ФГОУ ВПО
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра автоматизированных и вычислительных систем

№ 197-2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ 4-7
по дисциплине
«Математическая логика и теория алгоритмов»
для студентов специальности 230101
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»
очной, сокращенной очной, заочной и сокращенной заочной
форм обучения

$$\overline{\forall x A(x)} \sim \exists x \overline{A(x)}$$

$$\overline{\exists x A(x)} \sim \forall x \overline{A(x)}$$

Воронеж 2014

Составители: канд. техн. наук Л.В. Холопкина,
ст. преп. М.П. Носачева

УДК 681.3.06:800.92(075)

Методические указания к выполнению лабораторных работ 4-7 по дисциплине “Математическая логика и теория алгоритмов” для студентов специальности 230101 очной, сокращенной очной, заочной и сокращенной заочной форм обучения / ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Л.В. Холопкина, М.П. Носачева. Воронеж, 2014. 54 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по основным темам курса, примеры решения типовых задач, перечень задач, предназначенных для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов второго курса.

Табл.1. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. А.А. Кисурин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. С.Л. Подвальный

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является усвоение основных понятий теории предикатов и приобретение навыков практической работы с формулами логики предикатов.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Логика высказываний позволяет формализовать лишь небольшую часть множества рассуждений. Высказывания, описывающие некоторые свойства объектов, или отношения между объектами выходят за рамки логики высказываний. В исчислении высказываний анализируются высказывания при одной фиксированной ситуации. В исчислении предикатов исследуется зависимость высказываний от ситуации. При этом фиксируется не одна ситуация, а множество допустимых ситуаций.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется произвольная функция переменной x, определённая на множестве M и принимающая значение из множества $\{0,1\}$. Множество, на котором определён предикат $P(x)$, называется *областью определения* предиката. Множество всех элементов x, принадлежащих M, при которых предикат принимает значение «истина», называется *множеством истинности* предиката $P(x)$. Множество истинности предиката задаётся в виде:

$$I_p = \{x : x \in M,\, P(x) = 1\}$$

Например, множество истинности для предиката $P(x)$ - "$\sin(x) = 0$" задаётся так: $I_p = \{k\pi, k \in Z\}$, где Z – множество целых чисел. Множеством истинности для предиката $P(x)$ – "Диагонали параллелограмма x перпендикулярны" является множество всех ромбов. Областью определения этого предиката является множество всех параллелограммов.

Предикат, определенный на множестве M, называется *тождественно истинным*, если $I_p = M$, и тождественно ложным, если $I_p = 0$.

Двуместным предикатом $P(x, y)$ называется функция двух переменных x и y, определенная на множестве $M = M_1 * M_2$ (M_1, M_2 – области определения переменных x и y соответственно) и принимающая значения из множества $\{0,1\}$. Например, предикат равенства "$x = y$" определен на множестве $R = R * R$ (R – множество действительных чисел). Примерами двуместных предикатов являются: $P(x, y) = "x > y"$, $P(x, y) = "x = y^2"$, $P(x, y) = "x\ делит\ y"$.

Примерами трехместных предикатов являются: $P(x, y, z) = "число\ x\ является\ НОД\ чисел\ y\ и\ z"$, $P(x, y, z) = "z = x + y"$.

Предикаты, так же как и высказывания, принимают только два значения $\{0,1\}$, поэтому к ним применимы все операции исчисления высказываний: *отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и для них справедливы все эквивалентности исчисления высказываний.*

2.1. Кванторные операции

Определим предикат $P(x, y)$ - "число x делится на число y". $x, y \subset Z$. Истинность этого высказывания является частичной, так как можно выбрать числа x и y

такие, что x не делится на y. А предикат $P(x)$ - "простое число x делится только на самого себя и единицу" является универсально истинным, так является истинным для любого значения x.

В логике предикатов частичная и всеобщая истинность обозначается отдельными специальными знаками – кванторами.

Если задан предикат $P(x)$, то особый интерес представляет рассмотрение следующих двух утверждений:

1. Неопределенное высказывание $P(x)$ истинно для всех $x \in M$.

2. Неопределенное высказывание $P(x)$ истинно хотя бы для одного элемента $x \in M$, или другими словами, существует элемент x множества M, для которого $P(x)$ - истинно.

Высказывания 1 и 2 в короткой форме будут выглядеть соответственно так:

$$\forall x P(x),\ x \in M,$$

$$\exists x P(x),\ x \in M.$$

Знак общности $\forall$ заменяет в словесных формулировках слова: *все, всякий, каждый, любой*. Знак существования $\exists$ употребляется вместо слов: *хотя бы один, найдется, существует*.

Итак, под выражением $\forall x P(x)$ понимается высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента из множества M и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Под выражением $\exists x P(x)$ понимается высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае.

Таким образом, предикат можно превратить в высказывание двумя способами: подставить конкретное значение x в предикат или использовать кванторы всеобщности и существования.

Переменная x, входящая в предикат $P(x)$, называется свободной *переменной*. Переменная x, входящая в выражение $\forall x P(x)$, называется переменной, связанной квантором всеобщности. А переменная x, входящая в выражение $\exists x P(x)$ - переменная, связанная квантором существования.

Кванторные операции применимы и к многоместным предикатам. Пусть на множестве M задан предикат $P(x,y)$.

Применение кванторной операции к предикату $P(x,y)$ по переменной x ставит в соответствие двуместному предикату $P(x,y)$ одноместный предикат $\forall x P(x,y)$, зависящий от переменной y и не зависящей от переменной x. К двуместному предикату можно применять кванторы, как по переменной x, так и по переменной y, при этом возможны следующие варианты: $\forall y \forall x P(x,y)$; $\exists y \forall x P(x,y)$; $\forall y \exists x P(x,y)$; $\exists y \exists x P(x,y)$; $\forall x \forall y P(x,y)$; $\exists x \forall y P(x,y)$; $\forall x \exists y P(x,y)$; $\exists x \exists y P(x,y)$.

Правила перестановки кванторов.

Стоящие рядом одноименные кванторы можно переставлять местами. Следовательно, формулы

$$\forall x \forall y P = \forall y \forall x P \quad \text{и} \quad \exists x \exists y P = \exists y \exists x P$$

являются *общезначимыми.*

Разноименные кванторы можно переставлять не всегда.

Справедлива теорема: *Для каждой формулы P и любых предметных переменных x и y формула*

$$\exists x \forall y P \to \forall y \exists x P$$

логически общезначима, а обратная импликация

$$\forall y \exists x P \to \exists x \forall y P$$

не всегда является логически общезначимой.

2.2. Равносильности логики предикатов

Помимо эквивалентностей логики высказываний для логики предикатов справедливы следующие эквивалентности ($A(x)$, $B(x)$, $P(x, y)$ - предикаты, а C - высказывание):

Комбинация кванторов:

1. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$;
2. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$;
3. $\forall x \exists y P(x, y) \neq \exists y \forall x P(x, y)$.

Комбинация кванторов и отрицаний:

1. $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$;
2. $\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$;
3. $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$;
4. $\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.

Расширение области действия кванторов (C не зависит от x):

1. $C \,\&\, \forall x B(x) = \forall x [C \,\&\, B(x)]$;
2. $C \vee \forall x B(x) = \forall x [C \vee B(x)]$;
3. $C \to \forall x B(x) = \forall x [C \to B(x)]$;
4. $\forall x [B(x) \to C] = \exists x B(x) \to C$;
5. $\exists x [C \vee B(x)] = C \vee \exists x B(x)$;
6. $\exists x [C \,\&\, B(x)] = C \,\&\, \exists x B(x)$;
7. $\exists x [C \to B(x)] = C \to \exists x B(x)$;
8. $\exists x [B(x) \to C] = \forall x B(x) \to C$.

Расширение области действия кванторов:

1. $\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) = \forall x [A(x) \,\&\, B(x)]$;

2. $\exists x [A(x) \vee B(x)] = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;
3. $\exists x A(x) \,\&\, \exists y B(y) = \exists x \exists y [A(x) \,\&\, B(y)]$;
4. $\exists x (A(x) \,\&\, B(x)) \to \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$;
5. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x (A(x) \vee B(x))$ /

2.3. Предваренная, сколемовская нормальная и сколемовская стандартная формы

Нормальная форма. Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам. Например, для формулы $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(x)$ нормальной формой будет $\exists x P(x) \,\&\, \exists y \overline{Q(y)} \vee R(x)$.

Предварённая нормальная форма (ПНФ) - нормальная форма, в которой кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики. Например, для нормальной формы $\forall x \exists y P(x, y) \,\&\, \forall x \exists z \overline{Q(x, z)}$ предваренной нормальной формой будет $\forall x \exists y \exists z (P(x, y) \,\&\, \overline{Q(x, z)})$.

Всякую формулу логики предикатов можно свести к ПНФ, если использовать следующий алгоритм:

Шаг 1. Исключение логических связок $\leftrightarrow$ и $\to$.

Шаг 2. Продвижение знака отрицания до атома. Многократно (пока это возможно) делаются замены:

$$\overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B},$$
$$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B},$$
$$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)},$$
$$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}.$$

Шаг 3. Переименование связанных переменных.

Шаг 4. Вынесение кванторов. Для вынесения кванторов используются формулы эквивалентности для исчисления предикатов.

После выполнения четвертого шага получаем ПНФ.

Остановимся более подробно на третьем пункте алгоритма - переименовании переменных.

Переименовывать связанные переменные необходимо только в самом кванторе и в области действия этого квантора. Одинаковые переменные, для которых связывающие их кванторы имеют различные области действия, могут переименовываться разным образом или одна из них может переименовываться, а другая нет.

Пример 1. Пусть имеем формулу $\forall x((\exists y P(x,y) \to \forall y Q(x,y)) \to R(x))$. Нормальная формула имеет вид $\forall x(\exists y P(x,y) \,\&\, \exists y \overline{Q(x,y)} \vee R(x))$.

Переименовываем переменную x в кванторе и в области действия этого квантора на z .

$\forall z(\exists y P(z,y) \,\&\, \exists y \overline{Q(z,y)} \vee R(z))$.

В полученной формуле переменную y можно переименовать на w в первой посылке и на u во второй посылке, либо оставить во второй посылке без изменения

$$\forall z \exists w(P(z,w) \,\&\, \exists y \overline{Q(z,y)} \vee R(z)) =$$

$$\forall z \exists w \exists y(P(z,w) \,\&\, \overline{Q(z,y)} \vee R(z))$$

Формула F называется $\forall$- *формулой*, если она представлена в ПНФ, причем кванторная часть состоит только из кванторов всеобщности, т.е. $F = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_m P$, где P – бескванторная формула. Отсюда возникает задача устранения кванторов существования в формулах, представленных в ПНФ. Это можно сделать путем введения *сколемовских функций*.

Сколемовская нормальная форма (СНФ) строится в соответствии со следующими правилами:

1. Формула логики предикатов представляется в ПНФ.
2. Последовательно (слева направо) вычеркиваем каждый квантор существования, например $\exists y$, заменяя все вхождения переменной y на новый еще не использованный функциональный символ f, в качестве аргументов f берем все переменные, связанные предшествующими $\exists y$ кванторами всеобщности. Функциональный символ f называется *сколемовской функцией*. Формула логики предикатов, полученная после выполнения шагов 1 и 2, называется *сколемовской нормальной формой (СНФ).*

Пример $\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v \exists w(P(x,y) \vee \overline{R(z,u,v)} \,\&\, Q(u,w))$

Для получения СНФ вычеркиваем фактор существования $\exists x$ и все вхождения переменной x заменяем на константу c, поскольку квантору $\exists x$ не предшествует ни один квантор всеобщности, то есть сколемовская функция не зависит ни от одной переменной, то есть эта функция является константой.

$\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w(P(c,y) \vee \overline{R(z,u,v)} \,\&\, Q(u,w))$

На следующем шаге вычеркиваем квантор существования $\exists u$ и все вхождения переменной u заменяем на функцию $f(y,z)$

$\forall y \forall z \forall v \exists w(P(c,y) \vee \overline{R(z,f(y,z),v)} \,\&\, Q(f(y,z),w))$.

На последнем шаге вычеркиваем квантор $\exists w$.

$\forall y \forall z \forall v(P(c,y) \vee \overline{R(z,f(y,z),v)} \,\&\, Q(f(y,z),g(y,z,v)))$.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Задание 1

Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.

1. Число x - простое; 2. $x = y + z$; 3. $x = 2y + 3$;

4. $2x + y$; 5. Все подобные треугольники равны;

6. $x^2 + y^2 < 0$ $(x, y - \textit{действительные числа})$;

7. Все четные числа делятся на число y;

8. Все четные числа делятся на 2;

9. 8 – нечетное число;

10. Имеется бесчисленное множество различных простых чисел;

11. Число $2^{67} - 1$ не является простым.

Задание 2

Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:

1. $\forall x \forall y (x + y = y + x)$; 2. $\forall x \exists y (x + y = 3)$;

3. $\exists y \forall x (x + y = 3)$; 4. $\exists x \exists y (x + y = 3)$;

5. $\forall x \forall y (x + y = 3)$; 6. $(\forall x \forall y (x + y = 3) \to (2 = 3)$;

7. $\exists x \exists y ((x > y > 0) \,\&\, (x + y = 0))$;

8. $\forall x ((x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;

9. $\forall x (((x > 2) \,\&\, (\overline{x > 3})) \leftrightarrow (2 < x \le 3))$;

10. $\forall x (((x > 2) \,\&\, (x < 1)) \leftrightarrow (x \ne x))$;

11. $\forall x (((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x))$;

12. $\exists a \forall b \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

Задание 3

Для действительных чисел записать на языке предикатов предложения, выражающие:

1. коммутативность сложения;
2. коммутативность умножения;
3. ассоциативность сложения;
4. ассоциативность умножения;

5. дистрибутивность умножения относительно сложения.

Задание 4

Выразить области истинности предиката $P(x, y)$ через области истинности предикатов $A(x, y)$ и $B(x, y)$, если:

1. $P(x, y) = \overline{A(x, y)}$; 2. $P(x, y) = A(x, y) \,\&\, B(x, y)$;

3. $P(x, y) = A(x, y) \vee B(x, y)$;

4. $P(x, y) = A(x, y) \to B(x, y)$;

5. $P(x, y) = A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$.

Задание 5

Указать свободные и связанные переменные:

1. $\exists x A(x) \,\&\, B(x)$; 2. $\exists x \forall y P(x) \,\&\, Q(y) \to \forall x R(x)$;

3. $P(x) \to \exists x Q(x)$; 4. $\exists x \exists y P(x, y) \,\&\, Q(z)$;

5. $\forall z P(z) \,\&\, \exists x Q(x, z) \to \exists y R(z, y) \vee Q(z, x)$.

Задание 6

Пусть все приведенные предикаты определены на множестве действительных чисел. Изобразить графически области изменения свободных переменных, при которых следующие предикаты принимают значение “истина”:

1. $y \ge x^2$; 2. $\forall x (y < \sin x)$;

3. $\exists x (x^2 + y^2 \le 4)$; 4. $\forall x \exists y (\sin x = 1)$;

5. $\forall x (x^2 + 4y^2 \le 4)$; 6. $\forall x (x + \sin y \le 2)$.

Задание 7

Найти отрицание следующих формул.

1. $\exists x (A(x) \,\&\, \mathrm{B(x)} \,\&\, \mathrm{C(x)})$; 2. $\forall x (A(x) \to \forall y B(y))$;

3. $\forall x (A(x) \vee \exists y B(y))$; 4. $\exists x (R(x) \leftrightarrow Q(x))$;

5. $\forall x (A(x) \to B(x)) \,\&\, \exists \mathrm{x}(\mathrm{S(x)} \,\&\, \overline{\mathrm{R(x)}})$;

6. $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \to Q(x, y, z))$; 7. $\forall x \exists y (R(x, y) \to L(x, y))$.

Задание 8

Привести следующие формулы логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ) и стандартной сколемовской форме (ССФ).

1. $\overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x,y,z,u)}$; 2. $\overline{\forall x R(x)} \vee \exists x Q(x,y)$;
3. $\overline{p \to \exists x R(x)}$; 4. $\overline{\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow A(y))}$;
5. $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$; 6. $\forall x (A(x) \to \exists y B(y))$;
7. $\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$;
8. $\exists x \forall y P(x,y) \to \exists x \forall y Q(x,y)$;
9. $\forall x \forall y [\exists z P(x,y) \,\&\, P(x,z)] \to \exists u Q(y,u)$;
10. $\forall x \forall y [\exists z P(x,y,z) \,\&\, [\exists u Q(x,u) \to \exists u Q(y,u)]]$;
11. $\forall x \forall y [\exists z (P(x,z) \,\&\, P(y,z)) \to \exists y Q(x,y,u)]$;
12. $\forall x \exists y P(x,y) \,\&\, \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$;
13. $\exists x \forall y \exists z [(P(x,y) \vee \overline{Q(x)} \vee R(z)) \,\&\, (\overline{P(x,y)} \vee \overline{Q(x)}) \,\&$
$\& (\overline{P(x,y)} \vee R(z))]$;
14. $\overline{\forall x \exists y [P(x,y) \to Q(y)]}$; 15. $\overline{[\forall x P(x) \to \exists y \forall z Q(y,z)]}$;
16. $(\overline{\exists x P(x)} \vee \forall x Q(x)) \,\&\, (R \to \forall x S(x))$;
17. $\forall x (A(x) \to B(x,y)) \to ((\exists y A(y)) \to \exists x B(y,z))$;
18. $\exists x B(x,y) \to (A(x) \to \overline{\exists z B(x,z)})$;
19. $\forall x (\forall y \exists z C(x,y,z) \to A(x)) \to \forall x A(x)$;
20. $\overline{\exists x A(x)} \to \forall z \exists y \forall x C(x,y,z)$;
21. $\forall x \forall y (\exists z (A(x,y) \,\&\, B(y,z)) \to \exists v C(x,y,v))$;
22. $\exists x (\overline{(\exists x A(x,y))} \to (\exists z B(z) \to C(x)))$;
23. $\forall x \exists y (\forall z A(x,y,z) \,\&\, (\exists u B(x,u) \to \exists v C(y,v)))$;
24. $\forall x \forall y [\exists z (P(x,z) \,\&\, P(y,z)) \to \exists u R(x,y,u)]$;
25. $\forall x \overline{\exists y (P(x) \to Q(y))}$;
26. $\exists x \overline{(\forall y P(x,y,z) \to \exists u Q(x,u))} \,\&\, \forall t \overline{\forall v (A(t) \vee B(v))}$.

Задание 9

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ два одноместных предиката, определенных на множестве M таким образом, что высказывание $\exists x (A(x) \to (\overline{A(x)} \vee (\overline{\overline{B(x)} \to A(x)})))$ - всегда истинно. Доказать, что высказывание $\forall x A(x)$ - всегда ложно.

Задание 10

Пусть $P(x)$ обозначает “x – простое число”, $E(x)$ – “x – четное число”, $Q(x)$ – “x – нечетное число”, $D(x,y)$ – “y делится на x”. Дать словесную формулировку следующим формулам:

1. $P(7)$; 2. $E(2) \,\&\, P(2)$; 3. $\forall x (D(2,x) \to E(x))$;
4. $\exists x (E(x) \,\&\, D(x,6))$; 5. $\forall x (\overline{E(x)} \to \overline{D(2,x)})$;
6. $\forall x (E(x) \,\&\, \forall y (D(x,y) \to E(y)))$;
7. $\forall x (P(x) \to \exists y (E(y) \,\&\, D(x,y)))$;
8. $\forall x (Q(x) \to \forall y (P(y) \to \overline{D(x,y)}))$;
9. $\exists x (E(x) \,\&\, P(x)) \,\&$
$\& (\overline{\exists x ((E(x) \,\&\, P(x)) \,\&\, \exists y (x \neq y \,\&\, E(y) \,\&\, P(y)))})$.

Задание 11

Даны утверждения $A(n)$ – “число n делится на 3”, $B(n)$ – “число n делится на 2”, $C(n)$ – “число n делится на 4”, $D(n)$ – “число n делится на 6”, $E(n)$ – “число n делится на 12”. Укажите, какие из следующих утверждений истины, а какие ложные.

1. $\forall n (A(n) \,\&\, B(n) \to E(n))$; 2. $\forall n (B(n) \,\&\, D(n) \to E(n))$;
3. $\exists n (C(n) \,\&\, D(n) \to E(n))$; 4. $\forall n (E(n) \to C(n) \,\&\, D(n))$;
5. $\forall n (\overline{E(n)} \to B(n) \,\&\, D(n))$; 6. $\exists n (B(n) \,\&\, C(n) \to \overline{D(n)})$;
7. $\forall n (\overline{A(n)} \to \overline{E(n)})$.

Задание 12

Доказать следующие равносильности.

1. $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$; 2. $\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$;

3. $C \,\&\, \forall x A(x) = \forall x (C \,\&\, A(x))$;

4. $C \vee \forall x A(x) = \forall x (C \vee A(x))$;

5. $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;

6. $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$;

7. $\exists x (C \,\&\, A(x)) = C \,\&\, \exists x A(x)$;

8. $\exists x A(x) \,\&\, \exists y B(y) = \exists x \exists y (A(x) \,\&\, B(y))$;

9. $\forall x (A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$;

10. $\exists x (C \to A(x)) = C \to \exists x A(x)$;

11. $\exists x (A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$.

Задание 13

Какие из заданных формул являются общезначимыми?

1. $\exists x (P_1(x) \,\&\, P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \,\&\, \exists x P_2(x))$;
2. $\exists x (P_1(x) \,\&\, P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \,\&\, \exists x P_2(x))$;
3. $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x (P_1(x) \vee P_2(x))$;
4. $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \leftrightarrow \forall x (P_1(x) \vee P_2(x))$;
5. $\forall x (q \to P_1(x)) \leftrightarrow (q \to \forall x P_1(x))$;
6. $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\forall x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
7. $\exists x (P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \to \exists x P_2(x))$;
8. $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
9. $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \to (\forall x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
10. $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \to \exists x P_2(x))$;
11. $\exists x (P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\forall x P_1(x) \to \exists x P_2(x))$;
12. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$; 13. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$;
14. $\forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \,\&\, Q(x))$;
15. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$;
16. $\exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \,\&\, Q(x))$;
17. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$;

18. $\exists x (P(x) \,\&\, (r \to Q(x))) \to (\forall x (P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \bar{r})$;
19. $\forall x (P(x) \to \overline{Q(x)})) \to \overline{\exists x P(x) \,\&\, \forall x Q(x)}$).

Задание 14

Доказать тождественную ложность формул.

1. $\exists x \exists y ((F(x) \to F(y)) \,\&\, (F(x) \to \overline{F(y)}) \,\&\, F(x))$;
2. $\exists x ((F(x) \to \overline{F(x)}) \,\&\, (\overline{F(x)} \to F(x)))$ /

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
ПЕРЕВОД ВЫСКАЗЫВАНИЙ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА НА ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является приобретение навыков перевода высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Из формализованных языков математики – язык логики предикатов – самый близкий к естественному. При переводе высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов необходимо понимать, что на языке логики предикатов можно описать многое, но далеко не все. Поэтому при символизации языка требуется аккуратность и глубокое понимание текста.

В естественном языке слово “все” обычно опускается.

Так, например, “Рыбы дышат жабрами” означает, что все рыбы дышат жабрами или, что каждая рыба дышит жабрами. Если обозначить $R(x)$ – "*x – рыба*", а $G(x)$ – "*x дышит жабрами*", то при символизации фразы “Рыбы дышат жабрами” необходимо использовать квантор всеобщности: $\forall x (R(x) \to G(x))$. Однако не в каждом случае слова “все” понимаются как “каждый”. Например, предложение “Все песчинки образуют кучу песка” вовсе не означает, что каждая песчинка образует кучу песка. В этом случае употреблять квантор всеобщности $\forall x$ нельзя.

Рассмотрим особенности перевода на язык исчисления предикатов следующих выражений: “Все студенты отличники” и “Некоторые студенты отличники”.

Первое выражение может быть перефразировано так: “Для всех x справедливо, если x - студент, то x - отличник”. Перевод этой фразы будет таким: $\forall x(C(x) \to O(x))$, где $C(x)$ - “x - студент”, $O(x)$ - “x - отличник”.

Второе выражение может быть перефразировано так: “Для некоторых x справедливо: x - студент и x - отличник”. Перевод этой фразы будет таким: $\exists x(C(x) \,\&\, O(x))$. Использование в этом случае конструкции: “Для некоторых x справедливо: если x - студент, то x - отличник” является неверным, так как стоит попасть в компанию одному x нестуденту, и он сделает этот предикат истинным, даже если там нет ни одного отличника.

Для перевода высказываний естественного языка на язык логики предикатов можно использовать таблицу, приведенную в [4].

Рассмотрим несколько примеров по переводу высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов.

Пример 1. Любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого.

Введем в рассмотрение следующие предикаты:

$D(x)$ - “x есть действительное число”; $R(x,y)$ - “$x = y$”;

$P_1(x,y)$ - “$x > y$”; $P_2(x,y)$ - “$x < y$”.

Тогда высказывание запишется в виде:

$$\forall x \forall y (D(x)D(y) \to R(x,y) \vee P_1(x,y) \vee P_2(x,y))$$

Пример 2. Ни один пациент не любит знахарей.

Введем в рассмотрение следующие предикаты:

$P(x)$ - “x - пациент”; $Z(x)$ - “x – знахарь”;

$L(x,y)$ - “x любит y”.

Тогда высказывание запишется в виде:

$$\forall x(P(x) \to \forall y(Z(y) \to \overline{L(x,y)})).$$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов

1. Если произведение конечного числа сомножителей равно нулю, то, по меньшей мере, один из сомножителей равен нулю. ($P(x)$ – “x есть произведение конечного числа сомножителей», $F(x,y)$ – «x есть один из сомножителей числа y”).

2. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на всякий их общий делитель ($F(x,y)$ – “x есть один из делителей числа y”, а $G(x,y,z)$ – “z есть наибольший общий делитель чисел x и y”).

3. Для всякого действительного числа x существует большее действительное число y.

4. Существуют такие действительные числа x, y, z что сумма чисел x и y больше, чем произведение чисел x и z.

5. Для каждого действительного числа x существует такое y, что для каждого z, если сумма z и 1 меньше y, то сумма x и 2 меньше 4.

6. Существует x, меньшее, чем 5 и, большее, чем 3.

7. Для любого числа x существует число y, меньшее x.

8. Для любых чисел x и y суммы $x+y$ и $y+x$ равны.

9. Для любого числа x существует такое число y, что для любого z, если разность $z-5$ меньше, чем y, то разность $x-7$ меньше 3

10. Между любыми двумя различными точками на прямой лежит, по крайней мере, одна точка, с ними не совпадающая.

11.Каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу.

12.Если произведение натуральных чисел делится на простое число, то на него делится, по крайней мере, один из сомножителей.

13. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

14. Всякое животное, встречающееся с вежливыми людьми, счастливо.

15. Все люди, посещающие зоопарк, вежливы.

16. Животные, живущие в зоопарке, встречаются с людьми, посещающими зоопарк.

17. Никакой продавец игрушками сам себе их не покупает.

18. Те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его.

19. Римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его.

20. Некоторые судьи - старики, но бодрые.

21. Судья Иванов не стар и не бодр.

22. Не все юристы судьи.

23. Некоторые юристы, являющиеся политиками, – члены конгресса.

24. Ни один член конгресса не бодр.

25. Все старые члены конгресса - юристы.

26. Некоторые женщины одновременно являются юристами и членами конгресса.

27. Некоторые пациенты любят докторов.

28. Ни один доктор не является знахарем.

29. Выгул кошек или собак запрещен.

30. Ни одна женщина не является одновременно политиком и домашней хозяйкой.

31. Ни один судья не является преподавателем.

32. Некоторые женщины-юристы являются домашними хозяйками.

33.Все женщины-юристы восхищаются каким-нибудь судьей.

34. Некоторые юристы восхищаются только судьями.

35. Некоторые юристы восхищаются женщинами.

36. Некоторые преподаватели не восхищаются ни одним юристом.

37. Судья Иванов не восхищается ни одним преподавателем.

38. Существуют как юристы, так и преподаватели, которые восхищаются судьей Ивановым.

39. Только судьи восхищаются судьями.

40. Все судьи восхищаются только судьями.

41. Все студенты группы свободно владеют всеми тремя языками: английским, немецким, французским.

42. Каждый студент группы владеет каждым иностранным языком (английским, немецким, французским).

43. Есть студенты, которые свободно владеют и английским и немецким и французским языками.

44. В группе есть студенты, которые свободно владеют английским языком, есть те, которые свободно владеют французским, а также те, которые знают немецкий язык.

45. Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиной еще большая.

46. Каждое рациональное число есть действительное число. Некоторое действительное число есть рациональное число. Не каждое действительное число есть рациональное число.

47. Пусть $P(x), L(x), R(x,y,z)$ и $E(x,y)$ означают соответственно "$x-$*точка*", "$x-$линия", "z проходит через x и y", "$x=y$". Перевести следующее предложение: для любых двух точек существует одна и только одна линия, проходящая через эти точки

48. На всех кошек и собак следует получить разрешение.

49. Любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого.

50. Каждый ребенок человека x состоит в браке с ребенком человека y.

51. У человека y существует ребенок, который не состоит в браке с ребенком человека x.

52. Существуют два человека такие, что каждый ребенок одного из них состоит в браке с ребенком другого.

53. Существуют два человека такие, что ни один ребенок одного из них не состоит в браке с ребенком другого.

54. Если y является ребенком человека x, то каждый ребенок человека y является внуком человека x.

55. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - "я вижу предмет x в момент времени t";

$P(x,t)$ - "я беру предмет x в момент времени t";

$t^{'} < t$ - " момент времени $t^{'}$ предшествует моменту t".

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов

55.1. Я всегда что-то вижу.

55.2. Иногда я ничего не вижу.

55.3. Существуют предметы, которые я никогда не вижу.

55.4. Я вижу каждую вещь в некоторый момент времени.

55.5. Если я вижу предмет, то я его тут же беру.

55.6. Если я вижу предмет, то я его беру спустя некоторое время.

55.7. Перед тем, как я беру предмет, я вижу его.

55.8. Если я беру предмет, не видя его до этого, то через некоторое время я вижу его, но не беру.

55.9. Не существует предметов, которые я никогда не беру.

55.10. Я никогда не беру того, что я всегда вижу.

55.11. Всегда существуют вещи, которые я не вижу и не беру.

55.12. Я беру всякую вещь, которую я никогда не вижу.

55.13. Я беру всякий предмет, который я еще не взял до этого.

55.14. Я всегда вижу либо все, либо ничего.

55.15. Если я беру некоторый предмет, который до этого уже видел, то я ранее видел предмет, который взял позднее.

55.16. Некоторые вещи, которые я видел ранее, я всегда вижу вновь спустя определенное время.

55.17. Если я когда-либо видел две вещи одновременно, то в будущем я также увижу их только одновременно.

55.18. Если я когда-либо видел и взял предмет одновременно, то впоследствии я либо делаю то и другое, либо не делаю ни того, ни другого.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД В ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является ознакомление с основными формализованными методами доказательства правильности умозаключения в исчислении предикатов.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Метод семантических таблиц

В исчислении предикатов, так же, как и исчислении высказываний общезначимость формулы можно доказать, методом семантических таблиц. Основой для построения семантических таблиц является атомарная семантическая таблица (табл. 4). Докажем общезначимость формулы $\forall \varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$

$$f(\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x))$$
$$|$$
$$t(\forall x\varphi(x)$$
$$|$$
$$f(\exists x\varphi(x))$$
$$|$$
$f\varphi(c)$ для всех с
$$|$$
$t\varphi(c)$ для всех с
$$|$$
$$\oplus$$

Формула $\forall \varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ является общезначимой, так как соответствующая ей семантическая таблица, построенная в предположении ложности формулы, является противоречивой.

Таблица 1

Атомарная таблица

	$t\overline{\sigma}$ | $f\sigma$	$f\overline{\sigma}$ | $t\sigma$	
$t(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ | | $t\sigma_1$ $t\sigma_2$	$f(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ | $f\sigma_1$ | $f\sigma_2$	$t(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ | $t\sigma_1$ | $t\sigma_2$	$f(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ | | $f\sigma_1$ $f\sigma_2$
$t(\sigma_2 \rightarrow \sigma_2)$ | | $f\sigma_1$ $t\sigma_2$	$f(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ | $t\sigma_1$ | $f\sigma_2$	$t(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ | | $t\sigma_1$ $f\sigma_1$ | | $t\sigma_2$ $f\sigma_2$	$f(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ | | $t\sigma_1$ $f\sigma_1$ | | $f\sigma_2$ $t\sigma_2$
$t(\forall x\varphi(x))$ | $t\varphi(c)$ (для всех с)	$f(\forall x\varphi(x))$ | $f\varphi(c)$ (для новой с)	$t(\exists x\varphi(x))$ | $t\varphi(c)$ (для новой с)	$f(\exists x\varphi(x))$ | $f\varphi(c)$ (для всех с)

Построим семантическую таблицу для формулы $\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\varphi(x)$.

$$f(\exists x\varphi(x) \to \forall x\varphi(x))$$

$$t(\exists x\varphi(x))$$

$$f\forall x\varphi(x))$$

$t\varphi(c_1)$ для новой с

$f\varphi(c_2)$ для новой с

Данная семантическая таблица не является противоречивой, поскольку функция $\varphi(x)$ истинна при каком-то одном значении $x = c_1$ из области определения функции $\varphi(x)$ и та же функция ложна при каком-то другом значении $x = c_2$. Для всех же значений x условие противоречивости не выполняется.

Далее приведена семантическиая таблица для общезначимой формулы.

$$f[\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))]$$

$$t(\forall x(P(x) \to Q(x)))$$

$$f(\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$$

$$t(\forall xP(x))$$

$$f(\forall xQ(x))$$

$fQ(c_1)$ для новой с

$tP(c)$ для всех с

$t(P(c) \to Q(c))$ для всех с

$fP(c)$ $\qquad$ $tQ(c)$

$\oplus$ $\qquad$ $\oplus$

2.2. Принцип резолюции

2.2.1. Алгоритм унификации

Правило резолюций предполагает нахождение в дизъюнкте литерала, контрарного литералу в другом дизъюнкте. Если в логике высказываний нахождение контрарных пар не вызывает трудностей, то для логики предикатов сделать это гораздо сложнее, так как дизъюнкты могут содержать функции, переменные и константы. В этом случае следует использовать алгоритм унификации.

Действительно, если мы имеем дизъюнкты типа:

$C_1 = P(x) \vee \overline{R(x)}$; $C_2 = \overline{P(g(y))} \vee Q(y)$, то резольвента может быть получена только после применения к C_1 подстановки $g(y)$ вместо x.

В этом случае имеем: $C_1 = P(g(y)) \vee \overline{R(g(y))}$;

$C_2 = \overline{P(g(y))} \vee Q(y)$.

Резольвентой этих двух дизъюнктов будет дизъюнкт

$C = \overline{R(g(y))} \vee Q(y)$.

А если взять два дизъюнкта

$C_1 = P(a) \vee \overline{R(x)}$, $C_2 = \overline{P(g(y))} \vee Q(y)$,

то никакая подстановка в контрарную пару неприменима и никакая резольвента не может быть образована.

Прежде чем переходить к рассмотрению вопроса об унификации, введем некоторые понятия.

Пусть задано множество дизъюнктов

$S = \{P(x, f(y), b) \vee P(x, f(a), b), \overline{P(c, f(a), b)}\}$.

В этом множестве дизъюнктов $P(x, f(y), b) \vee P(x, f(a), b)$ и $\overline{P(c, f(a), b)}$ - составляющие дизъюнкты.

А выражения $P(x, f(y), b)$; $P(x, f(a), b)$; $\overline{P(c, f(a), b)}$ - называются *литералами.*

Термы литерала могут быть переменными, постоянными или выражениями, состоящими из функциональных букв и термов. Например, для литерала $P(x, f(y), b)$ имеем, что x - переменная, $f(y)$ - сложный терм, b - постоянная.

Подстановочный частный случай литерала получается при подстановке в литералы термов вместо переменных. Пусть имеем литерал $P(x, f(y), b)$. Его частными случаями будут: $P_1 = P(z, f(w), b)$;

$P_2 = P(x, f(a), b)$;

$P_3 = P(g(z), f(a), b)$;

$P_4 = P(c, f(a), b)$ - *константный (фундаментальный)* случай литерала или атом, так как нет переменных.

Подстановки, примененные в рассматриваемом примере, можно обозначать следующим образом:

$\varphi_1 = \{z / x, w / y\}$, здесь z подставляется вместо x, а w вместо y;

$\varphi_2 = \{a / y);$

$\varphi_3 = \{g(z / x, a / y\}$;

$\varphi_4 = \{c / x, a / y\}$

А теперь переходим собственно к алгоритму унификации.

Пусть имеем дизъюнкты типа:

$C_1 = \{P(f(x), y), Q(a, b, x)\}$; $C_2 = \overline{\{P(f(g(c)), g(d))\}}$.

К этим дизъюнктам резольвента может быть получена только после применения к C_1 подстановки $g(c)$ вместо x и подстановки $g(d)$ вместо y. Для этого необходимо:

1. Проверить, можно ли применить резолюцию к C_1 и C_2

2. Найти подходящую подстановку, допускающую резолюцию.

Такую проверку и вычисление подстановки осуществляет *алгоритм унификации*.

Прежде, чем перейти к формальному описанию алгоритма унификации, дадим некоторые определения.

Подстановкой называется конечное множество вида $\{t_1 / x_1, t_2 / x_2, ..., t_n / x_n\}$, где t_i - терм, а x_i - переменная, отличная от t_i $(1 \le i \le n)$.

Подстановка называется *фундаментальной,* если все t_i $(1 \le i \le n)$ являются фундаментальными термами.

Пусть $\varphi = \{t_1 / x_1, t_2 / x_2, ..., t_n / x_n\}$ - подстановка, а W - литерал (выражение). Тогда $W\varphi$ называется *примером* выражения W, полученного заменой всех вхождений в W переменной $x_i (1 \le i \le n)$ на вхождение терма t_i. $W\varphi$ называется *фундаментальным примером* выражения W, если φ - фундаментальная подстановка.

Рассмотрим применение алгоритма унификации к заданным дизъюнктам C_1 и C_2.

Шаг 1. Необходимо сравнивать соответствующие термы дизъюнктов слева направо, пока не встретятся первые термы с одинаковыми функциональными символами, которые различаются переменными или константами. Создается множество, состоящее из этих термов, называемое *множеством рассогласования.*

Для C_1 и C_2 первым множеством рассогласования будет $\{x, g(c)\}$.

$$\{P(f(x), y), Q(a,b,x), \overline{P(f(g(c)), g(d))}\}$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Шаг 2. Для каждой переменной множества рассогласования проверяем, встречается ли она в каком-нибудь другом терме этого же множества.

Шаг 3. Если на предыдущем шаге получен положительный ответ, то дизъюнкты не унифицируемы, и применение алгоритма оканчивается неудачей. Если ответ отрицательный, осуществляем подстановку вместо переменной из множества рассогласования терма из этого множества. Для C_1 и C_2 применяем подстановку φ_1={x/g(c)}. В результате C_1 и C_2 принимают вид

$$C_1^1 = \{P(f(g(c)), y), Q(a,b,x)\}; \qquad C_2^1 = C_2.$$

Шаг 4. Продолжаем двигаться направо, снова выполняя пункты 1-3. Новым множеством рассогласования будет $\{y, g(d)\}$. Применение подстановки $\{y/g(d)\}$ дает

$$C_1^2 = \{P(f(g(c)), y), Q(a,b,x)\}; \quad C_2^2 = C_2.$$

После этих преобразований можно применить резолюцию к дизъюнктам C_1 и C_2.

Прежде, чем переходить к формальному описанию алгоритма унификации, дадим более формализованные определения, характеризующие его работу.

Пусть $S = \{C_1, C_2, ...C_n\}$ - множество дизъюнктов. Множество $DS(S) = \{t_1, t_2, ..., t_n | t_1, ..., t_n$ - первые слева термы, стоящие на соответствующих местах в дизъюнктах $C_1, C_2, ...C_n$, среди которых есть, по крайней мере, два различных$\}$ называется *множеством рассогласования* S.

Так, например, для для множества

$$S = \{C_1, C_2\} = \{\{P(f(x), y), Q(a,b,x)\}, \{\overline{P(f(g(c)), g(d))}\}\}$$

первыми слева различными термами в $P(f(x), y)$ и $\overline{P(f(g(c)), g(d))}$ являются x и $g(c)$. Таким образом, первым множеством рассогласования будет $DS_1 = \{x, g(c)\}$. После применения подстановки $\varphi = \{x, g(c)\}$ возникает несоответствие между термами y и $g(d)$. Следующее множество рассогласования $DS_2 = \{y, g(d)\}$. В конце концов, алгоритм заканчивает свою работу, выдавая в качестве ответа множество подстановок, позволяющих унифицировать C_1 и C_2, и затем применить к ним правило резолюции для исчисления высказываний. Это Множество подстановок называется *общим унификатором (ОУ)* дизъюнктов.

Например, для $C_1 = \{P(f(x), y), Q(a,b,x)\}$ и $C_2 = \{\overline{P(f(g(c)), g(d))}\}$ общим унификатором является множество $\varphi = \{x/g(c), y/g(d)\}$.

Если дизъюнкты не могут быть унифицируемы, алгоритм останавливается на шаге 2

Унификатор φ называется *наиболее общим унификатором (НОУ),* если для любого другого унификатора ψ существует подстановка γ такая, что $\psi = \varphi\gamma$.

Для множества термов или атомов S наиболее общий унификатор определяется единственным способом.

Рассмотрим механизм нахождения НОУ на примере.

Пусть имеем исходное множество $S = \{Q(g(x), w), Q(y,b)\}$, где b - константа. Унификатором для S является подстановка

$$\psi = \{y/g(b), x/b, w/b\}.$$

Если подстановку ψ применить к множеству S, получатся следующие основные примеры:

$Q(g(x), w)\psi = Q(g(b), b)$; $Q(y, b)\psi = Q(g(b), b)$.

Если теперь положить $\gamma = \{x/b\}$ и $\varphi = \{y/g(x), w/b\}$, то можно показать, что $\psi = \varphi\gamma$.

Подстановка φ унифицирует рассматриваемые атомы. Следовательно, φ является наиболее общим унификатором.

Алгоритм унификации в формальном описании выглядит так. Пусть $T = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ - множество атомарных формул.

Шаг 0. $\varphi_0 = E$ (тождественная подстановка).

Шаг k. Мы уже построили подстановки $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_k$.

Шаг $k+1$ (рекурсия).

1) Если $P_1\varphi_1\varphi_2...\varphi_k = P_2\varphi_1\varphi_2...\varphi_k = \ \dots\ = P_n\varphi_1\varphi_2...\varphi_k$, алгоритм заканчивает работу, выдавая $\varphi = \varphi_1\varphi_2...\varphi_k$ в качестве наиболее общего унификатора.

2). Если $P_i\varphi_1\varphi_2...\varphi_k \neq P_j\varphi_1\varphi_2...\varphi_k$ для некоторых i, j, тогда

а) строим множество рассогласования

$DS(P_1\varphi_1 \dots \varphi_k, \dots, P_n\varphi_1 \dots \varphi_k) = DS(T\varphi_1 \dots \varphi_k) = DS_k$;

б) осуществляем *проверку вхождений* (ПВ) переменных, то есть, проверяем для каждой переменной $v \in DS_k$, содержится ли она в каком–либо другом элементе DS_k.

Если ПВ дает положительный результат, процесс останавливается и делается заключение, что множество T не унифицируемо. Если множество DS_k вообще не содержит переменных, ПВ также дает положительный ответ. Если DS_k содержит переменную v и терм t, и ПВ дает отрицательный ответ, полагаем $\varphi_{k+1} = \{v/t\}$, избавляясь таким образом от несоответствия между $P_1, \dots, P_n$ в термах v и t.

Шаг $k+2$. Повторяем шаги $k+1$, $k+2$ для $k = k+1$.

Теорема (Теорема Дж. А. Робинсона) Применение алгоритма унификации к множеству атомов $T = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ дает следующий результат:

Если T унифицируемо, то алгоритм останавливается, выдавая в качестве ответа НОУ множества T ;

Если T не унифицируемо, то алгоритм останавливается, объявляя, что унификатора не существует.

Воспользуемся теоремами 1 и 2 для определения унифицируемости.

Пример 1. (Множество унифицируемо)

Пусть дано множество формул:

$$S = \{Q(a, x, f(g(z))), Q(z, f(y), f(y))\}.$$

Определить, унифицируемо ли множество S. Если да, найти *НОУ*.

Шаг 0: Полагаем $\varphi_0 = E$.

Шаг 1: $S\varphi_0 = S$.

$DS(S\varphi_0) = DS_1 = \{a, z\}$.

ПВ негативна.

Полагаем $\varphi_1 = \{z/a\}$.

Шаг 2: $S\varphi_0\varphi_1 = \{Q(a, x, f(g(a))), Q(a, f(y), f(y))\}$.

$DS(S\varphi_0\varphi_1) = DS_2 = \{x, f(y)\}$.

ПВ негативна.

Полагаем $\varphi_2 = \{x/f(y)\}$.

Шаг 3: $S\varphi_0\varphi_1\varphi_2 = \{Q(a, f(y), f(g(a))), Q(a, f(y), f(y))\}$.

$DS(S\varphi_0\varphi_1\varphi_2) = DS_3 = \{g(a), y\}$.

ПВ негативна.

Полагаем $\varphi_3 = \{y/g(a)\}$.

Шаг 4:

$S\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \{Q(a, f(g(a)), f(g(a))), Q(a, f(y), f(g(a)), f(g(a)))\}$

$DS(S\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = \varnothing.$

Вывод: S унифицируемо и его *НОУ* имеет вид

НОУ$= \varphi_0\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = \{z/a, x/f(g(a)), y/g(a)\}$.

Пример 2. (Множество не унифицируемо).

Дано множество формул:

$$S = \{Q(y, y), Q(z, f(z))\}.$$

Определить, унифицируемо ли множество S. Если да, найти *НОУ*.

Шаг 0: Полагаем $\varphi_0 = E$.

Шаг 1: $S\varphi_0 = S$.

$DS(S\varphi_0) = DS_1 = \{y, z\}$.

ПВ негативна.

Полагаем $\varphi_1 = \{y/z\}$.

Шаг 2: $S\varphi_0\varphi_1 = \{Q(z, z), Q(z, f(z))\}$.

$DS(S\varphi_0\varphi_1) = DS_2 = \{z, f(z)\}$.

ПВ позитивна, так как z встречается в $f(z)$.

Вывод. Множество S не унифицируемо.

2.2.2. Метод резолюций в исчислении предикатов

Метод резолюций для исчисления предикатов представляет собой *комбинацию алгоритма унификации для исчисления предикатов и метода резолюций для исчисления высказываний.*

Поскольку переменные во всех дизъюнктах считаются связанными кванторами всеобщности, то эти переменные можно переименовывать, чтобы избежать конфликтов во время процедуры унификации. Такое переименование переменных называется *нормализацией переменных*.

Рассмотрим применение метода резолюции на примерах.

Пример 1. Существуют студенты, которые любят всех

преподавателей. Ни один из студентов не любит невежд. Следовательно, ни один из преподавателей не является невеждой.

Введем следующие обозначения

$C(x)$ - “x - студент”;

$P(x)$ - “x - преподаватель”;

$H(x)$ - “x - невежда”;

$L(x, y)$ - “x любит y”.

На языке логики предикатов эти утверждения будут иметь вид:

$\exists x(C(x) \,\&\, \forall y(P(y) \to L(x, y)))$;

$\forall x(C(x) \to \forall y(H(y) \to \overline{L(x, y)}))$;

$\forall y(P(y) \to \overline{H(y)})$,

где $C(x)$ - “x - есть студент”;

$P(x)$ - “x - есть преподаватель”;

$H(x)$ - “x - есть невежда”;

$L(x, y)$ - “x любит y”.

Получаем ССФ последовательно для всех посылок и заключения.

Для первой посылки ССФ имеет вид: $\forall y(C(a) \,\&\, (\overline{P(y)} \vee L(a, y)))$.

Для второй посылки ССФ имеет вид: $\forall x \forall y(\overline{C(x)} \vee \overline{H(y)} \vee \overline{L(x, y)})$.

Отрицание заключения имеет такую ССФ:

$\overline{\forall y(\overline{P(y)} \vee \overline{H(y)})} = \exists y\overline{(\overline{P(y)} \vee \overline{H(y)})} =$

$= \exists y(P(y) \,\&\, H(y)) = P(b) \,\&\, H(b)$.

К полученному набору дизъюнктов применим метод резолюции.

1. $C(a)$;
2. $\overline{P(y)} \vee L(a, y)$;

3. $\overline{C(x)} \vee \overline{H(y)} \vee \overline{L(x,y)}$;

4. $P(b)$;

5. $H(b)$;

6. $\overline{H(y)} \vee \overline{L(a,y)}$ (1,3) $\{\varphi = x/a\}$;

7. $L(a,b)$ (2,4) $\{\varphi = y/b\}$;

8. $\overline{H(b)}$ (6,7) $\{\varphi = y/b\}$;

9. Нулевая резольвента (□) (5,8) .

Пример 2.

Допустим, что посылки и заключения уже представлены в виде множества дизъюнктов

1. $\overline{S(y)} \vee C(y)$;

2. $S(b)$;

3. $V(a,b)$;

4. $\overline{C(z)} \vee \overline{V(a,z)}$;

5. $C(b)$ (1,2) $\{\varphi = y/b\}$;

6. $\overline{V(a,b)}$ (4,5) $\{\varphi = z/b\}$;

7. Нулевая резольвента (□) (3,6).

Пример 3. Преподаватели принимали зачеты у всех студентов, не являющихся отличниками. Некоторые аспиранты и студенты сдавали зачеты только аспирантам. Ни один из аспирантов не был отличником. Следовательно, некоторые преподаватели были аспирантами.

Пусть

$C(x)$ - x - студент,

$O(x)$ - x - отличник,

$P(x)$ - x - преподаватель,

$A(x)$ - x -аспирант,

$S(x,y)$ - x сдает зачеты y .

Тогда на языке исчисления предикатов имеем

$\forall x(C(x) \,\&\, \overline{O(x)} \to \exists y(P(y) \,\&\, S(x,y)))$;

$\exists x(A(x) \,\&\, C(x) \,\&\, \forall y(S(x,y) \to A(y)))$;

$\forall x(A(x) \to \overline{O(x)})$;

$\exists x(P(x) \,\&\, A(x))$.

Получаем ССФ последовательно для всех посылок и заключения.

Для первой посылки ССФ имеет вид:

$\forall y(\overline{C(x)} \vee O(x) \vee P(f(x))S(x,f(x))) =$

$\forall x((\overline{C(x)} \vee O(x) \vee P(f(x))(\overline{C(x)} \vee O(x) \vee S(x,f(x)))$;

Для второй посылки ССФ имеет вид:

$\forall y(A(a)C(a)(\overline{S(a,y)} \vee A(y)))$;

Для третьей посылки ССФ имеет вид:

$\forall x(\overline{A(x)} \vee \overline{O(x)})$;

Отрицание заключения имеет такую ССФ

$\forall x(\overline{P(x)} \vee \overline{A(x)})$.

К полученному множеству дизъюнктов применим метод резолюции.

1. $\overline{C(x)} \vee O(x) \vee P(f(x))$;

2. $\overline{C(x)} \vee O(x) \vee S(x,f(x))$;

3. $C(a)$;

4. $A(a)$;

5. $\overline{S(a,y)} \vee A(y)$;

6. $\overline{O(x)} \vee \overline{A(x)}$;

7. $\overline{P(x)} \vee \overline{A(x)}$;

8. $\overline{O(a)}$ (4,6) $\{\varphi = x/a\}$;

9. $\overline{C(a)} \vee S(a,f(a))$ (8,2) $\{\varphi = x/a\}$;

10. $\overline{C(a)} \vee A(f(a))$ (9,5) $\{\varphi = y/f(a)\}$;

11. $\overline{P(f(a))} \vee \overline{C(a)}$ (10,7) $\{\varphi = x/f(a)\}$;

12. $\overline{C(a)} \vee O(a)$ (11,1) $\{\varphi = x/a\}$;

13. $\overline{C(a)}$ (12,8);

14. Нулевая резольвента (□) (3,13).

Получение пустого дизъюнкта свидетельствует о том, что сделанное предположение о ложности вывода является неверным, следовательно, заданное множество общезначимо.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Проверить правильность следующих умозаключений тремя способами: методом семантических таблиц и методом резолюций.

1. Ни один человек не является четвероногим. Все дети – люди. Следовательно, ни один ребенок не является четвероногим.

2. Каждый, купивший билет, получает премию. Следовательно, если нет премии, то никто не покупал билетов; (B(x,y) - “x покупает y”; T(x) - “x есть билет”; P(x) - “x есть премия”; R(x,y) - “x получает y”).

3. Каждый член комитета богат и республиканец. Некоторые члены комитета – старики. Следовательно, существуют старики- республиканцы.

4. Некоторые республиканцы любят всех демократов. Ни один республиканец не любит ни одного социалиста. Следовательно, ни один демократ не является социалистом.

5. Всякое рациональное число есть действительное число. Существует рациональное число. Следовательно, существует действительное число.

6. Все рациональные числа являются действительными числами. Некоторые рациональные числа – целые числа.

Следовательно, некоторые действительные числа – целые числа.

7. Все первокурсники встречаются со всеми второкурсниками. Ни один первокурсник не встречается ни с одним студентом предпоследнего курса. Существуют второкурсники. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса.

8. Некоторые первокурсники любят всех второкурсников. Ни один первокурсник не любит никого из студентов предпоследнего курса. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса.

9. Борис – мальчик, у которого нет автомобиля. Анна любит только мальчиков, имеющих автомобили. Следовательно, Анна не любит Бориса.

10. Некоторым нравится Елена. Некоторые не любят никого, кому нравится Елена. Следовательно, некоторых любят не все.

11. Марк был римлянином. Цезарь был диктатором. Те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его. Римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его. Марк не был предан Цезарю. Следовательно, Марк пытался убить Цезаря.

12. Никакой торговец игрушками сам себе их не покупает. Некоторые люди, покупающие игрушки, глупы. Следовательно, некоторые глупые люди не торгуют игрушками.

13. Иван и Петр – братья. Братья имеют одну фамилию. Петр имеет фамилию Сидоров. Следовательно, Иван тоже имеет фамилию Сидоров.

14. Всякое нечетное натуральное число является разностью двух квадратов. 5 является нечетным натуральным числом. Следовательно, 5 является разностью двух квадратов.

15. Когда я устал и голоден, я хочу вернуться домой. Сейчас я устал и голоден. Значит, я хочу вернуться домой.

16. Когда я устал, я хочу вернуться домой. Когда я голоден, я хочу вернуться домой или отправиться в ресторан. Сейчас я устал и голоден. Поэтому сейчас я хочу вернуться домой.

17. Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, млекопитающие лишены перьев.

18. Имеется прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Значит, некоторые студенты, лишенные способностей, не прилежны.

19. Все политики – лицедеи. Некоторые лицедеи – лицемеры. Значит, некоторые политики - лицемеры.

20. Ничто плодотворное не легко. Некоторые легкие вещи общедоступны. Значит, некоторые общедоступные вещи не плодотворны.

21. У неё только преданные друзья. Некоторые из ее друзей – лицемеры. Ни один лицемер не может быть преданным. Значит, все ее друзья – проходимцы.

22. Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит, я не глупец.

23. Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик мог бы ее решить. Иванов – математик. А не может ее решить. Значит, задача неразрешима.

24. Всякий кто может решить эту задачу, - математик. Иванов не может ее решить. Значит, Иванов – не математик.

25. Всякий математик может решить эту задачу, если кто-нибудь ее может решить. Иванов – математик, а не может ее решить. Значит, задача неразрешима.

26. Всякий, кто может решить эту задачу, - математик. Ни один математик не может решить этой задачи. Значит, она не решаема.

27. Если какое-нибудь из чисел, лежащих (строго) между 1 и 101, делит 101, то простое число, меньше 11, делит 101. Ни одно простое число, меньше 11 не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.

28. Никто не поймет этого сообщения, если кто-нибудь не разгадает кода. Значит, имеется кто-то, кто может понять это сообщение только, если разгадает код.

29. Любой радикал является сторонником общественного прогресса. Иные консерваторы недолюбливают всех сторонников общественного прогресса. Значит, иные консерваторы недолюбливают все радикалов.

30. Некоторые пациенты любят докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Значит, ни один доктор не является знахарем.

31. Тот, кто распускает этот слух, должен быть и ловким и беспринципным. Иванов не ловок, Сидоров не беспринципен. Значит, ни Иванов, ни Сидоров не распускают этот слух.

32. Ни один первокурсник не любит второкурсников. Все, живущие на первом этаже, - второкурсники. Следовательно, ни один первокурсник не любит никого из живущих на первом этаже.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является ознакомление с современными подходами точного определения алгоритмов

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕКИЕ СВЕДЕНИЯ

Алгоритм – общий, единообразный, точно определенный способ решения любой задачи из данной массовой проблемы. Это определение алгоритма называют интуитивным. Интуитивное определение алгоритма достаточно, когда речь идет об уже найденном алгоритме решения задачи. Для доказательства существования алгоритма достаточно описать физический процесс, приводящий к решению. В этом случае можно обойтись интуитивным определением алгоритма.

Для доказательства отсутствия алгоритма требуется строгое определение алгоритма. Поиск строгого определения алгоритма ведется в трех направлениях.

Первое направление связано с уточнением понятия эффективно вычислимой функции.

Второе направление связано с машинной математикой (сущность понятия алгоритма раскрывается здесь путем рассмотрения процессов, осуществляемых в так называемой машине Тьюринга).

Третье направление связано с понятием нормальных алгоритмов, разработанных российским математиком А.А. Марковым.

2.1. Вычислимые функции, частично-рекурсивные и общерекурсивные функции. Тезис Черча

Пусть необходимо найти алгоритм для решения задачи, в условии которой входят значения некоторой системы целочисленных параметров: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, а искомым результатом является целое число q.

Функция $q = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ - называется *эффективно вычислимой*, если существует алгоритм,

позволяющий вычислить ее значение (здесь используется интуитивное определение алгоритма). Совокупность вычислимых функций называется совокупностью рекурсивных функций.

Элементарные вычислимые функции

1. $\lambda(x) = x + 1$ (оператор сдвига или функция следования)

2. $O(x) = 0$ (оператор аннулирования или нуль функция)

3. $I_n^m(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_m$, $(1 \le m \le n)$ (оператор проектирования).

Эти три простейшие функции всюду определены и вычислимы.

Операции над функциями.

1. Суперпозиция функций:

Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \ldots,$ $f_m(x_1, x_2, ...x_n)$, функцию $\varphi(x_1, x_2, ...x_m)$ и функцию $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$, определяемую равенством $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) =$

$= \varphi(f_1(x_1, x_2, ...x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ...x_n)).$

Принято считать, что функция ψ получена из функции φ, и функций f_1, $f_2, \ldots, f_m$ *суперпозицией.*

Если функции φ, f_1, $f_2, \ldots, f_m$ всюду определены и интуитивно вычислимы, то функция ψ также будет определена и интуитивно вычислима.

В том случае, если не все функции f_1, $f_2, \ldots, f_m$ зависят не от всех n аргументов, для получения суперпозиции используются фиктивные аргументы и функции проектирования.

Например, функция $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ получена суперпозицией из функций $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, и

$F_1(x,y,z) = f_1(x)$; $F_2(x,y,z) = f_2(x,y,z)$; $F_3(x,y,z) =$
$= I_3^2\ (x,y,z)$; $F_4(x,y,z) = I_3^1\ (x,y,z)$.

2. Схема примитивной рекурсии.

Рекурсия - это способ задания функции путем определения каждого из ее значений в терминах ранее определенных значений.

Пусть имеем две функции: $\varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$ и $\psi(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$, где $n > 1$.

Рассмотрим новую функцию, которая удовлетворяет следующим двум равенствам

$$f(0, x_2, x_3, ... x_n) = \varphi(x_2, x_3, ..., x_n),$$

$$f(y+1, x_2, x_3, ... x_n) = \psi(y, f(y, x_2, x_3, ... x_n), x_2, ..., x_n).$$

Функция φ зависит от $(n-1)$ аргументов, функция f зависит от n аргументов, а функция ψ зависит от $(n+1)$ аргумента. Говорят, что функция f получена из функций φ и ψ по схеме примитивной рекурсии. Если функции φ и ψ интуитивно вычислимы, то будет интуитивно вычислима и функция f. Если φ и ψ всюду определены, то будет всюду определена и функция f.

Пусть функция $f(x, y)$ задана равенствами

$$f(0, x) = x,$$

$$f(y+1, x) = f(y, x) + 1.$$

Нетрудно показать, что $f(x, y) = y + x$. Действительно, $f(y+z, x) = f(y, x) + z$. Полагая в этом равенстве $y = 0$, получим $f(z, x) = f(0, x) + z$ или $f(z, x) = x + z$.

Вычислить $f(x, y)$ при $x = 2$ и $y = 5$.

В этой задаче $\varphi(x) = x$, а $\psi(x, y, z) = y + 1$.

$$f(0,2) = \varphi(2) = 2,$$

$$f(1,2) = \psi(0,2,2) = f(0, x) + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$f(2,2) = \psi(1,3,2) = f(1, x) + 1 = 3 + 1 = 4,$$

$$f(3,2) = \psi(2,4,2) = f(2, x) + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$f(4,2) = \psi(3,5,2) = f(3, x) + 1 = 5 + 1 = 6,$$

$$f(5,2) = \psi(4,6,2) = f(4, x) + 1 = 6 + 1 = 7.$$

Пример 1. Используя простейшие функции и оператор примитивной рекурсии, получить функцию, называемую усеченной разностью

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \textit{ если } x \geq y, \\ 0, \textit{ если } x < y. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $x \dot{-} 1$, полученную из функции $x \dot{-} y$ фиксированием второго аргумента. Функция $x \dot{-} 1$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$0 \dot{-} 1 = 0 = O(x);$$

$(x+1) \dot{-} 1 = x = I_1^2(x, y)$, то есть она получена из простейших функций $O(x)$ и $I_1^2(x, y)$ с помощью оператора примитивной рекурсии.

Из определения усеченной разности следует, что функция удовлетворяет также следующим равенствам

$$x \dot{-} 0 = x = I_1^2(x, y);$$

$$(x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = h(x, y, x \dot{-} y)$$

для любых x и y. Таким образом, функция $x \dot{-} y$ получена с помощью оператора примитивной рекурсии из простейшей функции $I_1^2(x, y)$ и функции $h(x, y, z) = z \dot{-} 1$.

3. Оператор минимизации (μ- оператор)

Пусть задана некоторая функция $f(x, y)$. Зафиксируем x и выясним, при каком y функция $f(x, y) = 0$. Если значений y, при которых $f(x, y) = 0$, будет несколько, то отыщем минимальное значение y, при котором $f(x, y) = 0$. Поскольку минимальное значение y будет зависеть от x, то функция $\varphi(x)$ определяется следующим образом: $\varphi(x) = \mu y(f(x,y)=0)$. Аналогично определяется функция φ нескольких переменных.

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu y(f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0).$$

Переход от функции $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ к функции $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *применением* μ- *оператора*. Алгоритм вычисления функции $\varphi(x)$ включает в себя следующие шаги:

1. Вычислим $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$. Если это значение $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = 0$, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

2. Вычислим $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) =$ 0, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$. В противном случае переходим к следующему шагу.

Если для всех y $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) \neq 0$, то $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ считается неопределенной.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = x - y$, которая может быть получена с помощью оператора минимизации

$$f(x, y) = \mu z(y + z = x) = \mu z[I_3^2(x, y, z) + I_3^3(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)]$$

Для вычисления $f(7,2)$ положим $y = 2$, а переменной x будем последовательно придавать значения:

$z = 0,\quad 2 + 0 = 2 \neq 7,$

$z = 1,\quad 2 + 1 = 3 \neq 7,$

$z = 2,\quad 2 + 2 = 4 \neq 7,$

$z = 3,\quad 2 + 3 = 5 \neq 7,$

$z = 4,\quad 2 + 4 = 6 \neq 7,$

$z = 5\quad 2 + 5 = 7 = 7.$

Таким образом $f(x, y) = x - y = f(7,2) = 5$.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена за конечное число шагов из простейших функций при помощи операции суперпозиции, схем примитивной рекурсии и μ- оператора.

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - называется *общерекурсивной,* если она частично рекурсивна и всюду определена.

*Тезис А.Черча****.*** *Каждая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной****.***

Этот тезис нельзя доказать, так как он связывает нестрогое понятие интуитивно вычислимой функции со строгим математическим понятием частично-рекурсивной функции. Однако этот тезис можно опровергнуть, если построить пример функции интуитивно вычислимой, но не являющейся частично рекурсивной.

2.2. Машинная математика. Машина Тьюринга

Понятие машины Тьюринга возникает в результате прямой попытки разложения известных вычислительных процедур на элементарные шаги (операции). А.Тьюринг показал, что повторение его элементарных операций будет достаточно для проведения любого возможного вычисления.

Машина Тьюринга включает в себя:

1) *Внешний алфавит*, то есть, конечное множество символов $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$. Информация, поступающая в машину, представляется в виде слова, состоящего из этих символов. Машина перерабатывает информацию, полученную в виде слова, и выдает результат в виде нового слова.

2) *Внутренний алфавит* состоит

- из множества символов $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, которое определяет состояния машины Тьюринга;

- символов: *П* - вправо, *Л* - влево, *Н* - на месте.

Символы *П, Л, Н* называются операторами сдвига. Начальное состояние машины Тьюринга обозначается символом q_1. Конечное состояние – символом q_0.

3) *Внешняя память*, состоит из бесконечной в обе стороны ленты.

Память состоит из регистров, в каждый из которых можно вписать одну букву алфавита. Принято, что в пустом регистре по умолчанию находится символ a_0.

4) *Управляющая головка.* Управляющая головка передвигается вдоль ленты за 1 такт на 1 ячейку. В одном такте работы машины управляющая головка может сдвигаться влево, вправо, либо оставаться на месте.

В зависимости от того, какой была начальная информация, возможны два случая:

1) после обработки информации машина переходит в состояние q_0 (иначе говорят - машина применима к начальной информации);

2) машина никогда не останавливается (машина не применима к начальной информации). Такт работы машины описывается формулой

$$a_i q_j \Rightarrow a_\gamma \begin{matrix} n \\ л \\ н \end{matrix} q_s$$

где a_i, a_γ – буквы внешнего алфавита; q_i, q_s - состояния машины; *п, л, н* - операторы сдвига.

Совокупность команд для машины Тьюринга называется программой. Программа представляется в виде двумерной таблицы и носит название тьюринговой функциональной схемы.

Функциональная схема для машины Тьюринга, выполняющей умножение десятичного числа на 3, будет иметь такой вид

	q_1	q_2	q_3
a_0	$a_0 н q_0$	$1 н q_0$	$2 н q_0$
0	$0 л q_1$	$1 л q_1$	$2 л q_1$
1	$3 л q_1$	$4 л q_1$	$5 л q_1$
2	$6 л q_1$	$7 л q_1$	$8 л q_1$
3	$9 л q_1$	$0 л q_2$	$1 л q_2$
4	$2 л q_2$	$3 л q_2$	$4 л q_2$
5	$5 л q_2$	$6 л q_2$	$7 л q_2$
6	$8 л q_2$	$9 л q_2$	$0 л q_3$
7	$1 л q_3$	$2 л q_3$	$3 л q_3$
8	$4 л q_3$	$5 л q_3$	$6 л q_3$
9	$7 л q_3$	$8 л q_3$	$9 л q_3$

Пусть на ленте записано число

$$\begin{matrix} a_0\ 2\ 7\ 8\ a_0 \\ \downarrow \\ q_1 \end{matrix}$$

Так как управляющая головка обозревает символ 8, а машина находится в состоянии q_1, то она отрабатывает команду $4 л q_3$, в соответствии с которой сначала исходное состояние ячейки будет заменено на 4, затем управляющая головка переместится на одну позицию влево и новое состояние машины станет q_3. Состояние q_3 соответствует умножению числа, размещенного в текущем регистре на 3 и прибавлению к полученному результату двух единиц переноса из младшего разряда. После первого такта на ленте появится такая информация

$$a_0\ 2\ 7\ 4\ a_0$$
$$\downarrow$$
$$q_3$$

После выполнения команды $3лq_3$ на ленте появится следующая информация $a_0\ 2\ 3\ 4\ a_0$

$$\downarrow$$
$$q_3$$

На следующем такте после выполнения команды $8лq_1$

$$a_0\ 8\ 3\ 4\ a_0$$
$$\downarrow$$
$$q_1$$

После выполнения команды $a_0 нq_0$ машина переходит в состояние q_0 и завершает работу с получением результата 834.

Функциональная схема машины Тьюринга для сложения двух чисел в унарной системе счисления будет выглядеть так

	/	+
q_1	$a_0 лq_2$	-
q_2	$/\,лq_2$	$/\,нq_0$

Пусть исходная информация на ленте представлена так $a_0 //// + /// a_0$

$$\downarrow$$
$$q_1$$

В состоянии q_1 устраняется самая правая единица и машина переходит в состояние q_2. В состоянии q_2 управляющая головка перемещается, не изменяя состояния регистров, до тех пор, пока не будет достигнут символ $+$. Символ $+$ заменяется на 1 и машина переходит в конечное состояние q_0.

2.3. Тезис Тьюринга

Для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм, когда функция является вычислимой по Тьюрингу, то есть, когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.

Данный тезис является аксиомой. Этот тезис не может доказан методами математики, потому что он не имеет внутриматематического характера (одна сторона в тезисе – понятие алгоритма – не является точным математическим понятием). Однако этот тезис может быть опровергнут, если будет найдена функция, которая вычислима с помощью какого-нибудь алгоритма, но не вычислима на машине Тьюринга.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Задание 1

Доказать, что следующие функции вычислимы

1. $f(x, y) = x^y$;
2. Усеченная разность
3. $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ если } x \geq y, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$;
4. $sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$;
5. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0, \\ 0, \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$;
6. $f(x, y) = |x - y|$; 7. $f(x) = x!$; 8. $f(x, y) = \min(x, y)$;
9. $f(x, y) = \max(x, y)$;

10. $f(x,y) = rm(x,y) - \textit{остаток от деления } y \textit{ на } x,$
$\textit{для определенности считать } rm(0,y) = y,$

11. $f(x,y) = gt(x, y = \textit{частное от деления } y \textit{ на } x,$
$(gt(0,y) = 0).$

12. $f(x.y) = div(x,y) = \begin{cases} 1, \textit{ если } x \textit{ делит } y, \\ 0, \textit{ если } x \textit{ не делит } y \end{cases};$

13. Полиномиальная функция $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in N$;

14. $\sqrt{x}$;

15. $НОК(x,y)$ - наименьшее общее кратное чисел x и y;

16. $НОД(x,y)$ - наибольший общий делитель чисел x и y;

17. $f(x)$ - число простых делителей числа x;

18 $\Phi(x)$ - число положительных целых чисел, меньших x и взаимно простых с x (функция Эйлера). Натуральные числа называются взаимно простыми, если $НОД(x,y) = 1$.

19. $f(x) = \sigma(x) = \textit{сумма делителей числа } x, \textit{ где } \sigma(0) = 0$;

20. $f(x,y) = \begin{cases} z, \textit{ если } z^y = x, \\ \textit{не определена в остальных случаях} \end{cases}$

21. Докажите следующие свойства усеченной разности

21.1. $f(x,y) = x \dot{-} y = \lambda(x) - \lambda(y)$;

21.2. $f(x,y) = x + (y \dot{-} x) = y + (x \dot{-} y)$;

21.3. $f(x,y) = (x \dot{-} z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$;

21.4. $f(x,y) = (x \dot{-} y) \dot{-} z = (x \dot{-} z) \dot{-} y$.

Задание 2

Разработать тьюринговые функциональные схемы для решения следующих задач

1. Сложение двух чисел в бинарной системе счисления.
2. Перевод числа из двоичной системы счисления в унарную и наоборот.
3. Умножение двух чисел в унарной системе счисления.
4. Найти функцию $f(x) = 0$ если $x \neq 0$ и $f(x) = 1$ если $x = 0$.
5. Проверить на четность число, записанное в двоичной системе счисления.
6. Перевод числа из пятеричной системы счисления в семеричную.
7. Дано число в унарной системе счисления. Определить, делится ли оно на 3?
8. Даны два числа. Определить, какое из них больше? Алфавит любой.
9. Перевод числа из унарной системы счисления в десятичную систему счисления.
10. Вычисление модуля разности двух чисел, записанных в унарной системе счисления.
11. Произведение двух чисел в унарной системе счисления.
12. Перевод десятичного числа в унарную систему счисления.
13. Перевод числа из унарной системы счисления в бинарную.
14. Найти остаток от деления унарного числа на 2.
15. Извлечение целой части квадратного корня в унарной системе счисления.
16. Произведение двух чисел в бинарной системе счисления.
17. Распознать язык Дика – скобочные скелеты арифметических выражений. Примеры цепочек такого языка “(( ))”; “(( )) ((( ) ( )))”.
18. Распознать язык $(a^{n\uparrow 2})$. Примеры цепочек этого

языка “a”, “$aaaa$” (воспользоваться соотношением $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ или тем, квадрат натурального числа представим как сумма последовательных нечетных чисел).

19. Распознать язык, цепочки которого содержат одинаковые количества вхождений символов a, b, c. Пример цепочки такого языка ”$baacbccba$”.

20. Увеличить на один двоичные числа и уменьшающие на один двоичные числа.

21. Удвоить натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

22. Перевести число из унарной системы в троичную.

23. Распознать четность натурального числа.

24. Найти остаток от деления натурального числа на m.

25. Вычислить следующие функции, заданные на $N * N$

25.1. $x + y$; 25.2. $x + 2y$; 25.3. $x * y$;

25.4. $x^2 + 3y$.

26. Вычислить следующие функции, определенные на N.

26.1. x^2; 26.2. $f(x) = \begin{cases} x+1, \textit{если } x = 2n \\ 2x, \textit{если } x = 2n+1 \end{cases}$;

27. Найти остаток от деления десятичного числа на 3.

28. Найти разность двух чисел, записанных в троичной системе счисления.

29. Дано два числа в унарной системе счисления. Разработать алгоритм, который бы обеспечивал бесконечный процесс прибавления левого числа к правому, затем левого числа к полученной сумме и так далее.

30. Реализовать алгоритм Евклида для нахождения НОД двух чисел, представленных в унарной системе счисления.

31. На ленте записаны два унарных числа, разделенных между собой звездочкой. Сохранить большее из заданных чисел, а меньшее стереть.

32. На ленте напечатан массив символов, состоящий из n элементов. Составить программу для машины Тьюринга, которая строит массив, равный данному и отстоящий от него вправо на две неотмеченные ячейки.

33. Дан массив, длина которого выражается нечетным числом. Найти середину массива, то есть стереть метку в секции, которая делит массив на две равные части.

34. Пусть на ленте машины Тьюринга помещена последовательность чередующихся между собой символов “M” и “A”. Необходимо составить программу, работая по которой, машина уничтожит символы “A”, а “M” расположить рядом

35. На ленте машины Тьюринга записано число, представленное в десятичной системе счисления, а следом за ним записано некоторое количество звездочек. Составить функциональную схему, работая по которой машина Тьюринга увеличивала бы данное число на количество звездочек

36. Пользуясь условием задачи 36, разработать функциональную схему, работая по которой машина Тьюринга уменьшала бы данное число на количество звездочек

37. На ленте записано слово в алфавите $\{A, B\}$. Верно ли, что все буквы слова одинаковы?

38. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $f(x) = x/2$. Областью определения функции является множество всех четных чисел. При подаче на вход четного числа на выходе машины Тьюринга должна быть половина числа, а при подаче нечетного числа машина работала бы неограниченно долго.

39. Дано два числа в унарной системе счисления. Представить их наибольший делитель в десятичной системе счисления.

40. Реализовать функцию $f(x, y) = \max(x, y)$.

41. Реализовать функцию $f(x, y) = \min(x, y)$.

42. Найти сумму двух чисел, заданных в бинарной системе счисления.

43. Реализовать целочисленное деление десятичного числа на 3.

44. Перевести число из пятеричной системы счисления в семеричную.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Лихтарников Л.М. Математическая логика и теория алгоритмов / Л.М. Лихтарников. Т.Г., Сукачева. М.: Факториал, 2000. 420 с.

2. Метакидес Г. Принципы логики и логического программирования / Г. Метакидес, А. Нероуд. М.: Факториал. 1998. 450 с.

3. Карпов Ю.Г. Теория автоматов / Ю.Г. Карпов. М.: Питер.2002. 435 с.

4. Холопкина Л.В. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для вузов / Л.В. Холопкина. Воронеж: ВГТУ, 2008. 162 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 4. Исчисление предикатов 1

1. Цель работы 1

2. Краткие теоретические сведения 1

2.1. Кванторные операции 2

2.2. Равносильности логики предикатов 5

2.3. Предваренная, сколемовская нормальная и сколемовская стандартная формы 6

3. Контрольные вопросы и задания 8

Лабораторная работа № 5. Перевод высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов 14

1. Цель работы 14

2. Краткие теоретические сведения 14

3. Контрольные вопросы и задания 16

Лабораторная работа № 6. Логический вывод в исчислении предикатов 21

1. Цель работы 21

2. Краткие теоретические сведения 21

2.1.Метод семантических таблиц 21

2.2. Принцип резолюции 24

2.2.1. Алгоритм унификации 24

2.2.2. Метод резолюций в исчислении предикатов 31

3. Контрольные вопросы и задания 35

Лабораторная работа № 7. Теория алгоритмов 38

1. Цель работы 38

2. Краткие теоретические сведения 39

2.1. Вычислимые функции, частично- рекурсивные и общерекурсивные функции. Тезис Черча 39

2.2. Машинная математика. Машина Тьюринга 44

2.3. Тезис Тьюринга 48

3. Контрольные вопросы и задания 48

Библиографический список 53

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ 4-7 по дисциплине
“Математическая логика и теория алгоритмов”
для студентов специальности 230101
очной, сокращенной очной, заочной и сокращенной заочной
форм обучения

Составители:
Холопкина Людмила Владимировна
Носачева Майя Павловна

В авторской редакции

Подписано в печать 18.03.14.
Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 3,5. Уч.- изд.л. 3,3. Тираж 150 экз.”С”.
Зак. №

ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14