МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный
технический университет

Е.Г.Глушко, А.П.Дубровская,
Л.Д.Кретова, Н.Б.Ускова

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Утверждено Редакционно-издательским
советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2010

УДК 51

Элементы линейной алгебры: Учеб.пособие. Е.Г.Глушко, А.П.Дубровская, Л.Д.Кретова, Н.Б.Ускова. Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2010.143 с.

В учебном пособии содержится изложение теоретического материала по разделу “Элементы линейной алгебры” курса высшей математики в соответствии с программой этого курса для инженерно-технических специальностей вузов. Теоретический материал иллюстрируется примерами. В конце каждой темы даются задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованы при проведении практических занятий по данной теме.

Библиогр.: 5 назв.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук,
проф. И.Л.Батаронов
Рецензенты: кафедра математических методов
исследования операций Воронежского
государственного университета;
канд. физ.-мат. наук, доц. А.А.Катрахова

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы методы линейной алгебры находят все большее применение при рассмотрении многочисленных прикладных вопросов. Поэтому основные вопросы линейной алгебры включены в программу по математике для технических вузов.

Пособие составлено в виде лекций, объединенных по темам, читавшихся авторами в течение ряда лет в ВГТУ. Объем излагаемого материала соответствует времени, отведенному на изучение раздела «Линейная алгебра», читаемого в рамках математических дисциплин студентам первого курса инженерно-технического профиля.

Тема «Матрицы» включает действия над матрицами, понятие и вычисление ранга матрицы. Во 2-м разделе рассматриваются методы решения и исследования систем линейных уравнений. Далее, в 3-м разделе вводится понятие линейного пространства, базиса и размерности линейного пространства, изучается преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Следующая тема посвящена изучению линейных операторов, построению матрицы линейного оператора в заданном базисе, действиям над линейными операторами, рассматривается вопрос нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

В 5-м разделе более подробно изложены вопросы, касающиеся вещественного евклидового пространства и линейных, самосопряженных операторов. В заключение дается теория квадратичных форм и ее применение к приведению уравнений и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Каждая тема иллюстрируется примерами, поясняющими применение основных теоретических результатов. В конце каждой темы предложены задачи и упражнения для самостоятельного решения.

1.МАТРИЦЫ

1.1. Основные определения

Матрицей размера mxn называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij} (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) называются *элементами* матрицы А, причем первый индекс указывает номер строки, а второй номер - столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

В дальнейшем матрицу А будем сокращённо обозначать символами $A=(a_{ij})_{m,n}$ или $A=(a_{ij})$

Рассмотрим некоторые частные виды матриц.

Если $m = n$, то А называется *квадратной* матрицей.

Матрица размера 1xn, содержащая только одну строку, называется *матрицей - строкой*, а матрица размера - mx1 - *матрицей - столбцом.*

Матрица, все элементы которой равны 0, называется *нулевой* и обозначается О.

Квадратная матрица, у которой все отличные от нуля элементы находятся на главной диагонали, называется *диагональной*. Используя символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } \ i = j, \\ 0 & \text{при } \ i \neq j, \end{cases}$$

элементы диагональной матрицы можно записать в виде $a_{ij}=\lambda_i \delta_{ij}$, где λ_i -любые числа.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается:

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие её определитель, который обозначается detA=|A| и вычисляется по известному правилу разложения определителя по элементам строки или столбца.

Очевидно, что определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали, а определитель единичной матрицы равен единице.

Если $\det A \neq 0$, то квадратная матрица называется *невырожденной*, в противном случае - *вырожденной*.

Две матрицы A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинакового размера называются *равными*, если их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}\ \forall\, i,j$.

1.2. Действия над матрицами

Суммой A+B матриц A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинакового размера mxn, называется матрица C=(c_{ij}), того же размера, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n) \qquad (1.2)$$

Произведением λA матрицы A=(a_{ij}) размера mxn на действительное (или комплексное) число λ называется матрица D=(d_{ij}) того же размера, элементы которой вычисляются по формулам:

$$d_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n). \qquad (1.3)$$

Нетрудно убедиться, что операции сложения и умножения на число подчиняются хорошо известным из алгебры чисел правилам:

1. A+B = B+A (свойство коммутативности)
2. A+(B+C)=(A+B)+C (свойство ассоциативности)
3. λ A+B $=\lambda$A$+\lambda$B
4. $(\lambda+\mu)$A=λA+μA
(свойства дистрибутивности)
5. $\lambda(\mu$A)=(λ μ)A
6. 0A=0
7. λ 0=0

<u>Разностью</u> A-B матриц A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинакового размера mxn называется матрица C=(c_{ij}) того же размера, определяемая по формуле

C=A-B=A+(-1)B.

Из (1.2) и (1.3) следует, что :

$c_{ij}=a_{ij}+(-1)b_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n).

<u>Произведением</u> AB матрицы A=(a_{ij}) размера mxp на матрицу B=(b_{ij}) размера pxn, называется матрица C=(c_{ij}) размера mxn, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n). \qquad (1.4)$$

Из этого определения следует, что для получения элемента c_{ij} надо все элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и просуммировать полученные произведения. Следовательно, число элементов в i-й строке (число столбцов матрицы A) должно совпадать с числом элементов в столбцах матрицы B , т.е. с числом её строк.

Например, если 2

$A=\Bigg(\quad 3$

, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, то $AB=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$.

Произведение BA в этом случае не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A и размеры матриц не позволяют выполнить их умножение.

Этот пример наглядно показывает, что матричное умножение в общем случае некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. При этом произведение BA может вообще не существовать, а может просто не совпадать с AB.

Приведем примеры:

$AB=\Bigg($ –

,

$$AB = 1 \quad 2 \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = -4 \neq BA = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} 1 \quad 2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\-2 & -4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при умножении матриц следует различать умножение матрицы A на B справа(AB) и слева (BA).

Однако, в некоторых частных случаях AB=BA и такие матрицы называются <u>*перестановочными*</u>. Приведём пример перестановочных матриц:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\18 & 26\end{pmatrix}; BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\18 & 26\end{pmatrix}.$$

Отметим несколько легко проверяемых свойств матричного умножения:

1. (AB)C = A(BC)
2. (A+B)C = AC+BC; C(A+B) = CA+CB
3. (лA)B = λ(AB) = A(лB)
4. AE = EA = A
5. det(AB) = detA detB.

Здесь предполагается, что размеры матриц A,B,C позволяют выполнить все указанные действия.

Пример. Найти $\frac{1}{3}A^2 - 2BC$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 21 & -9 \\ 3 & 12 & 6 \\ -3 & 3 & 30 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -19 & 46 \\ \underline{\underline{13}} & 49 & -8 \\ 20 & \underline{\underline{46}} & -7 \end{pmatrix}.$$

(Поясним, как получены отмеченные элементы $d_{21} = 13$ и $d_{32} = 46$ матрицы $D = BC$. Т.к. d_{21} имеет индекс $_{21}$, то он равен сумме произведений соответствующих элементов 2-й строки матрицы B и 1-го столбца матрицы C:

$d_{21} = -5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 13$.

Аналогично для нахождения элемента d_{32} нужно задействовать 3-ю строку матрицы B и 2-й столбец матрицы C:

$d_{32} = 0\cdot(-3)+(-3)\cdot(-1)+7\cdot 6+1\cdot 1 = 46$).

Отсюда получаем

$$\frac{1}{3}A^2 - 2BC = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 27 & 21 & -9 \\ 3 & 12 & 6 \\ -3 & 3 & 30 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -19 & 46 \\ 13 & 49 & -8 \\ 20 & 46 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 38 & -92 \\ -26 & -98 & 16 \\ -40 & -92 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 45 & -95 \\ -25 & -94 & 18 \\ -41 & -91 & 24 \end{pmatrix}.$$

1.3. Транспонированная матрица

Транспонированием матрицы А называется замена её строк столбцами с сохранением их номеров. Полученную после этого матрицу $\mathrm{A}^T = (a_{ij}^*)$ называют транспонированной. Очевидно, что:

$$a_{ij}^* = a_{ji} \ \forall i, j, \ (\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A}; \ \det \mathrm{A}^T = \det \mathrm{A}.$$

При сложении и умножении транспонированных матриц можно использовать соотношения:

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T, \ (k\mathrm{A})^T = k\mathrm{A}^T; \ (\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T.$$

Если квадратная матрица А совпадает со своей транспонированной матрицей A^T, то она называется *симметрической*. В этом случае $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall\, i,j$, т.е. все элементы матрицы А, симметричные относительно главной диагонали, должны быть равны.

Если $\mathrm{A} = -\mathrm{A}^\mathrm{T}$, то матрица А называется *кососимметрической*, а её элементы, симметричные относительно главной диагонали, отличаются только знаком.

1.4.Обратная матрица

Матрица В, удовлетворяющая условию АВ=ВА=Е, называется *обратной* к А матрицей.

Будем обозначать обратную матрицу через A^{-1} и выясним как её можно найти.

Теорема. У каждой квадратной невырожденной матрицы А размера *nxn* существует единственная обратная матрица A^{-1}, вычисляемая по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элемента a_{ij} в detA.

Доказательство. Найдем произведение $AA^{-1}=C$ и покажем, что C = E. По правилам матричного умножения (1.4) имеем:

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \quad ,$$

где i - номер строки матрицы А, а j - номер столбца матрицы A^{-1}. Из свойств определителей следует, что:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ при } i \neq j, \\ \det A, \text{ при } i=j, \end{array}\right.$$

следовательно, все элементы матрицы С, расположенные на главной диагонали, равны единице, а остальные - нулю, т.е. С=Е.

Аналогично доказывается, что $A^{-1}A=E$.

Для доказательства единственности предположим, что матрица А имеет две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда справедливо соотношение:

$$AA_1^{-1} - AA_2^{-1} = E - E = 0 \Rightarrow A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0 .$$

Умножим левую и правую часть этого равенства слева на матрицу A_1^{-1} :

$$A_1^{-1}A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = A_1^{-1}0 \Rightarrow E(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1^{-1} - A_2^{-1} = 0 \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1},$$

т.е. обратная к А матрица единственна, что и требовалось доказать.

Заметим, что в матрице (1.5) индексы у алгебраических дополнений совпадают с индексами элементов не самой матрицы А, а транспонированной - A^T. Поэтому при нахождении A^{-1} рекомендуется убедиться в том, что А - невырожденная матрица, т.е. $\det A \neq 0$, вычислить алгебраические дополнения всех её элементов и составить так называемую присоединенную матрицу A^v, заменив в матрице А элементы a_{ij} на их алгебраические дополнения A_{ij}, затем протранспонировать эту матрицу и умножить на число 1/detA.

Пример 4. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Решение.

$\det A = 32 + 84 - 45 - 30 - 84 + 48 = 5 \neq 0,$ следовательно, существует A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 66; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 7\end{vmatrix}=9; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & 5\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-43;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=10.$$

Отсюда получаем

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-13 & -1 & 9\\ 66 & 2 & -43\\ -15 & 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13/5 & -1/5 & 9/5\\ 66/5 & 2/5 & -43/5\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 7\\ 6 & 3 & 8\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-13 & -1 & 9\\ 66 & 2 & -43\\ -15 & 0 & 10\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-13 & -1 & 9\\ 66 & 2 & -43\\ -15 & 0 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 7\\ 6 & 3 & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

A^{-1} найдено верно.

Пример. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим $\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11}=A_{12}=0$; $A_{13}=1$; $A_{21}=6$; $A_{22}=-2$; $A_{23}=-3$; $A_{31}=2$; $A_{32}=0$; $A_{33}=-1$.

Составим присоединённую матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Протранспонировав эту матрицу и умножив на 1/detA = 1/2, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^{V})^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

1.5 Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размера m x n (1.1). Выберем в ней k строк с номерами $i_1<i_2<...<i_k$ и k столбцов с номерами $j_1<j_2<...<j_k$.

<u>Минором</u> k-го порядка матрицы A называется определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выбранных строк и столбцов.

Например, для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

можно составить четыре минора третьего порядка, исключая по очереди один из столбцов, 18 миноров второго порядка, вычеркивая два столбца и одну строку и 12 миноров первого порядка, которые равны элементам матрицы.

<u>Рангом</u> матрицы A (RgA) называется наибольший порядок r отличных от нуля миноров этой матрицы.

Из этого определения следует, что ранг любой ненулевой матрицы размера mxn есть число r, удовлетворяющее неравенству $1 \le r \le \min(m,n)$.

Например, у матрицы А (1.6) размера 3х4 все миноры третьего порядка равны нулю (проверьте!), а минор второго порядка:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 .$$

Согласно определению, ранг этой матрицы равен 2. Нетрудно убедиться, что у матрицы А есть и другие миноры второго порядка, отличные от нуля.

Любой такой отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен её рангу, называется *базисным минором*.

У рассмотренной выше матрицы А (1.6), наряду с M_2 базисными, очевидно, являются также миноры:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15,$$

так как все они отличны от нуля.

У квадратной невырожденной матрицы определитель не равен нулю, поэтому базисный минор совпадает с её определителем, следовательно, ранг матрицы всегда равен её размеру.

Ранги ненулевых матриц - строк и матриц - столбцов, очевидно, равны единице, а базисными минорами являются все ненулевые элементы этих матриц.

Вычисление ранга матрицы непосредственно по определению довольно затруднительно, так как сводится к вычислению большого числа определителей. Его можно немного упростить, применяя метод окаймляющих миноров.

Идея этого метода заключается в следующем. Если найден минор порядка r отличный от нуля, а все миноры порядка r+1, которые содержат в себе (окаймляют) этот минор, равны нулю, то ранг матрицы равен r. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор порядка r+1 и вся процедура повторяется. Такой подход позволяет сократить количество вычисляемых миноров.

Например, после того как у матрицы (1.6) найден минор $M_2 \neq 0$, достаточно вычислить только два окаймляющих его минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

и убедившись, что они равны нулю, сделать вывод, что RgA=2.

1.6. Элементарные преобразования матриц

Вычисление ранга можно существенно упростить, если предварительно преобразовать матрицу, не изменяя её ранга. Рассмотрим такие преобразования.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие :

1. Умножение всех элементов некоторой строки матрицы на число $\lambda \neq 0$.

2. Прибавление ко всем элементам некоторой строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число α.

3. Перестановка строк.

4. Те же преобразования столбцов.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, называются *эквивалентными*, что обозначается так:

$$A \sim B.$$

Заметим, что элементарные преобразования обратимы. Если матрица A получена из B с помощью конечного числа элементарных преобразований, то и B может быть преобразована в A при помощи элементарных преобразований.

Теорема. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Для доказательства этой теоремы надо показать, что элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга. Рассмотрим отдельно каждое из преобразований.

1. Если какую-нибудь строку матрицы (1.1) умножить на число $\lambda \neq 0$, то любой её минор, содержащий элементы этой строки окажется умноженным на λ, а не содержащий— останется неизменным. Это значит, что все миноры, равные нулю, останутся равными нулю, а ненулевые - останутся ненулевыми, следовательно, ранг матрицы не изменится.

2. Второе элементарное преобразование не изменит тех миноров, которые не содержат изменённую строку. Рассмотрим произвольный минор M_r эквивалентной матрицы B, содержащий измененную строку. По свойствам определителей $M_r = M'_r + \alpha M''_r$, где M'_r и M''_r - миноры матрицы A. Поэтому, если все миноры порядка *r* матрицы A были равны нулю, то и все миноры *r*-го порядка матрицы B тоже равны нулю. Следовательно, ранг при таком преобразовании увеличиться не может, т.е. RgB $\leq$ RgA. Но элементарные преобразования обратимы, поэтому, совершая над матрицей B обратное преобразование, получим RgA $\leq$ RgB. Из этих двух неравенств следует, что RgB = RgA.

3. При перестановке строк могут измениться только знаки определителей, поэтому ранг матрицы ни повыситься, ни понизиться не может.

4. Доказанные утверждения справедливы и для столбцов, так как при транспонировании матрицы её определитель не меняется.

Таким образом, любое конечное число элементарных преобразований матрицы не изменяет её ранга, что и требовалось доказать.

1.7. Вычисление ранга матрицы

методом элементарных преобразований

Рассмотрим наиболее распространенный способ вычисления ранга матрицы. Он заключается в том, что матрица A (1.1) с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

где $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля.

Ранг матрицы B, очевидно, равен числу её ненулевых строк r, так как один из её миноров порядка r:

$$M_r = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{12}$$

,

отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка содержат хотя бы одну нулевую строку и поэтому равны нулю. Но матрица A эквивалентна B, следовательно, её ранг тоже равен r.

Покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A размера mxn можно привести к ступенчатому виду.

Если элемент, расположенный в левом верхнем углу матрицы A (1.1) равен нулю, то поменяем местами строки или столбцы матрицы так, чтобы $a_{11} \neq 0$ (для ненулевой матрицы это всегда можно сделать). Затем преобразуем матрицу так, чтобы остальные элементы первого столбца оказались равными нулю.

Для этого достаточно умножить первую строку на числа $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11},..., -a_{m1}/a_{11}$ и прибавить соответственно к 2,3,...,m-й строке. После этих преобразований матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad (1.8)$$

где $C_1=(c_{ij})$—вспомогательная матрица размера $(m$-1)х(n-1) составленная из преобразованных элементов 2,3,...,m-й строк и 2,3,...,n-го столбцов матрицы. Если $C_1=0$, то матрица (1.8) уже имеет ступенчатый вид и преобразования завершены.

В противном случае (при $C_1 \neq 0$) рассмотрим элемент c_{11}, находящийся на пересечении первой строки и первого столбца матрицы C_1. Если этот элемент равен нулю, то поменяем местами строки и столбцы этой матрицы так, чтобы в её левом верхнем углу появился ненулевой элемент $\tilde{c}_{11}$. Умножая первую строку матрицы, содержащую элемент $\tilde{c}_{11}$, на подходящие числа и прибавляя её после умножения ко всем остальным строкам, получаем матрицу $\tilde{C}_1 \sim C_1$, в которой все элементы первого столбца, кроме $\tilde{c}_{11}$, равны нулю. Затем зафиксируем первую строку этой матрицы и те же действия выполним с матрицей C_2 размера (m-2)х(n-2). Будем продолжать преобразования до тех пор, пока вспомогательная матрица C_{m-r} не окажется равной нулю. Это означает, что получена матрица В ~ А, у которой $m-r$ последних строк нулевые, т.е. эта матрица имеет ступенчатый вид (1.7), поэтому её ранг а, следовательно, и ранг матрицы А равны r.

Пример. Методом элементарных преобразований вычислить ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Элемент a_{11}=0, поэтому поменяем местами первую и третью строки:

$$\text{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для получения нулевых элементов в первом столбце прибавим ко второй и четвертой строкам первую, умножив её предварительно на -2 и +1 соответственно :

$$\text{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к четвертой строке третью, а к третьей вторую, умноженную на 7, получаем:

$$\text{A} \sim \text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица B имеет ступенчатый вид, её ранг равен числу ненулевых строк, следовательно, RgA=RgB=3.

Пример 6. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу А к трапецеидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2+3l_1 \\ l_3+l_1 \\ l_4+8l_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 15 & -3 & -4 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3-l_2 \\ l_4-3l_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы, являющейся трапецеидальной, равен 3; следовательно, rang A = 3.

Упражнения

1, Найти матрицы 3A+2B и 5A-3B, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицы АВ и ВА, если они существуют:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & 6 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

3. Найти разность матриц АВ-ВА, если

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

4.Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 18 & 8\\ -3 & -1 & -2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $(AB)^{T}$; $A^{T}B^{T}$ и $B^{T}A^{T}$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

6. Доказать справедливость соотношения $(AB)^T=B^TA^T$.

7. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Найти A^2, A^3.

8. Найти все матрицы, перестановочные с заданными:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица A размера 5x3. Можно ли умножить: а) столбец на матрицу A; б) матрицу A на столбец; в) строку на матрицу A; г) матрицу A на строку; д) матрицу A на матрицу размера *m*x*n*? При утвердительном ответе укажите, какие размеры должны иметь множитель и произведение.

10. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\ \text{в)}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix};\ \text{г)}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$\text{д)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix};\ \text{е)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}.$$

11. Доказать следующие равенства:

а) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; б) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

12. Найти ранги матриц методом окаймляющих миноров:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

13. Вычислить ранги матриц методом элементарных преобразований;

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 13 \\ 7 & 11 & 20 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. При каких значениях λ матрица $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ имеет ранг равный единице ?

16. Чему равны ранг матрицы А при различных значениях λ?

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Найти ранг матрицы А и указать один из ее базисных миноров:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 21 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

2. а) $AB=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) АВ не существует; $BA=\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}$;

д) $AB = \begin{pmatrix} 11 & -15 \end{pmatrix}$; ВА не существует.

3. а) $\begin{pmatrix} -20 & 11 & 0 \\ -11 & 12 & 7 \\ -4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -11 & 8 & -6 \\ -22 & 21 & -13 \\ -19 & 21 & -10 \end{pmatrix}$;

4. а) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$.

5. $AB^{T} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B^T A^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 33 & 30 & 44 \\ -6 & -1 & 4 \\ 10 & 16 & 17 \end{pmatrix}$.

8. а) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, где a и b - любые числа.

9. а) нет; б) да, 3x1, 5x1; в) да, 1x5, 1x3; г) нет;

д) да, 3xn, 5xn.

10. а) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; д) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & -10 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. а) r=3; б) r=2; в) r=2; г) r=3.

13. а) r=3; б) r=2; в) r=3; г) r=3; д) r=2.

14. r=1. 15. $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$. 16. r=2, если λ=0 и r=3, если $\lambda \neq 0$.

17. r=2, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Решение систем с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь a_{ij} (i,j=1,2,..,n) и b_i (i=1,2,..,n) некоторые числа, причем a_{ij} будем называть коэффициентами при неизвестных, а b_i - свободными членами. Если все свободные члены равны нулю то система (2.1) называется <u>*однородной*</u>, в противном случае - <u>*неоднородной*</u>.

Решением системы является совокупность чисел $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$, которые при подстановке в (2.1) обращают все уравнения системы в тождества.

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, в противном случае — *несовместной*. Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а имеющая более одного решения— *неопределенной*.

Две совместные системы уравнений называются *эквивалентными*, если любое решение каждой из них является одновременно решением и другой системы.

Найдем решение системы (2.1) с помощью обратной матрицы. Для этого составим матрицу из коэффициентов при неизвестных A =(a_{ij}) и две столбцевые матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу A размера nxn принято называть матрицей системы, а B - матрицей свободных членов. Систему (2.1) с помощью этих матриц можно записать в виде матричного уравнения:

$$AX = B. \qquad (2.2)$$

Действительно, матрицы-столбцы AX и B равны тогда и только тогда, когда числа x_1, x_2,..,x_n удовлетворяют системе уравнений (2.1), поэтому задача отыскания решений этой системы сводится к нахождению матрицы X из уравнения (2.2).

Предположим, что A - невырожденная матрица, следовательно, detA $\neq$ 0. Тогда она имеет единственную обратную матрицу A^{-1} (1.5). Умножая (2.2) слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}A = E$, получаем:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \qquad (2.3)$$

Из единственности обратной матрицы следует, что найденное решение системы (2.1) также единственно. Следовательно, система (2.1) с невырожденной матрицей A всегда является определенной.

Предложенный метод решения достаточно трудоемок, так как нахождение обратной матрицы при больших n затруднительно. Его целесообразно применять в тех случаях, когда требуется решить несколько систем с неизменной левой частью, но различными правыми частями. Задачи такого рода возникают, например, в электротехнике, когда требуется найти напряжение в некоторых элементах при различных входных напряжениях.

Замечание. Обратные матрицы могут быть использованы и при решении некоторых других матричных уравнений:

$$XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1},$$

$$AXC = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Здесь предполагается, что размеры матриц допускают матричное умножение, а матрицы A и C являются невырожденными

Пример. Решить с помощью обратной матрицы систему уравнений:

$$\left\{ x_1 + x_3 = 2 \right.$$

Решение . Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

и вычислим её определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 .$$

Найдем обратную матрицу (1.5):

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.3) находим

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

2.2. Формулы Крамера

Теорема. Если detA $\neq 0$, то система (2.1) имеет единственное решение:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta,\ x_2 = \Delta_2/\Delta, \ldots, x_n = \Delta_n/\Delta, \qquad (2.4)$$

где Δ =detA, а Δ_j (j=1,2,…,n) — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. В предыдущем параграфе показано, что при detA $\neq 0$ единственное решение системы можно найти по формуле (2.3). Используя (1.5), эту формулу можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Отсюда $x_1 = (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1})/\Delta$.

Сравнивая сумму $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \Delta$, заметим, что эта сумма $b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}$ с известной формулой вычисления определителя равна определителю порядка n, который получен из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных членов. Следовательно:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta, \text{ где } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогично доказывается, что:

$$x_2 = \Delta_2/\Delta, \ldots\ x_n = \Delta_n/\Delta\,.$$

Соотношения (2.4) называют формулами Крамера и они, как и (2.3), применимы только в том случае, когда система уравнений имеет единственное решение.

Пример. Решить систему уравнений:

Решение. Составим матрицу системы и вычислим её определитель:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0\,.$$

Заменим каждый из столбцов определителя Δ столбцом свободных членов и вычислим три вспомогательных определителя:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 7 & 0 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix}=-20;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 7 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=0;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 7\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=-10.$$

По формулам Крамера (2.4), получим

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 2;\ x_2 = \Delta_2/\Delta = 0;\ x_3 = \Delta_3/\Delta = 1.$$

2.3. Метод Гаусса

Простые по своей структуре формулы Крамера требуют достаточно громоздких (при больших n) вычислений. Поэтому в практических задачах чаще используется метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система линейных уравнений самого общего вида, когда число уравнений может не совпадать с числом неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Если над уравнениями этой системы производить элементарные преобразования 1-3 (§1.6), то в результате получится система линейных уравнений, эквивалентная заданной. В способе Гаусса элементарные преобразования на каждом этапе выполняются так, чтобы в полученной после этого эквивалентной системе все уравнения, кроме одного, не содержали неизвестную с наименьшим порядковым номером.

Для этого выберем в качестве первого уравнения то, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что оно имеет вид:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

где $a_{11} \neq 0$.

Умножим это уравнение на - a_{i1}/a_{11} (i=1,2,…,m) и прибавим его к уравнениям с номерами i=2,3,…,m. После этого во всех уравнениях, начиная со второго, неизвестное x_1 будет исключено. Может случиться, что вместе с x_1 будут исключены неизвестные $x_2, x_3, .., x_{s-1}$, но найдется хотя бы одно уравнение, в котором сохранится неизвестное x_s.

Одно из таких уравнений будем считать вторым уравнением системы и с его помощью исключим из i-го уравнения (i=3,4,…,m) неизвестное x_s, а вместе с ним, возможно, неизвестные $x_{s+1}, .., x_{q-1}$,.

Продолжая этот процесс исключения неизвестных, после r шагов получим эквивалентную (2.5) систему уравнений вида:

(2.6)

где $1<s<q<p<\ldots<n$, $r \le m$, $a_{11} \neq 0$, $\tilde{a}_{2s} \neq 0, \ldots, \tilde{a}_{rp} \neq 0$.

Если $r=m$, то последние соотношения в системе (2.6) отсутствуют. При $r<m$ эти соотношения легко преобразовать к виду $0 = \tilde{b}_{r+1}, 0 = 0, \ldots, 0 = 0$, умножив первое из них на соответствующие числа - $\tilde{b}_{r+2}/\tilde{b}_{r+1}, \ldots, -\tilde{b}_m/\tilde{b}_{r+1}$ и прибавив ко всем остальным. Но тождественные равенства 0=0 можно вычеркнуть из системы, не нарушая её эквивалентности, и после этого мы получим систему (2.7) из (r+1) уравнения относительно n неизвестных, эквивалентную системе (2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a \\ a \\ a \end{array} \right. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим все возможные случаи, которые могут представиться при решении системы (2.7).

1. Если $\tilde{b}_{r+1} \neq 0$, то последнее числовое равенство в (2.7) неверно. Следовательно (2.7), а значит и эквивалентная ей система (2.5), несовместны. Поэтому на практике вывод о несовместности системы можно сделать сразу же при появлении в процессе преобразований соотношений вида 0=b, где $b \neq 0$.

2. Если $\tilde{b}_{r+1}$=0, а $r = n \leq m$, то последнее уравнение содержит только одно неизвестное, предыдущее - два и т.д. В этом случае решение системы нетрудно найти, решая систему снизу вверх: из последнего уравнения с номером r=n найдем x_n, затем подставим найденное значение в предыдущее уравнение и найдем x_{n-1}. Продолжая этот процесс, из первого уравнения найдем x_1. Решение системы (2.5) в этом случае, очевидно, единственно.

3. Если $\tilde{b}_{r+1}$=0, а r<n, то число уравнений в (2.7) меньше числа неизвестных, поэтому n-r неизвестных остаются неопределенными (их называют свободными), а r неизвестных, называемых *базисными*, однозначно через них выражаются. Алгоритм решения системы (2.7) в этом случае следующий: перенесём в уравнении с номером r все неизвестные, кроме неизвестного с наименьшим порядковым номером p, в правую часть и выразим x_p через x_{p+1}, x_{p+2},..,x_n , что всегда возможно, так как $a_{rp} \neq 0$. Полученное значение x_p подставим в предыдущее уравнение и найдем x_{p-1} и т.д. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не найдем из первого уравнения x_1. Таким образом все базисные неизвестные x_1,x_2,…,x_p будут представлены

линейной комбинацией свободных неизвестных $x_{p+1},x_{p+2},..,x_n$. Придавая свободным неизвестным произвольные конкретные значения $x_{p+1} = c_1,..,x_n = c_{n-p}$, получаем различные значения базисных неизвестных. Любая совокупность выбранных значений свободных неизвестных и соответствующих им значений базисных неизвестных будет решением системы (2.5), следовательно, в этом случае система имеет бесчисленное множество решений. Все их можно записать в виде матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \ldots c_{n-p}) \\ \vdots \\ x_p(c_1, c_2, \ldots c_{n-p}) \\ \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-p} \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

где $c_1,c_2,...,c_{n-p}$ - произвольные постоянные. Решение (2.8) называется общим решением системы (2.5). Заметим, что в частных случаях некоторые базисные неизвестные в (2.8) могут иметь единственные значения при всех значениях произвольных постоянных.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений:

Решение. Исключим из второго и третьего уравнений неизвестное x_1. Для этого умножим первое уравнение на -2 и прибавим ко второму, а затем из третьего уравнения вычтем первое. После этого получим систему, эквивалентную заданной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ -3x_2 + 3x_4 = -9, \\ x = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3, \\ x_4 = 0, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, свободным неизвестным является только неизвестное x_3. Полагая $x_3 = c$, получаем общее решение системы:

$$X=(1-c,3,c,0)^T.$$

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений:

Решение. Исключив из второго и третьего уравнений неизвестное x_1, получим эквивалентную систему вида:

Последнее числовое равенство неверно, следовательно, заданная система уравнений несовместна.

2.4. Использование в алгоритме Гаусса эквивалентных матриц.

Составим расширенную матрицу D системы (2.5), которая отличается от матрицы A столбцом свободных членов:

$$D=(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Легко видеть, что каждому элементарному преобразованию системы (2.5) соответствует аналогичное преобразование матрицы D и наоборот. Поэтому при решении систем уравнений можно выполнять элементарные преобразования не с самой системой, а с её расширенной матрицей D, приводя её к ступенчатому виду $\tilde{D}$. Затем составить систему уравнений с расширенной матрицей $\tilde{D}$ (она будет эквивалентна (2.5)) и решить её.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} + {}_2x\,2 = {}_3x \qquad 5 \\ {}_2x \quad = {}_3x \\ \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу системы и для упрощения дальнейших преобразований поменяем в ней местами первую и вторую строки:

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Первую строку полученной матрицы умножим на -3 и -4 и прибавим соответственно ко второй и третьей строкам.

$$\mathrm{D} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

Вычитая из третьей строки вторую, умноженную на 5, получаем:

$$\mathrm{D} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \tilde{D}.$$

Составляем систему уравнений с расширенной матрицей $\tilde{D}$:

Отсюда находим $x_3 = 2$, $x_2 = 3$, $x_1 = -1$.

Пример . Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3. \end{cases}$$

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

Решение. а) Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 9; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2 .$$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Найдем A^{-1}. $\det A = \Delta = 3 \neq 0$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 6, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -19, \; A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 3, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -13, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-1.$$

Поэтому $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -19 & -13 & -1\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}$.

Отсюда находим

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -19 & -13 & -1\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6+3+0\\ 19-13+3\\ 10-7+3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\ 9\\ 6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=-1,\quad x_2=3,\quad x_3=2.$

в) Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & -1\\ -3 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -7 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ -3 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ l_2+3l_1\\ l_3-2l_1\end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 10 & -19 & -8\\ 0 & -7 & 13 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ 10l_3+7l_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 0 & -19 & -8\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right).$$

Последней матрице, имеющей треугольный вид (если исключить столбец свободных членов), соответствует следующая СЛАУ, равносильная исходной системе:

$$\begin{cases}x_1+\ 4x_2-\ 7x_3=-3,\\ \qquad 10x_2-19x_3=-8,\\ \qquad\qquad -3x_3=-6.\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим x_3, подставив его во второе уравнение, найдем x_2, и, наконец, подставив найденные x_2 и x_3 в первое уравнение, найдем x_1:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 14 = -3 \\ 10x_2 - 38 = -8 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 12 = 11 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Следует иметь в виду, что при решении СЛАУ методом Гаусса перестановка столбцов приводит к перенумерации неизвестных.

2.5 Условия совместности системы

Теорема. Система линейных уравнений (2.5) совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы системы и её расширенной матрицы совпадают.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2.7), эквивалентную системе (2.5) и выпишем её расширенную матрицу:

$$D \qquad A \tilde{} B \qquad {}^{n}$$

.

Ранг матрицы $\tilde{A}$ равен *r*, так как это матрица ступенчатого вида, имеющая *r* ненулевых строк и её минор порядка *r* отличен от нуля. Ранг матрицы $\tilde{D}$ не может быть меньше *r*, так как этот минор принадлежит и матрице $\tilde{A}$, но может быть на единицу больше, если хотя бы один из миноров M_{r+1} этой матрицы, содержащий столбец свободных членов, отличен от нуля.

С помощью алгоритма Гаусса (§2.3) мы показали, что система (2.7) совместна тогда и только тогда, когда $\tilde{b}_{r+1}=0$. В этом случае последняя строка матрицы $\tilde{D}$ состоит из нулей, следовательно, все миноры порядка (r+1) равны нулю и Rg($\tilde{D}$) = Rg($\tilde{A}$). Но $\tilde{D}$ ~D, $\tilde{A}$ ~A, следовательно RgD = RgA = r, что и требовалось доказать.

Следствие. Если система (2.5) совместна, то при $r=n$ она имеет единственное решение, а при $r<n$ - бесконечное множество решений.

Действительно, если $r=n$, то базисный минор $M_r \neq 0$ является определителем системы из n уравнений с n неизвестными, эквивалентной системе (2.5). Её решение можно найти по формулам Крамера и оно единственно.

Если же r<n, то по формулам Крамера мы можем найти только r базисных неизвестых, коэффициенты при которых составляют базисный минор, выразив их через остальные (n-r) свободных неизвестных. Давая этим свободным неизвестным различные значения, получаем бесконечное множество решений системы (2.5).

Заметим, что при исследовании систем вычисление рангов матриц целесообразно выполнять методом элементарных преобразований, так как полученную после преобразований матрицу $\tilde{D}$ ступенчатого вида можно использовать для отыскания решений заданной системы методом Гаусса.

Пример . Исследовать систему линейных уравнений и решить её, если она совместна.

$$\begin{cases} 2x_1 - \dots \\ 5x_1 + 3\dots \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу:

$$D = \left(A|B \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Вычтем из второй и третьей строк первую, умножив её соответственно на два и пять.

$$\mathrm{D} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -6 \end{array} \right).$$

Умножим вторую строку на 2 и вычтем из третьей:

$$\tilde{D} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет только две ненулевые строки, а матрица $\tilde{D}$ — три, следовательно, их ранги не совпадают, поэтому система не совместна.

Пример . Решить системы уравнений.

$$a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6; \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 12x_4 + 6x_5 = 2; \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 8x_5 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 9x_4 - 8x_5 = -6. \end{cases}$$

Решение. Во всех трех системах воспользуемся методом Гаусса.

$$a)\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ l_2-3l_1 \sim \\ l_3-2l_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 5l_3-2l_2 \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -11 & 30 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к трапецеидальному виду. Объявляем «лишние неизвестные» x_4 и x_5 свободными; запишем систему, соответствующую этой трапецеидальной матрице, перенеся свободные неизвестные x_4 и x_5 в правую часть:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3 = 1+x_4-4x_5, \\ 10x_2-10x_3=-5-5x_4+12x_5, \\ 5x_3=30+5x_4+11x_5. \end{cases}$$

Степень свободы системы равна двум, значит, решение системы выразится через два параметра. Положив $x_4=c_1,\ x_5=c_2,$ и решив систему из трех уравнений с неизвестными $x_1, x_2, x_3,$ найдем

$$\begin{cases} x_1 = -6 - c_1 - \dfrac{19}{5}c_2, \\ x_2 = \dfrac{11}{2} + \dfrac{1}{2}c_1 + \dfrac{17}{5}c_2, \\ x_3 = 6 + c_1 + \dfrac{11}{5}c_2, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

где $c_1, c_2 -$ произвольные числа.

б) $\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ l_2 + 3l_1 \sim \\ l_3 + l_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ l_3 - l_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

в результате преобразований появилась строка $(0\,0\,0\,0\,0\,|1)$, следовательно, система несовместна.

в) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 & -8 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & -2 & 9 & -8 & -6 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -8 & -4 \\ 5 & 10 & -2 & 9 & -8 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ l_2 + 2l_1 \sim \\ l_3 + 5l_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 12 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 12 & 4 \end{array}\right)\sim$$

$$\begin{array}{c} \quad\;\; x_3 \quad\; x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 12 & 4 \end{array}\right). \end{array}$$

Ранг трапецеидальной матрицы равен 2, значит, степень свободы равна $5-2=3$. Объявляем неизвестные x_2, x_4, x_5 свободными.

Положив $x_2 = c_1,\quad x_4 = c_2,\quad x_5 = c_3,$ получим

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2 + 2c_1 + 3c_2 - 4c_3, \\ \qquad 3x_3 = 4 \qquad + 6c_2 - 12c_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2c_1 - 3c_2 + 4c_3 + \dfrac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3, \\ x_3 = \dfrac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3. \end{cases}$$

Таким образом, решением системы является

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} - 2c_1 - c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = \dfrac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа (параметры).

2.6. Однородная система линейных уравнений

Рассмотрим систему (2.5) в частном случае, когда все свободные члены равны нулю. Такая однородная система в матричной форме имеет вид:

$$AX = O, \tag{2.9}$$

где A - матрица системы размера mxn, а X - матрица-столбец неизвестных из n строк.

Расширенная матрица D системы (2.9) отличается, очевидно, от матрицы A только дополнительным нулевым столбцом, поэтому их ранги совпадают, следовательно, однородная система уравнений всегда совместна.

Подстановкой в уравнение (2.9) нетрудно убедиться, что одно из решений системы (его называют нулевым или тривиальным) имеет вид:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = O.$$

Если ранг матрицы A равен числу неизвестных n, то это решение будет единственным. Если же RgA < n, то однородная система уравнений имеет и другие решения (§2.5). Следовательно, справедливо утверждение:

для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы был меньше числа неизвестных.

В частном случае, когда A является квадратной матрицей, условие существования ненулевых решений можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю.

Доказательство. Необходимость. Пусть система имеет ненулевое решение. Это означает, что решений у системы бесконечно много, следовательно, RgA < n. Тогда миноры порядка n матрицы A должны равняться нулю, а единственным таким минором является detA, т.к. A имеет размеры *n*x*n*, следовательно, detA = 0.

Достаточность. Пусть detA = 0. Тогда RgA < *n*, следовательно, однородная система имеет бесчисленное множество решений, среди которых есть ненулевые. Решение системы (2.9) обладают следующими свойствами:

1. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - решение системы (2.9), то $k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n$, где k - произвольное число, также решение.

2. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ - решения системы (2.9), то $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ также будет её решением.

Справедливость этих свойств нетрудно проверить, подставив в (2.9) вместо x_i величины $k\alpha_i$ и $\alpha_i + \beta_i$.

Для отыскания решений системы (2.9) воспользуемся методом Гаусса. После несложных элементарных преобразований получим эквивалентную однородную систему ступенчатого вида. Решив эту систему (начинать следует с последнего уравнения), получим при r(A)=*n* единственное нулевое решение, а при r(A)<*n* общее решение вида:

(2.10)

Здесь базисные неизвестные для удобства обозначены индексами 1,2,..,r , а свободным неизвестным даны известные значения: $x_{r+1}=c_1, x_{r+2}=c_2, .., x_n=c_{n-r}$. В матричной форме общее решение можно записать так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\alpha_{1,k}c_k\\\vdots\\\sum\alpha_{r,k}c_k\\c_1\\\vdots\\c_{n-r}\end{pmatrix},\qquad(2.11)$$

где суммирование ведётся от k=1 до k=n-r, а $c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}$— произвольные постоянные. Нетрудно убедиться, что решение (2.11) можно записать и в такой форме:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 +...+ C_{n-r}X_{n-r},$$

где $X_1=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}\\\alpha_{2,1}\\\vdots\\\alpha_{r,1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}\alpha_{1,2}\\\alpha_{2,2}\\\vdots\\\alpha_{r,2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,X_{n-r}=\begin{pmatrix}\alpha_{1,n-r}\\\alpha_{2,n-r}\\\vdots\\\alpha_{r,n}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$

Очевидно, что X_i (i=1,2,..,n-r)-частные решения системы (2.9). Все они получены из (2.11) при условии, что c_i=1,а остальные называются фундаментальной системой решений системы уравнений (2.9). Если фундаментальная система решений найдена, то любое решение системы уравнений (2.9), можно получить по формуле (2,12), давая произвольным постоянным соответствующие значения. Следует заметить, что ФСР определяется неоднозначно, но число базисных решений в ней всегда равно n-r, где r - ранг матрицы системы. Для нахождения этих решений обычно полагают одно из свободных неизвестных равным единице, а остальные - нулю, а затем из заданной системы (или эквивалентной ей) находят соответствующие значения базисных неизвестных.

Пример. Найти ФСР и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решение. Выпишем матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Ранг матрицы $\tilde{A}$ равен двум, следовательно, два неизвестных являются базисными, а три - свободными и ФСР состоит из трех частных решений.

Составим укороченную систему уравнений, эквивалентную заданной:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Коэффициенты при x_1,x_3 в этой системе образуют базисный минор, поэтому их будем считать базисными неизвестными, а x_2, x_4, x_5 - свободными.

Полагая $x_2=1, x_4=0, x_5=0$, из (2.14) находим $x_1=-2/3$, $x_3=0$, следовательно, первое базисное решение имеет вид $X_1=(-\frac{4}{3},1,0,0,0)^T$.

Полагая $x_2=0, x_4=1, x_5=0$, находим $x_1=-4/3, x_3=1$, поэтому вторым базисным решением является матрица $X_2=(-\frac{4}{3},0,1,1,0)^T$.

Наконец, полагая $x_2=0, x_4=0, x_5=1$, находим $x_1=-8/3$, $x_3=3$, следовательно, $X_3=(-\frac{8}{3},0,3,0,1)^T$.

С помощью полученной ФСР выпишем общее решение заданной системы уравнений

$$X=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=c_1\begin{pmatrix}-2/3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\0\\3\\0\\1\end{pmatrix},$$

или через неизвестные:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3}c_1-\frac{4}{3}c_2-\frac{8}{3}c_3, \\ x_2=c_1, \\ x_3=c_2+c_3, \\ x_4=c_2, \\ x_5=c_3. \end{cases} \tag{2.15}$$

Заметим, что выбрав в качестве свободных неизвестных x_1, x_2, x_3 мы получим новый набор базисных решений $\tilde{X}_1=\ 1,0,0,-\frac{9}{4},-\frac{3}{4}\ ^t$, $\tilde{X}_2=\ 0,1,0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\ ^T$, $\tilde{X}_3=\ 0,0,1,-2,1\ ^T$, а общее решение в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_3, \\ x_4 = -\frac{9}{4}c_1 - \frac{3}{2}c_2 - 2c_3, \\ x_5 = \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3. \end{cases} \tag{2.16}$$

Соотношения (2.15) и (2.16) различны, но из каждого из них при соответствующих значениях произвольных постоянных можно получить любое частное решение системы (2.13).

Пример . Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу коэффициентов СЛАУ и найдем ее ранг методом элементарных преобразований

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \underset{\sim}{l_3 \to l_1} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} -6l_1 + l_2 \to l_2 \\ -7l_1 + l_3 \to l_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как максимальный порядок минора, отличного от нуля, равен 2, то $rang\, A = r = 2.$ При этом $r < n (2 < 5),$ значит однородная СЛАУ имеет бесчисленное множество ненулевых решений. Данную СЛАУ можно записать в виде $A\overline{x} = \Theta$. Это означает, что множество ненулевых решений системы имеет размерность $n - r = 5 - 2 = 3$. Следовательно, имеется 3 линейно независимых решения, которые образуют фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ.

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0,$ тогда

$x_1, x_2 -$ базисные, а $x_3, x_4, x_5 -$ свободные неизвестные.

Решим укороченную систему относительно базисных неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 3x_5, \\ \quad 3x_2 = 4x_3 + 16x_4 + 25x_5. \end{cases}$$

Откуда находим $x_2 = \dfrac{4}{3}x_3 + \dfrac{16}{3}x_4 + \dfrac{25}{3}x_5,$

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_5.$$

Базисные решения получим, если свободным неизвестным будем придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
1	0	0	-1/3	4/3
0	1	0	-10/3	16/3
0	0	1	-16/3	25/3

Запишем базис линейного пространства решений однородной СЛАУ (ФСР)

$$e_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\ \frac{16}{3}\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad e_3=\begin{pmatrix}-\frac{16}{3}\\ \frac{25}{3}\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: Размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ равна 3.

Базис: e_1, e_2, e_3.

Пример . Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0,\\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0,\\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0,\\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0.\end{cases}$$

Решение. Найдем ранг системы.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 4 & -1\\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1\\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7\\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9\\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Т.к. ненулевых строк только две, то $RgA = 2 < 5$. Система имеет бесконечное множество решений, среди которых три линейно независимых.

В качестве базисного минора возьмем $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Данная система будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -3x_1 - 4x_4 + x_5, \\ -2x_3 = x_4 - 3x_5. \end{cases} \qquad (3)$$

Положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Тогда из (3) получим:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -3, \\ -2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \ell_1 = (1,3,0,0,0).$$

Положим $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, тогда из (3) следует:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -4, \\ -2x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = -0,5. \end{cases} \quad \ell_2 = (0,2,-\frac{1}{2},1,0)\,.$$

Наконец, положим $x_1 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, получим:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 1, \\ -2x_3 = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ x_3 = 1,5. \end{cases} \quad \ell_3 = (0,5,\frac{3}{2},0,1).$$

В результате нашли фундаментальную совокупность решений ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Общее решение согласно формуле (2) запишется в виде: $\tilde{x} = \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \alpha_3\ell_3$, где α_i – произвольные числа.

Упражнения

1. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; е)

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Матричным способом решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

3. Решить системы уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

4. Исследовать совместность систем уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 6x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 5, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

5. Исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + +2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

6. Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра а:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = a \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 1. \end{cases}$

7. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2++2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1++5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2-9x_3=0, \\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=0, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

8. Найти значения параметра к, при которых система имеет нетривиальные решения и найти эти решения:

а) $\begin{cases} k^2x_1+3x_2+2x_3=0, \\ kx_1-x_2+x_3=0, \\ 8x_1+x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 4x_1-x_2+7x_3=0, \\ x_1+kx_2+2x_3=0. \end{cases}$

Ответы

1. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -6 & 26 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2. а) $x_1=2, \quad x_2=-3, \quad x_3=5$; б) $x_1=1 \quad x_2=3 \quad x_3=2$.

3. а) $x_1=1, \quad x_2=0, \quad x_3=1$; б) $x_1=5/3, \quad x_2=0, \quad x_3=-2/3$;

в) $x_1=1, \quad x_2=-1, \quad x_3=2, \quad x_4=-2$;

г) $x_1=-2, \quad x_2=0, \quad x_3=1, \quad x_4=-1.$

4. а) совместна; б) несовместна; в)совместна.

5. а) $(-1,-1,0,1)^T$; б)несовместна;

в) $(-2,0,1,-1)^T$; г) $(C_1, 3C_1-13, -7, 0)^T$;

д) несовместна; е) $(C_1+2C_2-1, C_1+2C_2-3, C_1, C_2)^T$.

6. а) если $a \neq 0$, то система несовместна, если a=0, то X= $-3/2-5/2\,C_1-13/2\,C_2, \quad 7/2-7/2\,C_1-19/2\,C_2, \quad C_1, \quad C_2 \;^T$;

б) если a=-3, то система несовместна; если a=0, то X=$(1-C_1-C_2, C_1, C_2)^T$; если $a(a+3) \neq 0$, то X=$\dfrac{1}{a+3}\; 1, \quad 1, \quad 1 \;^T$.

7. а) система имеет только тривиальное решение;

б) $X=c_1X_1+c_2X_2, \quad X_1=(8,-6,1,0)^T, \quad X_2=(-7,5,0,1)^T$;

в) $X=c_1X_1+c_2X_2, \quad X_1=(1,2,1,0)^T, \quad X_2=(-1,1,0,1)^T$;

г) система имеет только тривиальное решение.

8. а) $k_1=2, \quad X=c_1X_1, \quad X_1= \; 1, \quad 0, \quad -2 \;^T$;

$k_2=-4, \quad X=c_1X_1, \; X_1= \; 1, \quad -24/5, \quad -4/5 \;^T$;

б) $k=-1, \quad X=c_1X_1, \quad X_1= \; -5/3, \quad 1/3, \quad 1 \;^T$.

д) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

4. а) $x_1=2, \quad x_2=-3, \quad x_3=5$; б) $x_1=1 \quad x_2=3 \quad x_3=2.$

5. а) $x_1=1, \quad x_2=0, \quad x_3=1$; б) $x_1=5/3, \quad x_2=0, \quad x_3=-2/3$;

в) $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$; г) $x_1=-2, x_2=0, x_3=1, x_4=-1.$

8. а) совместна; б) несовместна; в) совместна.

9. а) $\left(-1, \quad -1, \quad 0, \quad 1\right)^T$; б) несовместна;

в) $\left(-2, \quad 0, \quad 1, \quad -1\right)^T$; г) $\left(C_1, \quad 3C_1 - 13, \quad -7, \quad 0\right)^T$;

д) несовместна; е) $\left(C_1 + 2C_2 - 1, \quad C_1 + 2C_2 - 3, \quad C_1, \quad C_2\right)^T$.

10. а) если $a \neq 0$, то система несовместна, если a=0, то Х= $\left(-3/2 - 5/2\, C_1 - 13/2\, C_2, \quad 7/2 - 7/2\, C_1 - 19/2\, C_2, \quad C_1, \quad C_2\right)^T$;

б) если a=-3, то система несовместна; если a=0, то Х=$(1 - C_1 - C_2, C_1, C_2)^T$, если $a(a+3) \neq 0$, то Х=$\dfrac{1}{a+3}\left(1, \quad 1, \quad 1\right)^T$.

11. а) система имеет только тривиальное решение;

б) $X = c_1 X_1 + c_2 X_2, \quad X_1 = (8, -6, 1, 0)^T, \quad X_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$;

в) $X = c_1 X_1 + c_2 X_2, \quad X_1 = (1, 2, 1, 0)^T, \quad X_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$;

г) система имеет только тривиальное решение.

9. а) $k_1 = 2, \quad X = c_1 X_1, \quad X_1 = \left(1, \quad 0, \quad -2\right)^T$;

$k_2 = -4, \quad X = c_1 X_1, \ X_1 = \left(1, \quad -24/5, \quad -4/5\right)^T$;

б) $k = -1, \quad X = c_1 X_1, \quad X_1 = \left(-5/3, \quad 1/3, \quad 1\right)^T$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Будем рассматривать множества элементов произвольной природы, для которых определены некоторые операции, подчиняющиеся определенным ограничениям (аксиомам). Такие множества называются "пространствами", а их элементы - "точками" или "векторами" этого пространства.

Заметим, что во многих абстрактных пространствах "векторы" ничего общего не имеют с обычными векторами, изучаемыми в геометрии. Элементами абстрактных пространств могут быть функции, матрицы, некоторые системы чисел и т.д., а в частном случае - обычные векторы. Сами абстрактные пространства отличаются друг от друга лишь числом и характером вводимых в них операций и аксиомами, определяющими эти операции.

3.1. Линейное пространство
Аксиомы линейного пространства

Линейным пространством называется множество L элементов любой природы, которые будем называть *векторами* и обозначать $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$, если:

1)указан закон, согласно которому любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из множества L ставится в соответствие третий вектор $\vec{z}$ этого множества, называемый суммой векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначаемый $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$;

2)указан закон, согласно которому каждому числу λ (вещественному или комплексному) и любому вектору $\vec{x} \in$L ставится в соответствие вектор $\vec{z}$, называемый произведением вектора $\vec{x}$ на число λ и обозначаемый $\vec{z} = \lambda\ \vec{x}$;

3)введенные операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим 8 аксиомам:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in$ L;

2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in$ L;

3) существует элемент $\vec{O} \in$ L (нулевой вектор) такой, что $\vec{x} + \vec{O} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in$ L;

4)для каждого $\vec{x} \in$ L существует такой вектор $\vec{y} \in$ L, что $\vec{x} + \vec{y} = \vec{O}$, вектор $\vec{y}$ называется *противоположным* вектору $\vec{x}$ и обозначается $-\vec{x}$;

5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in$ L;

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in$ L и любых чисел α, β;

7) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in$ L и любых чисел α, β;

8) $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из L и любого числа α.

Пространство L называется *вещественным*, если в L операция умножения векторов на число определена только для вещественных чисел, и *комплексным*, если эта операция определена для комплексных чисел.

Из аксиом линейного пространства следует:

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В линейном пространстве каждый вектор имеет единственный противоположный вектор.

3. Для любого элемента $\vec{x} \in$ L имеет место равенство $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Для любого вектора $\vec{x} \in$ L противоположный вектор равен $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$.

Существование противоположного вектора определяет возможность введения для векторов линейного пространства операции вычитания, как операции обратной операции сложения.

Назовем *разностью* векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вектор $\vec{z}$ который обозначим $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$, удовлетворяющий равенству $\vec{z} + \vec{y} = \vec{x}$.

3.2. Примеры линейных пространств

Приведем примеры конкретных линейных пространств.

1.Множество вещественных чисел с обычными операциями сложения и вычитания составляет действительное линейное пространство. Аксиомы 1-8 выполняются в этом случае в силу свойств действий, установленных в арифметике.

Аналогично множество комплексных чисел составляет линейное пространство.

2.Рассмотрим множество всех геометрических векторов в трехмерном пространстве. Операции сложения указанных векторов определим по правилу "параллелограмма", а умножение на вещественное число λ соответствует умножению длины этого вектора на $|\lambda|$, направление при $\lambda>0$ остается неизменным, а при $\lambda<0$ - меняется на противоположное.

Нетрудно проверить (предлагается сделать это самостоятельно) справедливость аксиом 1-8.

Таким образом, множество всех геометрических векторов в пространстве представляет собой линейное пространство, которое будем обозначать символом R_3.

Аналогичные множества векторов на плоскости и прямой также являются линейными пространствами, будем обозначать их соответственно символами R_2 и R_1.

3.Множество всех положительных вещественных чисел. Определим сумму двух элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ этого множества $\bar{x}+\bar{y}$ = xy как произведение вещественных чисел x и y. Произведение элемента $\bar{x}$ на вещественное число λ определим как возведение положительного вещественного числа x в степень λ т.е. $\lambda\cdot\bar{x}=x^{\lambda}$. Нулевым элементом этого множества будет являться вещественное число 1, а противоположным для данного элемента $\bar{x}$ будет вещественное число 1/x.

Легко убедиться в справедливости аксиом 1-8.

4.Важный пример линейного пространства дает множество R^n элементами которого служат упорядоченные совокупности n произвольных вещественных чисел $\vec{x}=\{x_1,x_2,..,x_n\}$, числа $x_1,x_2,..,x_n$ называют *координатами* элемента $\vec{x}$, а элементы этого пространства называют арифметическими векторами.

В анализе множество R^n называют *n-мерным координатным пространством* или пространством арифметических векторов вещественным или комплексным. Всюду в дальнейшем рассматривается вещественное пространство арифметических векторов.

Операции сложения элементов множества R^n и умножения этих элементов на вещественные числа определим правилами:

$$1)\ \vec{x}+\vec{y}=\{x_1,x_2,..,x_n\}+\{y_1,y_2,..,y_n\}=$$
$$\{x_1+y_1,x_2+y_2,..,x_n+y_n\};$$
$$2)\ \lambda\ \vec{x}=\lambda\{x_1,x_2,..,x_n\}=\{\lambda x_1,\lambda\ x_2,..,\lambda\ x_n\}.$$

Нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $\vec{O}=\{0,0,..,0\}$, а противоположным для элемента $\vec{x}=\{x_1,x_2,..,x_n\}$ является элемент $\{-x_1,-x_2,..,-x_n\}$.

Проверку аксиом 1-8 предлагается читателю провести самостоятельно.

5.Пространство всех функций $x=x(t)$, определенных и непрерывных на $[a,b]$ обозначают символом $C[a,b]$. Операции сложения таких функций и умножения их на вещественные числа определим обычными правилами математического анализа.

Как известно из математического анализа, сумма двух функций, непрерывных на отрезке $a \le t \le b$, и результат умножения такой функции на число снова представляют собой функции непрерывные на отрезке $a \le t \le b$.

Роль нулевого вектора в пространстве $C[a,b]$ играет функция, тождественно равная нулю на отрезке $a \le t \le b$, а противоположным вектором является функция $(-1)\cdot x(t)$.

Установленные таким образом действия над рассматриваемыми функциями удовлетворяют всем аксиомам из определения линейного пространства. Проверка этого сводится к использованию законов арифметики при фиксированном t.

6.Примером линейного пространства может служить множество $\{P_n(t)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n с обычными операциями сложения и умножения на число, определёнными так же, как в предыдущем примере. Множество $\{P_n(t)\}$, если его рассматривать на отрезке $[a,b]$, является подмножеством линейного пространства $C[a,b]$.

Заметим, что не является линейным пространством множество всех многочленов степени, равной n, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом степени меньшей n.

7.Множество, элементами которого являются квадратные матрицы порядка n, также является примером линейного пространства, т.к. правила сложения квадратных матриц и умножения их на число подчиняются аксиомам 1-8.

8. Множество L всех решений X однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей A, сумма $X_1 + X_2$, произведение μX, является линейным пространством.

Известно, что система $AX = 0$ однородных линейных уравнений с матрицей A и столбцом неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ всегда имеет решение. Пусть X_1, X_2 - два столбца с числовыми компонентами, являющиеся решениями системы $AX = 0$. Тогда их сумма $X_1 + X_2$ тоже будет решением системы $AX = 0$, так как $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0$. Произведение числа μ на столбец X_1 тоже будет решением. Действительно, $A(\mu X_1) = \mu AX_1 = 0$. Таким образом, сложение элементов из множества L и умножение их на число не выводят за пределы множества L.

Справедливость восьми аксиом следует из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности действий сложения и умножения чисел.

3.3. Линейная зависимость векторов

Пусть $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,.., $\vec{x}_n$ - векторы линейного пространства L, а $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ - произвольные вещественные числа, тогда вектор $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,.., $\vec{x}_n$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ называются *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,.., $\vec{x}_n$ линейного пространства L называются *линейно зависимыми*, если существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация векторов обращается в нуль:

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=0.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми называются *линейно независимыми.*

Примеры.

1.На плоскости можно найти сколько угодно пар линейно независимых векторов - линейно независимы любые два неколлинеарных вектора. Любые три вектора плоскости линейно зависимы.

2.В трехмерном пространстве любые три некомпланарных вектора линейно независимы. Однако любые четыре пространственных вектора будут линейно зависимы.

3.Покажем, что в пространстве C[a,b] векторы $1,t,t^2,..,t^n$, где n - любое целое положительное число, являются линейно независимыми.

Нулевым вектором в этом пространстве является функция, тождественно равная нулю.

Предположим, что

$$\alpha_0\cdot 1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+...+\alpha_n t^n\equiv 0.$$

Если среди чисел α_i имеются отличные от нуля, то стоящий слева полином имеет не более n корней. Тождественное равенство полинома нулю означает, что оно должно выполняться при всех t из интервала [a,b]. Следовательно, все коэффициенты рассматриваемого полинома должны быть равны нулю, т.е. векторы $1, t, t^2, .., t^n$ линейно независимы.

Теорема. Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них можно представить как линейную комбинацию остальных.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_n$ линейно зависимы. Тогда существуют такие коэффициенты, не равные нулю одновременно, что справедливо равенство $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=0$. Пусть, для определенности $\alpha_n \neq 0$. Выражаем $\vec{x}_n$ через $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_n$,

$$\vec{x}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\vec{x}_1 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\vec{x}_{n-1},$$

а это значит, что вектор $\vec{x}_n$ является линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_{n-1}$.

Достаточность. Пусть один из векторов, например $\vec{x}_n$, можно представить в виде:

$$\vec{x}_n=\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2+...+\beta_{n-1}\vec{x}_{n-1}.$$

Тогда $1\cdot\vec{x}_n-\beta_1\vec{x}_1-\beta_2\vec{x}_2-...-\beta_{n-1}\vec{x}_{n-1}=0$. Так как из чисел $1, -\beta_1, -\beta_2, ..., -\beta_{n-1}$ хотя бы одно отлично от нуля, то векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n$ линейно зависимы.

Примеры.

1. Исследовать, будет ли система векторов

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

линейно зависима или линейно независима в R_3.

Решение. Известно, что векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Вычислим

$$(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3})=\begin{vmatrix}1 & 4 & 6\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ компланарны, поэтому один из них выражается линейно через два других. Видим, кроме того, что координаты векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ не пропорциональны. Значит, эти векторы не коллинеарны и, следовательно, линейно независимы.

2. Исследовать, будет ли система векторов

$$a_0=1, a_1=\sin x, a_2=\cos x \text{ на } [-\pi,\pi]$$

линейно зависима или линейно независима в пространстве $C[-\pi,\pi]$ функций непрерывных на $[-\pi,\pi]$.

Решение. Рассмотрим векторное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на $[-\pi,\pi]$. Составим линейную комбинацию элементов $a_0=1, a_1=\sin x, a_2=\cos x$ с произвольными коэффициентами μ_0, μ_1, μ_2 и приравняем ее к нулевому элементу пространства $C[-\pi,\pi]$:

$$\mu_0\cdot 1+\mu_1\sin x+\mu_2\cos x=0.$$

В правой части равенства стоит нулевая функция, то есть функция, равная нулю $\forall x\in[-\pi,\pi]$. Проверим, что тождественное равенство левой и правой частей нулю $\forall x\in[-\pi,\pi]$ возможно лишь при $\mu_0=\mu_1=\mu_2=0$.

Допустим, что $\mu_0\neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$\mu_1\sin x+\mu_2\cos x=\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\cdot\sin(x+\theta),$$

где $\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$. Тогда получаем $\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\cdot\sin(x+\theta)=-\mu_0$ при $\forall x\in[-\pi,\pi]$. Но графики левой и правой частей могут пересечься лишь в конечном числе точек интервала $[-\pi,\pi]$. Поэтому последнее равенство не может выполняться во всех точках интервала $[-\pi,\pi]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_0=\mu_1=\mu_2=0$.

Линейная независимость функций $1,\sin x,\cos x$ на $[-\pi,\pi]$ проверена.

3.4. Базис и размерность линейного пространства

Если в линейном пространстве L существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы, то это пространство называется *n-мерным* и обозначается L_n. Число n называется *размерностью* пространства и обозначается $n=\dim L$.

Иными словами, размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Например, пространства R_2 и R_3 соответственно двух и трехмерные.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется *конечномерным*.

Если в линейном пространстве L существует линейно независимая система из любого числа векторов, то оно называется *бесконечномерным*.

Примеры бесконечномерных пространств - множество всевозможных многочленов; множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

В линейной алгебре изучаются только конечномерные пространства.

Упорядоченная совокупность векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ пространства L называется *базисом* этого пространства, если эти векторы линейно независимы и любой вектор $\vec{x}\in L$ может быть представлен как линейная комбинация этих векторов, т.е. справедливо равенство:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n.$$

При этом последнее равенство называется *разложением* элемента $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

В частности, совокупность *n* линейно независимых векторов *n*-мерного векторного пространства L_n называется его базисом.

Например, в пространстве R_3 базис образуют любые три некомпланарных вектора, заданных в определённом порядке, а в пространстве R_2 базис образуют любые два неколлинеарных вектора.

Теорема. Любой вектор $\vec{x}$ *n*-мерного пространства можно, и притом единственным образом, разложить по базису этого пространства $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Доказательство. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - произвольный базис пространства L_n и $\vec{x} \in L_n$. Так как каждые $(n+1)$ векторов пространства L_n линейно зависимы, то линейно зависимы векторы $\vec{x}$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т.е. можно составить выражение:

$$\alpha_0 \cdot \vec{x} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + ... + \alpha_n \vec{e}_n \equiv 0,$$

в котором хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ отлично от нуля. При этом $\alpha_0 \neq 0$, так как в противном случае при $\alpha_0 = 0$ хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ было бы отлично от нуля, и базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ были бы линейно зависимы. Поэтому имеем $\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\vec{e}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\vec{e}_n$. Полагая $x_i = -\alpha_i / \alpha_0$, будем иметь

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n \quad . \qquad (3.1)$$

Таким образом, любой вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Покажем, что это разложение единственно. Предположим, что наряду с ним имеется разложение

$$\vec{x} = x_1' \vec{e}_1 + x_2' \vec{e}_2 + ... + x_n' \vec{e}_n .$$

Вычитая его из разложения (3.1), получаем

$$0 = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + ... + (x_n - x_n')\vec{e}_n$$

Так как векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_n$ линейно независимы, то последнее равенство возможно только при условии

$(x_1 - x_1') = 0, (x_2 - x_2') = 0, ..., (x_n - x_n') = 0$

т.е. $x_1 = x_1', x_2 = x_2', ..., x_n = x_n'$, что и доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Таким образом, если в n-мерном пространстве выбран некоторый базис, то пользуясь разложением (3.1), можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами этого пространства и упорядоченными последовательностями из n чисел $\{x_1, x_2, .., x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, .., x_n$ называются координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Из теоремы следует, что два вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$ n-мерного линейного пространства, в котором задан некоторый базис, равны тогда и только тогда, когда их координаты в этом базисе равны, т.е. когда : $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

Будем в дальнейшем обозначать через X столбец координат вектора $\vec{x}$.

Пример. Найти координаты вектора $\vec{x} = \{1,3,1\}$ в базисе В: $\vec{e}_1 = \{1,0,0\}$, $\vec{e}_2 = \{1,1,0\}$, $\vec{e} = \{1,1,1\}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе В через x_1', x_2', x_3'. Это значит, что

$$X = x'_1 E_1 + x'_2 E_2 + x'_3 E_3,$$

где X, E_1, E_2, E_3 - столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно, или

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2'\\x_2'\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3'\\x_3'\\x_3'\end{pmatrix},$$

откуда

Решив эту систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3, получим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе B: $x'_1=-2$, $x'_2=2$, $x'_3=1$.

3.5. Линейные операции над векторами в координатной форме

Пусть в линейном пространстве L_n выбран базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Так как всякий вектор из L_n можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов, то пусть для векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из L справедливы разложения:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n.$$

Тогда на основании аксиом, которым удовлетворяют операции сложения и умножения на число имеем:

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)+(y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n)=$$

$$=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+\ldots+(x_n+y_n)\vec{e}_n;$$

$$\lambda\vec{x}=\lambda(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)=\lambda x_1\vec{e}_1+\lambda x_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda x_n\vec{e}_n.$$

Таким образом справедлива следующая

Теорема. Если векторы n-мерного линейного пространства заданы своими координатами относительно некоторого базиса, то при сложении векторов или умножении их на число λ координаты векторов соответственно складываются или умножаются на λ:

$$\vec{x}+\vec{y}=\{\, x_1+y_1, x_2+y_2, ...x_n+y_n \,\},$$

$$\lambda\,\vec{x}=\{\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\}.$$

3.6 Признак линейной зависимости и независимости векторов

Рассмотрим систему векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, .., \vec{x}_m$ пространства L_n. Пусть координаты векторов задаются следующим образом: $\vec{x}_i=\{x_{i1}, x_{i2}, .., x_{in}\}$, $i=1,2,\dots,m$. Обозначим через X_i столбец координат вектора $\vec{x}_i$.

Приравняем к нулю их линейную комбинацию:

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_m X_m=0\,.$$

Запишем последнее равенство в координатной форме и получим систему:

$$\begin{cases} x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+\cdots+x_{m1}\alpha_m=0 \\ x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2+\cdots+x_{m2}\alpha_m=0 \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\dots\quad\dots\quad\dots \\ x_{1n}\alpha_1+x_{2n}\alpha_2+\cdots+x_{mn}\alpha_m=0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Матрицу этой системы обозначим $М_m$, столбцы этой матрицы составлены из координат векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,.., $\vec{x}_m$:

$$М_m=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{m} \end{pmatrix}$$

Векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$,.., $\vec{x}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда система уравнений (3.2) имеет ненулевое решение $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$.

Для линейной независимости системы векторов необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $М_m$ был равен числу векторов системы m.

В частном случае, при $n=m$, система векторов будет линейно зависима, если $\det M_m = 0$, так как однородная система (3.2) при этом имеет нетривиальное решение и линейно независима, если $\det M_m \neq 0$, так как система (3.2) имеет в этом случае единственное тривиальное решение.

Примеры.

1.В пространстве R^n рассмотрим векто-

$$e_1, 0, 1$$

ры ,

,…,

$, e_n$ 0 ,1, (

покажем, что они линейно независимы.

Действительно, из равенства нулю линейной комбинации: $\vec{x}+\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}$ следует

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \vec{0} = \{0,0,\ldots,0\},$$

т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Далее, любой вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ разлагается по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n..$$

Поэтому пространство R^n является n-мерным, а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, .., \vec{e}_n$ образуют базис. Такой базис называется *канонических*.

2.Векторы $\vec{x}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4$, $\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{x}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ линейно независимы, так как ранг матрицы:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен трем.

3. Имеем векторы $\vec{x}_1 = \{1,2,-1\}$, $\vec{x}_2 = \{2,0,3\}$, $\vec{x}_3 = \{\alpha,1,2\}$. Подобрать α так, чтобы эти векторы были линейно зависимы.

Векторы линейно зависимы, если

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

отсюда $\alpha = 13/6$.

3.7 Преобразование координат вектора при преобразовании базиса

Пусть в пространстве L_n имеются два базиса:B: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и B′’: $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, ..., \vec{e}\,'_n$.

Первый условимся называть старым базисом, второй - новым. Как всякий элемент пространства L_n каждый из элементов нового базиса, можно линейно выразить через векторы старого базиса:

$$\vec{e}_1' = t_{11} \quad \dots \quad {}_n \quad {}_n$$
$$\vec{e}_2' = t_{12} \quad \dots \quad {}_n \quad {}_n$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$e_n' = t_{1n}$$

.

Можно сказать, что новые базисные векторы получаются из старых с помощью матрицы:

$$T= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t \end{pmatrix}$$

,

причем коэффициенты их разложений по старым базисным векторам образуют столбцы этой матрицы. Матрица T называется <u>*матрицей перехода*</u> от базиса В к базису B', k-й столбец матрицы T является столбцом координат вектора $\vec{e}_k'$ в базисе В.

Определитель матрицы T не равен нулю, так как в противном случае её столбцы, а следовательно, и векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ были бы линейно зависимы.

Верно обратное, если определитель матрицы T отличен от нуля, то столбцы её линейно независимы, и значит, векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$, получающиеся из базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ с помощью матрицы T, линейно независимы, т.е. образуют некоторый базис. Следовательно, матрицей перехода может служить любая квадратная матрица порядка n с отличным от нуля определителем.

Выясним теперь, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в старом и новом базисах. Пусть

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$ - в старом базисе и в то же время $\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + ... + x'_n\vec{e}'_n$ - в новом.

Подставляя в последнее равенство вместо $\vec{e}_1^{\copyright}, \vec{e}_2^{\copyright}, ..., \vec{e}_n^{\copyright}$ их выражение через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, получаем:

$$\vec{x} = x'_1 \ (t_{11} \qquad \cdots \qquad {}_n \quad {}_n) \qquad ' \ ($$
$$+\, t_{22}$$

В силу единственности разложения вектора $\vec{x}$ по базису B из последнего равенства следует, что

$$x_1 = t_{11}x'_1$$
$$x_2 = t_{21}x'_1$$
$$x_1 = t_{n1}x'_1 \qquad (3.3)$$

В матричной форме равенства (3.3) принимают вид:

$$X = TX', \qquad (3.4)$$

где X и X'-столбцы координат вектора $\vec{x}$ в базисах B и B' соответственно.

Таким образом, старые координаты вектора $\vec{x}$ получаются из новых его координат с помощью той же матрицы T, только коэффициенты соответствующих разложений образуют строки этой матрицы. Из (3.4)получаем формулу преобразования координат при преобразовании базиса:

$$X' = T^{-1}X. \qquad (3.5)$$

Примеры.

1. Рассмотрим двумерное пространство всех функций вида:

$$f(t) = a\mathrm{e}^{t} + b\mathrm{e}^{-t};$$

выбирая в качестве базисов B и B′ соответственно векторы

$$\vec{e}_1 = \mathrm{e}^{t},\ \vec{e}_2 = \mathrm{e}^{-t},$$

$$\vec{e}'_1 = \operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2},\ \vec{e}'_2 = \operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}.$$

Тогда $\qquad \vec{e}_1' = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{2}\vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 - \dfrac{1}{2}\vec{e}_2,$

или

.

Поэтому координаты вектора $f(t)$ в старом и новом базисе связаны соотношением:

.

2.Поворот системы координат. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - единичные векторы, направленные по осям прямоугольной декартовой системы координат. Повернем оси координат на угол φ против часовой стрелки, и пусть $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ - новые базисные векторы. Углы, образуемые вектором $\vec{e}_1'$ с векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ равны соответственно φ и $\varphi - \pi/2$. Поэтому координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ равны $\cos\varphi$ и $\cos(\varphi - \pi/2) = \sin\varphi$. Значит:

$$\vec{e}_1' = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2.$$

Аналогично, углы вектора $\vec{e}_2'$ с векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ равны соответственно $\varphi + \pi/2$ и φ; координаты его в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ равны $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, поэтому:

$$\vec{e}_2' = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2.$$

Таким образом, матрицей перехода здесь будет:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

а выражения старых координат через новые имеют вид:

$$x_1 = \cos\varphi\, x_1' - \sin\varphi\, x_2'$$

$$x_2 = \sin\varphi\ x_1' + \cos\varphi\ x_2',$$

или

$$X = TX'.$$

3. Найти координаты геометрического вектора $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ в базисе B′, состоящем из векторов $\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2' = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_3' = \vec{i} + \vec{k}$. Выпишем столбцы координат векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ в исходном базисе

B= :

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Отсюда матрица перехода $T_{B \to B'}$ имеет вид:

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $T_{B \to B'}$, находим:

$$X'=(T_{B\to B'})^{-1}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\text{ т.е. }\vec{x}=2\vec{e}_2'-\vec{e}_3'.$$

Упражнения

1. Выяснить, являются ли следующие множества линейными пространствами:

1.1 Множество R_1 всех геометрических векторов, коллинеарных фиксированной прямой.

1.2 Множество всех геометрических векторов, исходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой.

1.3 Множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\vec{x}|>a$, где $a>0$ - фиксированное число.

1.4 Множество всех функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$.

1.5 Множество всех векторов плоскости с исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой.

2. Доказать, что линейно зависима всякая система векторов:

а)содержащая два равных вектора;

б) содержащая два вектора, различающихся числовым множителем;

в) содержащая нулевой вектор;

г) содержащая линейно зависимую подсистему.

3. Выяснить, являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми системы векторов:

а) $\vec{x}_1=\{-3,1,5\}$, $\vec{x}_2=\{6,-3,15\}$;

б) $\vec{x}_1=\{1,1,1,1\}$, $\vec{x}_2=\{0,0,0,0\}$;

в) $\vec{x}_1=\{2,-3,1\}$, $\vec{x}_2=\{3,-1,5\}$, $\vec{x}_3=\{1,-4,3\}$.

4. Показать, что следующие системы векторов линейно зависимы, и выяснить, является ли вектор $\vec{b}$ линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$:

а) $\vec a_1=\{1,0,4\}$, $\vec a_2=\{0,2,1\}$, $\vec a_3=\{0,1,-1\}$,
$\vec b=\{0,1,0\}$;

б) $\vec a_1=\{1,0,0\}$, $\vec a_2=\{0,2,1\}$, $\vec a_3=\{1,2,1\}$,
$\vec b=\{0,0,1\}$;

в) $\vec a_1=\{0,0,0,1\}$, $\vec a_2=\{0,0,1,2\}$, $\vec a_3=\{0,1,3,5\}$,
$\vec a_4=\{1,-2,0,0\}$, $\vec b=\{1,-1,4,-2\}$.

5. Показать, что векторы $\vec e_1$, $\vec e_2$, $\vec e_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec x$ в этом базисе:

а) $\vec e_1=\{1,1,1\}$, $\vec e_2=\{1,2,1\}$, $\vec e_3=\{0,0,1\}$,
$\vec x=\{1,0,4\}$;

б) $\vec e_1=\{1,0,1\}$, $\vec e_2=\{0,1,0\}$, $\vec e_3=\{2,3,4\}$,
$\vec x=\{1,-3,-3\}$;

в) $\vec e_1=\{1,2,1\}$, $\vec e_2=\{2,3,3\}$, $\vec e_3=\{3,1,7\}$,
$\vec x=\{3,3,5\}$;

г) $\vec e_1=\{1,1,1,1\}$, $\vec e_2=\{1,1,-1,-1\}$, $\vec e_3=\{1,-1,1,-1\}$,
$\vec e_4=\{1,-1,-1,1\}$, $\vec x=\{1,2,1,1\}$.

6. Доказать, что система многочленов:

$$t^3+t^2+t+1,\ t^2+t+1,\ t+1,\ 1$$

линейно независима.

7. Доказать, что система многочленов:

$$t^2,\ t(t+1),\ t(t-1)+1,\ t+2$$

линейно зависима.

8. Доказать, что система многочленов $1,t,t^2,\ldots,t^{n-1},t^n$ образует базис в пространстве $||_n$ всех многочленов степени не выше n и, следовательно dim $||_n=n+1$,(этот базис называется каноническим). Найти координаты:

а) многочлена $-3t^2+1$ в каноническом базисе пространства $||_2$;

б) многочлена t^2-2t в каноническом базисе пространства $||_3$

в) многочлена $5-2(t+1)+3(t+1)^2+(t+1)^3$ в каноническом базисе пространства $||_3$.

9. Доказать, что система многочленов $t^2+1,-t^2+2t,t^2-t$ образует базис в пространстве $||_2$. Выписать в этом базисе столбец координат многочлена $-2t^2+t-1$.

10. Найти координаты многочлена t^2-t+2 в базисе: $1,t-1,(t-1)^2$.

11.Найти матрицу перехода от базиса B=($\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$) к базису B'=($\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$) и обратно, если:

$\vec{e}_1=\{0,0,1\}$, $\vec{e}_2=\{0,1,0\}$, $\vec{e}_3=\{1,0,0\}$;

$\vec{e}'_1=\{1,1,1\}, \vec{e}'_2=\{1,2,3\}, \vec{e}'_3=\{1,0,1\}$.

12. В пространстве R_3 заданы векторы $\vec{e}'_1=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{e}'_2=\vec{i}-\vec{j}, \vec{e}'_3=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Доказать, что система B'=($\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$) - базис в R_3, и написать матрицу перехода $T_{B\to B'}$, где

B=( ). Найти координаты вектора $\vec{x}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ в базисе B'.

13. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

б) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

в) поменять местами векторы обоих базисов в обратном порядке?

14.В произвольном линейном пространстве L_n векторы $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ и $\vec{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе B. Доказать, что система B'=($\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$) - базис в L_n, и найти столбец X' координат вектора $\vec{x}$ в этом базисе:

а)

б)

;

в)

.

15. Доказать следующие утверждения:

а) матрица перехода $T_{B \to B'}$, всегда невырождена, и $T_{B' \to B} = (T_{B \to B'})^{-1}$;

б) если

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- невырожденная матрица и B=($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$) - некоторый базис в пространстве L_n, то система векторов:

$$\vec{e}_i' = t_{1i}\vec{e}_1 + \ldots + t_{ni}\vec{e}_n, \ i=1,2,\ldots,n,$$

также образует базис в L_n.

16. Доказать, что если B,B' и B'' - базисы в L_n, то справедливо матричное равенство:

$$T_{B\to B''} = T_{B\to B'} \cdot T_{B'\to B''} .$$

17. В произвольном пространстве L_n векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ заданы своими координатами в некотором базисе:

;

.

Требуется доказать, что системы B=($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$) и B'=($\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$) - базисы в L_n, и, используя результаты задач 15 и 16, написать матрицу перехода $T_{B\to B'}$.

Ответы.

1.1. Да.

1.2. Да, если прямая проходит через начало координат.

1.3. Нет. 1.4. Да.

1.5.Нет, так как в пределах этого множества нельзя сложить два вектора, симметричных относительно заданной прямой.

3.а) линейно зависимы; б) линейно зависимы;
в) линейно не зависимы.

4. а) да; б) нет; в) да.

5.а){2,-1,3}; б){5,3,-2}; в){4,-2,1}; г){5/4,1/4,-1/4,-1/4}.

8. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. $T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $T_{B'\to B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

12. $T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $X' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13. а) поменяются местами i-я и j-я строки матрицы перехода;

б) поменяются местами i-й и j-й столбцы матрицы перехода;

в) матрица перехода, рассматриваемая как квадратная таблица, отразится симметрично относительно своего центра.

14. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

17. $T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

4.ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

Рассмотрим два линейных пространства L_1 и L_2. *Оператором* $\tilde{A}$, действующим из L_1 в L_2, называется отображение $\tilde{A}$: $L_1 \to L_2$, сопоставляющее каждому вектору $\vec{x} \in L_1$ некоторый вектор $\vec{y} \in L_2$, что символически записывается в виде $\vec{y} = \tilde{A}\,\vec{x}$.

Вектор $\vec{y}$ называется *образом вектора* $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ - *прообразом вектора* $\vec{y}$.

Очевидно, что оператор $\tilde{A}$ представляет собой обобщение известного из анализа определения функции на случай, когда областью задания функции является произвольное линейное пространство L_1, а область значений принадлежит пространству L_2.

Оператор $\tilde{A}$ называется *линейным*, если выполняются следующие два условия:

1. $\tilde{A}\,(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \tilde{A}\,\vec{x}_1 + \tilde{A}\,\vec{x}_2$ для любых $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ из L_1 (условие аддитивности);
2. $\tilde{A}\,(\lambda\,\vec{x}) = \lambda\,\tilde{A}\,\vec{x}$ для любого $\vec{x} \in L_1$ и любого числа λ (условие однородности).

Числа λ могут быть вещественными или комплексными в зависимости от того, вещественными или комплексными являются линейные пространства L_1 и L_2.

4.1. Матрица линейного оператора

В дальнейшем будем рассматривать только наиболее важный случай, когда пространства L_1 и L_2 совпадают. В этом случае говорят, что оператор $\tilde{A}: L \to L$ задан в пространстве L и отображает это пространство в себя, так как образы векторов из L принадлежат тому же пространству.

Пусть в n-мерном линейном пространстве L_n выбран базис B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и задан оператор $\tilde{A}$, который переводит вектор $\vec{x} \in L$ в вектор $\vec{y} \in L$, т.е. $\vec{y} = \tilde{A}\,\vec{x}$. Найдем выражение координат образа $\vec{y}$ через координаты прообраза $\vec{x}$.

Пусть $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+...x_n\overrightarrow{e_n}$, тогда в силу линейности оператора $\tilde{A}$ имеем:
$\tilde{A}\ \vec{x}=$
$x_1\tilde{A}\vec{e}_1+x_2\tilde{A}\vec{e}_2$
. Но так как $\tilde{A}\ \vec{e}_i$ (где i=1,2,..,n) - это тоже вектор из L_n, то $\tilde{A}\ \vec{e}_i$ можно разложить по базису В=($\vec{e}_1,\vec{e}_2\ ,\ldots,\vec{e}_n$). Пусть:

$$\tilde{A}\ \vec{e}_i=a_{1i}\vec{e}_1+a_{2i}\vec{e}_2+...+a_{ni}\vec{e}_n,\ i=1,2,..,n.$$

Тогда:

$\tilde{A}\ \vec{x}=x_1(a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+...+a_{n1}\vec{e}_n)+x_2(a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+...+a_{n2}\vec{e}_n)+...+$

$+x_n(a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+...+a_{nn}\vec{e}_n)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n)\vec{e}_1+$

$+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n)\vec{e}_2+...+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n)\vec{e}_n.$

Если $y_1,y_2,...,y_n$ - координаты вектора $\tilde{A}\,\vec{x}$ в базисе В=($\vec{e}_1,\vec{e}_2\ ,\ldots,\vec{e}_n$) , т.е. если:

$$\tilde{A}\ \vec{x}=$$

$y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$

,

то в силу единственности разложения вектора по базису, имеем:

$$\begin{aligned}
y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n,\\
y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n,\\
&...\\
y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Таким образом, каждому линейному оператору $\tilde{A}$ в данном базисе В=($\vec{e}_1,\vec{e}_2\ ,\ldots,\vec{e}_n$) отвечает матрица:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называемая *матрицей линейного оператора* $\tilde{A}$, i-й столбец которой образован коэффициентами разложений вектора $\tilde{A}\,\vec{e}_i$ по базису B=($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$). Коэффициенты разложений (4.1) координат вектора $\tilde{A}\,\vec{x}$ по координатам вектора $\vec{x}$ образуют строки матрицы А. Равенства (4.1) можно записать в виде У=АХ.

Иногда говорят, что в равенствах (4.1) числа $y_1, y_2, ..., y_n$ получены из чисел $x_1, x_2, .., x_n$ с помощью линейного преобразования, задаваемого матрицей А. В этом случае матрицу А называют *матрицей линейного преобразования*.

Таким образом, всякому линейному оператору $\tilde{A}$ в n-мерном пространстве при выбранном базисе соответствует некоторая квадратная матрица А n-го порядка.

Справедливо и обратное утверждение. Всякой матрице А n-го порядка при заданном базисе соответствует некоторый линейный оператор. Действительно, пусть B=(.., $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$) - базис пространства L_n, и пусть дана матрица А n-го порядка. Обозначим через $\tilde{A}$ оператор, переводящий произвольный вектор $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n$ в вектор:

$$\tilde{A}\,\vec{x}=$$

$$y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

,

где

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i=1,2,...,n.$$

Покажем, что этот оператор - линейный. Произвольный вектор $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+...+y_n\vec{e}_n$ оператор $\tilde{A}$ переводит в следующее выражение:

$$\tilde{A}\,\vec{y} = y_1'\,\vec{e}_1 + y_2'\,\vec{e}_2 + ... + y_n'\,\vec{e}_n,$$

где $y_i'=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+...+a_{in}y_n$.

Вектор:

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+...+(x_n+y_n)\vec{e}_n$$

в вектор:

$$\tilde{A}(\vec{x}+\vec{y})=z_1\vec{e}_1+z_2\vec{e}_2+...+z_n\vec{e}_n,$$

где

$$z_i=a_{i1}(x_1+y_1)+a_{i2}(x_2+y_2)+...+a_{in}(x_n+y_n).$$

Поэтому:

$$\tilde{A}(\vec{x}+\vec{y})=\tilde{A}\,\vec{x}+\tilde{A}\,\vec{y}\,.$$

Далее, для любого числа α имеем:

$$\alpha\,\vec{x}=(\alpha\,x_1)\vec{e}_1+(\alpha\,x_2)\vec{e}_2+...+(\alpha\,x_n)\vec{e}_n$$

и

$$\tilde{A}(\alpha\,\vec{x})=t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+...+t_n\vec{e}_n,$$

где

$$t_i=a_{i1}(\alpha\,x_1)+a_{i2}(\alpha\,x_2)+...+a_{in}(\alpha\,x_n)=\alpha\,x_i'\,.$$

Следовательно, $\tilde{A}(\alpha\,\vec{x})=\alpha\,\tilde{A}\,\vec{x}$ и оператор $\tilde{A}$ - линейный.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между линейными операторами в n-мерном пространстве и матрицами n-го порядка.

Легко видеть, что для всякого линейного оператора $\tilde{A}$ выполнено равенство $\tilde{A}\,\vec{O}=\vec{O}$. При этом, если $\tilde{A}\,\vec{x}=0$ только при $\vec{x}=0$, то оператор называется *невырожденным*, если же найдется такой вектор $\vec{x}\neq\vec{O}$, что $\tilde{A}\,\vec{x}=0$, то оператор $\tilde{A}$ - вырожденный.

Пусть $A=(a_{ij})$ - матрица линейного оператора $\tilde{A}$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Для существования ненулевого решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы А был равен нулю: detA=0. Следовательно, для того чтобы оператор $\tilde{A}$ был невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A этого оператора (в любом базисе) был отличен от нуля.

Таким образом, матрица невырожденного оператора невырожденная.

4.2. Примеры линейных операторов

Приведем несколько примеров линейных операторов в n-мерном линейном пространстве и соответствующих этим операторам матриц.

1. Если для каждого $\vec{x} \in L_n$ справедливо равенство $\tilde{A}\,\vec{x}=0$, то оператор $\tilde{A}$ является линейным и называется *нулевым оператором*. Так как для любого базиса $\{\vec{e}\ i\}$ $\tilde{A}\,\vec{e}_i=0$, i=1,2,…,n, то матрица А нулевого оператора $\tilde{A}$ в любом базисе является нулевой матрицей А=0.

2. Если для каждого вектора $\vec{x} \in L_n$ справедливо равенство $\tilde{A}\,\vec{x}=\vec{x}$, то оператор $\tilde{A}$ является линейным. Он называется *тождественным оператором* и обозначается $\tilde{E}$. Так как для любого базиса $\{\vec{e}\ \}$ $\tilde{E}\,\vec{e}_i=\vec{e}_i$, i=1,2,..,n, то матрица тождественного оператора в любом базисе является единичной матрицей: А=Е.

3. Пусть $\tilde{A}$ - *поворот* всех векторов обычной плоскости xOy вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Это преобразование линейное, т.к. безразлично, сначала ли сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а потом повернуть их сумму на

угол φ, или сначала повернуть векторы, а потом их сложить; также безразлично, умножить сначала вектор $\vec{a}$ на число α, а затем повернуть его на угол φ или сделать это в обратном порядке.

В п. 3.7 была найдена матрица оператора поворота:

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

4. Пусть $\tilde{A}$ - растяжение на плоскости XOY вдоль оси OX в k раз. Базисные векторы $\vec{e}_1=\vec{i}$, $\vec{e}_2=\vec{j}$. Возьмем произвольный вектор $\vec{x}=\{x_1,x_2\}$ на плоскости XOY. Пусть оператор $\tilde{A}$ переводит его в вектор $\vec{y}=\{y_1,y_2\}$, тогда $y_1=kx_1$, $y_2=x_2$ или $\tilde{A}\vec{e}_1=k\vec{e}_1$, $\tilde{A}\vec{e}_2=\vec{e}_2$. Матрица оператора имеет вид :

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В пространстве $\|_n$ многочленов степени не выше n рассмотрим оператор дифференцирования $\tilde{A}(x(t))=x'(t)$. Линейность оператора дифференцирования следует из правил дифференцирования. Пусть в пространстве $\|_n$ выбран базис:

$$\vec{e}_0=1,\ \vec{e}_1=t,\ \vec{e}_2=t^2/2!,..,\ \vec{e}_n=t^n/n!.$$

Тогда: $\tilde{A}\vec{e}_0=0, \tilde{A}\vec{e}_1=\vec{e}_0, \tilde{A}\vec{e}_2=\vec{e}_1,\ldots,\tilde{A}\vec{e}_n=\vec{e}_{n-1}$.

Матрица оператора имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$