

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

**МАТЕМАТИКА**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

*к практическим работам  
для студентов направления подготовки  
15.03.01 «Машиностроение»  
(профиль «Технологии, оборудование и автоматизация  
машиностроительных производств»)  
заочной формы обучения*

Воронеж 2021

УДК 51(07)  
ББК 22.1я7

**Составители:**

*канд. физ.-мат. наук В. В. Горбунов,  
канд. техн. наук О. А. Соколова*

**Математика:** методические указания к практическим работам для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств») заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: В. В. Горбунов, О. А. Соколова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 40 с.

Приводится последовательность проведения практических занятий по дисциплине «Математика», разбираются опорные задачи, усвоение материала контролируется задачами для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств») заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ\_ПР\_математика\_15.03.01.pdf.

Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

**УДК 51(07)  
ББК 22.1я7**

***Рецензент** – А. В. Келлер, д-р физ.-мат. наук, доц.  
кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

*Издается по решению редакционно-издательского совета  
Воронежского государственного технического университета*

## I СЕМЕСТР

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

**Пример 1.** Найти матричный многочлен  $AB + 3C - 2E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ , поэтому можно умножить матрицу  $A$  на матрицу  $B$ . По формуле перемножения матриц находим:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 2 = 23;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-8) + 6 \cdot 4 = 36;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} = 9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 39;$$

$$c_{22} = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot (-8) + 7 \cdot 4 = 21;$$

$$\text{Следовательно: } AB = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матрица } 3C = 3 \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2E = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем матричный многочлен

$$AB + 3C - 2E = \begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 39 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 42 \\ 42 & 13 \end{pmatrix}.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Найти матричный многочлен  $3AB + C - 3E$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{ используя правило треугольников.}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}) = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 24 + 1 + 3 - (6 + 4 + 3) = 15.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $-73$ .

**Пример 3.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ . Вычислить обратную матрицу  $A^{-1}$ .

Решение: Вычислим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 14 + 0 = -22.$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 10; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -18; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 10 & -18 & 6 \\ -14 & 12 & -4 \\ 6 & -4 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

Решение: Вычислим определитель системы  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -18 + 8 + 51 = 41.$$

Поскольку определитель системы отличен от нуля, то можно вычислить обратную матрицу  $A^{-1}$ . Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Вычислим матрицу-столбец неизвестных согласно формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

$$X = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -108 + 99 + 50 \\ 24 - 63 + 80 \\ 102 + 9 - 70 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 41 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений имеет вид  $x=1, y=1, z=1$ .

**Задача для самостоятельного решения.** Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Ответ: (1;2;2)

**Пример 5.** Решить системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}.$$

Решение:

Умножим первое уравнение на  $(-4)$  и добавим ко второму уравнению

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 8z = -15 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на  $(-3)$  и добавим к третьему уравнению

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 8z = -15 \\ -y - 7z = -8 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на  $(-\frac{1}{7})$  и добавим к третьему уравнению

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ -7y - 8z = -15 \\ (-7 + \frac{8}{7})z = (-8 + \frac{15}{7}) \end{array} \right.$$

Привели систему к треугольному виду. Начинается обратный ход:  $z = \frac{-41/7}{-41/7} = 1$ ,  $y = \frac{-15 + 8z}{-7} = \frac{-15 + 8}{-7} = 1$ ,  $x = 6 - 2y - 3z = 1$ .

**Задача для самостоятельного решения.** Решить системы уравнений методом Гаусса  $\begin{cases} x - 3y + 6z = 10 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ .

Ответ: (1;1;2)

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

**Пример 1.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A(2,3,4)$ ,  $B(4,7,3)$ ,  $C(1, 2,2)$ ,  $D(-2,0,-1)$ . Вычислить:

- площадь грани  $ABC$ ;
- объем пирамиды  $ABCD$ ;
- угол  $ABC$ ;
- Проверить, что векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$  компланарны.

Решение.

а) Площадь треугольника  $ABC$  находится как половина модуля векторного произведения векторов  $\vec{AB}\{2,4,-1\}$  и  $\vec{AC}\{-1,-1,-2\}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[ \vec{AB} \times \vec{AC} \right] \right|$$

Находим векторное произведение векторов в координатном представлении

$$\left[ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Найдем длину векторного произведения

$$\left| \left[ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right| = \sqrt{(-9)^2 + (5)^2 + (2)^2} = \sqrt{110}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{\sqrt{110}}{2}.$$

б) Сначала находим объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}\{2,4,-1\}$ ,  $\overrightarrow{AC}\{-1,-1,-2\}$  и  $\overrightarrow{AD}\{-4,-3,-5\}$ , который равен модулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение находим по формуле

$$\left( \left[ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 3 + 32 + 4 - 12 - 20 = 11.$$

$V_{ABCD}$  соответствует шестой части модуля смешанного произведения трех векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ :  $V_{ABCD} = \frac{11}{6}$ .

в) Косинус угла  $ABC$  находится по формуле

$$\cos(ABC) = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}.$$

Имеем

$$\cos(ABC) = \frac{-2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{25}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{35}} \approx 0,92.$$

По таблицам находим соответствующий угол  $\arccos(0,92) = 23^\circ$

г) Проверим выполнение условия компланарности векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$

$$\left( \left[ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right] \overrightarrow{BC} \right) = 0.$$



Вычисляем смешанное произведение

$$\left( \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 24 - 5 + 3 - 20 - 4 = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

**Задача для самостоятельного решения.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A(3,5,4)$ ,  $B(5,8,6)$ ,  $C(1,9,9)$ ,  $D(6,4,8)$ . Вычислить:

- площадь грани  $ABC$ ;
- объем пирамиды  $ABCD$ ;
- угол  $ABC$ ;
- Проверить, что векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  компланарны.

**Пример 2.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A(4,7,8)$ ,  $B(-1,13,0)$ ,  $C(2,4,9)$  и  $D(1,8,9)$ .

Составить:

- уравнения ребра  $AB$ ;
- уравнение грани  $ABC$ ;
- уравнения высоты  $DE$ ;
- уравнения прямой, проходящей через точку  $D$  параллельно ребру  $AB$ ;
- уравнение плоскости, проходящей через точку  $D$  перпендикулярно ребру  $AB$ .

Вычислить:

- длину ребра  $BC$ ;
- угол между ребром  $CD$  и плоскостью  $ABC$ ;

Решение.

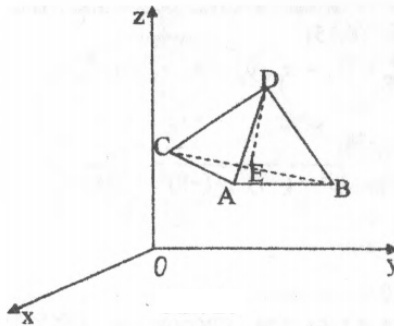


Рис. 1

а) Уравнения ребра  $AB$  могут быть получены как уравнения прямой, проходящей через две заданные точки  $A(4,7,8)$  и  $B(-1,13,0)$

$$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-7}{13-7} = \frac{z-8}{0-8} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{-5} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-8}{-8}.$$

б) уравнение грани  $ABC$  получается как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $A(4,7,8)$ ,  $B(-1,13,0)$  и  $C(2,4,9)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим  $6x - 7y - 9z + 97 = 0$  – уравнение грани  $ABC$ .

в) Для получения уравнений высоты  $DE$  воспользуемся координатами точки  $D(1,8,9)$ . В качестве направляющего вектора для  $DE$  используем вектор нормали  $\vec{N}\{6, -7, -9\}$  для плоскости  $ABC$ . Уравнения высоты  $DE$  запишутся в виде:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}$$

г) Для получения уравнений прямой, проходящей через точку  $D$  параллельно ребру  $AB$  воспользуемся направляющим вектором  $\vec{q} = \{-5, 6, -8\}$  для прямой  $AB$ :

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-8}{6} = \frac{z-9}{-8}$$

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку  $D(1,8,9)$  перпендикулярно ребру  $AB$  записывается при использовании вектора  $\vec{AB}\{-5, 6, -8\}$ , как вектора нормали

$$-5(x-1) + 6(y-8) - 8(z-9) = 0 \quad \text{или} \quad -5x + 6y - 8z - 29 = 0.$$

е) Длину ребра  $BC$  находим как расстояние между точками  $B(-1,13,0)$  и  $C(2,4,9)$ :

$$BC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 13)^2 + (9 - 0)^2} = \sqrt{171}.$$

ж) Для нахождения угла между ребром  $CD$  и плоскостью основания  $ABC$  найдем  $\sin \varphi$  ( $\varphi$  – угол между вектором  $\vec{CD}\{-1, 4, 0\}$ ) и нормалью  $\vec{N}\{6, -7, -9\}$  к плоскости  $ABC$ )

$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) + 0 \cdot (-9)|}{\sqrt{(6)^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (0)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{166}} \approx 0,64.$$

$$\varphi = \arcsin(0,64) = 39^0.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A(6,1,1)$ ,  $B(4,6,6)$ ,  $C(4,2,0)$  и  $D(1,2,6)$ .

Составить:

- уравнения ребра  $AB$ ;
- уравнение грани  $ABC$ ;
- уравнения высоты  $DE$ ;
- уравнения прямой, проходящей через точку  $D$  параллельно ребру  $AB$ ;
- уравнение плоскости, проходящей через точку  $D$  перпендикулярно ребру  $AB$ .

Вычислить:

- длину ребра  $BC$ ;
- угол между ребром  $CD$  и плоскостью  $ABC$ ;

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

**Пример 1.** Даны вершины треугольника  $A(4,3)$ ,  $B(-3,-3)$ ,  $C(2,7)$ .

Найти:

- уравнение стороны  $AB$ ,
- уравнение высоты  $CH$ ,
- уравнение медианы  $AM$ ,
- угол  $ABC$ ,
- уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ,
- расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

Решение.

- Уравнение  $AB$  запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки  $A(4,3)$  и  $B(-3,-3)$ :

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}, \quad 6(x-4) = 7(y-3), \quad 6x-7y-3=0.$$

б) Уравнение высоты  $CH$ , как перпендикуляра к стороне  $AB$ , запишем как каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $C(2,7)$  и имеющей в качестве направляющего вектора нормаль к  $AB$ :

$$\vec{N}_{AB} = \{6, -7\}, \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y-7}{-7} \quad \text{или} \quad 7x + 6y - 56 = 0.$$

в) Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ей стороны. Найдем координаты точки  $M$  – середины отрезка  $BC$ :

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$$

Для медианы  $AM$  запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3}, \quad 2x - 9y + 19 = 0.$$

г) Угол  $ABC$  можно искать его как угол между векторами  $\vec{BA} = \{4 - (-3), 3 - (-3)\} = \{7, 6\}$  и  $\vec{BC} = \{2 - (-3), 7 - (-3)\} = \{5, 10\}$ :

$$\cos(\angle ABC) = \frac{7 \cdot 5 + 6 \cdot 10}{\sqrt{6^2 + 7^2} \cdot \sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{85} \cdot \sqrt{125}} = \frac{19}{\sqrt{425}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{425}}\right).$$

д) Так как прямая, проходящая через вершину  $C$ , параллельна стороне  $AB$  ( $6x - 7y - 3 = 0$ ), то проекции вектора нормали к  $AB$  можно взять те же

$$6(x-2) - 7(y-7) = 0 \quad \text{или} \quad 6x - 7y + 37 = 0.$$

е) Расстояние от точки  $C(2,7)$  до прямой  $AB$  вычисляем по формуле

$$d = \frac{\left| 6 \cdot x_c - 7 \cdot y_c - 3 \right|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{\left| 6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3 \right|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}}.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Даны вершины треугольника  $A(10, -9)$ ,  $B(-2, -4)$ ,  $C(4, 4)$ .

Найти:

- уравнение стороны  $AB$ ,
- уравнение высоты  $CH$ ,
- уравнение медианы  $AM$ ,
- угол  $ABC$ ,
- уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ,
- расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

Если при вычислении пределов алгебраической суммы, произведения или частного от деления функций сами функции стремятся к некоторым константам, не равным одновременно нулю в случае деления функций, то вычисление пределов не вызывает затруднения.

**Пример 2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 2x}{3x^4 - 1}$ .

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 2x}{3x^4 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (7x^2 + 2x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 1)} = \frac{7 \lim_{x \rightarrow 1} (x^2) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} (x)}{3 \lim_{x \rightarrow 1} (x^4) - \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{9}{2}.$$

Пределы отношения бесконечно малых величин, отношения бесконечно больших величин, произведения бесконечно малой и бесконечно большой величины могут принимать различные значения или даже не существовать. Выражения вида

$\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ ,  $\{0 \cdot \infty\}$ ,  $\{\infty - \infty\}$ ,  $\{1^\infty\}$  называются *неопределенностями*.

**Пример 3.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8}$ .

Решение. Предел содержит неопределенность типа  $\frac{\infty}{\infty}$ . Для ее раскрытия выносим старшие степени в числителе и знаменателе:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left( 7 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( 3 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 7 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{\left( 3 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right)} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано, что при  $x \rightarrow \infty$  величины  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x^3}$  стремятся к нулю.

**Пример 4.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2}$ .

Решение. Для выделения бесконечно малых разложим числитель и знаменатель на множители по корням и сократим бесконечно малые множители  $(x-2)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{2x-1} = \frac{7}{3}.$$

**Пример 5.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 + 4x - 5}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 + 4x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1) - 4}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+5)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{6 \cdot (2+2)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\sin^2 5x}$ .

Решение. Данный предел содержит неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ .

Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться

1-м замечательным пределом  $\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\sin^2 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left( \frac{7x}{2} \right)}{\sin^2 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left( \frac{7x}{2} \right) \cdot \left( \frac{7x}{2} \right)^2}{\left( \frac{7x}{2} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin^2 5x}{25x^2} \right) \cdot 25x^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \left( \frac{7x}{2} \right) x}{\left( \frac{7x}{2} \right)} \right)^2 \cdot \left( \frac{5x}{\sin 5x} \right)^2 \cdot \left( \frac{49x^2}{4 \cdot 25x^2} \right) = \frac{49}{50}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+3}{7x-1} \right)^{x+3}$ .

Решение. Для раскрытия неопределенности  $1^\infty$  преобразуем дробь и показатель степени так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+3}{7x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x-1+4}{7x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{7x-1} \right)^{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{7x-1} \right)^{\frac{(7x-1)(x+3)4}{4(7x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x+3)}{7x-1}} = e^{\frac{4}{7}}. \end{aligned}$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^2}{x+x^2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{4x^2}$ ,

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-1} \right)^{x+5}$ .

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

**Пример 1.** Найти производную функции  $y = \frac{\cos(7x-2)}{x^2}$ .

Решение. В этом примере необходимо применять формулы для производной частного двух функций и для производной функции от функции (производной сложной функции), то есть, если  $y = f(\varphi(x))$ , то  $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos(7x-2)}{x^2} \right)' &= \frac{(\cos(7x-2))'x^2 - \cos(7x-2)(x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{-\sin(7x-2)(7x-2)'x^2 - 2x \cos(7x-2)}{x^4} = \\ &= \frac{-7x^2 \cdot \sin(7x-2) - 2x \cdot \cos(7x-2)}{x^4} = \\ &= \frac{-7x \cdot \sin(7x-2) - 2 \cos(7x-2)}{x^3}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти производную функции  $y = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ .

Решение. Применяя формулу для производной сложной функции получим:

$$\begin{aligned} \left( 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right)' &= 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 x} \right)' = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \left( \frac{-2}{\sin^3 x} \right) \cdot (\sin x)' = \\ &= -2^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти производную функции  $y = e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}$ .

Решение. Используя правило дифференцирования произведения и правило дифференцирования сложной функции, имеем



$$\begin{aligned}
\left( e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} \right)' &= \left( e^{-x} \right)' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \left( \sqrt{1+e^{2x}} \right)' = \\
&= e^{-x} \cdot (-x)' \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (1+e^{2x})' = \\
&= -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot (2x)' = \\
&= -e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2.
\end{aligned}$$

**Пример 4.** Найти производную функции  $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
\left( \sqrt[4]{1 + \cos^3 x} \right)' &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + \cos^3 x)^3}} \cdot (1 + \cos^3 x)' = \\
&= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + \cos^3 x)^3}} \cdot (3 \cos^2 x) \cdot (\cos x)' = \\
&= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + \cos^3 x)^3}} \cdot (3 \cos^2 x) \cdot (-\sin x).
\end{aligned}$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти производную функций

а)  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sin 2x}$ ,    б)  $y = \arccos \sqrt{1-3x}$ ,

в)  $y = \sqrt{9+tg^2x}$ ,    г)  $y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x$ .

**Пример 5.** Найти производную функции  $y = (\cos x)^{\sin x}$ .

Решение. Так как в этом примере основание и показатель степени зависят от  $x$  (то есть нельзя использовать ни строку с производной показательной функции, ни строку с производной степенной функции), то применим способ логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем исходную функцию

$$\ln y(x) = \ln \left( (\cos x)^{\sin x} \right) = \sin x \cdot \ln \cos x.$$

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= (\sin x)' \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot (\ln \cos x)' = \\ &= \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \\ &= \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\end{aligned}$$

и окончательно получим:

$$y' = y(x) \cdot \left( \cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right).$$

**Пример 6.** Найти производную неявно заданной функции  $\arccos(2x \cdot y) = 2^x$ .

Решение. Это уравнение не разрешимо относительно  $y$ , следовательно, функция  $y(x)$  задана неявно. В общем виде это записывается так:  $F(x, y) = 0$ . Чтобы найти производную  $y'(x)$ , нужно обе части уравнения  $F(x, y) = 0$  продифференцировать по  $x$ , рассматривая  $y$  как функцию от  $x$ . А потом из полученного уравнения выражаем искомую производную  $y'$ :

$$(\arccos(2x \cdot y))' = (2^x)'; \quad -\frac{1}{\sqrt{1-(2xy)^2}} \cdot (2xy)' = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2y^2}} \cdot (y + xy') = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2xy'}{\sqrt{1-4x^2y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}} + 2^x \cdot \ln 2;$$

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{2^x \cdot \ln 2 \sqrt{1-4x^2y^2}}{2x}.$$

**Пример 7.** Найти производную параметрически заданной функции  $\begin{cases} x = 2 \sin t^2 \\ y = 3 \cos t^2 \end{cases}$ .

Решение. Если функция задана параметрически  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{(x'_t)^3} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

$$y'_x = \frac{(3 \cos t^2)'_t}{(2 \sin t^2)'_t} = \frac{-3 \sin t^2 (t^2)'_t}{2 \cos t^2 (t^2)'_t} = \frac{-3 \sin t^2 \cdot 2t}{2 \cos t^2 \cdot 2t} = -\frac{3 \sin t^2}{2 \cos t^2} = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} t^2.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти производную функций

а)  $y = (\ln x)^{\ln x}$ , б)  $\operatorname{ctg}(x^2 + y^2) = 1$ , в)  $\begin{cases} x = e^t \\ y = \ln t \end{cases}$ .

г)  $\cos(xy) = x$ ; д)  $x = \ln(1 + t^2)$ ,  $y = t - \operatorname{arctg} t$ .

**Пример 8.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$  и построить ее график.

Решение. 1. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$ . Следовательно,  $D(f) = (\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .

2. Определим точки пересечения графика с координатными осями. Единственной такой точкой будет  $O(0,0)$ .

3. Исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность. Имеем  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3} = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = -f(x)$ , следовательно,  $f(x)$ -нечетная.

При исследовании функции можно ограничиться значениями  $x \geq 0$ , а затем продолжить функцию, пользуясь свойством нечетности (график симметричен относительно начала координат).

4. Исследуем функцию на наличие у ее графика асимптот.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2 - 3} = +\infty.$$

Следовательно,  $x = \sqrt{3}$  - вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 3} - x \right) = 0.$$

Таким образом, прямая  $y = x$  - наклонная асимптота.

5. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную.

$$f'(x) = \left( \frac{x^3}{x^2 - 3} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} = 0.$$

Критическая точка первого рода:  $x_1 = 0$ .

Точки  $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$  не могут быть точками экстремума, так как они не входят в область определения функции.

6. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную.

$$f''(x) = \left( \frac{x^3}{x^2 - 3} \right)'' = \left( \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \right)' = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3} = 0.$$

Существует одна критическая точка второго рода:  $x_1 = 0$ .

Найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости, и точки перегиба.

Результаты исследования оформим в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

Таблица

$x$	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$0$	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 3)$	$3$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0	-	Не сущ.	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	Не сущ.	+	0	-	Не сущ.	+	+	+
$f(x)$	Возр. вып.	Мах $y_{max} = -4,5$	Убыв. вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Точка пе- рег. $y_{mn} = 0$	Убыв. вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Мин $y_{min} = -4,5$	Возр., вогн.

Используя полученные результаты, строим график, функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

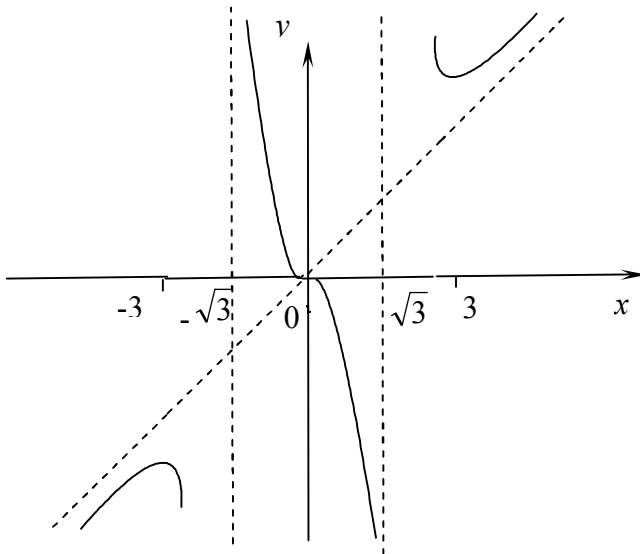


Рис. 2

## II СЕМЕСТР

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

**Пример 1.** Найти неопределенный интеграл  $\int \cos(x^2) x dx$ .

Решение.

$$\int \cos(x^2) x dx = \int \cos(x^2) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) d(x^2).$$

Согласно инвариантности формул таблицы интегралов в каждой строке таблицы переменную интегрирования  $x$  можно заменить на любую функцию  $x$ , то есть если  $\int \cos x dx = \sin x + C$ , то  $\int \cos(x^2) d(x^2) = \sin(x^2) + C$ . Таким образом,

$$\int \cos(x^2) x dx = \int \cos(x^2) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

**Пример 2.** Проинтегрировать  $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$ .

Решение: Введем новую переменную интегрирования:  $t = \sin 3x$ , и  $dt = 3 \cos 3x dx$ . Проведем замену переменной интегрирования в неопределенном интеграле:

$$\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 3x \\ dt = 3 \cos 3x dx \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{\sin 3x}}{3} + C.$$

Еще один вариант замены переменной  $t$  определяется соотношением  $x = \psi(t)$ . Тогда  $dx = \psi'(t) dt$  и

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t)) \psi'(t) dt$$

**Пример 3.** Проинтегрировать  $\int \frac{dx}{e^{2x-1} + 4}$ .

Решение: Введем новую переменную интегрирования:  $e^{2x-1} = t$  или  $x = \frac{1 + \ln t}{2}$ . Проведем замену переменной:

$$\int \frac{dx}{e^{2x-1} + 4} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\ln t + 1) \\ dx = \frac{dt}{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+4)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 4} =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(t+2)-2}{(t+2)+2} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t}{t+4} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{e^{2x-1}}{e^{2x-1} + 4} \right| + C.$$

**Пример 4.** Найти интеграл  $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$ .

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде  $x+2 = (2x+2)\frac{1}{2} + 1$ . Тогда

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной  $x^2+2x+5 = t$ ,  $2(x+1)dx = dt$ . Получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат  $x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+2^2$ .

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти неопределенный интеграл посредством метода замены переменной

а)  $\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ , б)  $\int \frac{9-2x}{x^2+2x+2} dx$ , в)  $\int x \left( \sqrt[3]{1+x^2} \right) dx$ .

**Пример 5.** Проинтегрировать по частям  $\int (5x+2) \cos 7x dx$ .

Решение:

$$\int (5x+2)\cos 7x dx = \left| \begin{array}{l} u=5x+2; \quad du=5dx \\ dv=\cos 7x dx; \quad v=\frac{\sin 7x}{7} \end{array} \right| = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} dx =$$

$$= \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} d(3x) = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} + \frac{5\cos 7x}{49} + C.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти неопределенный интеграл интегрированием по частям

а)  $\int (x+5) \sin 3x dx$ , б)  $\int (4x^2 + 1) \ln x dx$ .

**Пример 6.** Найти интеграл  $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} dx$ .

Решение: Учитывая, что знаменатель имеет однократный действительный (простой) корень  $x_1 = -1$ , а так же множитель  $(x^2 + 6x + 10)$  с отрицательным дискриминантом (с двумя комплексно-сопряженными корнями), разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 6x + 10} = \frac{A(x^2 + 6x + 10) + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)}.$$

Приравняем числители:

$$A(x^2 + 6x + 10) + B(x^2 + x) + C(x + 1) = x^2 - 2x + 3.$$

Из тождественности следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  слева и справа:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 6A + B + C = -2 \\ 10A + C = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} B = 1 - A, C = 3 - A, \\ A + 1 - A + 3 - A = -2, \end{array} .$$

$$A = \frac{6}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = -9.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение рациональ-

ной функции  $\frac{1}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} = \frac{\frac{6}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{5} - 9}{x^2 + 6x + 10}$ .



Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 + 6x + 10)} dx &= \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{x}{5} - 9}{x^2 + 6x + 10} dx = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{(-\frac{x}{5} - 9)dx}{x^2 + 6x + 10} = \\ &= \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}(x+3) + \frac{3}{5} - 9\right)dx}{(x+3)^2 + 1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| + \int \frac{\left(-\frac{x+3}{5}\right)dx}{(x+3)^2 + 1} + \\ &\int \frac{\left(-\frac{42}{5}\right)dx}{(x+3)^2 + 1} = \frac{6}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{10} \int \frac{d((x+3)^2 + 1)}{(x+3)^2 + 1} - \frac{42}{5} \cdot \operatorname{arctg}(x+3) = \\ &\frac{6}{5} \ln|x+1| - \frac{1}{10} \ln(x^2 + 3x + 10) - \frac{42}{5} \operatorname{arctg}(x+3) + C. \end{aligned}$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти неопределенный интеграл

а)  $\int \frac{x+2}{(x+2)x^3} dx$ , б)  $\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx$ .

**Пример 7.** Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x + 4 \sin 3x \cos 3x - 5 \cos^2 3x}.$$

Решение.  $\int \frac{1}{\sin^2 3x + 4 \sin 3x \cos 3x - 5 \cos^2 3x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = t \\ 3dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{dt}{t^2 + 1}}{\frac{t^2}{t^2 + 1} + \frac{4t}{t^2 + 1} - \frac{5}{t^2 + 1}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4t - 5} = \frac{1}{3} \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - 9} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(t+2)-3}{(t+2)+3} \right| + C = \frac{1}{18} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} 3x - 1}{\operatorname{tg} 3x + 5} \right| + C.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти неопределенный интеграл

$$\text{a) } \int \frac{\cos^3 x dx}{5 + 4 \sin x}, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}.$$

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

**Пример 1.** Вычислить определенный интеграл  $\int_e^{4e} \frac{\ln x dx}{x}$ .

Решение. Воспользуемся методом введения новой функции под знак дифференциала. В данном случае  $\ln x$  выступает в качестве новой переменной интегрирования, по которой легко указать первообразную

$$\begin{aligned} \int_e^{4e} \frac{\ln x dx}{x} &= \int_e^{4e} \ln x d(\ln x) = \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_e^{4e} = \frac{1}{2} \left( (\ln 4e)^2 - (\ln e)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (\ln 4 + 1)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} (\ln^2 4 + 2 \ln 4). \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить определённый интеграл  $\int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$ .

Решение. Выполним замену переменной в определенном интеграле:

$$\int_0^2 \frac{\arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = \arctg\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4}, \\ x_1=0, t_1=0, \\ x_2=2, t_2=\frac{\pi}{4}. \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^3 dt = \frac{1}{2} \left( \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^4}{2048}.$$

**Пример 3.** Вычислить определенный интеграл  $\int_0^1 x \arctg x dx$ .

Решение. Выполним интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{x^2 + 1} \\ dv = x \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|_0^1 = \left( \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Вычислить определенный интеграл

а)  $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \, dx$ , б)  $\int_0^1 (x-2)e^{3x} \, dx$ .

**Пример 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

Решение:

$$S = \int_1^3 \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 5.$$

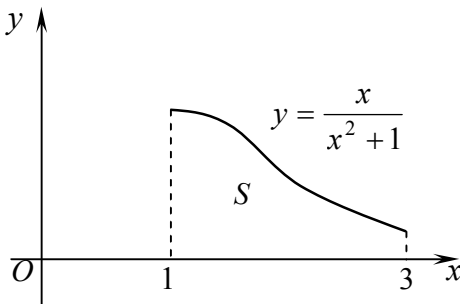


Рис. 3

**Пример 5.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

Решение:

Объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7} (x^7) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$ , а также объем тела вращения данной фигуры вокруг оси  $Ox$ .

**Пример 6.** Найти частные производные первого порядка функции  $z = tg(x^2 - xy + 5y^2)$ .

Решение. Рассматривая  $y$  как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \left( (x^2 - xy + 5y^2)'_x \right) = \frac{(2x - y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Аналогично, рассматривая  $x$  как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)} \left( (x^2 - xy + 5y^2)'_y \right) = \frac{(-x + 10y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

**Пример 7.** Найти частные производные первого порядка функции  $z = e^{\frac{x}{y+1}}$

Решение. Рассматривая  $y$  как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{(x)'_x (y+1) - x(y+1)'_x}{(y+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{(y+1) - x \cdot 0}{(y+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{y+1}} \cdot \frac{1}{y+1}.$$

Аналогично, рассматривая  $x$  как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{(x)'_y (y+1) - x(y+1)'_y}{(y+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{(y+1) \cdot 0 - x \cdot 1}{(y+1)^2} \right) = \frac{-x \cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}.$$

**Пример 8.** Найти частные производные второго порядка функции  $z = e^{\frac{x}{y+1}}$ .

Решение.

Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{1}{(y+1)} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y+1}} \left( \frac{-x}{(y+1)^2} \right).$$

Взяв от полученных производных частные производные, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\frac{x}{y+1}} \right) = \frac{e^{\frac{x}{y+1}} \cdot (y+1) - e^{\frac{x}{y+1}} (y+1)'_x}{(y+1)^2} = \frac{e^{\frac{x}{y+1}} \cdot (y+1) - e^{\frac{x}{y+1}} \cdot 0}{(y+1)^2} = \\ &= \frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-x \cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2} \right) = (-x) \cdot \frac{(-x)e^{\frac{x}{y+1}} \cdot (y+1)^2 - e^{\frac{x}{y+1}} ((y+1)^2)'_y}{(y+1)^4} = \\ &= \frac{(-x)^2 e^{\frac{x}{y+1}} + e^{\frac{x}{y+1}} \cdot 2x(y+1)}{(y+1)^4}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{x}{e^{y+1}}}{y+1} \right) = \frac{\frac{-x \cdot e^{y+1}}{(y+1)^2} \cdot (y+1) - e^{\frac{x}{y+1}} (y+1)'_y}{(y+1)^2} =$$

$$\frac{-x e^{\frac{x}{y+1}} - e^{\frac{x}{y+1}} \cdot (y+1)}{(y+1)^3}.$$

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти частные производные первого порядка функции

а)  $z = \frac{x^2 y^2}{1-x-y}$ , б)  $z = \sin(x^2 - 2xy^3)$ .

**Пример 9.** Даны: функция  $z = 2xy + 3y^2$ , точка  $A(1, -2)$  и вектор  $\vec{l} = \{9, -12\}$ . Найти: 1) градиент функции  $z = 6xy + 8y^2$  в точке  $A(1, -2)$ , 2) производную в точке  $A$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{9, -12\}$ .

Решение. Вычислим частные производные функции в точке  $A(1, -2)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = -4, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2x + 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = 2 - 12 = -10.$$

Градиент функции  $z$  имеет вид

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = (2y) \vec{i} + (2x + 6y) \vec{j},$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} z(A) = (-4) \vec{i} + (2 + 6 \cdot (-2)) \vec{j} = -4 \vec{i} - 10 \vec{j}.$$

Найдем косинусы направляющих углов, перейдя от вектора  $\vec{l} = \{9, -12\}$  к соответствующему орту

$$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta\} = \left\{ \frac{9}{\sqrt{9^2 + (-12)^2}}, \frac{-12}{\sqrt{9^2 + 12^2}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}.$$

Производная по направлению вектора  $\vec{l}$  в точке  $M$  равна

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = -4 \cdot \frac{3}{5} - 10 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{52}{5}.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Дана функция  $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x$ , точка  $A(1,2)$  и вектор  $\vec{l} = \{1,3\} = \vec{i} + 3\vec{j}$ . Требуется найти: 1) направление градиент функции  $z$  в точке  $A$ ; 2) производную в точке  $A$  по направлению вектора  $\vec{l}$ .

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

**Пример 1.** Исследовать на экстремум функцию  $z = 8x^3 + y^3 - 4xy$ .

Решение. Вычислим частные производные функции  $\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2 - 4y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4x$ . Найдем точки возможного экстремума из решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 24x^2 - 4y = 0, \\ 3y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Это точки  $M_1(0,0)$  и  $M_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Находим частные производные второго порядка исследуемой функции:  $A = f_{xx}'' = 48x$ ,  $C = f_{yy}'' = 6y$ ,  $B = f_{xy}'' = -4$ . В точке  $M_1(0,0)$  имеем  $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$ , то есть, в данной точке экстремума нет. В точке  $M_2\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  имеем  $\Delta = AC - B^2 = 64 - 16 > 0$ . Поскольку  $A = 16 > 0$ , то в точке имеется минимум.

**Задача для самостоятельного решения.** Найти экстремум функции  $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$ .

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $(1+x^2)dy + ydx=0$ .

Решение. Преобразуем уравнение к виду (уравнению с разделёнными переменными)  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$ . Интегрируя, получаем

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2+1}$  или  $\ln|y| = -\arctg x + C$ . Общее решение можно записать в виде  $y = e^{C-\arctg x}$ .

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения  $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ .

Решение. Разделяя переменные, приходим к уравнению  $\operatorname{ctg} y \, dy = \operatorname{tg} x \, dx$ .

Интегрируем:

$$\int \operatorname{ctg} y \, dy = \int \operatorname{tg} x \, dx, \quad \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C.$$

Постоянная интегрирования выбрана в виде  $\ln C$  для упрощения представления ответа. Далее находим общий интеграл

$$\sin y = \frac{C}{\cos x} \quad \text{или} \quad \sin y \cdot \cos x = C.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными  $x^2 y' = y^2 + 4$ .

**Пример 4.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения  $xu' = x + 2u$ .

Решение. Чтобы привести однородное дифференциальное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, проводят замену  $y = x \cdot v(x)$ , где  $v(x)$  – новая неизвестная функция.

Преобразуя исходное уравнение к виду, разрешенному относительно производной  $y'$ . Получим  $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$ . Полагаем  $y = x \cdot v$ ,

тогда  $y' = x \cdot v' + v$ . Уравнение запишется в виде

$$x \cdot v' + v = 1 + 2v \quad \text{или} \quad x \cdot v' = 1 + v.$$



Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$x \frac{dv}{dx} = 1 + v \quad \text{или} \quad \frac{dv}{1+v} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя  $\int \frac{dv}{1+v} = \int \frac{dx}{x}$ , получим  $\ln|1+v| = \ln|x| + \ln C$ ,  
 $1+v = xC$  или  $v = xC - 1$ .

Возвращаясь к старой переменной  $y$  по формуле  $y = x \cdot v(x)$ , получим общее решение  $y = Cx^2 - x$ .

**Задачи для самостоятельного решения.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\text{а) } y' = \frac{3xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{б) } y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

**Пример 5.** Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

Решение. Ищем решение  $y(x)$  в виде  $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . Поскольку  $y' = u'v + uv'$ , то уравнение принимает вид

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3 \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3.$$

Для нахождения частного решения  $v(x)$  решаем уравнение

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{2v}{x+1} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}.$$

После интегрирования обеих частей равенства, получим  $\ln|v| = 2\ln|x+1| + C$ , так как достаточно найти хотя бы одно отличное от нуля решение, то положим  $C = 0$  и опустим модули. Тогда  $v(x) = (x+1)^2$ . Подставляя найденное значение  $v(x)$  в исходное урав-

нение и учитывая, что  $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$ , запишем  $u'(x+1)^2 = (x+1)^3$  или

$\frac{du}{dx} = x+1$ , откуда после интегрирования получим

$u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$ . Общее решение запишется

$y = uv = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$ . Найдем частное решение, удовлетво-

ряющее начальному условию  $y(0) = 1$ . Имеем  $y(0) = \frac{1}{2} + C = 1$ , от-

куда  $C = \frac{1}{2}$ . Тогда частное решение (решение задачи Коши) запи-

шется в виде  $y = \frac{(x+1)^4 + (x+1)^2}{2}$ .

**Задача для самостоятельного решения.** Найти частное реше-  
ние линейного дифференциального уравнения первого порядка

$y' + \frac{y}{x} = -x$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 1$ .

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

**Пример 1.** Найти общее решение линейного дифференциаль-  
ного уравнения второго порядка со специальной правой частью  
 $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ .

Решение. Общее решение будет иметь вид  $y = y_{oo} + y_{ch}$ . Для  
нахождения общего решения  $y_{oo}$  соответствующего однородного  
уравнения  $y'' - 7y' + 6y = 0$  составляется характеристическое уравне-  
ние

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

и находятся его корни:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 6$ .

Тогда общее решение линейного однородного дифференциаль-  
ного уравнения приобретает вид

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения  $y_{ch}$  рассмотрим правую часть  $(x-2)e^x$ . Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид  $P_1(x)e^x$  и характеризуется параметром правой части  $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i$ . Так как параметр правой части  $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$  совпадает с простым корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме  $y_{ch} = xe^x(Ax + B)$ . Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x-2)e^x$$

или

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях  $xe^x$ ,  $e^x$ , получим

$$\begin{cases} -10A = 1, \\ 2A - 5B = -2, \end{cases}$$

откуда  $A = -\frac{1}{10}$ ,  $B = \frac{9}{25}$ . Следовательно, частное решение будет иметь вид  $y_{ch} = xe^x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)$ .

$$\text{Общее решение: } y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 4y' + 5y = \cos 2x$ .

Решение.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение:  $k^2 + 4k + 5 = 0$ ,  $k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$ ,  $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$ . При наличии комплексных корней характеристического уравнения общее ре-

шение однородного уравнения имеет вид:  
 $y_{00} = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ .

Правая часть неоднородного уравнения  $\cos 2x$  имеет вид  $P_0(x)\sin 2x + Q_0(x)\cos 2x$ , где  $P_0(x) = 0$  и  $Q_0(x) = 1$  – многочлены нулевой степени. Правая часть неоднородного уравнения описывается параметром  $\alpha + i\beta = 0 + 2 \cdot i$ , не совпадающим с корнями характеристического уравнения. Частное решение  $y_{\text{чн}}$  ищется в виде, подобном правой части (без домножения на  $x^l$  и с коэффициентами, подлежащими определению):

$$y_{\text{чн}} = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  находятся из результата подстановки  $y_{\text{чн}}$  в исходное уравнение

$$(A \sin 2x + B \cos 2x)'' + 4(A \sin 2x + B \cos 2x)' + 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = \cos 2x, \\ -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 4(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) + 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = \cos 2x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях  $\sin 2x$  и  $\cos 2x$  слева и справа для вычисления  $A$  и  $B$ .

$$\begin{cases} -4A - 8B + 5A = 0 \\ -4B + 8A + 5B = 1 \end{cases} \begin{cases} A - 8B = 0 \\ B + 8A = 1 \end{cases} \quad A = 8B, \quad B + 64B = 1, \quad B = \frac{1}{65}, \quad A = \frac{8}{65}.$$

Частное решение неоднородного уравнения равно  
 $y_{\text{чн}} = \frac{8}{65} \sin 2x + \frac{1}{65} \cos 2x$ , а общее решение равно

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + \frac{8}{65} \sin 2x + \frac{1}{65} \cos 2x.$$

**Задача для самостоятельного решения.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения  $y'' - 5y' + 6y = x^2 e^{4x}$  со специальной правой частью.

**Пример 3.** Найти частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения  $y'' + y' - 2y = 0$ . Составим характеристическое уравнение и найдем его корни  $k^2 + k - 2 = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -2$ . Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения:  $y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

Правая часть данного неоднородного уравнения  $\cos x + 3 \sin x$  имеет вид  $e^{0x}(P \cos x + Q \sin x)$ . Так как параметр правой части  $\alpha \pm i\beta = 0 \pm li$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме  $y_{ch} = (A \cos x + B \sin x)$ . Подставляя это выражение вместе с производными  $y' = (-A \sin x + B \cos x)$ ,  $y'' = (-A \cos x - B \sin x)$  в заданное уравнение, будем иметь

$$(B - 3A) \cos x + (-A - 3B) \sin x = \cos x - 3 \sin x.$$

Приравнявая коэффициенты при  $\cos x$  и  $\sin x$ , получим

$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases} \text{ откуда } A = 0, B = 1. \text{ Следовательно, частное решение}$$

будет иметь вид  $y_{ch} = \sin x$ .

Общее решение:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x$ .

Найдем  $C_1$ ,  $C_2$ , используя начальные условия,

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + \sin 0 = 1; \\ C_1 e^0 - 2C_2 e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . В итоге получаем решение задачи Коши

$$y = e^x + \sin x.$$

**Пример 4.** Найти частное решение линейного неоднородного

уравнения, удовлетворяющее начальным условиям 
$$\begin{cases} y'' + y' = e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения  $y'' + y' = 0$ . Составим характеристическое уравнение и найдем его корни  $k^2 + k = 0$ ,  $k(k + 1) = 0$ ,  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -1$ . Тогда об-

щее решение соответствующего однородного уравнения:  
 $y_{00} = C_1 + C_2 e^{-x}$ .

Правая часть данного неоднородного уравнения  $e^x$  имеет вид  $e^x(1 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x))$ . Так как параметр правой части  $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$  не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме  $y_{\text{чп}} = Ae^x$ . Подставляя это выражение вместе с производными  $y' = Ae^x$ ,  $y'' = Ae^x$  в заданное уравнение, будем иметь  $Ae^x + Ae^x = e^x$ .

Приравнивая коэффициенты при  $e^x$ , получим  $2A = 1$ ,  $A = \frac{1}{2}$ .

Следовательно, частное решение будет иметь вид  $y_{\text{чп}} = \frac{e^x}{2}$ .

Общее решение:  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{e^x}{2}$ .

Найдем  $C_1$ ,  $C_2$ , используя начальные условия,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0; \\ -C_2 + \frac{1}{2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -\frac{1}{2}$ . В итоге получаем решение задачи

Коши  $y = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{2}$ .

**Задача для самостоятельного решения.** Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка  $y'' - 4y = (3x - 1)e^{-x}$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -4$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1999. Ч. 1. 415 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1977. Т. 1,2.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

I СЕМЕСТР.....	3
Практическое занятие № 1.....	3
Практическое занятие № 2.....	7
Практическое занятие № 3.....	11
Практическое занятие № 4.....	16
II СЕМЕСТР.....	22
Практическое занятие № 1.....	22
Практическое занятие № 2.....	26
Практическое занятие № 3.....	31
Практическое занятие № 4.....	34
Библиографический список.....	39

# МАТЕМАТИКА

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

*к практическим работам  
для студентов направления подготовки  
15.03.01 «Машиностроение»  
(профиль «Технологии, оборудование и автоматизация  
машиностроительных производств»)  
заочной формы обучения*

Составители:  
Горбунов Валерий Викторович  
Соколова Ольга Анатольевна

В авторской редакции

Подписано к изданию 12.11.2021.  
Уч.-изд. л. 2,5.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический  
университет»  
394026 Воронеж, Московский просп., 14