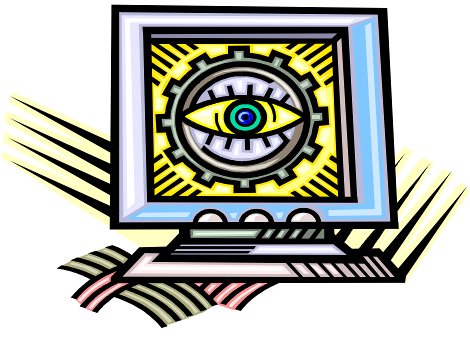
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра технологии машиностроения

- 2019

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ
по дисциплине
"Основы математического моделирования"
для студентов направления подготовки бакалавров
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
(направленности «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства»,
«Металлообрабатывающие станки и комплексы»,
«Технология машиностроения»)
всех форм обучения



Воронеж 2019

УДК 51:621(075.8)
ББК 22.1:34.00Я7

Составитель канд. техн. наук А.В. Перова

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине "Основы математического моделирования" для студентов направления подготовки бакалавров 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (направленности «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Металлообрабатывающие станки и комплексы», «Технология машиностроения») всех форм обучения / ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический университет"; сост. А.В. Перова. Воронеж, 2019. 24 с.

Методические указания включают краткие теоретические сведения по основам математического моделирования, методику и порядок выполнения практических работ, снабжены перечнем рекомендуемой литературы и конкретными примерами моделирования с использованием численных методов.

Табл. 5. Ил. 7. Библиогр.: 6 назв.

УДК 51:621(075.8)
ББК 22.1:34.00Я7

Рецензент д-р техн. наук, проф. Е.В. Смоленцев

Печатается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического университета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель работы. Теоретическое изучение и получение практических навыков в определении экстремумов функции одной переменной классическим методом.

Теоретические сведения

Функция $f(x)$ действительной переменной x имеет локальный минимум в точке x_o, если существует некоторая положительная величина Δ, такая, что если $|x-x_o| < \Delta$, то $f(x) \geq f(x_o)$, т.е. если существует окрестность точки x_o, такая, что для всех значений x в этой окрестности величина $f(x)$ больше $f(x_o)$. Функция $f(x)$ имеет глобальный минимум в точке x_{min} , если для всех x справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_{min})$. С другой стороны функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_k, если существует некоторая положительная величина Δ, такая, что $|x-x_o| < \Delta$, то $f(x) \leq f(x_k)$, т.е. если существует окрестность точки x_k, для которой при всех значениях x в этой окрестности величина $f(x)$ меньше $f(x_k)$. Функция $f(x)$ имеет глобальный максимум в точке x_{max}, если для всех x справедливо неравенство $f(x) \leq f(xmax)$.

На рис. 1.1. дано графическое представление функции $f(x)$, которая имеет локальный минимум в точке x_o и глобальный минимум в точке x_{min}.

На рис.1.2. дано графическое отображение функции $f(x)$, имеющей локальный и глобальный максимумы в точках x_k, x_{max}.

Классический метод нахождения точек экстремума (точки x_o, x_{min}, x на рис. 1.1 и точки x_k, x_{max}, x_i на рис.1.2) заключается в поиске уравнений, решением которых являются эти точки. Функции $f(x)$, представленные на рис. 1.1 и 1.2, и их производные непрерывны, а в точках экстремума первая производная $f'(x)$ равна нулю. Т.о. точки экстремума функции $f(x)$ являются решениями уравнения:

$$f'(x) = 0 \tag{1.1}$$

При этом необходимо отметить, что решением уравнения (1.1) являются не только точки минимума и максимума функции $f(x)$ (x_o, x_{min}, x_i на рис.1.1), но и точка горизонтального перегиба функции x_c. Отсюда видно, что уравнение (1.1) является только необходимым условием экстремума, но не является достаточным.

Для определения характера экстремума возникает необходимость рассмотрения более высоких производных функции ***f(x)***. В точках локального и глобального минимума (рис. 1.1) $\boldsymbol{x_o}$, $\boldsymbol{x_{min}}$ первая производная функции ***f`(x)*** меняет знак с отрицательного на положительный; в точке $\boldsymbol{x_i}$ (рис. 1.1) - с положительного на отрицательный, а в точке $\boldsymbol{x_c}$ знак производной не меняется. Т.о. можно сделать вывод о том, что первая производная в минимуме является возрастающей функцией, а так как степень возрастания ***f`(x)*** измеряется второй производной, то для минимума функции ***f(x)*** справедливо неравенство $\boldsymbol{f''(x_o)>0}$, $\boldsymbol{f''(x_{min}) > 0}$. Аналогично, для точки максимума $\boldsymbol{x_i}$ функции ***f(x)***: $\boldsymbol{f''(xi) < 0}$.

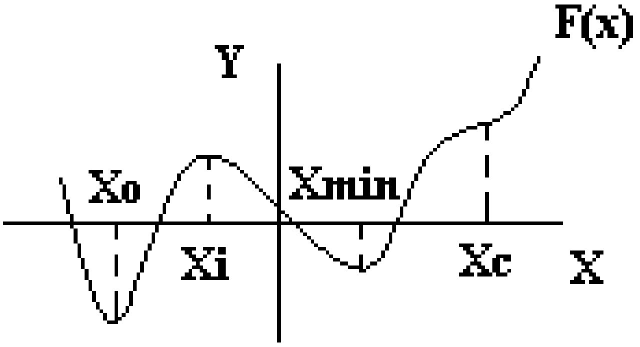


Рис.1.1. Графическое представление функции ***f(x)*** имеющей глобальные и локальные минимумы в $\boldsymbol{x_o}$ и $\boldsymbol{x_{min}}$ и локальный максимум в $\boldsymbol{x_i}$

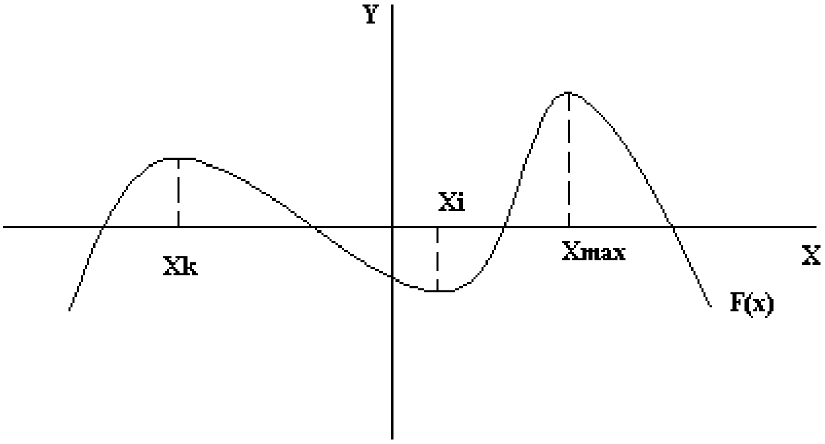


Рис.1.2. Функция ***f(x)*** с локальным в $\boldsymbol{x_k}$ и глобальным в $\boldsymbol{x_{max}}$ максимумами и локальным минимумом в $\boldsymbol{x_i}$

Для определения различия между локальными и глобальными экстремумами необходимо сравнивать значения функции в точках минимума и максимума $\boldsymbol{f(x_0)}$, $\boldsymbol{f(x_{min})}$, $\boldsymbol{f(x_i)}$ (рис. 1.1).

Аналогично, данную задачу можно решить, используя разложение функции в ряд Тейлора в окрестностях точки экстремума x_0 (x_{min}, x_i) (рис.1.1). Для точки x_0 функции $f(x)$ можно записать:

$$f(x+h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots,$$

при этом если в т. x_0 достигается минимум, то левая часть уравнения отвечает неравенству $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ для любого достаточно малого значения h: **/h/<Δ.**

Неравенство для случая, если в т. x_0 достигается максимум. Выглядит следующим образом: $(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$.

Можно сформулировать следующее правило определения характера экстремума функции:

Если функция $f(x)$ и ее производные непрерывны, то точка x_0 является точкой экстремума только в том случае, если порядок первой не обращающейся в нуль в точке производной n - четное число. При этом если $f''(x_0) < 0$, то в т. x_0 достигается максимум, а если $f''(x_0) > 0$ - минимум.

Задание на практическую работу

1. Задание на практическую работу студент выбирает из таблицы 1.2.
2. Опираясь на теоретические сведения, приведенные выше, студент вычисляет первую производную исходной функции и определяет значение точек экстремума из уравнения (1.1).
3. Производится вычисление второй производной функции и определяется характер точек экстремума.
4. Определяются точки глобального минимума и максимума функции. Все результаты расчетов по п. 1 - 4 сводятся в табл.1.1.
5. Составляется алгоритм вычисления 1-й и 2-й производной исходной функции и поиска точек экстремума. Блок-схема алгоритма приводится в отчете.
6. С использованием средств Excel строится кривая исходной функции, её первой и второй производных. Производится проверка результатов, полученных в п. 3-4.

Таблица 1.1

Результаты расчетов

f(x)	f'(x)	f''(x)	Точки минимума				Точки максимума			
			x_{1min}	x_{2min}	$f(x_{1min})$	$f(x_{2min})$	x_{1max}	x_{2max}	$f(x_{imax})$	$f(x_{imax})$

Таблица 1.2

№ п/п	Функция	№ п/п	Функция
1	$4x^3+4x^2+x+1$	14	$x^4-14x^3+60x^2+16$
2	x^3-6x^2+4x+5	15	$2x^4-7x^3-4x^2$
3	x^3-2x^2+x+1	16	$5x^2+\lg x$
4	$x^4+x^3-2x^2$	17	$x^3+x\lg x$
5	$2x^4+2x^3-6x^2+1$	18	x^2+e^x
6	$x^4+2x^3-5x^2+7$	19	$x^2+\frac{1}{e^x}$
7	$x^3-3{,}5x^2+4x$	20	$1+x\lg x+e^x$
8	$0{,}3x^3+3{,}5x^2+12x+7{,}1$	21	$-e^{-x}sh(\frac{x}{2})$
9	$0{,}2x^3+1{,}6x^2-8{,}4x+0{,}5$	22	$e^{-x}-Sinx$
10	$x^3-6x^2-28x+3{,}1$	23	$e^{-x}-Cosx$
11	$0{,}3x^3+6x^2+10x+5$	24	$x(x-1)^3$
12	$x^3+x^2+10x+5$	25	$3x^2+Sin^2x$
13	$x(x-1)^2$	26	$2x+Cosx$

Содержание отчета

Отчет оформляется в тетради для практических работ грамотно и аккуратно. Он должен содержать следующие разделы:

1. Название и цель работы, краткие теоретические сведения о классическом методе поиска экстремума функции одной переменной.

2. Исходную функцию, ее первые и вторые производные, точки экстремума (табл.1.1).

3. Блок-схему алгоритма.

4. Распечатку графика функции, первой и второй производных, результаты расчета.

5. Сравнение результатов расчета "вручную" и на компьютере.

6. Выводы по работе.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА СВЕННА

Цель работы. Теоретическое изучение и получение практических навыков в определении начального интервала неопределенности для нахождения экстремумов функции с использованием алгоритма Свенна.

Для выбора начального интервала неопределенности, содержащего точку ***минимума x^*,*** можно применить ***эвристический алгоритм Свенна.***

1. Задать исходные данные: x_0 — начальная точка, h— шаг поиска ($h > 0$).

2. Вычислить значения функций

$$f(x_0 - h), f(x_0), f(x_0 + h).$$

3. Если $f(x_0 - h) \le f(x_0) \ge f(x_0 + h)$, то функция не является унимодальной. Необходимо перейти к шагу 1 и **задать** другую начальную точку x_0.

4. Если $f(x_0 - h) \ge f(x_0) \le f(x_0 + h)$, то интервал неопределенности $[a,b]$ найден: $a = x_0 - h$, $b = x_0 + h$. Конец вычислений.

5. Если $f(x_0 - h) \ge f(x_0) \ge f(x_0 + h)$, то согласно предположению об унимодальности, точка минимума должна располагаться правее точки x_0: $t = h$; $a = x_0$; $x_1 = x_0 + h$; $k = 1$. Перейти к шагу 7.

6. Если $f(x_0 - h) \le f(x_0) \le f(x_0 + h)$, то точка минимума должна располагаться левее точки x_0: $t = -h$; $b = x_0$; $x_1 = x_0 - h$; $k = 1$. Перейти к шагу 7.

7. Найти следующую точку $x_{k+1} = x_k + 2^k t$ и вычислить значение функции $f(x_{k+1})$.

8. Если $\boldsymbol{f(x_{k+1}) < f(x_k)}$, то положить $\boldsymbol{k = k + 1}$ и перейти к шагу 7.

9. Если $\boldsymbol{h} > 0$, то $\boldsymbol{a = x_k}$; $\boldsymbol{b = x_{k+1}}$. В противном случае $\boldsymbol{a = x_{k+1}}$; $\boldsymbol{b = x_k}$. Конец вычислений.

В результате использования алгоритма Свенна получим исходный интервал неопределенности $[a,b]$.

На листинге приведена программа на языке ***Delphi*** для реализации алгоритма Свенна.

Текст программы включает функцию пользователя f(¨), в тело которой записывается код исследуемой целевой функции. В приведенных текстах программ этот код записан для целевой функции $f(x)=(3-x^2)*x$. При выполнении практической работы этот код заменяется кодом заданной целевой функции.

Исходные данные вводятся в диалоговом режиме в следующем порядке:

$\boldsymbol{x_0}$ — начальная точка;

$\boldsymbol{h}$ — величина шага.

В результате выполнения программы на экран выводится искомый начальный интервал неопределенности.

Листинг. *Программа на Delphi, реализующая алгоритм Свенна*

```
program SWANN;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
Syslltits;
// Эвристический алгоритм Свенна для выбора
//начального  интервала  неопределенности
//******************************************
label Ml, stop;
var
x0,xl,x2,yl,y2,h,t,a,b:real;
 k: integer;
//*******************************************
function f(x:real):real;
begin
f:=-(3-x*x)*x
end;
//*******************************************
function xk1(xk,t:real; k:integer):real;
begin
```

```
xkl:=xk+exp(k*ln(2))*t
end;
^* *************************************** begin
writeln('исходные данные'); writeln;
Ml: write('Введите начальную точку x0= '); readln(x0);
write('Введите величину шага h = '); .readln(h);
if (f(x0)>=f(x0-h)) and (f(x0)>=f(x0+h)) then
begin writeln ('Функция не является унимодальной.');
writeln('Рекомендуется задать другую начальную
точку');
goto Ml
end;
                    if (f(x0-h)>=f(x0)) and (f(x0+h)>=f(x0)) then
                         begin a:=x0-h; b:=x0+h; goto stop end;
                    if (f(x0-h)>=f(x0)) and (f(x0)>=f(x0+h)) then
                         begin t:=h; a:=x0; xl:=x0+h; y1:=f(xl);
                          k:=l; x2:=xk1(x1,h,k); y2:=f(x2) end;
                    if (f(x0-h)<=f(x0)) and (f(x0)<=f(x0+h)) then
                         begin t:=-h;b:=x0; x1:=x0-h; y1:=f(xl);
                          k:=1; x2:=xk1(x1,h,k); y2:=f(x2) end;
while y2<y1 do
begin
if h>0 then a:=xl else b:=xl;
k:=k+l; xl:=x2; y1:=y2; x2:=xk1(xl,h,k); y2:=f(x2);
 end;
if h>0 then b:=x2
     else a:=x2;
 stop :writeln;
writeln ('Результат поиска начального');
 writeln('интервала неопределенности'); writeln;
writeln(' a=',a);
writeln(' b=',b); readln;
end.
```

Задание на практическую работу

Используя алгоритм Свенна, найти начальный интервал неопределенности для поиска максимума (минимума) функции *f(x)* согласно вариантам из табл.1.2.

Запускаем программу на выполнение. В диалоговом режиме вводим исходные данные и получаем исходный начальный интервал неопределенности.

В программе знак функции ***f(x)*** был заменен на про- тивоположный, так как производится поиск интервала, содержащего точку максимума.

Вычислительный процесс в алгоритме Свенна непосредственно зависит от величины шага ***h.*** Если ***h*** взять большим, то получим грубые оценки координат граничных точек, и построенный интервал может оказаться весьма широким. С другой стороны, если ***h*** мало, то для определения граничных точек может потребоваться большое количество итераций.

После того как найден интервал неопределенности, содержащий точку минимума, применяют численные методы, позволяющие вычислить ее с заданной точностью.

Содержание отчета

Отчет оформляется в тетради для практических работ грамотно и аккуратно. Он должен содержать следующие разделы:

1. Название и цель работы, краткие теоретические сведения об алгоритме Свенна.
2. Исходную функцию (табл.1.2).
3. Блок-схему алгоритма.
4. Распечатку листинга программы, результаты расчета.
5. Сравнение результатов расчета "вручную" и на компьютере.
6. Выводы по работе.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 3 - 4
ПОИСК ОПТИМУМА МЕТОДОМ ФИБОНАЧЧИ И "ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ"

Цель работ: Теоретическое изучение и получение практических навыков отыскания оптимума функции методом Фибоначчи и «Золотого сечения», сравнение методов.

Теоретические сведения

Часто существуют задачи, которые не дают возможности определить экстремум функции классическими методами. Это может быть пример, когда решить уравнение и найти его корни традиционным способом не удается. В этом случае с помощью численных методов экстремум функции ***f(x)*** ищется непосредственно в некотором интервале $a < x_0 < b$, в котором как предполагается лежит экстремум.

Пусть точки ***а*** и ***в*** определяют интервал, в котором лежит истинная точка минимума и внутри этого интервала функция унимодальная, т.е. имеет только один экстремум (рис. 3.1). В интервале [***a, b***] известны значения функции в трех точках x_1, x_2, x_3, таких что $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, $f(x_2) < f(x_1), f(x_2) < f(x_3)$.

Тогда точка x_m лежит внутри интервала (x_1, x_3), меньшем чем (a, b).

Внутри отрезка (x_1, x_3) мы можем вычислить функцию в точке x_4, но сделать это только один раз. При этом точка x_4 помещается внутри отрезка (x_1, x_3) симметрично точке x_2, т.е. длины (x_1, x_2) и (x_4, x_3) должны быть одинаковы. После этого следует переходить к рассмотрению отрезка (x_1, x_2) или (x_4, x_3), которые меньше начального интервала (x_1, x_3) а точка экстремума лежит заведомо внутри этих интервалов.

Координата точки x_2 при известном начальном интервале ($x_1; x_3$) определяется по выражению:

$$x_2 = \frac{F_{n-1}}{F_n}\left[x_3 - x_1\right] + \frac{(-1)^n \varepsilon}{F_n}; \qquad (3.1)$$

где n - количество вычислений, которые необходимо выполнить;

ε - минимально возможное расстояние между двумя точками, возможно ε = 0;

F_n , F_{n-1} - числа Фибоначчи, которые определяются как: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Последующее определение координаты точки x_4 в числах Фибоначчи не нуждается и осуществляется по выражению:

$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3 \qquad (3.2)$$

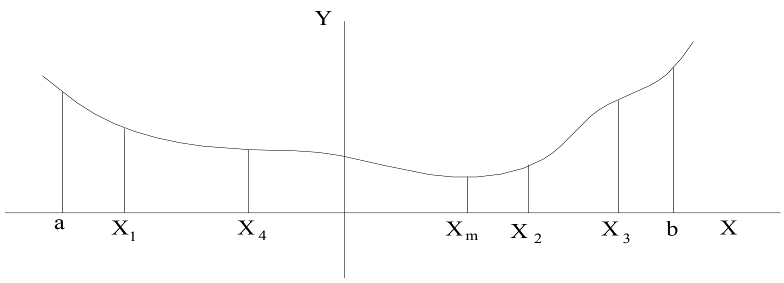


Рис. 3.1. Поиск экстремума функции методом Фибоначчи

Обозначим $f(x_2) = Y_2$ и $f(x_4) = Y_4$ и рассмотрим 4 возможных варианта взаимного расположения точек x_2, x_4 и значений функций Y_2, Y_4 (рис.3.2).

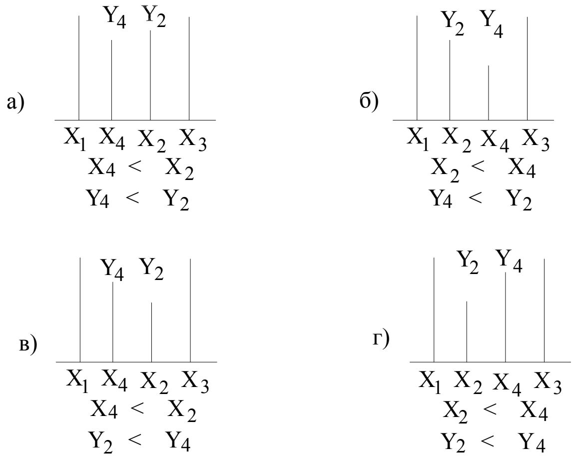


Рис. 3.2. Возможные варианты выбора значения координат точек и значений функций

Проанализировав рис. 3.2 можно сделать вывод о том как происходит выбор интервалов для последующих итераций. Для ситуации (рис. 3.2. а) выбираем новый интервал (x_1, x_2), содержащий точку x_4. Для (рис. 3.2 б) выбираем интервал (x_2, x_3), содержащий точку x_4. Для рис. 3.2 в выбираем новый интервал (x_4,x_3), содержащий точку x_2, а для рис. 3.2 г выбираем интервал (x_1, x_4) содержащий точку x_2.

Процесс выбора оптимального, в случае поиска минимума, значения функции методом Фибоначчи может быть реализован в соответствии с алгоритмом, изображенном на рис. 3.4.

Частным случаем метода Фибоначчи является метод “золотого сечения”, особенностью которого является то, что не нужно знать количество вычислений функции “*n*”. При этом принимают отношения интервалов постоянным:

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = \frac{L_j}{L_{j+1}} = \frac{L_{j+1}}{L_{j+2}} = \ldots = \tau, \qquad (3.3)$$

где L_j - длина отрезка, полученного при j-ом делении;
τ - постоянная, характеризующая “золотое сечение”, τ = 1,618033989.

При таком делении исходного отрезка (x_0, x_3) (рис. 3.3) на три участка две последующие точки x_1 и x_2 вычисляются по выражению:

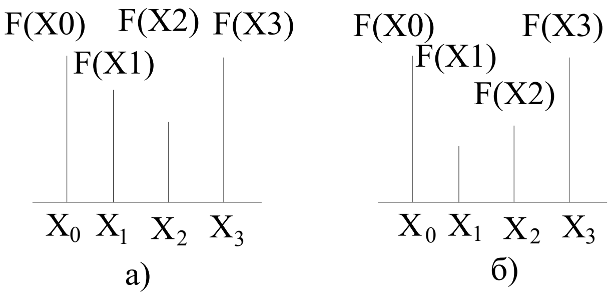


Рис. 3.3. Варианты деления начального отрезка (x_0, x_3) на три части:
а) при следующих вычислениях переходим к отрезку (x_1; x_3);
б) при последующих вычислениях к отрезку (x_0; x_2).

$$x_1 = x_0 + t_1(x_3 - x_0), \tag{3.4}$$

$$x_2 = x_0 + t_2(x_3 - x_0), \tag{3.5}$$

где t_1, t_2 - коэффициенты “золотого сечения”, соответственно равные:

$$t_1 = 2 - \tau \tag{3.6}$$

$$t_2 = 1 - t_1 = 1 - 2 + \tau = -1 + \tau \tag{3.7}$$

Алгоритм поиска минимума функции методом "золотого сечения" представлен на рис. 3.5.

Задание на практическую работу

1. Заданием на практическую работу является выражение, исследование которого студент проводил при выполнении практической работы № 2. Используя точки экстремума, определенные ранее, необходимо выбрать интервал, на котором будет осуществляться поиск точки минимума функции.

2. Опираясь на теоретические сведения и алгоритм, приведенный на рис. 3.4. разрабатывается программа вычисления точки экстремума функции методом Фибоначчи. Программа после проверки ее работы прикладывается к отчету. По результатам вычислений точек минимума заполняется табл. 3.1.

3. Аналогичная работа проделывается для метода “Золотого сечения”, при чем вычисления по этому методу производятся с различной точностью, а результаты расчета распечатываются и сводятся в табл. 3.1.

Содержание отчета

1. Название и цель работы, краткие теоретические сведения по методу "Фибоначчи" и "Золотого сечения".

2. Заданную функцию и алгоритм. Определение точки минимума методом Фибоначчи и методом “Золотого сечения”.

3. Алгоритм поиска точки максимума функции, распечатку программы реализующую процедуру поиска, результаты и заполненную табл. 3.1.

4. Выводы по работе.

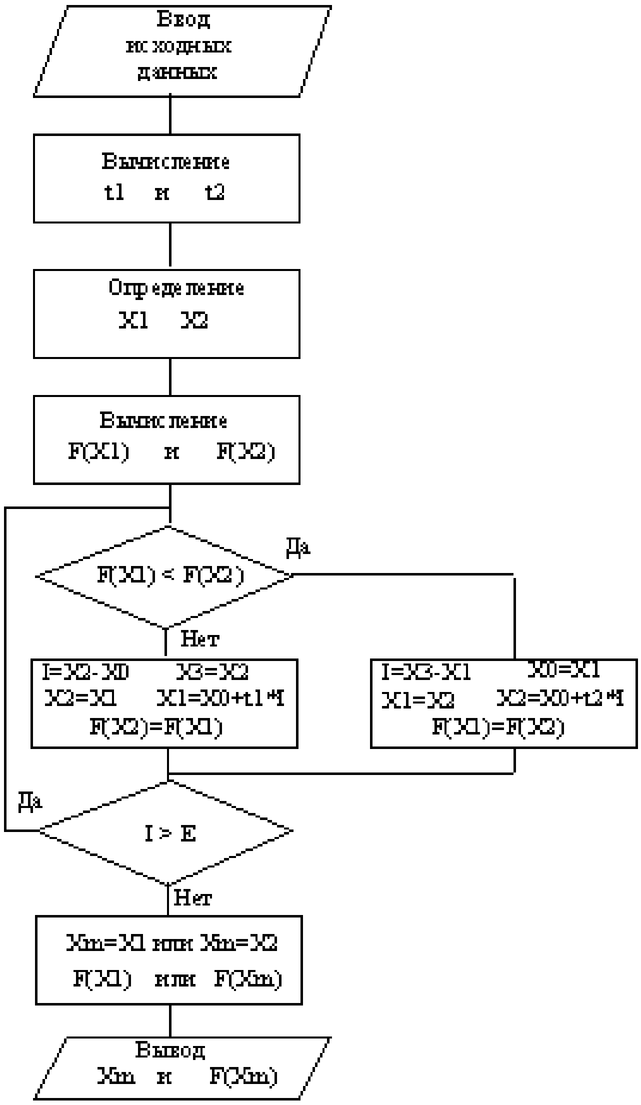


Рис. 3.4. Алгоритм поиска оптимума методом Фибоначчи

Таблица 3.1

Результаты определения экстремума функции

Точка минимума	№ вычисления	Количество приближений N	Минимально возможное расстояние между точками ε	метод Фибоначчи	метод “золотого сечения”	метод Ньютона
1	1	30	0			
	2	100				
	3	30	0,005			
	4	100				
2	5	30	0			
	6	100				
	7	30	0,005			
	8	100				

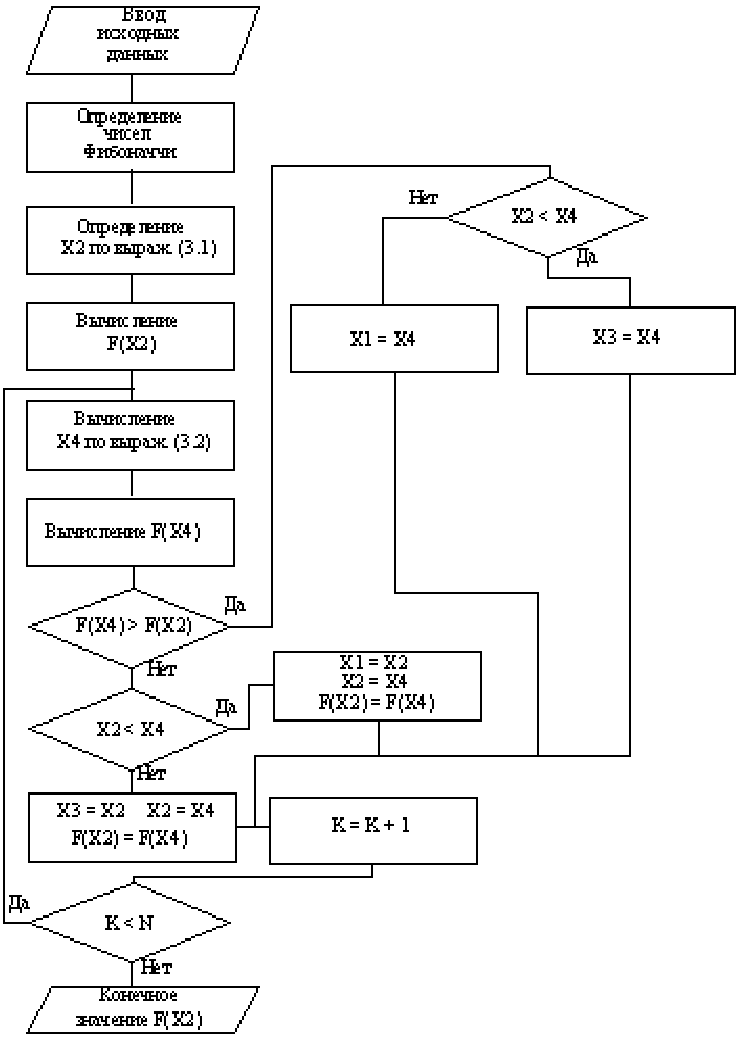


Рис. 3.5. Алгоритм решения задачи по методу “Золотого сечения”

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ № 5
МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Цель работы: Теоретическое изучение и получение практических навыков применения методов линейного программирования в математическом моделировании технологических процессов.

Теоретические сведения

Линейное программирование - область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Линейное программирование возникло в связи с рассмотрением задач нахождения наивыгоднейших вариантов различных производственных решений. В этих задачах имеется большая свобода изменения различных параметров и ряд ограничительных условий. Требуется найти такие значения параметров, которые (с определенной точки зрения) были бы наилучшими. К таким задачам относятся задачи нахождения наиболее рациональных способов использования сырья и материалов, получения максимальной прибыли, повышения эффективности работы транспорта, определения наивыгоднейших режимов выполнения технологических процессов и др.

В самом общем виде задачу линейного программирования можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases}$$

Требуется найти такие неотрицательные числа $x_i \geq 0$, которые минимизируют (или максимизируют) линейную функцию $q = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$, где n - число неизвестных в системе уравнений.

Особенностью данной задачи является то, что число уравнений m меньше числа неизвестных n (m < n).

Чаще всего в задаче линейного программирования все или некоторые из уравнений имеют вид неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}).$$

Однако такие неравенства легко превратить в уравнения, вводя добавочную переменную x_{n+j} с плюсом или минусом в зависимости от знака неравенства.

Решение системы уравнений, в которой число переменных n больше числа уравнений m, можно найти, если n - m каких-либо переменных положить равными нулю. Тогда полученную при этом систему уравнений можно решить обычными методами алгебры. Найденное при этом решение называют базисным, а не равные нулю m переменных - базисными. Остальные n - m переменных называют свободными переменными. Однако среди базисных решений будут такие, которые дадут отрицательные значения некоторых базисных переменных, что противоречит условию задачи, поэтому такие решения являются недопустимыми. При нахождении минимального значения целевой функции необходимо из допустимых базисных решений выбрать такое, которое функцию обращает в минимум.

В настоящее время разработаны рациональные способы перебора базисных решений, которые позволяют рассматривать не все допустимые базисные решения, а их минимальное число. Наиболее распространенными методами такого перебора являются так называемый симплекс-метод и табличный метод.

Существо симплекс-метода состоит в следующем.

1. Находят какое-либо допустимое базисное решение. Его можно найти, приняв какие-либо n - m переменных за свободные, приравняв их к нулю и решив полученную систему уравнений. Если при этом некоторые из базисных переменных окажутся отрицательными, то нужно выбрать другие свободные переменные, т.е. перейти к новому базису.

2. Проверяют, не достигнут ли уже максимум (минимум) целевой функции при найденном допустимом базисном решении.

3. Если оптимальное решение не найдено, то ищут новое допустимое базисное решение, но не любое, а такое, которое увеличивает (уменьшает) значение целевой функции.

При пользовании табличным методом удобно ввести специальную форму записи уравнений и целевой функции в виде матрицы коэффициентов при свободных переменных. Решение задачи линейного программирования табличным методом заключается в нахождении на первом этапе какого-либо допустимого базисного решения, которое в общем случае не является оптимальным, и преобразовании первоначальной матрицы коэффициентов с целью перехода к лучшему базисному решению.

Для более полного представления о задаче линейного программирования дают ее геометрическую интерпретацию. Проводят геометрическое построение прямых или плоскостей (в зависимости от числа уравнений и неизвестных), соответствующих каждому уравнению системы, вершины образовавшейся фигуры будут соответствовать набору допустимых базисных решений.

Задание на практическую работу

Предприятие может выпустить три вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Для выпуска продукции требуются ресурсы трех видов: трудовые, станочное оборудование и полуфабрикаты. Объемы и нормы расхода ресурсов приведены в условных величинах в табл. 4.1, цифровые значения - в табл. 4.2.

Требуется найти, сколько и какого вида продукции необходимо выпускать, чтобы план был оптимальным по критерию прибыли, т.е. таким, при котором получаемая прибыль была бы максимальной.

Таблица 4.1

Наименование ресурса	Вид продукции			Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
	Расход ресурса на единицу продукции			
Трудовые ресурсы, чел-ч	a_1	a_2	a_3	a
Станочное оборудование, станкосмены	b_1	b_2	b_3	b
Полуфабрикаты, кг	c_1	c_2	c_3	c
Прибыль с единицы продукции, руб.	p_1	p_2	p_3	max
Выпуск, шт.	x_1	x_2	x_3	

Таблица 4.2

№ вар	a_1	a_2	a_3	a	$в_1$	$в_2$	$в_3$	в	c_1	c_2	c_3	c	p_1	p_2	p_3
1	8	5	7	280	6	7	4	480	9	6	5	360	8	7	5
2	15	18	9	420	6	4	4	360	4	5	8	540	90	80	90
3	3	3	2	360	2	4	3	240	6	9	8	180	24	25	18
4	6	8	9	360	1	3	2	240	3	2	3	180	18	12	15
5	2	5	6	240	3	7	7	420	4	4	2	300	12	18	16
6	2	4	2	120	6	5	1	280	7	7	4	300	16	12	18
7	15	8	6	420	9	7	9	120	6	9	9	240	12	18	20
8	10	12	6	200	4	8	9	200	9	8	6	420	20	12	18
9	8	5	2	120	2	4	7	150	4	3	8	180	3	6	7
10	8	5	2	120	7	2	4	180	4	3	9	150	12	16	20
11	2	4	3	180	6	9	8	240	1	3	2	180	12	15	25
12	3	1	2	60	4	3	2	90	9	8	3	150	45	75	60
13	2	2	1	120	2	6	5	420	7	3	7	240	18	16	12
14	3	7	7	420	2	2	1	120	2	4	2	120	20	10	15
15	12	9	7	240	6	9	9	120	8	4	8	200	18	20	12
16	14	12	8	420	9	7	9	240	9	8	8	120	16	20	24
17	12	13	8	250	9	8	8	300	8	7	9	350	12	15	18
18	16	8	9	240	4	1	8	120	6	9	8	180	24	18	30
19	15	25	9	400	9	8	9	350	5	8	9	300	30	20	25
20	4	3	1	60	1	5	2	50	6	2	8	100	10	12	18

Содержание отчета

1. Название и цель работы, краткие теоретические сведения по методам решения задач линейного программирования.
2. Модель решения задачи по выбранным вариантам из табл. 4.2.
3. Распечатку результатов решения с помощью EXCEL.
4. Параметрический анализ результатов решения.
5. Выводы по работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверченков В.И. Основы математического моделирования технических систем / В.И. Аверченков, В.П. Федоров, М.Л. Хейфец. – Лань, 2011.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие для вузов / Е.С. Вентцель. – М.: Дрофа, 2004.

3. Волков И.К. Исследование операций: учеб. для вузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

4. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами Excel: практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер, 2003.

5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002.

6. Перова А.В. Основы математического моделирования / А.В. Перова. ГОУ ВПО ВГТУ.- Воронеж, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических работ по дисциплине
"Основы математического моделирования"
для студентов направления подготовки бакалавров
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
(направленности «Конструкторско-технологическое обеспечение кузнечно-штамповочного производства»,
«Металлообрабатывающие станки и комплексы»,
«Технология машиностроения»)
всех форм обучения

В авторской редакции

Компьютерный набор А.В. Перовой

Подписано в печать .10.2019.
Формат 60×84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. . Тираж экз. “С”
Зак. №

ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический университет"
394026 Воронеж, Московский просп., 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ
394026 Воронеж, Московский просп., 14