МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по теории вероятностей и основам математической статистики для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Составители: А.А. Катрахова, В.С. Купцов

Met- rab wer+stat .docx 1,4 М байт 14.09 .2022 уч.-изд. л.
(название файла) (объем файла) (дата) (объем издания)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
.
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики и
физико-математического моделирования

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по теории вероятностей и основам математической статистики для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Воронеж 2022

УДК 517

Составители: *канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов*

Математика: методические указания к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по теории вероятностей и основам математической статистики для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности». II семестр / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. А.А. Катрахова, В.С. Купцов. Воронеж, Изд-во ВГТУ, 2022. 43 с.

Методическое указание содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле «Met- rab wer+stat .docx»

Ил. 8. Библиогр.: 15 назв.

УДК 517

Рецензент Ю.В. Пахомова доц. кафедры экономической безопасности ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности. И главное при этом, чтобы с самого начала и на всем протяжении курса изучение высшей математики проходило студентами целенаправленно во взаимосвязи с другими дисциплинами и ориентацией на конкретное практическое приложение изученного материала. Это возможно только при условии эффективного сочетания обязательных учебных занятий и продуктивной самостоятельной работы студентов.

При организации изучения курса высшей математики ряд тем выделяется студентам на самостоятельное изучение

ЗАНЯТИЕ №1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Литература: [4], с. 17-20; 22-24, 26-28.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется отношение

$$P(A) = m / n$$

числа равновозможных случаев m, благоприятствующих событию A, к общему числу n равновозможных случаев.

Комбинаторные формулы

Допустим, что требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе - n_2 способами, третье - n_3 способами и так до *k*-го действия, которое можно выполнить n_k способами, в этом применяется основной принцип комбинаторики (правило умножения).

Пусть Ω – множество из *n* элементов. Произвольное k-элементное подмножество множества из n элементов называется сочетанием из n элементов по k. Порядок элементов в подмножестве не существенен. Число k-элементных подмножеств множества из n элементов обозначают C_n^k.

Например, если $\Omega=\{a,b,c\}$, тогда $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ - все возможные сочетания из 3 по 1 (следовательно, $C_3^1=3$); $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ - все возможные сочетания из 3 по 2 (таким образом, $C_3^2=3$).

Число сочетаний из *n* элементов по *k* находится с помощью формулы

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n (n-число элементов множества) так, что различным элементам соответствуют различные числа. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т.е. могут быть получены из того же самого множества) называются перестановками этого множества. Например, перестановки множества $\Omega=\{a,b,c\}$ имеют вид

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, c, b\}, \quad \{b, a, c\},$$
$$\{b, c, a\}, \quad \{c, a, b\}, \quad \{c, b, a\}.$$

Число перестановок P_n множества, содержащего *n* элементов, определяется по формуле $P_n=n!$

Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества Ω. Само множество Ω считаем неупорядоченным, поэтому каждое его подмножество может быть упорядочено каким-либо возможным способом. Число всех k-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k. Каждое такое подмножество можно упорядочить *k!* способами. Таким образом получим все упорядоченные *k*-элементные подмножества множества Ω. Число упорядоченных *k*-элементов подмножеств множества, состоящего из n элементов, обозначается через A_n^k,

$$A_n^k = k!C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Упорядоченные *k*-элементные подмножества множества из *n* элементов называются *размещениями из n элементов по k*. Различные размещения из *n* по *k* отличаются либо элементами, либо их порядком.

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ - целые неотрицательные числа, причем $\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$ Представим множество *A* из *n* элементов в виде суммы *m* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов. Обозначим число различных способов такого *разбиения на группы* через $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Оно определяется по формуле

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Приведем еще одну комбинаторную схему, часто встречающуюся при решении задач: n-элементное множество A является суммой множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, число элементов которых равно соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$, В-mэлементное подмножество множества A, содержащее m_1 элементов из $A_k \left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. Число способов, которыми можно выбрать такое множество B из A (множества неупорядоченные), в силу основного принципа комбинаторики равно

$$C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{m_k}.$$

Геометрическое определение вероятности

Допустим, что в результате опыта в некоторой области Ω наудачу появляется точка ω. Требуется определить вероятность *P(A)* того, что $\omega \in A$, где *A* – область, принадлежащая Ω, $A \subset \Omega$. По определению полагают $P(A) = m(A)/m(\Omega)$, *где* $m(A)$ *и* $m(\Omega)$ - меры области *A* и области Ω. Под мерой будем понимать длину, площадь, объем в одно-, двух - и трехмерном случаях соответственно.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вводиться классическое определение вероятностей? Каковы ее свойства?
2. В чем состоят недостатки классического определения?
3. Повторите основные формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Дополнительные вопросы

1. Детерминированность, случайность и неопределенность. Раскрытие гносеологическое содержание этих понятий и разъяснить их отличия на примерах [9].
2. Использование вероятностного подхода при выборе оптимальной стратегии в антагонистических играх (принцип недостаточного обоснования Лапласа). Применение этого подхода к принятию решений с максимальной стратегией [9].

3. Вероятностная природа азартных игр. Показать объективные причины возникновения указанных игровых ситуаций на примерах. Разъяснить попытки субъективного подхода к решению таких игр [11].

4. Вероятностная основа смешанных стратегий в теории игр. Информационная защищенность этих стратегий, вытекающая из принципа их построения [9].

Примеры решения задач

Пример 1. В группе 16 студентов, из которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.

Решения. Общее число возможных элементарных исходов равно C_{16}^{9} (C_{16}^{9}-число сочетаний из 16 по 9). Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию равно $C_6^4 \cdot C_{10}^5$. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_6^4 \cdot C_{10}^5}{C_{16}^9} = \frac{6! \cdot 10! \cdot 9! \cdot 7!}{4! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 16!} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 2} = \frac{189}{572} \approx 0{,}33$$

Пример 2. В урне имеется k шаров, помеченных номерами $1,2,\ldots,k$. Из урны вынимают l раз $(l \le k)$ по одному шару, номер шара записывается и шар кладется обратно в урну. Найти вероятность того, что все записанные номера будут различны.

Решение. Очевидно, что число всех возможных исходов будет равно $n = k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^l$, а число всех благоприятных исходов m будет равно числу размещений из k элементов по l, т.е. $m = A_k^l = \dfrac{k!}{(k-l)!}$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{k!}{(k-l)!\,k^l}.$$

Пример 3. Студент и студентка договорились встретиться в определенном месте между двенадцатью часами и часом дня.

Необходимо найти вероятность встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа происходит наудачу, причем известно, что студент ждет студентку ровно 20 минут, а студентка студента — 5 минут.

<u>Решение.</u> Для решения задачи воспользуемся геометрической схемой вероятности. Обозначим момент прихода студента через x, а студентки через y. Тогда любой элементарный исход ω в данной задаче можно отождествить с некоторой точкой $(x; y)$ на плоскости xOy. Выберем за начало отсчета 12 часов, а за единицу измерения 1 минуту и построим на плоскости xOy пространство элементарных исходов Ω. Очевидно, что это будет квадрат со стороной 60 (рис. 1). Событие A (студент и студентка встретятся) произойдет тогда, когда разность $y - x$ не превысит $t_1 = 20$, а разность $x - y$ не превысит $t_2 = 5$, т.е. условие встречи определяет систему неравенств.

$$\begin{cases} y - x \le 20; \\ x - y \le 5. \end{cases}$$

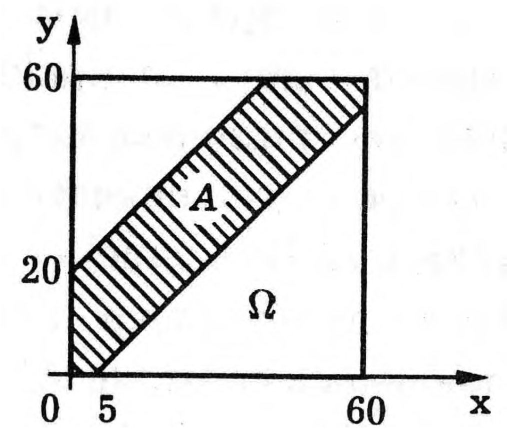

Рис. 1

Область A элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, на рис. 1 заштрихована. Ее площадь S_A равна площади квадрата без двух угловых треугольников, т.е.

$$S_A = 60^2 - \frac{(60 - t_1)^2}{2} - \frac{(60 - t_2)^2}{2} = 1287{,}5$$

Тогда, согласно определению 2.5, находим

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1287{,}5}{3600} \approx 0{,}36.$$

Пример 4. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Сигналы искажаются, если разность между моментами их поступления меньше τ. Определим вероятность того, что сигналы будут искажены.

Решение. Изобразим случайные моменты t_1 и t_2 поступления сигналов в приемник в виде точки на плоскости с координатами *(x; y)*. Областью возможных значений является квадрат площадью $\mu(\Omega) = T^2$ (рис. 2). Сигналы будут искажены, если $|t_1 - t_2| \le \tau$. Эта область лежит между прямыми $t_1 - t_2 = \tau$ и $t_1 - t_2 = -\tau$.

Площадь ее равна $\mu(A) = T^2 - (T - \tau)^2$.

Следовательно,

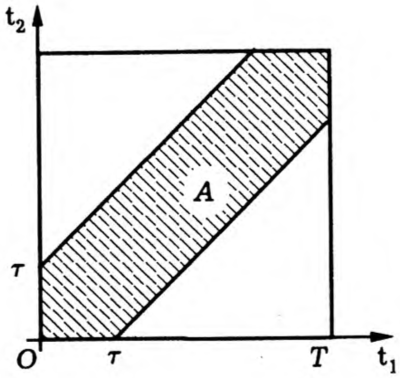

Рис. 2

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \frac{(T - \tau)^2}{T^2}$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[5], №№ 8, 11, 1; 17, 33, 45.

Форма отчетности: устный опрос, проверка задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ №2

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература: [4], с. 31-34, 37-43, 45, 48-49.

Условной вероятностью события А при условии, что произошло событие В, называется число Р(А/В), определяемое по формуле

$$P(A/B) = P(AB)/P(B), \quad P(B) \neq 0.$$

Из данного определения вытекает *формула умножения вероятностей*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

для двух событий, которая допускает следующее обобщение для n событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}).$$

События *А и В называются независимыми, если выполняется соотношение*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема. *Для любых событий А и В имеет место формула*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

для n событий – формула

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение суммы и произведения событий.

2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.

3. Что называется условной вероятностью события?

4. Какие события называются независимыми? Зависимы или независимы:

а) совместные события;

б) события, образующие полную группу;

в) равновозможные события.

5. Какое из требований сильнее: независимость событий в ее совокупности или попарная независимость?

6. Сформулируйте терему умножения вероятностей.

7. Какие события называются противоположными?

8. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для несовместных событий.

9. Докажите теорему сложения вероятностей событий, образующих полную группу.

10. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

11. Докажите теорему о вероятности появления хотя бы одного события.

12. Докажите, что:

а) если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

б) если события $A_{1,} A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ независимы в совокупности.

Примеры решения задач

Пример 1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p_1, а для второго - p_2. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение. Искомая вероятность $P = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1$, где q_1 и q_2 - вероятности непопадания в мишень при одном выстреле, соответственно первым и вторым стрелками.

Пример 2. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. Воспользуемся тем, что события $A = \{$среди извлеченных деталей есть ххот бы одна стандартная$\}$ и $B = \{$среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной$\}$ - противоположные. Тогда $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{C_m^0 \cdot C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [5], №№64, 66, 72, 86.

2) Вероятности появления каждого из трех независимых событий соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Форма отчетности: устный опрос, применение студентами знаний соответствующего раздела в типовом расчете.

ЗАНЯТИЕ №3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Литература: [4], с. 50-53.

Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *называется полной группой* попарно несовместных событий, если

$$H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega \text{ и } H_iH_j=\emptyset, \; I,j=1, 2, \ldots, n, \; i=j,$$

где Ω – достоверное событие; $\emptyset$ – невозможное событие.

Теорема 1**.** *Если* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – *полная группа попарно* *несовместных событий, причем* $P(H_1) \neq 0$, i=1, 2, …, n, *то для любого события* A *имеет место равенство (формула полной вероятности)*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для любого события* A, *такого , что* P(A)≠0, *справедливы формулы Байеса*

$$P(H_k \,/\, A) = \frac{P(H_k)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?
2. Какие события называются гипотезами?
3. Запишите формулу полной вероятности.
4. Докажите формулу Байеса.
5. В чем состоит значение формулы Байеса?

Дополнительные вопросы

1. Вероятностные модели систем распознавания образов. Получение моделей с помощью безусловной плотности распределения признаков по классам [11], [12].
2. Байесовский метод распознавания образов. Использование в модели распознавания условных вероятностей [11], [12].

.

Примеры решения задач

Пример 1. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 6 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Решение. Пусть вероятность $P(A)$- искомая вероятность. Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 - выбор из 1-й урны и из 2-й по белому шару, H_2 - выбор из 1-й урны и из 2-й урны по черному шару, H_3 - выбор из 1-й урны белого шара и из 2-й урны черного шара или выбор из 1-й урны черного шара и из 2-й урны белого шара. Вычисляем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{8}{12}\times\frac{16}{20}=\frac{1}{5},\ P(H_2)=\frac{4}{12}\times\frac{14}{20}=\frac{7}{30},\ P(H_3)=\frac{8}{12}\times\frac{14}{20}+\frac{4}{12}\times\frac{6}{20}=\frac{17}{30}.$$

Соответствующие условные вероятности будут равны: $P(A/H_1)=1,\ P(A/H_2)=0,\ P(A/H_3)=0{,}5.$ Тогда искомая вероятность

$$P=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=\frac{1}{5}\times 1+\frac{7}{30}\times 0+\frac{7}{30}\times 0{,}5=\frac{29}{60}.$$

Пример 2. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3- подготовлены отлично, 4- хорошо, 2 - удовлетворительно, 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеются 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 29 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

Решение. Событие $A=\{$вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса$\}$. Выдвигаем следующие гипотезы:

$H_1=\{$студент подготовлен отлично$\}$;

$H_2=\{$студент подготовлен хорошо$\}$;

$H_3=\{$студент подготовлен удовлетворительно$\}$;

$H_4=\{$студент подготовлен плохо$\}$.

Вероятности гипотез до опыта равны:

$$P(H_1)=0{,}3,\quad P(H_2)=0{,}4,\quad P(H_3)=0{,}2,\quad P(H_4)=0{,}1.$$

Условные вероятности событий A равны:

$$P(A/H_1)=1,\quad P(A/H_2)=\frac{16}{20}\times\frac{15}{19}\times\frac{14}{18}=0{,}491,$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}\times\frac{9}{19}\times\frac{8}{18}=0{,}105,\quad P(A/H_4)=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{3}{18}=0{,}009$$

Вычислим полную вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+$$
$$+P(H_4)P(A/H_4)=0{,}3\times1+0{,}4\times0{,}491+0{,}2\times0{,}105+0{,}1\times0{,}009=0518$$

По формуле Байеса переоценим вероятности гипотез после появления события A:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}3\times1}{0{,}518}=0{,}58,$$
$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{0{,}1\times0{,}009}{0{,}518}=0{,}002,$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность втащить неизвестный билет для него будет наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

Форма отчетности: устный опрос, рефераты, расчетно-графичесие задания и курсовые работы.

ЗАНЯТИЕ №4

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПУАССОНА, БИНОМИНАЛЬНОГО, РАВНОМЕРНОГО, НОРМАЛЬНОГО И ПОКАЗАТЕЛЬНОГО

Литература: [4], с. 65-71, 122-128, 149-154.

Случайной величиной ξ *называется функция* $\xi = \xi(\omega)$, *определенная на пространстве элементарных событий* Ω.
Это определение является точным в случае дискретного пространства элементарных событий Ω. В общем случае на

функцию $\xi(\omega)$ накладывается требование измеримости. *Функцией распределения случайной величины* ξ *называется функция* $F(x) = P\{\xi < x\}, -\infty < x < \infty$.Иными словами, значение функции распределения $F(x)$ – случайной величины ξ – есть вероятность того, что ξ принимает значение меньшее, чем x.*Случайная величина* ξ *называется дискретной, если существует конечное или счетное множество чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ *(без предельных точек), таких, что* $P(\xi = x_k) = p_k > 0$, *k=1, 2, …;* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Совокупность значений x_k *и соответствующих вероятностей* p_k называется *распределением* дискретной случайной величины.

Примеры дискретных распределений

1. *Биномиальное распределение*
   $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, 0<p<1, k=0, 1, 2, …, n.
2. *Распределение Пуассона*
   $P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, *a>0, k=0, 1, 2, …*
3. *Геометрическое распределение*
   $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, *0<p<1, k=1, 2, …*
4. *Гипергеометрическое распределение*
   $P(\xi = k) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n$, *k=0, 1, 2, …, min(M, n).*

Случайная величина ξ *называется непрерывной случайной, если ее функция распределения представима в виде*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $p(x)$ *– некоторая неотрицательная функция.* Подынтегральная функция $p(x)$ в формуле называется *плотностью распределения* случайной величины ξ, $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Примеры непрерывных распределений

1. *Равномерное распределение*

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}, -\infty < a < b < +\infty.$$

2. *Нормальное распределение* (с параметрами (a,σ))

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$, $-\infty < a < +\infty, \sigma > 0$.

3. *Показательное распределение*

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, x \le 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

4. *Распределение Коши*

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Можно сделать вывод, что в любой точке непрерывности $p(x)$ имеет место равенство $p(x) = F'(x)$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$\boldsymbol{M\xi} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x_k p_k}.$$

Если случайная величина принимает счетное множество значений, то требуется абсолютная сходимость ряда . Если ряд не сходится абсолютно, то говорят, что случайная величина не имеет математического ожидания.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ число называется

$$\boldsymbol{M\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{xp(x)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x},$$

если интеграл абсолютно сходится.

Дисперсией $\mathbf{D}\boldsymbol{\xi}$ *случайной величины ξ называют математическое ожидание случайной величины* $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{M\xi})^2$:

$Dx = M(x - Mx)^2$. Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле $Dx = \sum_k (x_k - Mx)^2 \cdot p_k$

для непрерывной – по формуле

$$\mathbf{D\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{x} - \mathbf{M\xi})^2 \mathbf{p}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}.$$

Вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение в заданном числовом промежутке, вычисляется по одной из формул:
$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$, $P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x$.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите законы распределения дискретных случайных величин: биноминальный, Пуассона, геометрический.
2. При каких условиях биноминальное распределение приближается к распределению Пуассона?
3. Приведите числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.
4. Запишите законы равномерного, нормального и показательного распределений. Приведите примеры.
5. Запишите числовые характеристики непрерывных случайных величин.
6. Дайте определение простейшего потока событий.

Дополнительные вопросы.

1. Что является потоком событий в системах массового обслуживания; в теории надежности? Разъяснить физический смысл простейшего потока в этих приложения [10], [11].
2. Поток Эрланга как поток с ограниченным последействием. Физический смысл этого потока в системах массового обслуживания [10], [11].

3. Отличительные свойства простейшего потока и потока Эрланга, позволяющие выявить эти потоки при практическом анализе систем массового обслуживания. Привести примеры такого анализа [11].

4. Привести примеры специальной регуляризации простейших потоком путем их "просеивания". Объяснить практические цели такой обработки потоков [10], [11].

5. Взаимосвязь характеристик потока заявок и потока их обслуживания с показателями эффективности системы массового обслуживания [11].

6. Взаимосвязь характеристик потока отказов с показателями надежности отдельно функционирующей системы, последовательно и параллельно соединенных систем [10], [11].

7. Случайные процессы в системах управления. Характеристики этих процессов: функция и плотность распределения, математическое ожидание, дисперсия [6], [7].

8. Корреляционная функция случайного процесса. Ее физический смысл. Примеры корреляционных функций различных случайных процессов [6], [7].

9. Спектральная плотность случайного процесса и ее связь с корреляционной функцией. Физический смысл спектральной плотности [6], [7].

Примеры решения задач

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.4	0.3	0.2	0.1

Решение. Математическое ожидание определяется так:

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -1\times0{,}4 + 0\times0{,}3 + 1\times0{,}2 + 2\times0{,}1 = 0$.

Дисперсия вычисляется по формуле:

$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 + x_4^2p_4 - M^2(X) =$

$= (-1)^2\times0{,}4 + 0^2\times0{,}3 + 1^2\times0{,}2 + 2^2\times0{,}1 - 0^2 = 1.$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1.$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [5], №№36, 215, 356, 357, 31, 316,366.

2) Доказать, что математическое ожидание биноминального распределения с параметрами n и p равно np , а дисперсия равна npq.

3) Вычислить математическое ожидание распределений Пуассона и показательного и сравнить их.

4) Найти дисперсию с среднее квадратическое отклонение случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a,b).

5) Показать вероятностный смысл параметров a и σ для общего нормального распределения. Чему равны a и σ для нормированного нормального распределения?

6) Доказать, что непрерывная случайная величина T - время между появлениями двух событий простейшего потока с заданной интенсивностью λ – имеет показательное распределение и найти $M(T), D(T), \sigma(T)$, если задана интенсивность потока λ=5.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем, применение студентами знаний соответствующего раздела в типовом расчете.

ЗАНЯТИЕ №5

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИТЕРВАЛ

Литература: [4], с. 197-216.

Кроме точечных оценок используются так называемые доверительные интервалы: указывается не одна точка $a^{*}(X_1, X_2, \mathrm{K}\ , X_n)$, а интервал $(\underline{a}, \overline{a})$, к которому с заданной вероятностью принадлежит истинное значение параметра α,

$$P(\underline{a} < a < \overline{a}) = \hat{A}.$$

Число $\hat{A}, 0 < \hat{A} < 1$ называется *доверительной вероятностью* и характеризует надежность полученной оценки: чем ближе $\hat{A}$ к единице, тем надежнее оценка (обычно выбирают $\hat{A} = 0{,}9;\ 0{,}95$ *или* $0{,}99)$. Величины α и $\overline{a}$ называются *доверительными границами*. Они являются функциями выборочных значений $a = a(X_1, X_2, \mathrm{K}\ , X_n), \overline{a} = \overline{a}(X_1, X_2, \mathrm{K}\ , X_n)$ и, следовательно, являются случайными величинами.

Интервал $(\underline{a}, \overline{a})$ *со случайными границами* $\underline{a} = \underline{a}(X_1, X_2, \mathrm{K}\ , X_n), \overline{a} = \overline{a}(X_1, X_2, \mathrm{K}\ , X_n)$, *которые при любом допустимом значении α удовлетворяют соотношению (16), называется доверительным интервалом для неизвестного параметра α..*

Примеры доверительных интервалов

1. Доверительный интервал для математического ожидания *a* нормальной случайной величины при известной дисперсии s^{2} имеет вид

$$\overline{X} - u_{\hat{A}} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + u_{\hat{A}} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Здесь $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, величина $u_{\text{В}}$ определяется по заданной доверительной вероятности В с помощью соответствующих таблиц, приведенных в приложениях . Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\overline{X} - t_{\text{В}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\text{В}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

где оценка σ^* вычисляется по формуле

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2},$$

а величина $t_{\text{В}}$ определяется по заданной доверительной вероятности В и объему выборки n с помощью соответствующих таблиц, приведенных в приложениях .

3. Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

где n – объем выборки; σ^* - оценка величины σ, определяемая формулой (17); $\chi^2_{(1)}$ *и* $\chi^2_{(2)}$ - корни уравнений

$$\int_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-\text{В}}{2}, \quad \int_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-\text{В}}{2}, \qquad (*)$$

в которых подынтегральная функция $p_{n-1}(x)$ представляет собой плотность распределения хи-квадрат с *n-1* степенями свободы. Уравнения (*) при заданной доверительной вероятности В решаются с помощью соответствующих таблиц, приведенных в приложениях . При определении $c^2_{(1)}$ входами служат $n = n - 1$ *и* $a = \dfrac{1+\hat{A}}{2}$, при определении

$$c^2_{(2)} - n = n - 1; \quad a = \frac{1-\hat{A}}{2}.$$

4. Пусть *n* – число независимых испытаний, *m* – число наступлений события *A*, *p* – вероятность наступления события *A* в каждом отдельном испытании. Рассмотрим случай, когда *n* достаточно велико, а значение *p* не слишком близко к нулю или к единице так, что можно воспользоваться асимптотикой Муавра-Лапласа . При этом доверительный интервал для *p* имеет вид

$$\frac{m}{n+u^2_{\hat{A}}} < p < \frac{m+u^2_{\hat{A}}}{n+u^2_{\hat{A}}},$$

$u_{\hat{A}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\hat{A}$ с помощью соответствующих таблиц, приведенных в приложениях.

Рассмотрим отдельно случай *m=0*. При этом нижняя доверительная граница равна нулю, верхняя $1-\sqrt[n]{1-\hat{A}}$. Аналогично, при *m=n* нижняя и верхняя доверительные границы равны соответственно $\sqrt[n]{1-\hat{A}}$ и единице.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие требования предъявляются к статистической оценке?

2. Что является оценкой для неизвестного математического ожидания, неизвестной дисперсии?

3. Объясните понятия: точность, доверительная вероятность, интервал.

4. Чему равен доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормального распределе-

ния: для случая известного среднеквадратического ожидания σ и для случая неизвестного σ.

5. Как оценивается точность измерений?

Примеры решения задач

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормального распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ=5, выборочная средняя $x_B = 15$ и объем выборки $n = 100$.

Решение. Доверительный интервал равен: $x_B - ts/\sqrt{n} < a < x_B + ts/\sqrt{n}$. Здесь все величины известны, кроме t. Определим t из отношения $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ (см. таблицу приложения), t=1,96. Тогда получаем $15 - 1{,}96 \times 5/10 < a < 15 + 1{,}96 \times 5/10$. Искомый доверительный интервал: $14{,}02 < a < 15{,}98$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [5], №№ 501-504, 508-511.

2) На двухчашечных стрелочных весах можно определить вес предметов А и В двумя способами:- поочередно взвесить каждый предмет и получить показания весов m_A и m_B; определить показания весов, положив оба предмета на одну чашку: m_{A+B}, и на разные чашки: m_{A-B}, а затем рассчитать вес предметов А и В как полусумму и полуразность этих показаний.

Определить, какой способ определения веса дает меньшую погрешность результата. Ответ получить в общем виде.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ №6

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Литература: [4], с 155-167.

Распределение двух случайных величин ξ и η, или двумерной случайной величины (ξ, η), не исчерпывается распределением каждой из них , так как при этом не учитывается зависимость, которая может существовать между ними.

Функции распределения $F(x, y)$*двумерной случайной ны*$(\xi,\ \eta)$ определяется как вероятность совместного выполнения неравенств $\xi < x$ *и* η<y: $F(x, y) = p\{\xi < x, \eta < y\}$.

Если $F(x, y)$ представима в виде $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{\infty}^{y} p(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, где $p(x, y)$ – некоторая неотрицательная функция, то двумерную случайную величину $(\xi,\ \eta)$ называет *непрерывной*, функцию $p(x, y)$ – *плотностью распределения* двумерной случайной величины $(\xi,\ \eta)$.

Плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ выражается через совместную плотность *p*(x, y) следующим образом: $p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, \mathrm{d}y$.

Аналогично для плотности распределения случайной величины η имеем $p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, \mathrm{d}x$. В отличие от совместной плотности распределения *p*(x, y) одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ называют *маргинальными.*

Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если их совместная функция распределения $F(x, y)$ при любых значениях аргументов x, y равна произведению маргинальных функций распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ и $F_\eta(y)$ случайной величины η:

$$F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y).$$

Пусть $(\xi,\ \eta)$ − непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $p(x, y)$. Тогда для независимости ξ и η необходимо и достаточно, чтобы совместная плотность $p(x, y)$ распадалась в произведение маргинальных плотностей $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$:

$$p(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y).$$

Коэффициент корреляции

Величина $[\boldsymbol{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}]$ называется *ковариацией* случайных величин ξ и η, cov (ξ, η). Если (ξ, η) −непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $p(x, y)$, то

$$\text{cov}\,(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Величина **r=cov**$\boldsymbol{(\xi, \eta)}$/$\sqrt{\boldsymbol{D\xi D\eta}}$ называется *коэффициент корреляции* случайных величин ξ и η.

Свойства коэффициента корреляции

1^0. Модуль коэффициента корреляции не превосходит единицы, $|r| \le 1$.

2^0. *Если* ξ и η *независимые случайные величины, то r=0.* Обратное неверно: *из условия r=0 (*некоррелированность случайных величин ξ и η*) не следует независимость* ξ и η.

3^0. *Если* ξ и η *связаны линейной зависимостью, то* $|r| = 1$.

Свойства математического ожидания и дисперсии

1^0. *Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной, т.е.* $\boldsymbol{M}c = c$, $c = const$.

2^0. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т. е.*

$\boldsymbol{M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta}$ (предполагается, что M_ξ и M_η существуют).

3^0. *Математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т. е.*

$\boldsymbol{M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta}$ (предполагается, что M_ξ и M_η существуют).

4^0. *Дисперсия постоянной равна нулю, т. е.* Dc = 0, c = const.

5^0. *Дисперсия суммы случайных величин равно сумме их дисперсий, т. е.* $\boldsymbol{D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta}$ (предполагается, что D_ξ и D_η существуют).

Контрольные вопросы и задания

1. Понятие о системе случайных величин.
2. Дискретная двумерная случайная величина.
3. Непрерывная двумерная случайная величина.
4. Как связаны плотность распределения и интегральная функция двумерной случайной величины?
5. Найти распределение компонент.
6. Как определить вероятность попадания случайной точки в различные области на плоскости?
7. Каковы условия независимости компонент?
8. Назовите основные числовые характеристики системы двух случайных величин.
9. Чем отличаются коррелированность и независимость величин?
10. Рассмотрите правило составления таблицы распределения двумерной случайной величины. Приведите ее свойства.
11. Изучите свойства дифференциальной и интегральной функции распределения.
12. Определите закон распределения компоненты по известному закону распределения системы.

Пример решения задачи

Пример.

Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y):

$Y \setminus X$	1	2	4
1	0.4	0.2	0.1
3	0.1	0.1	0.1

Найти:

а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения X при условии, что Y=3;в) условный закон распределения Y при условии, что X=1;г) числовые характеристики двумерной случайной величины.

Решение. а) Сложим вероятности по столбцам и получим безусловный закон распределения X :

X	1	2	4
P	0.5	0.3	0.2

Сложим вероятности по строкам. Безусловный закон распределения Y имеет вид:

Y	1	3
P	0.7	0.3

б) Вычислим:

$$P(x_1/y_2) = P(x_1,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$
$$P(x_2/y_2) = P(x_2,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$
$$P(x_3/y_2) = P(x_3,y_2)/P(y_2)=0.1/0.3=1/3,$$

Запишем искомый закон распределения X:

X	1	2	4
P	1/3	1/3	1/3

в) Аналогично запишем закон распределения Y:

Y	1	3
P	4/5	1/5

г) Числовые характеристики вычислим по формулам:

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1\times 1/3 + 2\times 1/3 + 4\times 1/3 = 7/3$, здесь p_1, p_2, p_3 необходимо брать из таблицы безусловного закона распределения X .

Аналогично вычислим $M(Y) = 1 \cdot 4/5 + 3 \cdot 1/5 = 7/5$.

Дисперсия - $D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - M^2(X) =$

$= 1^2 \times 1/3 + 2^2 \times 1/3 + 4^2 \times 1/3 - (7/3)^2 =$

$= 14/9 \times D(Y) = 1 \times 4/5 + 3 \times 1/5 - (7/5)^2 = 16/25$.

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{14/9}$, $\sigma(Y) = 4/5$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1) [3], №№400-403,405,406

2)Решите задачу о двух игральных картах или двух колодах карт.

Форма отчетности: устный опрос, проверка решения задач преподавателем.

ЗАНЯТИЕ №7

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Литература: [4], с 196-228.

Выборкой называется n-мерная случайная величина $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ с независимыми одинаково распределенными компонентами $X_i, i = 1, 2, \dots, n$. Число n называется объектом выборки. Любая функция $h = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборочных значений называется статистикой.

Пусть $\alpha -$ независимый параметр распределения случайной величины ξ. Статистика

$$a^* = a^*(X_1, X_2, \dots, X_n),,$$

используемая в приближенном равенстве $\alpha \approx \alpha^*$, называется *оценкой (точечной оценкой) неизвестного параметра по выборке.*

Классификация оценок.

Желательно, чтобы оценка не давала систематического завышения или занижения результатов, т. е. чтобы

$$M\alpha^*(X_1, X_2, \dots, X_n) = \alpha.$$

Оценка α^*, обладающая указанным свойством, называется несмещенной. В противном случае она называется смещенной.

Если при $n \to \infty$ оценка α^* сходится по вероятности к истинному значению параметра α:

$$\alpha^*(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{по вер}} \alpha,$$

то оценка α^* называется состоятельной.

Состоятельность означает, что с ростом объема выборки качество оценки улучшается. *Если оценки α_1^* и α_2^* удовлетворяют неравенству $M(\alpha_1^* - \alpha)^2 < M(\alpha_2^* - \alpha)^2$, то оценка α_1^* называется более эффективная, чем любая другая.*

Методы получения оценок

Метод моментов. Пусть $\xi -$ непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x, \alpha)$, зависящей от одномерного неизвестного параметра α. Тогда математическое ожидание $M\xi$ является функцией α:

$$M\xi = \int_{-0}^{+\infty} xp(x_1, \alpha)\,\mathrm{d}x = \mu_1(\alpha).$$

Выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ принимает значение, близкое к $M\xi$. Это позволяет записать уравнение для определения неизвестного параметра α:

$$\mu_1(\alpha) = \bar{X}.$$

Метод моментов аналогичным образом применяется к дискретным случайным величинам.

Метод максимального правдоподобия. Пусть ξ — дискретная случайная с распределением

$$P(\xi = a_i) = p_i(\alpha), i = 1, 2, \dots, k,$$

где a_i — возможные значения случайной величины ξ; $p_i(\alpha)$ — соответствующие вероятности, зависящие от неизвестного параметра α, причем $\sum_{i=1}^{k} p_i(\alpha) = 1$ при любом допустимом значении α. Множество значений a_i случайной величины ξ может быть не только конечным, но и счетным. Если среди наблюдаемых выборочных значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ число a_i встречается n_i раз $(i = 1, 2, \dots, k)$, то для вероятности $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$ получения данной выборки имеем выражение

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = p_1^{n_1}(\alpha) p_2^{n_2}(\alpha) \dots p_k^{n_k}(\alpha). \tag{15}$$

Функция параметра α называется *функцией правдоподобия,* а величина a^*, при которой функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n; a)$ достигает максимума, - *оценкой максимального правдоподобия* неизвестного параметра α. Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения *p(x, α),* параметра α, метод максимального правдоподобия остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = p(x_1, a) p(x_2, a) \dots p(x_n, a)$ выражается не через вероятность получения данной выборки, а через плотность распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_a)$ зависящей от параметра α. При этом α служит аргументом, значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, считаются фиксированными.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятия выборки распределения статистических величин.
2. Что такое эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма?

3. Какие вы знаете точечные оценки параметров распределения и как их вычислить?

4. В чем заключается метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения?

5. В чем заключается метод наибольшего правдоподобия точечной оценки неизвестных параметров?

6. Какие вы знаете интервальные оценки статистических величин?

7. Как вычислить доверительные интервалы для оценки математического ожидания, среднего квадратичного отклонения и неизвестной вероятности.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[5], №№450,459,473,479,490,502,507,515,517,519.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ №8

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБОРКИ

Литература: [4], с 231-249.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается метод произведений вычисления выборочной средней и дисперсии?

2. Как применить метод произведения в случае равноотстоящих и неравноотстоящих вариант?

3. Расскажите о методе сумм вычисления выборочной и средней дисперсии.

4. Как определить асимметрию и эксцесс эмпирического распределения.

5. Как построить нормальную кривую по опытным данным?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 35$:

Варианта	x_i	-1	0	2
Частота	n_i	10	20	5

Решение. Выборочная средняя

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)/n = ((-1)\times 10 + 0\times 20 + 2\times 5)/35 = 0.$$

Выборочная дисперсия равна:

$$D_B = ((x_1 - x_B)^2 \times n_1 + (x_2 - x_B)^2 \times n_2 + (x_3 - x_B)^2 \times n_3)/n =$$
$$= ((-1-0)^2 \times 10 + (0-0)^2 \times 20 + (2-0)^2 \times 5)/35 = 6/7.$$

Пример 2. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X и Y по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X/Y	20	25	30	35	40
16	4	6	0	0	0
26	0	8	10	0	0
36	0	0	32	3	9
46	0	0	4	12	6
56	0	0	0	1	5

Решение. Выборочное уравнение прямой линии регрессии X и Y имеет вид: $y_x - y_в = r_в \times s_y \times (x - x_в)/s_x$, где y_x– условная средняя, и – выборочные средние признаков X и Y, s_x и s_y – выборочные средние квадратические отклонения, выборочный коэффициент корреляции

$r_в = \left(\sum\sum n_{xy}(xy - x_в y_в)\right)/\left(n s_x s_y\right)$, x и y – варианты, n_{xy} - соответствующие им частоты, $n = 50$ - объем выборки.

Вычислим:

$x_в = \sum\sum x n_{xy}/n = 31{,}7$; $\quad y_в = \sum\sum y n_{xy}/n = 35{,}6$,

$D_B(X) = \sum\sum (x - x_в)^2 n_{xy}/n$,

$D_B(Y) = \sum\sum (y - y_в)^2 n_{xy}/n$,

$s_x = \sqrt{D_B(X)} = 5{,}35$, $\quad s_y = \sqrt{D_B(Y)} = 10{,}2$,

$r_B = 0{,}76$.

Здесь двойные суммы необходимо брать по всем индексам i,k вариант x_i, y_k (В этой задаче $i,k = 1,2,3,4,5$)

Искомое уравнение имеет вид:

$y - 35{,}6 = 0{,}76 \cdot 10{,}2 \cdot (x - 31{,}7)/5{,}35$ или $y = 1{,}45x - 10{,}36$

.

Замечание. Для упрощения счета можно ввести условные варианты $u_i = (x_i - c_1)/h_1$ и $v_k = (y_k - c_2)/h_2$, где c_1 и c_2 - ложные нули вариант X и Y (новое начало отсчета), h_1 и h_2 - значение шага вариант X и Y.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

[5], №№524,526,530,532,534.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ №9

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Литература: [4], с 282-341.

Случайная величина X, которая служит для статистической проверки гипотезы, называется критерием. Иногда термином *критерий* обозначают не только случайную величину X, но и все правило проверки в целом. При этом X называют *статистикой критерия.* Проверка гипотезы состоит в том, что если наблюдаемое значение критерия принадлежит некоторому определенному множеству S, т.е. наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается.

Множество S, такое, что при наступлении события $\{X \in S\}$ основная гипотеза H_0 отвергается, называется критическим множеством (для гипотезы H_0).

Событие $\{X \in S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, когда она является истинной, называется ошибкой первого рода. Событие $\{X \in \bar{S}\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 не отвергается, когда верна одна из альтернативных гипотез H_λ, называется ошибкой второго рода.

Вероятности P_I *и* P_{II} ошибок первого и второго рода вычисляются в предположениях о справедливости различных гипотез – основной H_0 и альтернативной H_λ соответственно:

$$P_I = P_{H_0}(X \in S), \quad P_{II} = P_{H_\lambda}(X \in \bar{S}).$$

Вероятность ошибки второго рода, а также вероятность

$$P_{H_\lambda}(X \in S) = 1 - P_{H_\lambda}(X \in \bar{S}) \qquad (**)$$

противоположного события связаны с конкретной альтернативной гипотезой H_λ, т.е. могут зависеть от некоторого параметра λ. Функция (**) параметра λ, равная вероятности отвергнуть гипотезу H_0, если верна гипотеза H_λ, называется функцией мощности критерия.

Правило статистической проверки гипотезы

1. Задаются малым числом α>0, называемом уровнем значимости критерия; обычно α=0,05; 0,01 или 0,001. Чем более опасными признаются ошибки первого рода, тем меньшее значение α должно быть выбрано.

2. Определяют критическое множество S из условия выполнения неравенства

$$P_I = P_{H_0}(X \in S) \le \alpha.$$

3. Условием критическое множество определяется неоднозначно. Выбирают ту из возможностей, которая обеспечивает минимум вероятности ошибки второго рода, или, что то же самое, максимум мощности критерия.

4. Производят опыт и получают наблюдаемое значение критерия. Если при этом наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается. В противном случае считается, что H_0 не противоречит опытным данным. Результат проверки гипотезы выражается словами: гипотеза H_0 отвергается (не отвергается) на уровне значимости α.

Критерий согласия χ^2.

Критерии, которые служат для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины, называются *критериями согласия*. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что функция распределения случайной величины ξ есть вполне определенная функция *F(x)*.Разобьем числовую ось на r промежутков (разрядов) ($-\infty = a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{r-1}, a_r = +\infty)$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$. При справедливой гипотезе H_0 *i*-му разряду $[a_{i-1}, a_i$ соответствует вероятность $p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$ Из *n* выборочных значений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайной величины ξ в *i*-й разряд $[a_{i-1}, a_i)$ попадает случайное число m_i значений

$\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n\right)$. Тогда отношение m_i / n к вероятностям p_i свидетельствует в пользу основной гипотезы H_0, заметные различия отвергают гипотезу H_0. Случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

характеризует согласованность гипотезы H_0 с опытными данными. Критерий χ^2 применяется в соответствии с общим правилом статистической проверки гипотез. При этом наблюдаемое значение критерия вычисляется, критическое множество выбирается в виде полубесконечного интервала $\left(\chi_\alpha^2, +\infty\right)$, где величина χ_α^2 находится с помощью соответствующих таблиц, приведенных в приложениях(см. [4]). Входами таблицы служат величина $\nu = r - 1$ и уровень значимости α. Если выполняется соотношение $\chi^2 > \chi_\alpha^2$, то говорят, что гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α.

Замечание 1. Число выборочных значений $m_i;\ i = 1,2,\ldots,r$ в каждом разряде должно быть не менее 5-10. Если это условие не выполняется, рекомендуется объединить разряды.

Замечание 2. Критерий согласия χ^2 применим не только в случае, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ полностью определена. Если она зависит от l неизвестных параметров, т.е. имеет вид $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$, и параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ оцениваются по выборке методом максимального правдоподобия , то критерий согласия остается в силе, только входом служит величина $\nu = r - l - 1$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение нулевой, конкурирующей, простой и сложной гипотезы.

2. Как сравнить две дисперсии средние генеральных совокупности?

3. Расскажите о критериях Бартлета, Кочрена, Кендалла, Пирсона.

4. В чем заключается метод графической проверки гипотезы о нормальном распределении нормальной совокупности?

5. Что вы знаете о методе спрямленных диаграмм?

6. В чем заключается проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции?

7. Как осуществляются проверки гипотез о показательном, нормальном, биномиальном, равномерном распределении генеральной совокупности?

Примеры решения задач

Пример. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о распределении генеральной совокупности X по закону Пуассону с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Решение. Выборочная средняя $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i$.Предполагаемый закон Пуассона имеет вид: $P_n(i) = (0{,}6)^i e^{-0{,}6}/i!$, т.е. $p_0 = P_{200}(0) = 0{,}5488$, $p_1 = P_{200}(1) = 0{,}3293$, $p_2 = P_{200}(2) = 0{,}0988$, $p_3 = P_{200}(3) = 0{,}0198$, $p_4 = P_{200}(4) = 0{,}0030$. Теоретические частоты $m_i = np_i = 200\,p_i$. Определим $m_0 = 109{,}76$, $m_1 = 65{,}86$,

$m_2 = 19{,}76$, $m_3 = 3{,}96$, $m_4 = 0{,}6$. Малочисленные частоты n_3, n_4 и m_3, m_4 можно объединить в новые $n_3 = 4 + 2 = 6$ и $m_3 = 3{,}96 + 0{,}6 = 4{,}56$. Значение критерия Пирсона $\chi^2 = \sum (n_i - m_i)^2 / m_i = 2{,}54$. По таблице критических точек распределения(см. приложение), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = s - 2 = 2$, где s - число частот, находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(0{,}05;2) = 6{,}0$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то имеется подтверждение гипотезы о распределение случайной величины X по закону Пуассону.

Указание. При решении этой задачи удобно использовать расчетную таблицу

x_i	n_i	p_i	m_i	$n_i - m_i$	$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$
0	116	0,5488	109,76	6,24	0,355
1	56	0,3293	65,86	-9,86	1,476
2	22	0,0988	19,76	2,24	0,254
3	4	0,0198	3,96	1,44	0,455
4	2	0,0030	0,60		

Задачи и упражнения для самостоятельного решения
[5], №№558,568,592,600,607,611,614,619,625,632,636,642,646, 651,663.

Форма отчетности: устный опрос, контрольная работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1, Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика /В.Е. Гмурман. М.:Высш.шк., 1972.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике /В.Е. Гмурман. М.:Высш.шк., 1979.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.,2. - М.: Высш. шк

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………..…...1

Занятие №1. Вычисление вероятностей в классической схеме с использованием формул комбинаторики. Геометрические вероятности 1

Занятие №2. Теоремы сложения и умножения вероятностей 8

Занятие №3. Формула полной вероятности. Формула Байеса 11

Занятие №4. Числовые характеристики распределений

Пуассона, биномиального, равномерного, нормального
и показательного 14
Занятие №5. Доверительный интервал 19
Занятие №6. Система двух случайных величин 23
Занятие №7. Статистические оценки параметров
распределения 28
Занятие №8. Методы расчета сводных характеристик
выборки 31
Занятие №9. Статистическая проверка статистических
гипотез
Заключение……………………………………………………52
Библиографический список…………………..………………...52
Приложение 41

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П 1

Значения функции $P(m;\lambda) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	08924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00006	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Таблица П 2

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,00443	00238	00123	00061	00029
4,0	00013	00006	00002	00001	

Таблица П 3

Значения интеграла Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,49865	49931	49966	49984	49993
4,0	49997	49999			

Таблица П 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по теории вероятностей и основам математической статистики для студентов специальности 38.05.021 «Экономическая безопасность» специализация №1 «Экономика – правовое обеспечение экономической безопасности».

II семестр

Составители: Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.09. 2022.
Уч.-изд. л. 1,5. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14