|<2$ $\quad f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3\cdot 2^{n+1}}$. Ряд Лорана содержит как положительные, так и отрицательные степени z;

в) в кольце $|z|>2$ $\quad f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}-1}{3z^n}$. Ряд Лорана содержит только отрицательные степени z.

Пример 3. Определить характер особой точки $z_0=0$ для функций: а) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-z}$, б) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$, в) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$.

Решение. а) Используя разложение в ряд Тейлора $\sin z-z=-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-K$, получим, что функция, стоящая в знаменателе дроби, имеет в точке $z_0=0$ нуль третьего порядка. Отсюда следует, что функция $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-z}$ имеет в точке $z_0=0$ полюс третьего порядка.

б) Разложим $\cos\dfrac{1}{z}$ в ряд Лорана: $\cos\dfrac{1}{z}=1-\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{4!z^4}-$ $-K+(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!z^{2n}}+K$. Отсюда видно, что главная часть ряда

Лорана содержит бесконечно много членов. Поэтому для функции $\cos\frac{1}{z}$ точка $z_0 = 0$ является существенно особой.

в) Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^{-z} в окрестности точки $z_0 = 0$, получим $f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - e^{-z}\right) =$
$= \frac{1}{z}\left[1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \mathrm{K}\right)\right] = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} + \mathrm{K}$. Лорановское разложение функции в окрестности точки $z_0 = 0$ не содержит главной части, поэтому эта точка является устранимой особой точкой.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Используя разложение основных элементарных функций, разложить в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов:

$$\text{а) } e^{-z^2}; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 z}{z}; \quad \text{в) } z^3 e^{1/z}; \quad \text{г) } \frac{1+\cos z}{z^4}.$$

2) Доказать, что справедливы формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{b-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}} \text{ при } |z-a| < |b-a|;$$

$$\text{б) } \frac{1}{b-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \text{ при } |z-a| > |b-a|,$$

где a и b - заданные комплексные числа.

Указание: использовать при доказательстве разложение функции $\frac{1}{b-z}$ в ряд (геометрическую прогрессию).

3) Разложить в ряд Лорана следующие функции в указанных областях:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в кольце $0<|z|<1$ и в кольце $1<|z|<\infty$;

б) $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в кольцах $0<|z-1|<1$ и $0<|z-2|<1$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ в кольце $0<|z-i|<2$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольцах $2<|z|<3$ и $3<|z|<\infty$.

4) Найти особые точки функции и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$;

в) $f(z)=z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$; г) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^3-1}{z-1}$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ № 36-37

ВЫЧЕТЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ. ПРИМЕННИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Литература: [21], с. 132-137; [23], с. 70-81;
[12], с. 172-179; [34], с. 66-75.

Контрольные вопросы и задания

1) Что называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки?
2) Чему равен вычет в устранимой особой точке и почему?

3) Как вычисляется вычет в простом и кратном полюсах?
4) Как находится вычет в существенно особой точке?
5) Сформулируйте основную теорему о вычетах. Как применяется теория вычетов к вычислению интегралов по замкнутым контурам?
6) Сформулируйте лемму Жордана. Как применяются вычеты при вычислении несобственных интегралов?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти вычеты функции

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

в ее особых точках.

Решение. Функция имеет две особые точки: $z_1=1$ - простой полюс и $z_2=2$ - полюс кратности 2. В случае простого полюса вычет вычисляется по формуле $\operatorname{Res}\left[f(z),\, z_0\right]=$ $=\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$. Для $z_1=1$ получаем $\operatorname{Res}\left[f(z), 1\right]=$ $=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z}{(z-2)^2}=1$. В случае полюса кратности $n>1$ вычет вычисляется по формуле $\operatorname{Res}\left[f(z),\, z_0\right]=\dfrac{1}{(n-1)!}\times$ $\times\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$. Для $z_2=2$ и $n=2$ получаем

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\, 2\right]=\lim_{z\to 2}\left(\frac{z}{z-1}\right)'=-1.$$

Пример 2. Вычислить вычет $f(z)=e^{1/z}$ в точке $z_0=0$.**Решение.** Для функции $e^{1/z}$ точка $z_0=0$ является существенно особой, так как $e^{1/z}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\ldots$. Поэтому

$\operatorname{Res}\left[f(z),\, 0\right] = c_{-1} = 1$, где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана при z^{-1}.

Пример 3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2i|=2} \dfrac{dz}{e^z+1}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \dfrac{1}{e^z+1}$ имеет внутри круга $|z-2i|<2$ одну особую точку $z_0 = \pi i$ - полюс первого порядка (рис.25). Воспользуемся формулой $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)},\, z_0\right] = \dfrac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}$.

Получим $\operatorname{Res}\left[f(z),\, \pi i\right] = \left.\dfrac{1}{\left(e^z+1\right)'}\right|_{z=\pi i} = \dfrac{1}{\cos\pi} = -1$. Далее воспользуемся основной теоремой о вычетах. Откуда получим $\oint\limits_{|z-2i|=2} \dfrac{dz}{e^z+1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z),\, \pi i\right] = -2\pi i$.

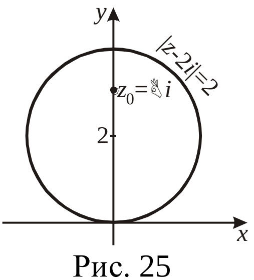


Рис. 25

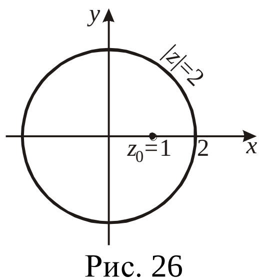


Рис. 26

Пример 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} (2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=(2z-1)\times$ $\times\cos\dfrac{z}{z-1}$ имеет внутри круга $|z|<2$ одну особую точку $z_0=1$, которая является существенно особой (рис. 26). Поэтому для вычисления вычета в точке $z_0=1$ применим формулу $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана при $(z-1)^{-1}$. Имеем $\cos\dfrac{z}{z-1}=\cos\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)=\cos1\cdot\cos\dfrac{1}{z-1}-\sin1\times$ $\times\sin\dfrac{1}{z-1}=\cos1\left(1-\dfrac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots\right)-\sin1\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots\right)$.

Так как $2z-1=2(z-1)+1$, то $c_{-1}=-(\cos1+\sin1)$. Следовательно $\oint\limits_{|z|=2}(2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}dz=-2\pi i(\cos1+\sin1)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}$.

Решение. Введем функцию $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$, которая на действительной оси ($z=x$) совпадает с подынтегральной функцией, которая является дробно-рациональной. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}z>0$) единственный полюс четветого порядка $z_0=i$. Поэтому $I=2\pi i\times$ $\times\operatorname{Res}\left[f(z),i\right]$, где

$$\operatorname{Res}\left[f(z),i\right]=\frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]'''\Bigg|_{z=i}=-\frac{5}{32}i.$$ Отсюда $I=\dfrac{5}{16}\pi$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1) Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$;

в) $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$.

2) Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_C \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z-2)^2}dz$, где $C:|z|=3$;

б) $\oint\limits_C \operatorname{tg} z\, dz$, где $C:|z|=2$; в) $\oint\limits_C z^3\sin\dfrac{1}{z}dz$, где $C:|z|=1$; г) $\oint\limits_C \dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}dz$, где $C:|z|=2$.

3) Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$; в) $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^2}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{x\sin x\, dx}{x^2+4x+20}$.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, коллоквиум.

ЗАНЯТИЕ № 38-39

ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ-ОРИГИНАЛА, НАХОЖДЕНИЕ ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Литература: [21], с. 251-259; [12], с. 413-422; 439-442; [28], с. 74-98, 142-150.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое единичная функция Хевисайда? Как она используется при построении функции-оригинала?

2. Как осуществляется переход к аналитическому выражению для функций-оригиналов, заданных графически?

3. Как находится изображение кусочно-аналитической функции-оригинала? Какие теоремы операционного исчисления при этом используются?

4. Как осуществляется изображение периодического оригинала?

5. Какие теоремы операционного исчисления при этом используются?

6. Какая функция называется полигональной функции?

7. В каких инженерных приложениях используется графическое задание функции-оригинала?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 27).

Решение. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$:

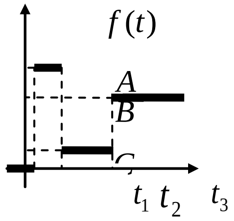
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A, & t_1<t<t_2\\ B, & t_2<t<t_3\\ C, & t>t_3\end{cases} \quad \text{или} \quad f(t)=\begin{cases}0, & t<t_1\\ A\eta(t-t_1), & t_1<t<t_2\\ B\eta(t-t_2), & t_2<t<t_3\\ C\eta(t-t_3), & t>t_3\end{cases}.$$

Для всех $t \geq 0$ получим

$$f(t)=A\eta(t-t_1)-A\eta(t-t_2)+B\eta(t-t_2)-B\eta(t-t_3)+C\eta(t-t_3)=$$
$$=A\eta(t-t_1)-(A-B)\eta(t-t_2)+(C-B)\eta(t-t_3).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания , находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{A}{p}e^{-t_1 p}-\frac{A-B}{p}e^{-t_2 p}+\frac{C-B}{p}e^{-t_3 p}.$$



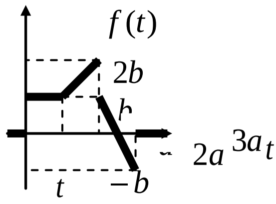


Рис. 27 Рис. 28

Пример 2. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, заданной графически (рис. 28).

Решение. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} b\cdot\eta(t), & 0<t<a \\ \dfrac{b}{a}t\cdot\eta(t-a), & a<t<2a \\ -2\dfrac{b}{a}(t-2{,}5a)\cdot\eta(t-2a), & 2a<t<3a \\ 0, & t>3a \end{cases}$$

Для всех $t\geq 0$ получим

$$f(t)=b\eta(t)-b\eta(t-a)+\frac{b}{a}t\eta(t-a)-\frac{b}{a}t\eta(t-2a)-$$

$$-2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-2a)+2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-3a)=$$

$$=b\eta(t)+\frac{b}{a}(t-a)\eta(t-a)-\frac{b}{a}(3t-5a)\eta(t-2a)+$$

$$+2\frac{b}{a}(t-2{,}5a)\eta(t-3a)=b\eta(t)+\frac{b}{a}(t-a)\eta(t-a)-$$

$$-3\frac{b}{a}(t-2a)\eta(t-2a)-b\eta(t-2a)+$$

$$+2\frac{b}{a}(t-3a)\eta(t-3a)+b\eta(t-3a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания , находим искомое изображение:

$$F(p)=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\frac{3b}{ap^2}e^{-2ap}-\frac{b}{p}e^{-2ap}+\frac{2b}{ap^2}e^{-3ap}+\frac{b}{p}e^{-3ap}=$$

$$=\frac{b}{p}+\frac{b}{ap^2}e^{-ap}-\left(1+\frac{3}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-2ap}+\left(1+\frac{2}{ap}\right)\frac{b}{p}e^{-3ap}.$$

Пример 3. Найти изображение $F(p)$ периодической функции $f(t)$, заданной графически (рис. 29).

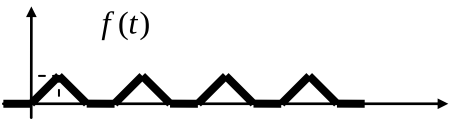


Рис. 29

Решение. Из рисунка видно, что период функции $T=3$. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$ на отрезке $[0,T]$:

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1 \\ 2-t, & 1<t<2 \\ 0, & 2<t<3 \end{cases}$$

Для нахождения изображения периодической функции воспользуемся формулой

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pT}f(t)dt.$$

Для данной функции получим

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2(2-t)e^{-pt}dt+\int_2^3 0\cdot e^{-pt}dt\right].$$

Третий интеграл равен нулю, а первые два интегрируем по частям и получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-3p}}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{e^{-pt}}{p}dt--\frac{(2-t)e^{-pt}}{p}\Bigg|_1^2-\int_1^2\frac{e^{-pt}}{p}dt\right]=\frac{1}{1-e^{-3p}}\cdot\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}=$$

$$=\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}+e^{-2p}\right)}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи [23], №№ 564-570, 578, 580-584.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 40-41

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОРИГИНАЛ, ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Литература: [12], с. 420-430; [21], с. 260-262; [25], с. 400-441; [24], с. 136-141; [23], с. 138-140; [29].

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое передаточная функция дифференциального уравнения?
2. Что такое «входной» и «выходной» сигналы? (По терминологии из ТАУ). Как через них определяется передаточная функция?
3. Как вводится понятие передаточная функция для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и нулевыми начальными условиями?
4. Как используется понятие передаточной функции для нахождения решения линейного дифференциального уравнения?
5. Что такое интеграл Дюамеля? Запишите его.
6. какие теоремы операционного исчисления используются при выводе интеграла Дюамеля?
7. Как вводится интеграл Дюамеля с использованием передаточной функции?

8. При решении каких задач (математических и прикладных) используется формула Дюамеля?

Дополнительные вопросы

1. Для каких функций существует изображение по Лапласу? Как на практике по виду функции-оригинала определить, существует ли для нее изображение по Лапласу? [32], с. 386-388

2. Роль нулевых начальных условий при определении взаимного соответствия межу описание системы управления дифференциальным уравнением и передаточной функцией [30], с. 60-61; [31], с. 40-43.

3. Показать, что передаточная функция может применяться для описания только линейных звеньев и систем автоматического регулирования. *Указание*: воспользоваться принципом суперпозиции.

4. Как определить общую передаточную функцию звеньев, соединенных последовательно, параллельно, в виде обратной связи? [30], с .78-84; [31], с. 64-70.

5. Передаточные функции типовых динамических звеньев систем автоматического регулирования. Как по виду передаточной функции определить характер переходного процесса на выходе звена при подаче на его вход единичного ступенчатого воздействия? [31], с. 55-62.

6. Изображение функции по Фурье как частный случай изображения по Лапласу. Физический смысл изображения функции по Фурье и его использование для частного описания элементов и систем управления. [30], с. 51-52; [31], с. 44-49.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [23] №№ 580, 581, 584.

Форма отчетности: устный опрос, реферат.

ЗАНЯТИЕ № 42-43

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ДЮАМЕЛЯ

Литература: [21], с. 260-262; [12], с. 429-430; [25], с. 400-441; [22], с. 263-264;[23], с. 138-140.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое свертка функций-оригиналов?
2. Каковы свойства свертки функций?
3. Как выводится формула Дюамеля?
4. Запишите интеграл и формулу Дюамеля.
5. Каков алгоритм решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с использованием Дюамеля?
6. По каким формулам находится решение задачи (2) – (3)?
7. В каких случаях применяют формулу Дюамеля при решении дифференциальных уравнений?

Примеры решения задач

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \qquad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Выполняя преобразование Лапласа к обеих частям вспомогательного уравнения, получаем

$$p^2 X_1(p) - X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Откуда находим $X_1(p) = \dfrac{1}{p\left(p^2 - 1\right)}.$

Получаем по методу неопределенных коэффициентов

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right).$$

Находим оригинал

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(-2 + e^t + e^{-t}\right) = \mathrm{ch}t - 1.$$

Находим производную оригинала:

$$x_1'(t) = \mathrm{sh}t.$$

По формуле (9) получаем

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{1+e^{\tau}}\operatorname{sh}(t-\tau)d\tau=\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^{\tau}}d\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}d\tau=$$

$$=\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{e^{-\tau}+1}d\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{d\left(1+e^{\tau}\right)}{1+e^{\tau}}=$$

$$=-\frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}+1-1}{e^{-\tau}+1}de^{-\tau}-\frac{e^{-t}}{2}\ln\left(1+e^{\tau}\right)\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{e^t}{2}\left(\int_0^t de^{-\tau}-\int_0^t \frac{d\left(1+e^{-\tau}\right)}{1+e^{-\tau}}\right)-\frac{e^{-t}}{2}\ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right)=$$

$$=-\frac{e^t}{2}\left(e^{-\tau}\Big|_0^t-\ln\left(1+e^{-\tau}\right)\Big|_0^t\right)-\frac{e^{-t}}{2}\ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right)=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}\ln\left(\frac{1+e^t}{2}\right)+\frac{e^t}{2}\ln\left(\frac{e^t+1}{2e^t}\right)-\frac{1}{2}+\frac{e^t}{2}=$$

$$=\operatorname{sh}t\cdot\ln\frac{1+e^t}{2}+\frac{1}{2}\left(e^t-te^t-1\right).$$

Пример 2. Операционным методом решить задачу Коши

$$x''+x=\frac{1}{1+\cos^2 t},\qquad x(0)=x'(0)=0.$$

Решение. Так как изображение правой части найти сложно, то данную задачу можно решить, используя интеграл Дюамеля. Вспомогательное уравнение $x''+x=1$ в операторной форме имеет вид $X_1\left(p^2+1\right)=\frac{1}{p}$, откуда находим

$$X_1=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Находим оригинал

$$x_1(t)=1-\cos t.$$

Производная оригинала $x_1'=\sin t$.

По формуле (9) получаем

$$x(t)=\int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{1+\cos^2\tau}d\tau=\int_0^t \frac{\sin t\cos\tau-\cos t\sin\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau=\sin t\int_0^t \frac{d(\sin\tau)}{2-\sin^2\tau}+\cos t\int_0^t \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t}=$$

$$=\sin t\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin\tau-\sqrt{2}}{\sin\tau+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^t+\sin t\cdot\operatorname{arctg}\cos\tau\Big|_0^t=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\ln\left|\frac{\sin\tau-\sqrt{2}}{\sin\tau+\sqrt{2}}\right|+\cos t\left(\operatorname{arctg}\cos t-\frac{\pi}{4}\right).$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1) Решить задачу Коши
$x''-3x'+2x=e^t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

2) Решить задачу Коши $x''+x=t\cos 2t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

3) Решить задачу Коши $x''+2x'=t\sin t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

4) Решить задачу Коши $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t},\quad x(0)=x'(0)=0.$

5) Решить задачу Коши $x''-x'=\operatorname{th}t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

6) Решить задачи [23], №№ 611-620

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 44-46

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Литература: [12], с. 429; [21], с. 268-269;
[23], с. 140-142; [22], с. 273-278.

Контрольные вопросы и задания

1. Какова схема решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом? Какие теоремы операционного исчисления при этом используются?
2. Что представляет собой операторная система дифференциальных уравнений?

3. Каковы преимущества операционного метода решения систем дифференциальных уравнений перед классическим методом?

Дополнительные вопросы

1. Применение систем дифференциальных уравнений для описания многомерных систем автоматического регулирования. Как по структурной схеме системы регулирования составить ее описание в операторной форме дифференциальных уравнений? [31], с 81-84.
2. Общая схема численного решения систем дифференциальных уравнений [32], с.129-132
3. Порядок приведения системы дифференциальных уравнений произвольного порядка к матричной форме в операторной записи [30], с.82-84.
4. Способ перехода от матричной формы операторной записи системы дифференциальных уравнений к описанию в пространстве состояний (нормальной форме Коши) [30], с.88-91; [31], с.88-94.
5. Как составить уравнения Эйлера для численного решения систем дифференциальных уравнений, представленных в нормальной форме Коши? [32], с.121-123.
6. Характеристическая матрица системы дифференциальных уравнений. Порядок ее составления. [31], с. 283-284;88-92.
7. Использования собственных чисел характеристической матрицы системы дифференциальных уравнений для определения устойчивости ее решения [31], с.293; [32], с.108-121.

Примеры решения задач

Пример 1. Операционным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' + y = e^t \\ -x + y' = -e^t \end{cases} \text{ при } x(0) = y(0) = 1.$$

Решение. Переходим в уравнениях к операторной форме

$$\begin{cases} pX + Y = \dfrac{1}{p-1} + 1 \\ -X + pY = -\dfrac{1}{p-1} + 1 \end{cases},$$

где

$$x(t) \div X(p),\ y(t) \div Y(p),\ x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX - 1,\ y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY - 1.$$

Решаем полученную систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 + 1,$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{p}{p-1} & 1 \\ \dfrac{p-2}{p-1} & p \end{vmatrix} = \frac{p^2}{p-1} - \frac{p-2}{p-1} = \frac{p^2 - p + 2}{p-1},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p & \dfrac{p}{p-1} \\ -1 & \dfrac{p-2}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p(p-2)}{p-1} + \frac{p}{p-1},$$

$$X = \frac{p^2 - p + 2}{(p-1)\left(p^2+1\right)},\ Y = \frac{p}{p^2+1}.$$

Раскладывая на простейшие дроби, получаем:

$$X = \frac{p^2 - p + 2}{(p-1)\left(p^2+1\right)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Из таблицы оригиналов и изображений находим $x(t) = e^t - \sin t,\ y(t) = \cos t.$

Пример 2. Операционным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases} \text{ при } x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

Решение. Переходя в уравнениях к операторной форме

$$\begin{cases} pX - 1 = -2X - 2Y - 4Z \\ pY - 1 = -2X + Y - 2Z \\ pZ - 1 = 5X + 2Y + 7Z \end{cases},$$

где $x(t) \div X(p), y(t) \div Y(p), z(t) \div Z(p)$, решаем полученную систему линейных уравнений относительно $X(p), Y(p), Z(p)$. Имеем

$$X(p) = \frac{p^2 - 14p + 20}{(p-1)(p-2)(p-3)},\; Y(p) = \frac{p-7}{(p-1)(p-3)},$$

$$Z(p) = \frac{p^2 + 8p - 21}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Раскладывая рациональные дроби на простейшие, находим решение системы:

$$X(p) = \frac{6}{p-1} - \frac{1}{p-2} - \frac{4}{p-3} \div 6e^t - e^{2t} - 4e^{3t} = x(t),$$

$$Y(p) = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-3} \div 3e^t - 2e^{3t} = y(t),$$

$$Z(p) = -\frac{6}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{6}{p-3} \div -6e^t + e^{2t} + 6e^{3t} = z(t).$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) Решить : [23], №№621-623; [26], №№13.131-13.136.
2) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}, x(0) = y(0) = 1.$$

3) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t \end{cases}, \; x(0) = y(0) = 1.$$

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет.

ЗАНЯТИЕ № 47-48

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ТОЭ И ТАУ

Литература: [12], с. 431-432; [23], с. 137-138; [22], с. 286-290.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие задачи ТОЭ решаются операционным методом?
2. Каковы особенности построения операторной схемы замещения?
3. Каков алгоритм расчета электрических цепей методом операционного исчисления?
4. Какие физические законы лежат в основе применения операторного метода к расчету электрических цепей?
5. Какие теоремы операционного исчисления используются при решении таких задач?
6. Как осуществляется переход от изображения к оригиналу при расчете электрических цепей?
7. Как зависит характер переходного процесса от корней характеристического уравнения (знаменателя изображения)?
8. Какие задачи ТАУ решаются операционным методом?

9. Какова содержательная интерпретация в терминах ТАУ математических составляющих линейного дифференциального неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и начальных условий задачи (входной и выходной сигналы, передаточная функция)?

Дополнительные вопросы

1. Математическое описание линейных элементов и систем автоматического регулирования алгебраическими выражениями в операционной форме [30], с. 48-50; [31], с.40-44.
2. Математическое описание многомерных систем регулирования с помощью матриц передаточных функций [30], с.66-67; [31], с.81-86.
3. Анализ устойчивости одномерной системы регулирования по ее характеристическому уравнению [31], с. 123-128; [32], с.108-110.
4. Анализ устойчивости многомерной системы регулирования по ее характеристической матрице [31], с.293-295; [32], с. 110-121.
5. Определение показателей точности системы автоматического регулирования с помощью теоремы о предельных значениях, примененной к передаточной функции ошибки системы [31], с.39;181.
6. Анализ показателей качества системы регулирования по корням характеристического полинома. Диаграмма Вышнеградского [30], с.102-104; [31], с.189-194.
7. Понятие о D-разбиении плоскости коэффициентов характеристического полинома. Использование D-разбиения для анализа устойчивости и качества систем регулирования [31], с.155-159.
8. Алгебраический методы синтеза систем автоматизированного регулирования методом типовых передаточных функций [30], с. 192-197.

9. Алгебраический методы синтеза систем регулирования методом формирования желаемого расположения корней характеристического полинома (модальное уравнение) [30], с 167-175.

Пример решения задачи

Пример . В контуре, состоящем из последовательно соединенных катушки индуктивности L, конденсатора емкости C и резистора сопротивления R в момент времени $t=0$ включается Э.Д.С. $e(t)$ (рис. 30). В этот момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю. Найти законы изменения напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ и тока в цепи $i(t)$.

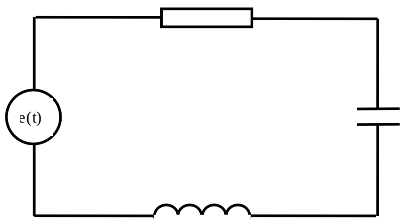


Рис. 30

Решение. Поскольку элементы цепи соединены последовательно, то из закона Кирхгофа имеем равенство

$$u_L + u_C + u_R = e(t) \tag{1}$$

где соответствующие напряжения выражаются через ток в цепи по формулам:

$$u_R = Ri, \tag{2}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \tag{3}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_C(0), \tag{4}$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (5)$$

В силу (2),(3) и (5) имеем $u_R = RC\frac{du_C}{dt}$, $u_L = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$ и поэтому из (1) получаем дифференциальное уравнение

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = e(t) \qquad (6)$$

с начальными условиями

$$u_C(0) = 0,\ \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{C}i(0) = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай постоянной Э.Д.С. $e(t) = E$. Совершая преобразование Лапласа с учетом (7) получим:

$$u_C(t) \div U(p),\ \frac{du_C}{dt} \div pU(p) - u_C(0) = pU,$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} \div p^2U(p) - u_C(0)p - u_C'(0) = p^2U,$$

В нашей задаче от дифференциального уравнения (6) перейдем к операторному уравнению $U\left(LCp^2 + RCp + 1\right) = \frac{E}{p}$, откуда находим изображение напряжения на конденсаторе:

$$U(p) = \frac{E}{LCp\left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}\right)}. \qquad (8)$$

В квадратном трехчлене выделим полный квадрат:

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)=(p+\alpha)^2+\omega^2,$$

где $\alpha=\dfrac{R}{2L}$, $\omega^2=\dfrac{1}{LC}-\alpha^2$. Раскладывая дробь в (8) на сумму простейших дробей, получим

$$U(p)=E\left(\frac{1}{p}-\frac{p+2\alpha}{(p+2\alpha)^2+\omega^2}\right). \tag{9}$$

Далее рассмотрим различные возможные случаи. а) Если $R=0$ (сверхпроводимость), то $\alpha=0$, $\omega^2=\dfrac{1}{LC}$ и выражение (9) примет вид $U(p)=E\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$. Переходя от изображения к оригиналу, получим искомое напряжение:

$$u_C(t)=E(1-\cos\omega t)=E\left(1-\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Отсюда в силу (5) находим ток в контуре:

$$i(t)=\frac{E}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом, при $R=0$ имеют место гармонические колебания тока в контуре и напряжения

б) Если сопротивление мало ($R<2\sqrt{L/C}$), то $\omega^2>0$ и ω можно считать действительным положительным числом. В этом случае в формуле (9) выражение в скобках имеет следующий оригинал

$$\frac{1}{p}-\frac{p+2\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}=\frac{1}{p}-\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}-\frac{\alpha}{\omega}\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\div 1-e^{-\alpha t}\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

Получаем искомое напряжение на конденсаторе:

$$u_C(t)=E\left(1-e^{-\alpha t}\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t\right).$$

Отсюда в силу (5) находим ток в контуре:

$$i(t) = CE\left(\omega e^{-\alpha t}\sin\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t\right) =$$

$$CE\frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t = \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

В этом случае имеют место затухающие колебания тока в контуре и напряжения на конденсаторе, причем напряжение на конденсаторе стремится к E, а ток к нулю.

в) Если $R = 2\sqrt{L/C}$, то $\alpha = 1/\sqrt{LC},\ \omega^2 = 0$ и выражение (9) примет вид $U(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p+\alpha} - \frac{\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)$. переходя от изображения к оригиналу, получим искомое напряжение:

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} - \frac{1}{\sqrt{LC}}te^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\right).$$

Отсюда в силу (5) находим ток в контуре:

$$i(t) = \frac{E}{L}te^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

В этом случае колебания в контуре отсутствуют, напряжение на конденсаторе стремится к E, а ток в цепи стремится к нулю.

г) Если сопротивление велико ($R > 2\sqrt{L/C}$), то $\omega^2 < 0$. Обозначим $\beta^2 = -\omega^2$, где β можно считать действительным положительным числом. В этом случае в формуле (9) выражение в скобках имеет следующий оригинал

$$\frac{1}{p} - \frac{p+2\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2} = \frac{1}{p} - \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2} \div$$

$$1 - e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t.$$

Получаем искомое напряжение на конденсаторе:

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t\right).$$

Отсюда в силу (5) находим ток в контуре:

$$i(t) = CE\left(-\beta e^{-\alpha t} sh\beta t + \frac{\alpha^2}{\beta}e^{-\alpha t} sh\beta t\right) =$$

$$= CE\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta}e^{-\alpha t} sh\beta t = \frac{E}{L\beta}e^{-\alpha t} sh\beta t.$$

В этом случае колебания в контуре отсутствуют, напряжение на конденсаторе стремится к E, а ток в цепи стремится к нулю, так как $\alpha > \beta > 0$.

Замечание. Операционный метод используется и при решении интегро-дифференциальных уравнений. В нашей задаче можно вначале находить ток $i(t)$, для которого в силу уравнений (1) (4) имеем

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_C(0) = E. \qquad (10)$$

Если $i(p) \div I(p)$, то с учетом начальных условий (7) и свойства интегрирования оригинала получим

$$\frac{di}{dt} \div pI(p) - i(0) = pI(p),$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_C(0) \div \frac{1}{Cp}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{I}{Cp}.$$

Производим преобразование Лапласа уравнения (10):

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = \frac{E}{p}.$$

Отсюда получаем

$$I\left(lp+R+\frac{1}{Cp}\right)=\frac{E}{p},\ I(p)=\frac{E}{L\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}\right)}=\frac{E}{L\left((p+\alpha)^2+\omega^2\right)}=$$

$$=\frac{E}{L\omega}\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},$$

где $\alpha=\frac{R}{2L}$, $\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=\frac{1}{LC}-\alpha^2$. Далее рассмотрим различные возможные случаи.

а) Если $R=0$ (сверхпроводимость), то $\alpha=0$, $\omega^2=\frac{1}{LC}$ и выражение (11) примет вид $I(p)=\frac{E}{L\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Переходя от изображения к оригиналу, получим искомый ток:

$$i(t)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}\omega}\sin\omega t.$$

Таким образом, при $R=0$ имеют место гармонические колебания тока в контуре.

б) Если сопротивление мало ($R<2\sqrt{L/C}$), то $\omega^2>0$ и ω можно считать действительным положительным числом. В этом случае

$$i(t)=\frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t\ .$$

В этом случае имеют место затухающие колебания тока в контуре, так как $a>0$.

в) Если $R=2\sqrt{L/C}$, то $a=1/\sqrt{LC}$, $\omega^2=0$ и выражение (11) примет вид $I(p)=\frac{E}{L(p+\alpha)^2}$. Переходя от изображения к оригиналу, получим искомое значение тока:

$$i(t)=\frac{E}{L}te^{-\alpha t}.$$

В этом случае колебания в контуре отсутствуют, ток в цепи стремится к нулю, так как $a > 0$.

г) Если сопротивление велико $\left(R > 2\sqrt{L/C}\right)$, то $\omega^2 < 0$.

Обозначаем $\beta^2 = -\omega^2$, где β можно считать действительным положительным числом. В этом случае выражение (11) имеет следующий оригинал

$$\frac{E}{L}\frac{1}{(p+\alpha)^2+\omega^2} = \frac{E}{L\beta}\frac{E}{(p+\alpha)^2-\beta 2} \div \frac{E}{L\beta}e^{-\alpha t}sh\beta t.$$

В этом случае колебания в контуре отсутствуют, ток в цепи стремится к нулю, так как $\alpha > \beta > 0$.

Пример 2. Операционный метод применим не только при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, но и для некоторых уравнений с частными производными, например, для линейных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда неизвестная функция зависит от двух переменных. С помощью преобразования Лапласа такое уравнение можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром. Решая это уравнение и применяя к его решению обратное преобразование Лапласа по параметру, получим решение исходной задачи.

Рассмотрим задачу распространения электрических колебаний вдоль длинных линий. Известно, что напряжение $v(x,t)$ и ток $i(x,t)$ в линии связаны системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + Ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + gv + C\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{*}$$

где R - активное сопротивление; L - индуктивность; g - проводимость изоляции; C - емкость, рассчитанные на единицу длины линии.

Будем решать задачу, для которой в начальный момент времени напряжение и ток равны нулю: $v(x,0)=0$, $i(x,0)=0$. Совершая преобразования Лапласа: $v(x,t)\div V(x,p)$ и $i(x,t)\div I(x,p)$, получаем по теореме о дифференцировании оригинала $\frac{\partial v}{\partial t}\div pV$ и $\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial \mathrm{t}}\div pI$. По теореме о дифференцировании по параметру: $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial i}{\partial x}=\frac{\partial I}{\partial x}$ - здесь считаем, что параметр p - постоянная величина. После простых преобразований система, соответствующая (*), примет вид

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx}=-(R+Lp)I \\ \frac{dI}{dx}=-(g+Cp)V. \end{cases}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведением к одному уравнению второго порядка получаем

$$\frac{d^2V}{dx^2}-(Lp+R)(Cp+g)V=0.$$

Его общее решение имеет вид $V(x,p)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}$, где $\lambda=\sqrt{(Lp+R)(Cp=g)}$- корень характеристического уравнения. Функцию $I(x,p)$ найдем дифференцированием из первого уравнения системы

$$I(x,p)=-\frac{1}{Lp+R}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\lambda}{Lp+R}\left(Be^{-\lambda x}-Ae^{\lambda x}\right)=\sqrt{\frac{Cp+g}{Lp+R}}\left(Be^{-\lambda x}-Ae^{\lambda x}\right).$$

Чтобы найти постоянные A и B нужно задать краевые условия, т.е. знать «поведение» напряжения и тока в начале ($x=0$) и в конце отрезка ($x=l$) или ($x=\infty$). Пусть $v(0,t)=v_1(t)$, $v(l,t)=v_2(t)$, $v_1(t)=V_1(p)$, $v_2(t)=V_2(p)$. Так как мы рассматриваем более простую задачу (линия очень длинная), то считаем, что

$l=\infty$. Условие $v(l,t)=v_2(t)$ заменяется требованием ограниченности как функции $V(x,p)$, так и $I(x,p)$ при $x\to\infty$. Если λ выбрано так, что $\operatorname{Re}\lambda>0$, то $e^{\lambda x}\to\infty$ при $x\to\infty$ и нужно положить $A=0$. Начальному условию $v(0,t)=v_1(t)$ соответствует $V\big|_{x=0}=V_1(p)$. Таким образом, $V(x,p)=V_1(p)e^{-\sqrt{(Lp+R)(Cp+g)}x}$ и $I(x,p)=\sqrt{\dfrac{Cp+g}{Lp+R}V(x,p)}$, так как $e^{-\lambda x}=1$ при $x=0$, а $B=V\big|_{x=0}$. Рассмотрим простейший случай, соответствующий линии без потерь, то есть при $R=g=0$. В этом случае $V(x,p)=V_1(p)e^{-\sqrt{LC}px}$ и $I(x,p)=\sqrt{\dfrac{C}{L}}V(x,p)$. Оригиналы находятся по теореме запаздывания $v(x,t)=v_1\left(t-x\sqrt{LC}\right)$ при $t-x\sqrt{LC}>0$, $v(x,t)=0$ при $t-x\sqrt{LC}\le 0$. Процесс распространения как $v(x,t)$ так и $i(x,t)$ носит волновой характер. В точке x напряжение возникает в момент $t=x\sqrt{LC}$, значит, скорость распространения волны равна $x/t=1/\sqrt{LC}$. В общем случае процесс будет происходить с той же скоростью, но затухать по амплитуде из-за потерь в линии.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить : [23], №№ 600, 601; [22], №№ 13.164-13.166..

Форма отчетности: устный опрос, рефераты, расчетно-графические задания и курсовые работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее пособие написано авторами на основе многолетнего опыта преподавания курса высшей математики в техническом университете и рассчитано на студентов тех специальностей, в программу которых входят курсы «Математика», «Спецглавы математики».

Материал пособия авторы постарались изложить так, чтобы максимально помочь студентам в их самостоятельной работе. С этой целью в пособии разобрано большое количество примеров, которые помогут студентам глубже усвоить изучаемый материал.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физмат, 1975. 272 с.

2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М,: Наука, 1976, 1930. 320 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1984. 176 с.

4. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1979. 390 с.

5. Мантуров О.В., Матвеев Н.В. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1986. 480 с.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Высшая школа, 1986, 222 с.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 462 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука 1967.

9. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. 232 с.

10. Беклемишев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987. 496 с.

11. Методические указания к изучению радела "Численное решение уравнений и систем" курса "Высшей математики" / В.Г. Трофимов, В.И. Минаков, В.С. Купцов. 1989. 32 с.

12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1.,2. - М.:Наука, 1985.

13. Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 383 с.

14. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1986. Ч.I. 308 с.

15. Федотенко Г.Ф., Катрахова А.А., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2008.

16. КатраховаА.А., Купцов В.С., Курс лекций по дисциплине «Математика».Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2015. 302 с.

17. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991.

18. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.,2. - М.: Высш. шк., 1980.

19. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.:Наука, 1986.

20. КатраховаА.А., Купцов В.С.,Курс лекций по дисциплине «Математика».Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2015. 302 с.

21. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа/ П.И. Романовский. М.:Наука,1980

22. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.:Наука,1980

23. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.:Наука,1981

24. Шостак Р.Я. Операционное исчисление /Р.Я. Шостак. М.:Высш.шк., 1968.

25. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного /Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.:Наука,1989.

26. Канторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях /М.И. Канторович. М.: Советское радио, 1985.

27. Теоретические основы электротехники /под ред. П.А. Ионкина. М.:Высш.шк., 1971,Т.1.

28. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники /Л.Р. Нейман, К.С. Демидович. Л.:Энергоиздат, 1985.Т.1.

29. Попова Т.В. «Электротехника»; «Лабораторный практикум» /Т.В. Попова, Т.А. Тонн. Воронеж: ВГТУ, 2912.

30. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем /Н.Н. Иващенко. М.: Машиностроение, 1978.

31. Теория автоматического управления /под ред. А.А. Воронова. М.:Высш.шк., 1977.

32. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления /под ред. В.А. Бесекерского. М.:Наука,1978.

33. Федотенко Г.Ф., Катрахова А.А., Дифференциальные уравнения и их приложения. Учеб.пособие / Воронеж. гос.техн.ун-т. Воронеж, 2009.

34. Катрахова А.А., Семенов. М.П. Эоементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие / М.П. Семенов. – Воронеж. ВГТУ, 2004.

35. КатраховаА.А., Купцов В.С., Купцов А.В. Кратные интегралы. Векторный анализ: учеб. пособие. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический универси-

тет». 2011.

36. КатраховаА.А., Васильев Е.М., Купцов В.С., Купцов А.В. Ряды Фурье и их применение в решении задач математической физики и обработки информации: учеб. пособие. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет». 2014.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Катрахова Алла Анатольевна
Васильев Евгений Михайлович
Купцов Валерий Семенович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА», «СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Часть 1

В авторской редакции

Подписано к изданию 21.06.2017.

Объем данных 2,98 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп.,14