

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Воронежский государственный архитектурно - строительный университет

473

Кафедра строительной механики

РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы по учебной дисциплине
«Строительная механика» для студентов специальностей
270102 - «Промышленное и гражданское строительство»,
270105- «Городское строительство и хозяйство»,
270205- «Автомобильные дороги и аэродромы» заочной формы обучения

Воронеж 2006

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Воронежский государственный архитектурно - строительный университет

Кафедра строительной механики

РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы по учебной дисциплине
«Строительная механика» для студентов специальностей
270102 - «Промышленное и гражданское строительство»,
270105- «Городское строительство и хозяйство»,
270205- «Автомобильные дороги и аэродромы» заочной формы обучения

Воронеж 2006

Расчёт балочной фермы

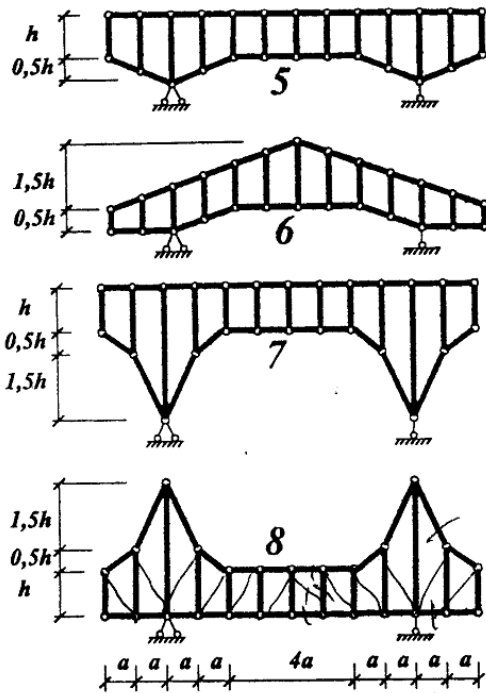
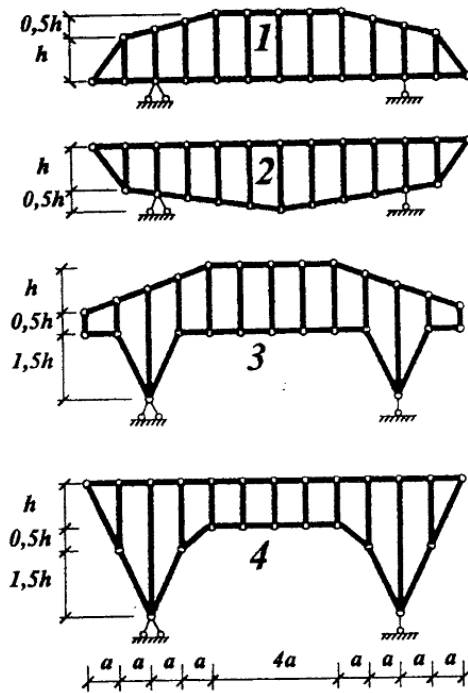
Схема поясов и стоек № 2

$a = 4 \text{ м}$

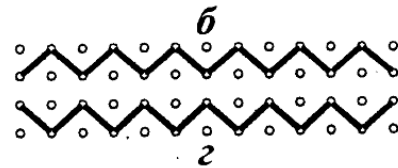
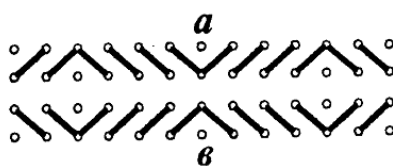
Схема раскосов № 9

$h = 4 \text{ м}$

Схемы поясов и стоек



Схемы раскосов (на схемах 1, 2, 4 исключаются раскосы крайних панелей)



Нагрузка приложена к верхнему поясу фермы



$P = 12 \text{ кН}$

Временная нагрузка $q = 10 \text{ кН/м}$

Шесть стержней для подробного расчёта указаны на схеме фермы.

Задание выдал: Р.Мальков

Фамилия, имя, отчество студента: _____

Составители А.Н. Аверин, Г.Е. Габриелян, Л.В. Панина

УДК 624.04 (07)

Расчет фермы [Текст]: метод. указания к выполнению расчетно-графической работы для студ. з/о спец. 270102, 270105, 270205 /Воронеж. гос. арх. - строит. ун-т; сост.: А.Н. Аверин, Г.Е. Габриелян, Л.В. Панина, - Воронеж, 2006.- 28с.

Приводится описание расчетно-графической работы по расчету фермы. Излагается методика определения усилий в стержнях фермы. Разъясняется статический способ построения линий влияния опорных реакций и усилий в стержнях фермы.

Предназначены для студентов специальностей 270102 - «Промышленное и гражданское строительство», 270105- «Городское строительство и хозяйство», 270205- «Автомобильные дороги и аэродромы» заочной формы обучения.

Ил. 19 . Табл. 4.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета

Рецензенты: В.С. Сафронов, д-р. техн. наук, профессор;
Р.И. Мальцев, канд. техн. наук, доцент.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по разделу строительной механики «Основы статики сооружений» составлены в соответствии с учебной программой для студентов четвертого курса заочной формы обучения специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство», «Автомобильные дороги и аэродромы».

Работа предполагает выполнение статического расчета плоской балочной фермы с определением реакций опор и усилий, построение линий влияния и определение расчетных усилий от сплошной временной нагрузки для шести стержней.

1. ЗАДАНИЕ

Студент получает на руки бланк задания с указанием схемы фермы, нагрузки и стержнями для подробного расчета. Бланк задания прикладывается к выполненной работе.

2. СОДЕРЖАНИЕ ВЫПОЛНЕННОЙ РАБОТЫ

1. Задание.
2. Кинематический анализ расчетной схемы фермы.
3. Обработка геометрических данных.
4. Расчет фермы на постоянную нагрузку:
 - а) схема фермы с нагрузкой,
 - б) перечень нулевых стержней,
 - в) аналитическое определение реакций опор,
 - г) аналитическое определение усилий в шести стержнях фермы.
5. Построение линий влияния:
 - а) линии влияния реакций опор,
 - б) линии влияния усилий в шести стержнях фермы со всеми необходимыми для их построения расчетами,
 - в) матрица влияния (фрагмент).
6. Определение усилий от постоянной нагрузки:
 - а) с помощью линий влияния (по развернутым формулам) – для одного стержня пояса и для одной диагонали в панели между опорами,
 - б) с помощью матрицы влияния – для шести стержней.
7. Таблица сравнения усилий, найденных двумя способами (аналитически, по линиям и матрицам влияния) для шести стержней.

8. Определение с помощью линий влияния расчетных усилий от сплошной временной нагрузки для двух диагоналей и двух стержней пояса – по набору:
- а) схемы опасного положения временной нагрузки,
 - б) подсчет площадей линии влияния,
 - в) вычисление максимального и минимального значения усилий, возникающих от временной нагрузки.

3. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Оформление задания в работе. Обозначения

В начале работы следует вычертить схему фермы с соблюдением (и указанием) линейного масштаба; вынести и надписать характерные размеры. Обозначить стержни и усилия в них, обозначить углы.

На том же чертеже надо показать нагрузку и выделить **шесть стержней**, подлежащих подробному расчету.

Стержни поясов и диагонали нумеруются в соответствии с нумерацией панелей и обозначаются: O_1, O_2, \dots, O_{12} (верхний пояс); U_1, U_2, \dots, U_{12} (нижний пояс); D_1, D_2, \dots, D_{12} (диагонали). Стойки, разделяющие две панели, получают номер слева расположенной панели - $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{12}$. В тех схемах ферм, где крайние панели треугольные, отсутствуют диагонали D_1 и D_{12} и стойки V_0 и V_{12} .

Углы между наклонными стержнями и горизонталью также нумеруются в соответствии с нумерацией панелей и обозначаются:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ (для верхнего пояса);

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}$ (для нижнего пояса);

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{12}$ (для диагоналей);

3.2. Обработка геометрических данных

Обработка включает определение длин наклонных стержней, тангенсов, косинусов и синусов углов наклона (см. таблицы 1,2 в примере №2).

3.3. Аналитическое определение усилий

1. Изображая схему отсеченной части фермы или вырезанного узла для составления уравнений равновесия, надо **неизвестные усилия в стержнях полагать положительными** (растягивающими) и соответственно направлять их векторы. После решения уравнений найденные усилия записываются с указанием знака; положительным значениям соответствует растяжение стержня, отрицательным – сжатие. Это относится и к ординатам линий влияния.

2. Для аналитического определения любого усилия следует использовать такой прием расчленения фермы и составлять такие уравнения равновесия, чтобы искомое усилие определялось простейшим образом (если это возможно, независимо от усилий в остальных стержнях).

3. **Вырезание узла** применяется: а) если в нем сходятся два стержня (определяется усилие в любом из них); б) если в нем сходятся три стержня и два из них лежат на одной прямой (определяется усилие в третьем стержне). При этом составляется уравнение проекций на нормаль к усилию, которое из уравнений надо исключить.

4. **Отсечение крупной части ферм** применяется, если при этом пересекаются три стержня, не пересекающиеся в одной точке; определяется усилие в любом из них. Рассматривать надо ту из двух частей фермы (левую или правую), к которой приложено меньшее число внешних сил. При этом составляется уравнение моментов относительно «точки Риттера», где пересекаются линии действия двух усилий, которые из уравнения надо исключить. Если эти линии действия параллельны (точка Риттера – бесконечно удалена), составляются уравнения проекций на нормаль к ним.

5. **Совместное использование нескольких уравнений** применяется только если составление самостоятельного уравнения (по п.п. 3 и 4) невозможно.

6. Для определения плеча усилия в наклонном стержне MN относительно моментной точки R при **любом** их взаимном расположении рекомендуется рассмотреть треугольник MNR (рис. 1).

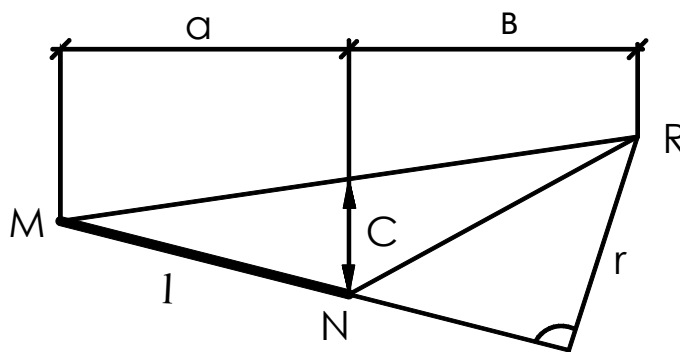


Рис. 1

Если принять длину стержня $l = MN$ за основание треугольника, то искомое плечо r -его высота, а lr - его удвоенная площадь; ту же удвоенную площадь можно определить по другим геометрическим данным, например по заданным размерам a , b , c . Приравнявая $lr = ca + cb$, находим $r = c(a + b)/l$. Можно использовать и другие зависимости (подобие треугольников, тригонометрические соотношения в них; см. далее примеры расчета), но эти примеры менее универсальны и несколько сложнее.

3.4. Выделение нулевых стержней

1. Напомним признаки для выделения нулевых стержней, вытекающие из условий равновесия узлов: а) если в узле сходятся два стержня с усилиями N_k , N_i и нагрузка не приложена, то $N_k=0$, $N_i=0$;

б) если к такому же узлу приложена нагрузка по направлению N_i , то $N_k=0$;

в) если в узле сходятся три стержня с усилиями N_k , N_i , N_j , причем N_i и N_j лежат на одной прямой и нагрузка не приложена, то $N_k=0$.

Если при рассмотрении одного узла доказано, что $N_k=0$, то это усилие при рассмотрении другого узла уже во внимание не принимается.

2. Если значение $N_k=0$ определяется не по перечисленным признакам, а в ходе аналитического расчета, то такой стержень тоже надо внести в перечень нулевых стержней, сделав при этом ссылку на последующий расчет.

3. Если среди шести стержней, подлежащих подробному расчету, есть нулевые, то в работе (4,г) для них надо вычислить значение $N_k=0$ на общих основаниях, составив и решив соответствующие уравнения равновесия.

3.5. Построение линий влияния (л.вл.)

1. Приступая к построению л. вл., следует еще раз отчетливо уяснить ее смысл: это график изменения усилия в одном определенном стержне в зависимости от расположения единичного вертикального груза, приложенного к узлам верхнего (или нижнего) пояса фермы.

2. Все, сказанное в разделе «Аналитическое определение усилий» (правила знаков, порядок составления уравнений, определение плеч), относится и к построению л. вл.; здесь особенно важно получить **простейшие** аналитические выражения для функции, представляемой каждой л. вл.

3. Составляя и решая уравнения равновесия узла, к которому приложен единичный груз («груз в узле»), получаем **значение одной ординаты** линии влияния. Когда груз «вне узла» (т.е. он приложен к любому другому узлу, кроме вырезанного), из тех же уравнений получаем выражение, пригодное для **всех остальных ординат л. вл. во всех остальных узлах**.

4. Когда при получении л. вл. **отсекается часть** фермы, принадлежащая ее **консоли**, надо составлять уравнение равновесия этой отсеченной части, не содержащее переменных реакций опор. Оно будет простейшим **при всяком положении груза** как слева, так и справа от рассечения.

5. Когда при получении л. вл. **ферма рассекается между опорами**, надо составлять уравнения равновесия той части фермы, к которой не

приложен единичный груз (при грузе слева – для правой части, при грузе справа – для левой части); в обоих случаях они будут простейшими.

6. Если груз приложен между узлами фермы, усилие в любом стержне зависит от абсциссы груза линейно (поскольку уравнения равновесия линейны относительно этой абсциссы). На этом основано построение «переходных прямых» между известными ординатами или участками л. вл.

7. Для получения л. вл. усилий в «особых» стойках используются предварительно построенные л. вл. усилий в других стержнях. Связь между усилиями определяется уравнениями равновесия узлов (см. пример № 2).

3.6. Определение усилий по линиям влияния. Запись расчета с помощью матриц влияния

Интересующим нас усилиям в стержнях фермы дадим теперь общую порядковую нумерацию, независимо от типа и расположения стержней, и обозначим эти усилия: $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, N_t$. Пронумеруем также узловые нагрузки: $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s$. Ординаты л. вл. под узлами фермы обозначим n_{ki} , где $k=1,2,\dots, i$ - номер усилия, для которого построена л. вл., а $i = 1,2,\dots, S$ - номер ординаты на данной л. вл. (т. е. номер узла).

В условиях задания $t = 6$ - по числу стержней, подлежащих расчету, $S = 13$ - по числу узлов загруженного пояса фермы.

Определение **одного** (k -ого) усилия по линии влияния на основании принципа суперпозиции выполняется по известной формуле

$$N_k = n_{k1}P_1 + n_{k2}P_2 + \dots + n_{ks}P_s. \quad (1)$$

Можно записать все искомые усилия N_k в виде матрицы-столбца N , все заданные угловые нагрузки P_i в виде матрицы-столбца P , а ординаты линий влияния n_{ki} свести в прямоугольную **матрицу влияния** n . В условиях задания будем иметь

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_{13} \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1,13} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2,13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{61} & n_{62} & \dots & n_{6,13} \end{bmatrix}.$$

Тогда определение всех интересующих нас усилий N_1, N_2, \dots, N_t вместо многократного повторения однотипной записи вычислений по формуле (х) можно представить одной матричной формулой

$$N = nP. \quad (2)$$

По правилам умножения матриц вычисление каждого элемента, входящего в искомую матрицу N , выполняется в конечном счете по той же формуле (1). Однако запись всего расчета с помощью единой формулы (2), вместо многократного повторного применения формулы (1), более компактна

и позволяет упорядочивать вычисления, особенно в условиях применения ЭВМ.

Матрицу n , составленную для $t=6$ (по условиям учебного задания), следует рассматривать как фрагмент более обширной матрицы влияния, необходимой для инженерного расчета всех стержней фермы. Компактность записи реального, более обширного расчета, еще более существенна.

Выполнение §§ 6 и 7 работы пояснений не требует.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

4.1. Пример № 1 (рис. 2)

4.1.1. Кинематический анализ

1. Определение числа степеней свободы W .

$W = 2U - C - C_0$, где число узлов $U = 6$, число стержней $C = 9$, число опорных стержней $C_0 = 3$. Имеем $W = 2 \cdot 6 - 9 - 3 = 0$.

Ферма имеет необходимое для геометрической неизменяемости число связей, избыточных связей нет. При условии правильной структуры она может быть геометрически неизменяемой.

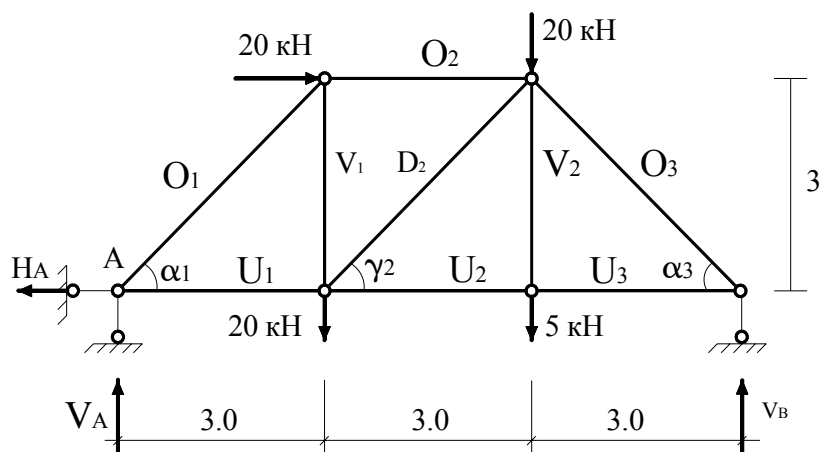


Рис. 2

2. Анализ структуры. Шарнирно-стержневой треугольник (любой, например, $O_1 - U_1 - V_1$) принимается за исходный диск. В состав этого же диска включается соседний узел, прикрепленный двумя стержнями O_2 и D_2 , не лежащими на одной прямой. Аналогично стержнями U_2 и V_2 прикрепляется следующий узел и т.д., пока не доказывается, что ферма в целом есть диск. С

диском «земля» он связан тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке.

3. Вывод. Структура системы правильная (нет дефицита связей в одной части за счет избытка их в другой, нет признаков мгновенной изменяемости). Система геометрически неизменяемая и ввиду отсутствия избыточных связей – статически определимая.

4.1.2. Обработка геометрических данных

Для стержня O_1 : $l = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 4,243 \text{ м}$;

$$\cos \alpha_1 = 3/4,243 = 0,707; \sin \alpha_1 = 0,707.$$

Аналогично – для α_3, γ_2 .

4.1.3. Определение реакций опор

Из уравнений равновесия фермы в целом $\sum M_B = 0, \sum M_A = 0, \sum X = 0$ (здесь они опускаются) следует $V_A = 15 \text{ кН}$, $V_B = 30 \text{ кН}$, $H_A = 20 \text{ кН}$; контрольное уравнение $\sum Y = 0$ удовлетворяется, V_A, V_B направлены вверх, H_A - влево.

В случае симметричной нагрузки решение упрощается: $H_A = 0$; $V_A = V_B$ (определяются из уравнения $\sum Y = 0$).

4.1.4. Аналитическое определение усилий U_1, O_2, D_2, V_2 . (см. рис. 2)

Можно рассчитать несколькими способами:

1) U_1 определяем методом вырезания узлов.

Составим для узла А уравнение проекций на ось $n-n$, направив ее \perp к O_1 (рис. 3): $15 \cos \alpha_1 + 20 \sin \alpha_1 - U_1 \sin \alpha_1 = 0$; отсюда $U_1 = 20 + 15/\operatorname{tg} \alpha_1$, где $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$.

Окончательно $U_1 = 35 \text{ кН} > 0$ (стержень растянут).

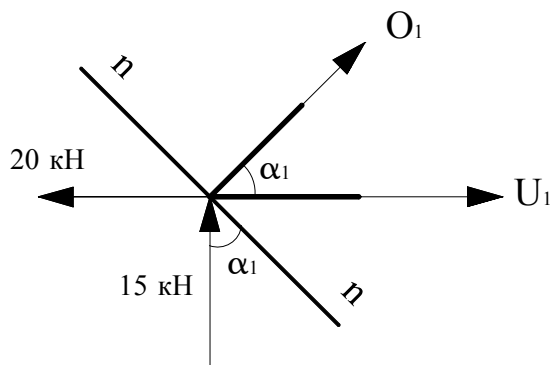


Рис. 3

Аналогично, составив уравнение проекций на ось y (она направлена \perp к U_1), можно определить

$O_1 = -15 / \sin \alpha_1 = -21,2 \text{ кН}$ (проверьте!);

2) O_2 и U_2 определим способом расщепления на крупные части (рис. 4).

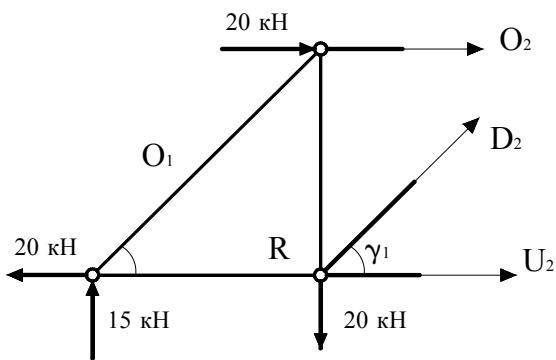


Рис. 4.

Для O_2 моментная точка R определяется пересечением D_2 и U_2 . Для D_2 моментная точка (пересечение O_2 и U_2) бесконечно удалена, поэтому составляется уравнение проекций на ось y , направленную \perp к O_2 и U_2 .

Для левой части получаем:

$$\sum M_R = O_2 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 3 = 0, \text{ отсюда } O_2 = -\frac{60 + 45}{3} = -35 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 15 - 20 - D_1 \sin \gamma_1 = 0, \text{ отсюда } D_1 = \frac{20 - 15}{\sin \gamma_1} = \frac{5}{0,707} = 7,07 \text{ кН}$$

(стержень O_2 - сжат, D_2 - растянут);

3) V_2 проще всего определить способом вырезания узлов (рис. 5), проецируя силы на ось Y (она \perp к U_2 и U_3).

Получим $\sum Y = V_2 - 5 = 0$; откуда $V_2 = 5 \text{ кН}$ (стержень растянут).

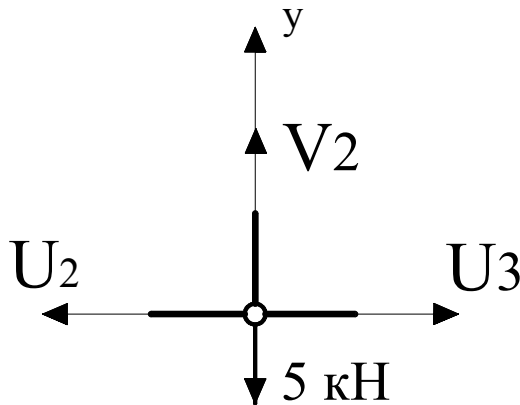


Рис. 5

Заметим, что усилия U_2 и U_3 из условий равновесия этого узла определены быть не могут, однако из уравнения $\sum X = 0$ следует $U_2 = U_3$.

4.2. Пример № 2

Кинематический анализ опускается, он подробно изложен в примере № 1.

4.2.1. Обработка геометрических данных. Определение плеч

Эта схема (рис.6.) в сравнении с примером №1 несколько сложнее по очертанию. Покажем здесь приемы обработки геометрических данных и их использование в расчете (см. табл. 1 и 2).

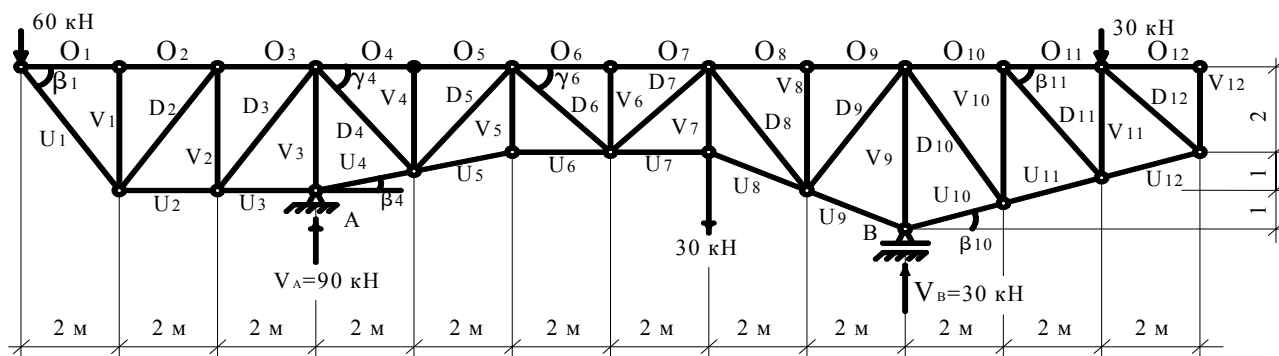


Рис. 6

Таблица 1

Теоретические длины стержней

Тип стержня	Обозначение	Длина (м)	Тип стержня	Обозначение	Длина (м)
стойки	V_0	нет	нижний пояс	U_2, U_3, U_6, U_7	2,00
	V_5, V_6, V_7, V_{12}	2,00		U_4, U_5, U_{11}, U_{12}	$\sqrt{2^2 + 0,5^2} = \sqrt{4,25} \approx 2,062$
	V_4, V_{11}	2,50		U_8, U_9, U_{10}	$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2,237$
	$V_1, V_2, V_3, V_8, V_{10}$	3,00		U_1	$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$
	V_9	4,00			
верхний пояс	$O_1 - O_{12}$	2,00	диагонали	D_1	нет
				D_6, D_7, D_{12}	$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2,828$
				D_4, D_5, D_{11}	$\sqrt{2^2 + 2,5^2} = \sqrt{10,25} \approx 3,202$
				$D_2, D_3, D_8, D_9, D_{10}$	$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$

Углы наклона стержней и функции от них

Тип элемента	Номер панелей i	Длина элемента ($м$)	Обозначение углов	Тригонометрические функции		
				$tg \gamma_i$	$\cos \gamma_i$	$\sin \gamma_i$
диагонали	2, 3, 8, 9, 10	3,606	γ_2, γ_3 $\gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}$	$\frac{3}{2} = 1,500$	$\frac{2}{3,606} = 0,555$	$\frac{3}{3,606} = 0,832$
	4, 5, 11	3,202	$\gamma_4, \gamma_5, \gamma_{11}$	$\frac{2,5}{2} = 1,250$	$\frac{2}{3,202} = 0,625$	$\frac{2,5}{3,202} = 0,781$
	6, 7, 12	2,828	$\gamma_6, \gamma_7, \gamma_{12}$	$\frac{2}{2} = 1,000$	$\frac{2}{2,828} = 0,707$	$\frac{2}{2,828} = 0,707$
				$tg \beta_i$	$\cos \beta_i$	$\sin \beta_i$
нижний пояс	1	3,606	β_1	$\frac{3}{2} = 1,500$	$\frac{2}{3,606} = 0,555$	$\frac{3}{3,606} = 0,832$
	4, 5, 11, 12	2,062	β_4, β_5 β_{11}, β_{12}	$\frac{0,5}{2} = 0,250$	$\frac{2}{2,062} = 0,970$	$\frac{0,5}{2,062} = 0,242$
	8, 9, 10	2,237	$\beta_8, \beta_9, \beta_{10}$	$\frac{1}{2} = 0,500$	$\frac{2}{2,237} = 0,894$	$\frac{1}{2,237} = 0,447$

Моментная точка R для усилия D_{11} определяется пересечением линий действия O_{11} и U_{11} (рис. 7).

Из подобия треугольников LRP и MRT следует: $\frac{c}{c+4} = \frac{2}{3}$, откуда $c = 8 м$.

Здесь же моментная точка для D_{12}, V_{10}, V_{11} .

Плечо усилия D_{11} относительно R можно определить различными способами:

а) определяя по-разному удвоенную площадь треугольника, приняв за основание либо MN , либо MR :

$$2W(MNR) = MN \cdot RK = MR \cdot SN;$$

б) используя подобие прямоугольных треугольников MKR и MNS :

$$\frac{RK}{MR} = \frac{SN}{NM};$$

в) используя тригонометрические соотношения в тех же треугольниках,
 $RK = MR \cdot \sin \gamma_{11}$, где $\sin \gamma_{11} = \frac{SN}{MN}$.

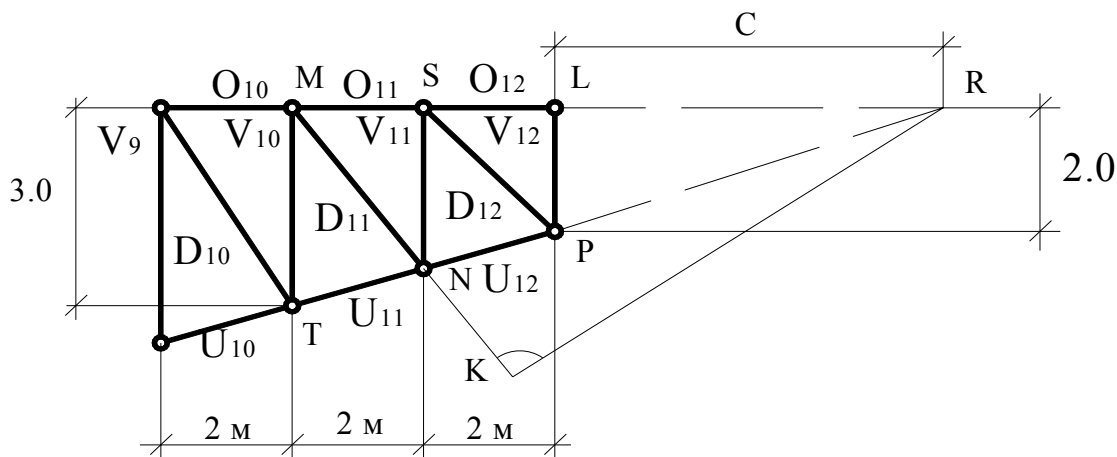


Рис. 7

Любым из этих способов получим

$$RK = \frac{MR \cdot SN}{MN} = \frac{12 \cdot 2.50}{3.202} = 9.37 \text{ м.}$$

Здесь $\frac{2.50}{3.202} = \sin \gamma_{11} = 0.781$. В работе студент может определять длину плеча любым способом.

Теми же тремя способами определим плечо усилия U_4 относительно моментной точки R по рис. 8.

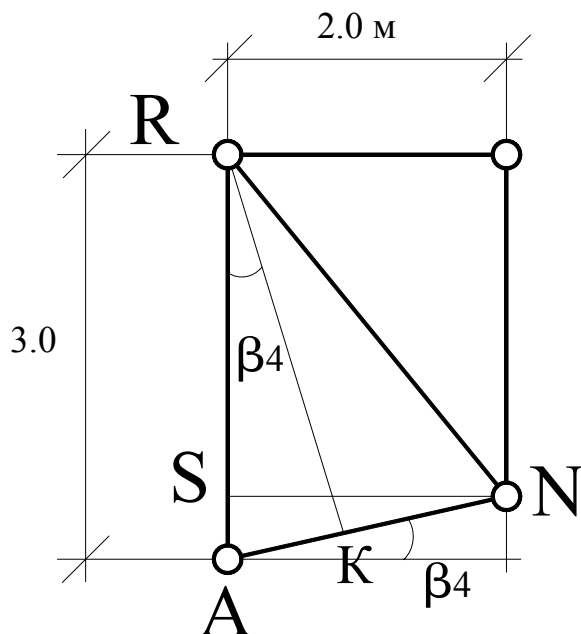


Рис. 8

а) $2W(ANR) = AN \cdot RK = AR \cdot SN$;

б) $\frac{RK}{AR} = \frac{SN}{AN}$;

в) $RK = AR \cdot \cos \beta_4$, где $\cos \beta_4 = \frac{SN}{AN}$.

Получим $RK = \frac{AR \cdot SN}{AN} = \frac{3 \cdot 2}{2.062} = 2.91 \text{ м}$

Здесь $\frac{2}{2.062} = \cos \beta_4 = 0.970$.

4.2.2. Аналитическое определение усилий

После определения плеч большая часть усилий определяется так же, как в примере № 1. Так, D_{11} определяется из уравнения $\sum M_R = 0$ для правой части; V_{10} - из аналогичного уравнения; V_2 - из уравнения $\sum Y = 0$ для левой части (рис. 9)

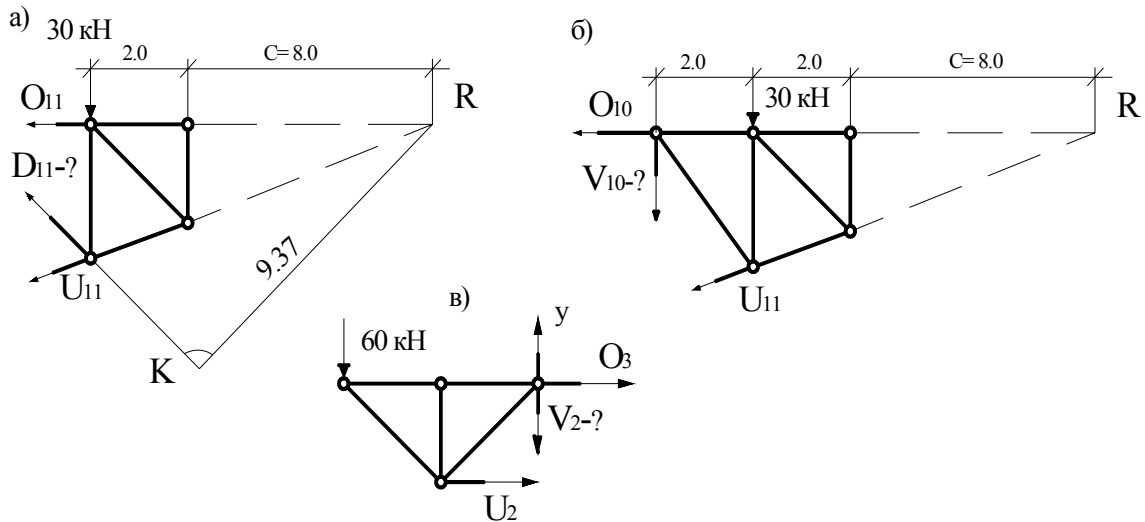


Рис. 9

Эти уравнения имеют вид

а) $D_{11} \cdot 9,37 - 30 \cdot 10 = 0$, отсюда $D_{11} = \frac{300}{9,37} = 32,0 \text{ кН}$;

б) $-V_{10} \cdot 12 - 30 \cdot 10 = 0$, отсюда $V_{10} = -\frac{300}{12} = -25,0 \text{ кН}$;

в) $-V_2 - 60 = 0$, отсюда $V_2 = -60 \text{ кН}$ и т. д.

Усилия $O_1, U_1, V_1, V_4, V_6, V_8, O_{12}, V_{12}$ определяются способом вырезания узлов (часть из них нулевые). Усилия в «особых» стойках V_3, V_5, V_7, V_9 не могут быть непосредственно определены из самостоятельных уравнений каждое. Требуется предварительное определение соответственно U_3 или U_4 , U_5 или U_6, U_7 или U_8, U_9 или U_{10} и последующая подстановка этих значений в уравнения равновесия узлов нижнего пояса.

Составим уравнения равновесия узлов A и B (рис. 10).

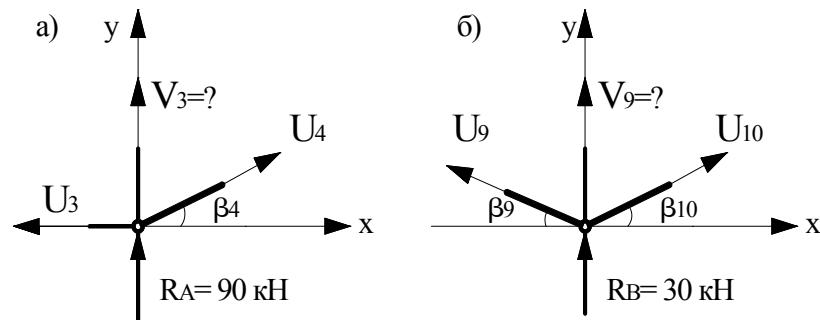


Рис.10

Узел «А»

$$\sum X = 0; \quad -U_3 + U_4 \cos \beta_4 = 0.$$

$$\sum Y = 0; \quad A + V_3 + U_4 \sin \beta_4 = 0.$$

Отсюда $V_3 = U_3 \operatorname{tg} \beta_4 - A$;
 $(\operatorname{tg} \beta_4 = \frac{1}{4}, \quad A = 90 \text{ кН}).$

Узел «В»

$$\left. \begin{aligned} -U_9 \cos \beta_9 + U_{10} \cos \beta_{10} &= 0 \\ B + V_9 + 2U_{10} \sin \beta_{10} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $V_9 = -2U_{10} \sin \beta_{10} - B =$
 $-2U_{10} \cos \beta_{10} \cdot \operatorname{tg} \beta_{10} - B$;
 $(\operatorname{tg} \beta_{10} = \frac{1}{2}, \quad B = 30 \text{ кН}).$

(Решение, содержащее тангенсы, удобнее для вычислений).

Для определения U_5 и U_{10} составляют уравнения $\sum M_R = 0$. (Определите моментные точки и составьте схемы самостоятельно!) Эти уравнения принимают вид (в скобках плечо):

$$-U_3 \cdot 3 - 60 \cdot 6 = 0; \quad U_{10} \cdot (4 \cos \beta_{10}) + 30 \cdot 4 = 0$$

$$\text{Отсюда } U_3 = -\frac{360}{3} = -120 \text{ кН}, \quad U_{10} = -\frac{30}{\cos \beta_{10}}.$$

И окончательно, подставляя значения A , $\operatorname{tg} \beta_4$, B , $\operatorname{tg} \beta_{10}$ получаем
 $V_3 = 120 \cdot \frac{1}{4} - 90 = -60 \text{ кН}$, $V_9 = 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} - 30 = 0 \text{ кН}$.

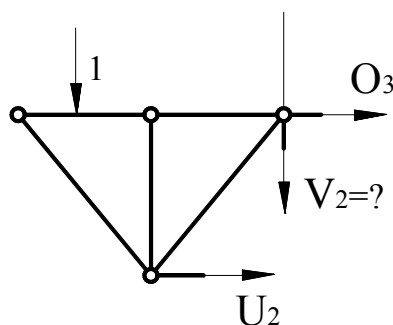
Вычислите самостоятельно и проверьте, что $V_5 = 30 \text{ кН}$, $V_7 = -30 \text{ кН}$.

4.2.3. Построение линий влияния

На рис. 12 показано несколько линий влияния для усилий в стержнях фермы. Приводим необходимые для их построения рассуждения:

1. Для стоек V_2 и V_{10} (рис. 11 а, б), расположенных в консольной части фермы, при всяком положении груза простейшими оказываются уравнения равновесия отсеченной части, не содержащие переменных реакций A и B (для V_2 - левой части, для V_{10} - правой части). Абсциссу груза x удобно отсчитывать от моментной точки.

а)



б)

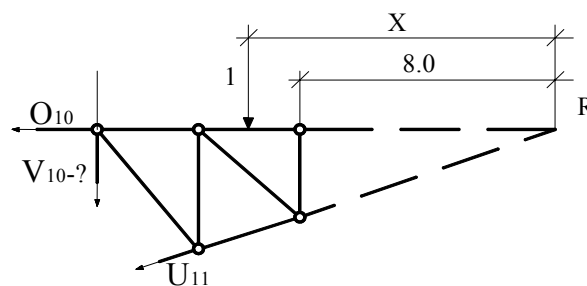


Рис.11

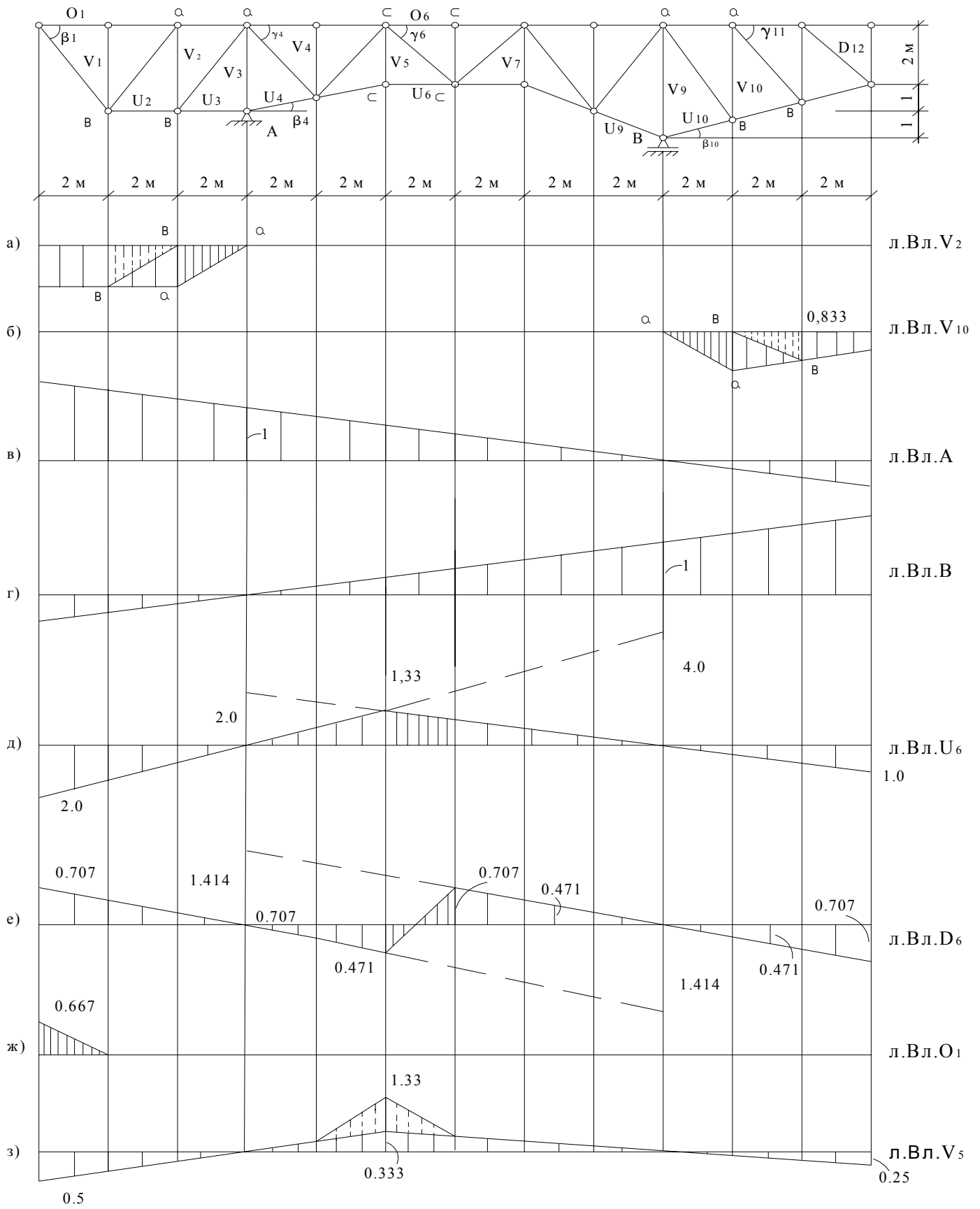


Рис. 12

Получим:

	для V_2 из $\sum Y = 0$	для V_{10} из $\sum M_R = 0$
при грузе слева от рассеченной панели	$-V_2 - 1 = 0; V_2 = -1$	$-V_{10} \cdot 12 = 0; V_{10} = 0$
при грузе справа от рассеченной панели	$-V_2 = 0; V_2 = 0$	$-V_{10} \cdot 12 - 1x = 0; V_{10} = -x/12$ (отсчет x - от R влево) при $x = 0$ $V_{10} = 0$ при $x = 12$ м $V_{10} = -1$

Построенные по этим выражениям левый и правый участки линий влияния показаны на рис. 12 а, б сплошными жирными линиями; они соединяются переходной прямой в пределах перерезанной панели верхнего пояса $a-a$ (при нагрузке поверху) или нижнего пояса $b-b$ (при нагрузке понизу).

2. Для элементов нижнего пояса U_6 и диагонали D_6 (рис. 13) простейшими оказываются уравнения равновесия отсеченной части фермы, где нет единичного груза (при грузе слева - правой части, при грузе справа - левой части).

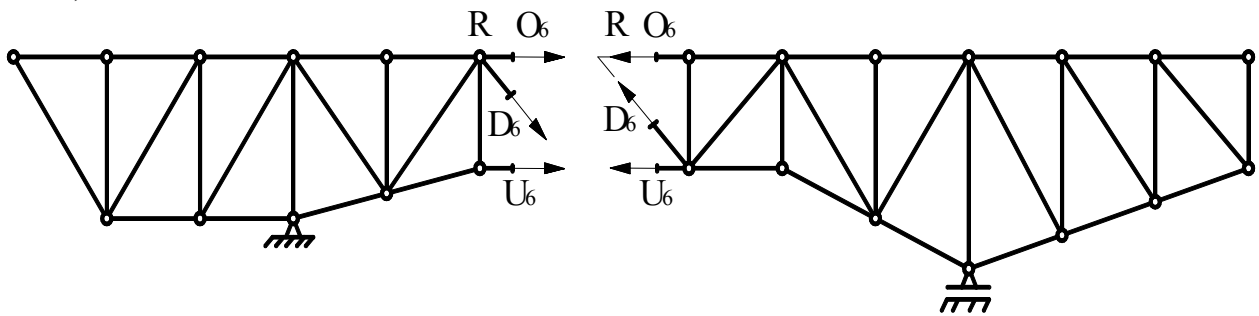


Рис. 13

Получим:

	для U_6 из $\sum M_R = 0$	для D_6 из $\sum Y = 0$
при грузе слева от рассеченной панели	$U_6 \cdot 2 - B \cdot 8 = 0; U_6 = 4B$	$D_6 \cdot \sin \gamma_6 + B = 0;$ $D_6 = -1,414B$
при грузе справа от рассеченной панели	$-U_6 \cdot 2 + A \cdot 4 = 0; U_6 = 2A$	$-D_6 \sin \gamma_6 + A = 0;$ $D_6 = -1,414A$ $\sin \gamma_6 = 0,707$ табл. 2

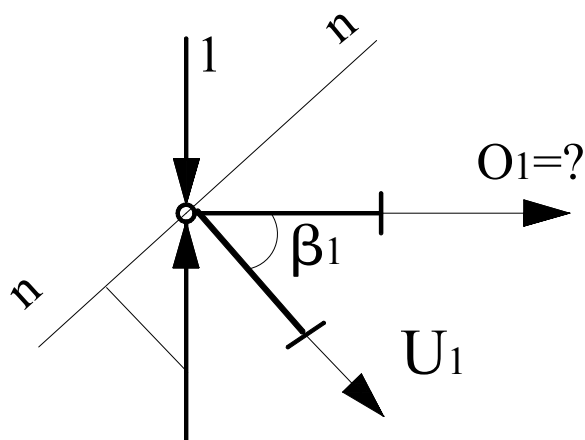
Построенные по этим выражениям левый и правый участки линий влияния показаны на рис. 12 д, е сплошными жирными линиями. Для этого использованы известные линии влияния A и B ; их характерные ординаты равные 1, умножены соответственно на (+4) и (+2) - для линии влияния U_6 и умножены на (-1,414) и (+1,414) для линии влияния D_6 . Они соединяются переходной прямой в пределах перерезанной панели OC (ее положение

одинаково для верхнего и для нижнего пояса, поэтому л. вл. при нагрузке поверху и понизу одинаковы).

Промежуточные ординаты л. вл. вычисляются из геометрических соотношений. В частности, ордината л. вл. U_6 у ее перелома равна $\frac{4}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6} \cdot 4 = 1,333$.

3. Для усилия в элементе верхнего пояса D_1 (рис. 14) простейшее уравнение равновесия составляется для крайнего узла, где сходится два стержня (U_1, O_1). Чтобы исключить U_1 составляем уравнение проекций на нормаль к U_1 (рис. 14а)

а)



б)

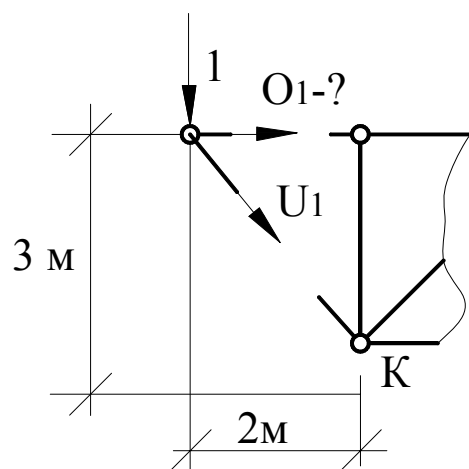


Рис. 14

Если груз в узле «O», получаем $O_1 \sin \beta_1 - 1 \cos \beta_1 = 0$;

$O_1 = 1/\operatorname{tg} \beta_1$, поскольку $\operatorname{tg} \beta_1 = 3/2$ $O_1 = 2/3 = 0,667$.

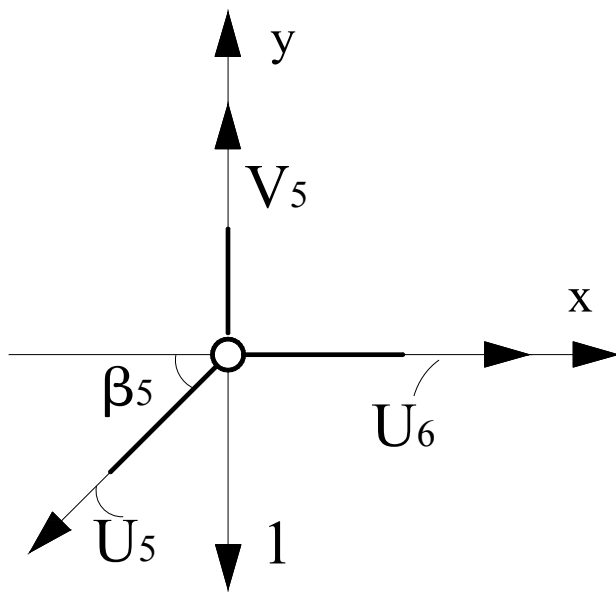
Вместо этого можно составить уравнение моментов относительно узла К (рис. 19 б)

$O_1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 0$ откуда $O_1 = 2/3 = 0,667$.

Этим определяется одна из ординат л. вл. Если груз «вне узла» (т.е. приложен к любому другому узлу), второй член, содержащий единичный груз, из уравнений выпадает. Получаем $O_1 = 0$. Этим определяется очертание л. вл. за пределами панели, ближайшей к узлу «O». Проведя переходную прямую, получаем л. вл. по рис. 12 ж.

4. Для усилий в стойках V_3, V_5, V_7, V_9 (рис. 12) самостоятельных уравнений равновесия составить нельзя, в эти уравнения неизбежно войдут и другие усилия. Поэтому для построения л. вл. усилий в этих «особых» стойках используются предварительно построенные л. вл. усилий в других стержнях. Используем уже построенную л. вл. U_6 (рис. 12, д) для получения л. вл. V_5 (рис. 12,з).

Из условий равновесия узла по рис.15 получаем:



$$\sum X = -U_5 \cos \beta_5 + U_6 = 0$$

(при любом положении груза);

$$\sum Y = -U_5 \sin \beta_5 + V_5 = 0$$

(если груз вне узла);

$$\sum Y = -U_5 \sin \beta_5 + V_5 - 1 = 0$$

(если груз в этом узле).

Отсюда $U_5 = U_6 / \cos \beta_5$.

Рис. 15.

$$V_5 = U_5 \sin \beta_5 = U_6 \operatorname{tg} \beta_5 = U_6 \cdot \frac{1}{4},$$

(груз вне узла)

$$V_5 = U_6 \cdot \frac{1}{4} + 1.$$

(груз в узле)

Умножив на $1/4$ ординаты л. вл. U_6 , получим л. вл. V_5 для груза поверху (в этом случае он никогда не оказывается в вырезанном узле) – (см. рис. 12,3, сплошные линии). На линии влияния того же усилия V_5 при грузе понизу одна из ординат отличается на $+1.0$. Переходные прямые в двух ближайших панелях на рис. 12,3 показаны пунктиром.

Для построения л. вл. V_3 и V_9 надо использовать уравнения равновесия опорных узлов A и B . Они уже составлялись здесь в общем виде груз предполагался **вне вырезанного узла**. Было получено

$$V_3 = -U_3 \operatorname{tg} \beta_4 - A;$$

$$V_9 = -2U_{10} \cos \beta_{10} \cdot \operatorname{tg} \beta_{10} - B.$$

Эти выражения используются для получения V_3 и V_9 для груза поверху (в этом случае он никогда не оказывается в вырезанном узле). Для получения л. вл. V_3 надо предварительно построить л. вл. U_3 и л. вл. A , ввести к их характерным ординатам множители $(-\operatorname{tg} \beta_4)$ и (-1) , а затем их просуммировать. Аналогично для получения л. вл. V_9 используются предварительно построенные л. вл. U_{10} и л. вл. B . Для получения л. вл. тех же усилий V_3 и V_{10} при грузе понизу следует составить вариант уравнений равновесия опорных узлов A и B

для случая, когда груз оказывается **в вырезанном узле**. При решении этих уравнений получим

$$V_3 = -U_3 \operatorname{tg} \beta_4 - (A - 1); \quad V_9 = -2U_{10} \cos \beta_{10} \cdot \operatorname{tg} \beta_{10} - (B - 1),$$

вследствие чего на каждой из л. вл. одну из ординат (для л. вл. V_3 -для вырезанного узла A , для л. вл. V_9 - для вырезанного узла B) надо изменить, увеличив на +1. В обоих случаях ординаты были равны (-1), теперь они станут равными 0. Остальные ординаты остаются без изменения. В двух панелях, прилегающих к узлу A (или B), надо провести переходные прямые аналогично рис. 12,з. Очертание л. вл. V_3 и V_9 здесь не приводится.

4.2.4. Определение усилий с помощью линий влияния

Вычислим по развернутой формуле усилие D_6 от трех вертикальных грузов, показанных на рис. 6 (ординаты л. вл. см. на рис. 12).

$$D_6 = -0,707 \cdot 60 + 0,471 \cdot 30 - 0,471 \cdot 30 = -42,4 + 14,1 - 14,1 = -42,4 \text{ кН} .$$

4.2.5. Составление и применение матрицы влияния

Усилия V_2, V_{10}, U_6, D_6 , для которых уже построены л. вл. (рис. 12), присвоим соответственно порядковые номера 1, 2, 3, 4 и составим для них сводную таблицу ординат л. вл. (в работе ее надо составить для шести усилий). Эта таблица и образует фрагмент матрицы влияния n (см. табл. 3).

Таблица 3

Номера строк матрицы	номера столбцов матрицы (номера ординат)												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-1000	-1000	-1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1000	-833	-667
3	2000	1333	-667	0	667	1333	1000	667	333	0	-333	-667	-1000
4	707	471	236	0	-236	-471	707	471	236	0	-236	-471	-707

Примечания:

1) все указанные здесь числа должны быть умножены на $1 \cdot 10^{-3}$;

2) ординаты здесь выписаны для нагрузки поверху, вариант для нагрузки понизу в работе показать в скобках.

Вертикальные грузы, показанные на рис. 6, сводим в матрицу P , причем получим матрицу – столбец

$$P = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}.$$

Выполняя вычисления по матричной формуле $N = nP$,

получим

$$N = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{числа} \\ \text{столбца } P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ -25 \\ -120 \\ -42,4 \end{bmatrix}$$

(числа из табл. 3), то есть $V_2 = -60 \text{ кН}$, $V_{10} = -25 \text{ кН}$, $U_6 = -120 \text{ кН}$, $D_6 = -42,4 \text{ кН}$.

5. ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И РАСЧЕТ ФЕРМЫ НА ЭВМ

Расчет на ЭВМ выполняется по программе STAB 12, реализующей метод конечных элементов применительно к расчету плоских стержневых систем.

5.1. Определение числа узлов, стержней, опорных узлов

Вычерчивается схема фермы с нагрузкой, указываются размеры и условия закрепления. Расчетная схема относится к глобальной системе координат XOY , производится нумерация узлов и стержней. Начало отсчета рекомендуется выбирать таким образом, чтобы координаты узловых точек были положительными. В качестве узловых точек принимаются шарнирные соединения элементов, точки приложения сосредоточенной нагрузки, а также места расположения опор.

Вход исходных данных в ЭВМ производится в следующей последовательности:

- модуль упругости ($\kappa H / m^2$);
- число узлов;
- число стержней;
- число опорных узлов.

5.2. Координаты узлов в глобальных осях

Данные об узлах оформляются в табличной форме. Информация вводится построчно по узлам в следующей последовательности:

- номер узла (вводится автоматически);
- координата $x(m)$;
- координата $y(m)$.

5.3 Данные об условиях опирания

Данные об условиях опирания формируются и вводятся по опорным узлам в следующем порядке:

- номер опорного узла;
- признак горизонтального закрепления;
- признак вертикального закрепления;
- признак закрепления поворота.

Условия закрепления набираются символами: J - закреплен, N - не закреплен.

5.4. Данные о стержнях

Данные о стержнях следует также сформировать в табличной форме. Информация вводится по стержням в следующей последовательности:

- номер стержня;
- номера узлов в начале и в конце стержня;
- момент инерции $J (m^4)$;
- площадь поперечного сечения $A (m^2)$;
- тип стержня (определяются условиями закрепления).

Таблица 4

Типы стержневых конечных элементов

Изображение конечного элемента	Условия закрепления	Тип стержня
	Защемление (н) Защемление (к)	0

	Шарнир (н) Защемление (к)	1
	Защемление (н) Шарнир (к)	2
	Шарнир (н) Шарнир (к)	3

При вводе информации о стержнях предусмотрена генерация повторяющихся данных. В качестве параметра генерации указывается номер стержня, геометрические характеристики которого надо повторить.

5.5. Данные об узловой сосредоточенной нагрузке

Описываются лишь те узлы, в которых действует сосредоточенная нагрузка. При этом задается число загруженных узлов. Для каждого узла исходные данные формируются и вводятся в ЭВМ в следующем порядке:

- номер узла;
- модуль горизонтальной силы (κH);
- модуль вертикальной силы (κH);
- момент пары сил ($\kappa H \cdot m$).

Величины сил P , направленных вправо и вниз, принимаются со знаком «+», в противном случае – со знаком «-».

Схема фермы для расчета по программе STAB12 приведена по рис. 16.

Для фермы было принято:

- модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кПа}$;
- геометрические характеристики $A = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, $J = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$.

Вследствие большого объема вводимой информации и полученных результатов расчета их распечатка не приводится.

Эпюры распределения усилий по верхнему, нижнему поясам и раскосам приведены на рис. 17, 18, 19.

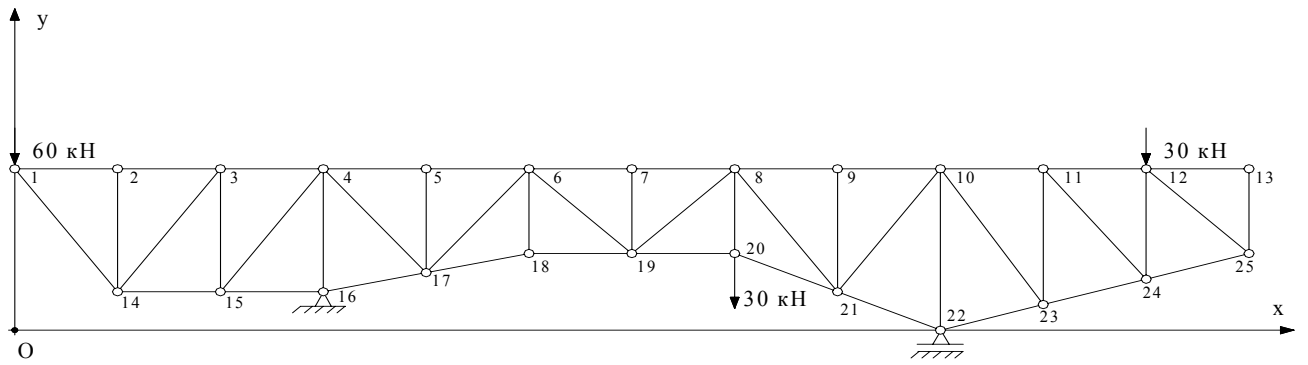


Рис.16. Расчётная схема фермы

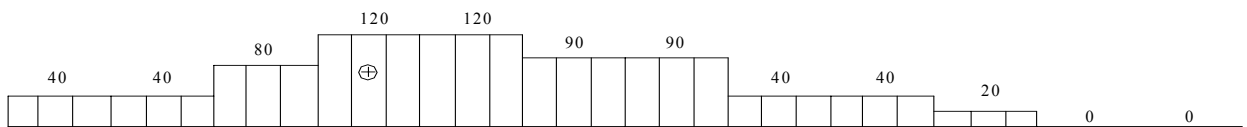


Рис.17. Эпюра продольных сил в верхнем поясе фермы

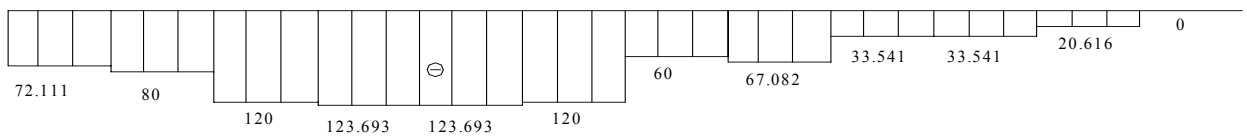


Рис.18. Эпюра продольных сил в нижнем поясе фермы

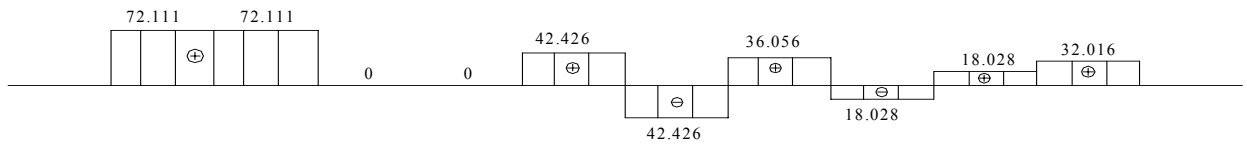


Рис.19. Эпюра продольных сил в раскосах фермы

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие стержневые системы называются фермами?
2. Какие упрощения вносят в расчет фермы допущения о шарнирности узлов, об узловом приложении нагрузки, о прямолинейности стержней?
3. Что изменяется в ходе расчета и в основных результатах расчета фермы при внеузловом приложении нагрузки? При непрямолинейности стержней?
4. Как изменяются результаты кинематического анализа фермы при исключении из ее схемы одного стержня? То же при добавлении стержня (например, дополнительной перекрестной диагонали)?
5. Какие уравнения равновесия используются для определения усилий при вырезании узлов? Как добиться, чтобы в каждом уравнении было одно неизвестное?
6. Всегда ли из условий равновесия вырезанного узла можно определить усилия во **всех** сходящихся в нем стержнях? Для каких узлов это возможно? В каких случаях можно определить усилие только в одном из стержней, сходящихся в узле?
7. Какие вы знаете признаки выделения нулевых стержней? Как их обосновать?
8. Можно ли, применяя способ вырезания узлов, определить последовательно усилия во **всех** стержнях фермы? В чем недостаток такого расчета?
9. Какие уравнения используются для определения усилий при рассечении фермы на крупные части? Как добиться, чтобы в каждом из уравнений было одно неизвестное? Всегда ли моментная точка совпадает с одним из узлов фермы?
10. Когда при рассечении фермы вместо уравнения моментов надо составлять уравнение проекций? На какую ось?
11. Всегда ли из условий равновесия отсеченной части фермы можно определить усилия во **всех** пересеченных стержнях?
12. Можете ли Вы привести примеры, когда для определения усилия в каком-то стержне фермы **необходимо** предварительно найти усилие в другом стержне?

13. Как следует направлять неизвестные усилия перед составлением уравнений равновесия, чтобы после решения усилие было получено со своим правильным знаком?
14. Можете ли Вы определить аналитически усилие в любом стержне фермы (проверяется решением задачи)?
15. Когда при построении линий влияния усилий следует применять рассечение фермы на крупные части? Почему линии влияния в этих случаях имеют, как правило, не два, а три участка?
16. Чем определяется положение границ участков на линиях влияния усилий? Как зависит оно от способа приложения нагрузки (поверху или понизу)? Когда положение участков одинаково в обоих случаях?
17. Когда при построении линии влияния усилия следует применять уравнения равновесия вырезанного узла?
18. Когда при построении линии влияния усилия следует сочетать способы рассечения на крупные части и вырезания узлов?
19. Можете ли Вы привести примеры, когда линия влияния имеет не нулевые ординаты только на ограниченном участке?
20. Сможете ли Вы построить линию влияния усилия в любом стержне фермы (проверяется решением задач)?
21. Каково назначение линии влияния в практических инженерных расчетах ферм?
22. Какие данные содержатся в одной строке матрицы влияния?
23. Какие данные содержатся в одном столбце матрицы влияния?

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Задание	3
2. Содержание выполненной работы.....	3
3. Общие методические указания.....	4
3.1. Оформление задания в работе. Обозначения.....	4
3.2. Обработка геометрических данных	4
3.3. Аналитическое определение усилий.....	4
3.4. Выделение нулевых стержней.....	5
3.5. Построение линий влияния.....	6
3.6. Определение усилий по линиям влияния. Запись расчета с помощью матриц влияния.....	7
4. Примеры расчета (с дополнительными методическими указаниями).....	8
4.1. Пример № 1.....	8
4.1.1. Кинематический анализ	9
4.1.2. Обработка геометрических данных.....	9
4.1.3. Определение реакций опор.....	9
4.1.4. Аналитическое определение усилий.....	9
4.2. Пример № 2.....	10
4.2.1. Обработка геометрических данных. Определение плеч.....	11
4.2.2. Аналитическое определение усилий	14
4.2.3. Построение линий влияния	16
4.2.4. Определение усилий с помощью линий влияния.....	22
4.2.5. Составление и применение матрицы влияния.....	22
5. Подготовка исходных данных и расчет на ЭВМ.....	24
6. Контрольные вопросы.....	28

РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по учебной дисциплине «Строительная механика» для студентов специальностей
270102 «Промышленное и гражданское строительство»,
270105 «Городское строительство и хозяйство»,
270205 «Автомобильные дороги и аэродромы» заочной формы обучения

Составители: к.т.н., доц. Александр Николаевич Аверин,
к.т.н., доц. Граир Егишеевич Габриелян,
ст. преп. Людмила Витальевна Панина

Редактор Лантюхова Н.Н.

Подписано в печать 25.09.2006г. Формат 60×84 1/16. Уч.-изд.л.1,8.
Усл.-печ.л. 1,9. Бумага писчая. Тираж 500 экз. Заказ № 512.

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии
Воронежского государственного архитектурно- строительного университета
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84