МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

МАТЕМАТИКА. ТРИГОНОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по изучению раздела «Тригонометрия»
для студентов 1 курса специальностей 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы», 11.02.16 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств», 11.02.17 «Разработка электронных устройств и систем», 12.02.10 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт биотехнических и медицинских аппаратов и систем», 15.02.10 «Мехатроника и робототехника (по отраслям)», 15.02.16 «Технология машиностроения»
очной формы обучения

Воронеж 2024

УДК 514.11(07)
ББК 22.151я7

Составители:
О. А. Рязанова, Н. А. Журавлева, Н. В. Тришина

Математика. Тригонометрия: методические указания по изучению раздела «Тригонометрия» для студентов 1 курса специальностей 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы», 11.02.16 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств», 11.02.17 «Разработка электронных устройств и систем», 12.02.10 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт биотехнических и медицинских аппаратов и систем», 15.02.10 «Мехатроника и робототехника (по отраслям)», 15.02.16 «Технология машиностроения» очной формы обучения /ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: О. А. Рязанова, Н. А. Журавлева, Н. В. Тришина. — Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2024. — 45 с.

Методические указания содержат теоретический материал, практические задания и контрольные вопросы по разделу «Тригонометрия» в рамках изучения дисциплины «Математика».

Предназначены для студентов 1 курса специальностей 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы», 11.02.16 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств», 11.02.17 «Разработка электронных устройств и систем», 12.02.10 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт биотехнических и медицинских аппаратов и систем», 15.02.10 «Мехатроника и робототехника (по отраслям)», 15.02.16 «Технология машиностроения» очной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_Тригонометрия_СПК.pdf.

Ил. 15. Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 514.11(07)
ББК 22.151я7

Рецензент *— И.С. Бобылкин, кандидат технических наук, доцент кафедры конструирования и производства радиоаппаратуры ВГТУ*

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ.
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Тема 1. Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента, их свойства

Тригонометрическая окружность

Единичная тригонометрическая окружность – это окружность, с радиусом 1 и центром в начале координат. Горизонтальный (ось ОХ) и вертикальный (ось OY) диаметры делят числовую окружность на четыре четверти. Начальная точка A единичной тригонометрической окружности находится на оси х и имеет координаты (1; 0) (рис. 1). Отсчет по единичной тригонометрической окружности может вестись как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. Отсчет от точки A против часовой стрелки называется **положительным направлением**. Отсчет от точки A по часовой стрелке называется **отрицательным направлением**.

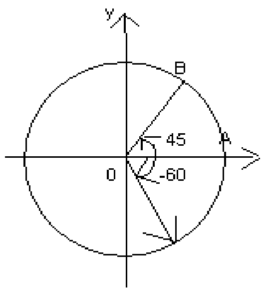


Рис. 1

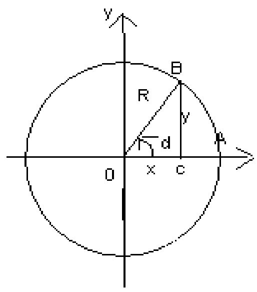


Рис. 2

Отметим на оси OX справа от начала координат точку A и проведём через неё окружность с центром в точке O (рис. 1). Радиус OA будем называть **начальным радиусом**. При повороте против часовой стрелки угол поворота считается положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. Угол поворота α любое действительное число от -∞ до +∞.

Пусть при повороте около точки ***O*** (рис.2) на угол α начальный радиус ***OA*** переходит в радиус ***OB, B(x;y)***.

Синусом угла $\boldsymbol{\alpha}$ называется отношение ординаты точки ***B*** к длине радиуса. $\sin\alpha = \frac{y}{R}$.

Косинусом угла $\boldsymbol{\alpha}$ называется отношение абсциссы точки ***B*** к длине радиуса. $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

Тангенсом угла $\boldsymbol{\alpha}$ называется отношение ординаты точки ***B*** к её абсциссе. $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом угла $\boldsymbol{\alpha}$ называется отношение абсциссы точки B к её ординате. $ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$.

Выражения ***sin α*** $= \frac{y}{R}$ и ***cos α*** $= \frac{x}{R}$ определены при любом ***α***. Выражение ***tgα*** $= \frac{y}{x}$ имеет смысл при любом ***α***, кроме углов ±90°, ±270° , ±450°.

Выражение ***ctgα*** $= \frac{x}{y}$ исключает углы 0°, ±180°, ±360°.

α -угол I четверти, если 0°< ***α*** <90°;
α -угол II четверти, если 90°< ***α*** <180°;
α -угол III четверти, если 180°< ***α*** <270°;
α -угол IV четверти, если 270°< ***α*** <360°.

Каждому допустимому значению ***α*** соответствует единственное значение ***sinα***, ***cosα***, ***tgα***, ***ctgα***. Поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла ***α.*** Их называют тригонометрическим функциями.

Областью значений синуса и косинуса является промежуток [-1;1].

Областью значений тангенса и котангенса – множество всех действительных чисел.

Примеры вычисления значений тригонометрических функций

Найдем синус, косинус, тангенс, котангенс углов 0°, 90°, 180°, 270°, 360°. (рис. 3)

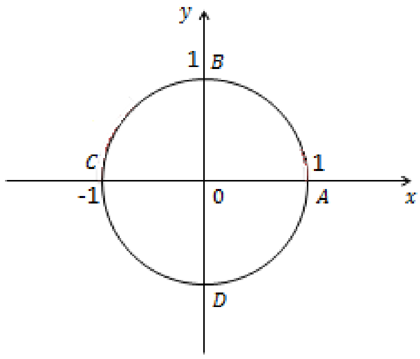


Рис. 3

1) $\alpha = 0°; OA = 1;$
$R = 1; A(1;0), x = 1; y = 0;$
$\sin 0° = \frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0;$
$\cos 0° = \frac{x}{R} = \frac{1}{-1} = 1;$
$\mathrm{tg}\, 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0;$
ctg 0° не существует.

2) B (0;1) x=0; y=1; α=90°
$\sin 90° = \frac{y}{R} = \frac{1}{1} = 1; \cos 90° = \frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0;$
$\mathrm{tg}\ 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ – не существует.;
$\mathrm{ctg}\ 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0.$

3) C (-1;0) x=-1, y=0, α=180°

$\sin 180° = \frac{0}{1} = 0$; $\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$;

$tg\ 180° = 0$; ctg 180°-не существует;

4) α=270°, D (0;-1), x = 0, y = -1;

$sin\, 270° = \frac{-1}{1} = -1$; $\cos 270° = \frac{0}{1} = 0$;

$tg\ 270° -$ не существует;

$ctg\ 270° = \frac{0}{-1} = 0$;

5) α = 360° $\sin 360° = \sin 0° = 0$;

$\cos 360\,° = \cos 0° = 1$; $tg\ 360° = 0$;

$ctg\ 360\,^{\circ} -$ не существует.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 4\,\mathrm{tg}\,45° = 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 1 = 1 + 3 - 4 = 0.$

б) $3\,\mathrm{tg}\,45° \cdot 6\cos 60° \ = 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$

Пример 2. Укажите несколько значений α, при которых:

а) sin α= 1, α =90°; 90°±360°; 90°±2·360°;

б) cos α = 0, α=90°; 450°; -270°; 810,

в) tg α =0, α=0°; 360°; 720°; -360°.

Таблица 1

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 0°, 30° , 45°, 60°, 90°,180°,270°, 360°.

α	градусов	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Задания для самостоятельного решения

1)Начертите окружность с центром в начале координат и изобразите угол поворота, равный 150°, 210°, 540°, -45°, -135°, -720°.

2)В какой четверти угол α, если α=179°; 325°; -150°; -10°; 800°; 1000°?

3) Найдите значение выражения: а) $2\sin 60° \cdot ctg\ 60°$;

б) $2\sin 45° - 4\cos 30°$;в) $6\ ctg\ 60° - 2\sin 60°$.

4)Укажите несколько значений α, при которых:

а)$\sin \alpha = -1$;   *б*) $\cos \alpha = 1$;   *в*)$ctg\ \alpha = 0$.

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

а) Знаки по четвертям.

$\sin\alpha = \frac{y}{R}$, значит знак ***sin α*** зависит от знака y. ***sin α*** > 0 в I и II четверти; ***sin α*** < 0 в III и IV четверти (рис. 4)

$\cos\alpha = \frac{x}{R}$, знак ***cos α*** зависит от знака *x*. ***cos α*** > 0 в I и IV четверти, ***cos α*** < 0 во II и III четверти.

$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\ \alpha = \frac{x}{y}$. ***tg α*** > 0, ***ctg α*** > 0 в I и III четверти;

tgα < 0, ***ctg α*** < 0 во II и IV четверти.

Рис. 4

б) Четность и нечетность.

Синус, тангенс, котангенс — нечетные функции;

Косинус — четная функция.

sin(-α)= -sin α, tg(-α)= -tg α, ctg(-α)=-ctg α, cos(-α)=cos α.

Например: cos(-40°)=cos 40°: tg(-60°)= -tg 60°=-$\sqrt{3}$

в) Периодичность.

При изменении угла на целое числа оборотов значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются.

Например: sin 30° = sin (30°-360°) = sin (30°+2·360°) =...=$\frac{1}{2}$. Вычислите:

а) cos (-405°) = cos405° = cos (360°+45°) = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) ctg (-780°) = -ctg 780° = -ctg (60°+2·360°) = - ctg 60° =$-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) sin 765° = sin (2·360°+45°) = sin 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) cos (-1170°) = cos 1170° = cos (3·360°+90°) = cos 90° = 0.

Верно ли равенство tg(-900°)+cos(-45°)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Пример 1. Какой знак имеет ***sin α***, ***cos α***, ***tg α***, ***ctg α***, если:

а) **α** = 48°; б) **α** =137°;

в) α = 200°; г) α = 306°?

Решение:

а) **α** = 48° ─ угол I четверти, значит ***sin*** 48° > 0, ***cos*** 48° > 0,

tg 48°>0 ,***ctg*** 48° >0;

б) $\alpha = 137°$ — угол II четверти, значит
$\sin 137° > 0$, $\cos 137° < 0$, $\mathrm{tg}\ 137° < 0$,
$\mathrm{ctg}\ 137° < 0$;
в) $\alpha = 200°$ — угол III четверти, значит
$\sin 200° < 0$, $\cos 200° < 0$, $\mathrm{tg}\ 200° > 0$, $\mathrm{ctg}\ 200° > 0$;г) $\alpha = =306°$ — угол IV четверти, значит $\sin 306° < 0$, $\cos 306° >0$, $\mathrm{tg}\ 306° < 0$,
$\mathrm{ctg}\ 306° < 0$.

Пример 2. Определите знак выражения:
а) $\sin100° \cdot\cos 300°$(>0, т.к $\sin100°$(IIч) >0, $\cos 300°$(IVч) >0);
б) $\cos320°\cdot\mathrm{ctg}\ 17°$ (>0, т.к $\cos 320°$ (IVч) > 0, $\mathrm{ctg}\ 17°$ (Iч). >0).

Пример 3. Найдите значение выражения:
а) $\sin (-30°) = - \sin 30° = -\frac{1}{2}$;
б) $\mathrm{tg}\ (-45°) = - \mathrm{tg}\ 45° = -1$;
в) $\cos (-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Пример 4. Вычислите:
а) $\sin (-720°) = - \sin720° = - \sin (0°+2\cdot360) = \sin 0 = 0$;
б) $\cos (-780°) = \cos 780° = \cos (60°+2\cdot360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$;
в) $\mathrm{ctg}\ (-1110°) = -\mathrm{ctg}\ 110° = - \mathrm{ctg}\ (30°+3\cdot360) = -\mathrm{ctg}\ 30° = -\sqrt{3}$.

Задания для самостоятельного решения

Какой знак имеет:
а) $\sin 179°$; в) $\mathrm{ctg}\ 359°$; д) $\mathrm{tg}\ 500°$; ж) $\sin (-75°)$;
б) $\cos 280°$; г) $\cos 410°$; е) $\mathrm{tg}\ 175°$; з) $\cos (-116°)$.

Определите знак выражения:
а) $\sin 190°\cdot \mathrm{tg}\ 200°$;
б) $\mathrm{tg}\ 170° \cdot \cos 400°$.

Найдите:
а) $\sin (-60°)$; б) $\cos (-180°)$;
в) $\sin (-90°)$; г) $\mathrm{ctg}\ (-45°)$.

Вычислите:
а) $\mathrm{tg}\ (-900°)$; б) $\mathrm{ctg}\ (-780°)$; в) $\sin (-1125°)$.

Радианная мера угла

Углы измеряются в градусах, минутах, секундах. Эти единицы связанны между собой соотношениями
$1°=60'$, $1'=60''$, $1'=(\frac{1}{60})°$, $1''=(\frac{1}{60})'$.

Кроме указанных используется единица, называемая радианом. **Углом в один радиан** называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

$1° = \frac{\pi}{180}\ рад$, $1° \approx 0{,}017$ рад.

1 рад$=\frac{180°}{\pi}$, 1 рад$\approx 57°$.

Пример 1. Выразите в градусах 4,5рад, $\frac{3\pi}{4}$ рад.

4,5рад$=4{,}5\cdot\frac{180°}{\pi} = \frac{810°}{\pi} \approx 258°$.

$\frac{3\pi}{4} рад = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{180°}{\pi} = 135°$.

Пример 2. Выразите в радианной мере углы $30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

$30° = 30\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$,

$90° = 90\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{2}$,

$45° = 45\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$,

$180° = 180\cdot\frac{\pi}{180°} = \pi$,

$60° = 60\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$,

$270° = 270\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{3\pi}{2}$,

$360° = 360\cdot\frac{\pi}{180°} = 2\pi$.

Пример 3. Определите знак выражения:

а) $\sin\frac{5\pi}{6} > 0$, т.к $\frac{5\pi}{6}$ угол II четверти;

б) $\cos 0.9 > 0$, т.к 0,9 рад угол I четверти;

в) tg 3 < 0, т.к 3 рад угол II четверти;

г) $ctg\ \frac{5\pi}{3} < 0$, т.к $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\cdot\frac{180°}{\pi} = 300°$ угол IV четверти.

Задания для самостоятельного решения:

1) Выразите в градусах угол, радианная мера которого равна:

а)0,2; б)3,1; в)$\frac{5}{2}\pi$;

г)$-\frac{3}{2}\pi$; д)$-\frac{1}{3}\pi$; е)$\frac{5}{4}\pi$.

2) Выразите угол α в радианах, если

а)α = 10°; б)α = 18°; в)α = 54°;
г)α = 200°; д)α = 225°; е)α = 390°;
ж)α = -45°; з)α = -60°.

3) Выразите в радианах углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

4) Определите знак выражения:

а) $\cos\frac{3\pi}{4}$; б) $tg\ \frac{\pi}{4}$; в) sin 1; г) ctg 0,2.

ТЕМА 2. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть при повороте вокруг точки *O* на угол α получен радиус дуги *OB*. ***B(x, y).*** По определению ***sin α*** = $\frac{y}{R}$, cos α = $\frac{x}{R}$, откуда x=Rcos α, y=Rsin α.

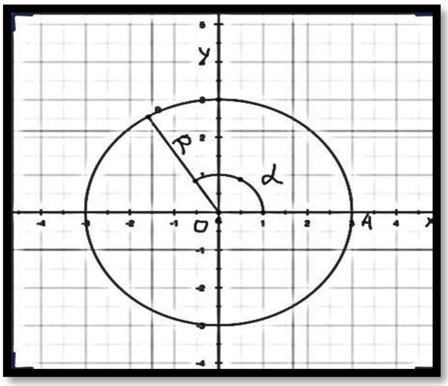


Рис. 5

Уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$(R\cos\alpha)^2 + (R\sin\alpha)^2 = R^2$,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (1)

tg α $= \frac{y}{x} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

tg α$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (2)

ctg α$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, (3)

tg α ctg α=1, (4)

$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, (5)

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (6).

Равенства (1-6) называют основными тригонометрическими тождествами.

Пример 1. Найдите cos α, tg α, ctg α зная, что $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

$$1)\ \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13},$$

т. к угол 2 четверти, где $\cos\alpha < 0$. ;

2)tg α $=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}$;

3)$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1, \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{12}{5}$;

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{5}{12}, \mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{12}{5}$.

Пример 2.
Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad \alpha < 0 < \frac{\pi}{2}$.
Найти: $\sin\alpha, \cos\alpha, \ \operatorname{ctg}\alpha$.
Решение:
1) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$.

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{значит } \alpha \ - \text{угол 1 четверти}, \text{где}$$

$\cos\alpha > 0. \ \ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

2)$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 3)$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$,
Ответ: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \operatorname{ctg}\ \alpha = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Упростите выражение:
а) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$;
б) $\sin^2 x - 1 = \sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos^2 x$;
в) $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$;
г) $\sin x \ \cdot \cos x \ \cdot \operatorname{tg} x = \sin x \cdot \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x$;
д) $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Найдите sin α, tg α, ctg α, если cos α = = $\frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}$<α<2π.
2) Найдите значение тригонометрических функций угла α, если известно что:
а) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} \quad$ и $\quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;
б)$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad$ и $\quad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
в) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}5$ и $\alpha -$ угол IV четверти.
3) Упростите выражение:
а) $(\cos\alpha - 1)(1 + \cos\alpha)$;
б) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
в) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1$;
г) $\sin^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;
д) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
е) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + 1$.

<u>Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений</u>

Упростите выражение:
1) $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$;

2)$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

3) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin^2\alpha$;

4) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$;

5) $\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot (-\sin^2\alpha) = -\cos\alpha^2$;

6) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

Докажем, тождество $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$. Преобразуем левую часть данного равенства:
$\mathrm{tg}^2\alpha\text{-}\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\text{-}\sin^2\alpha = \sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\text{-}1\right) = \sin^2\alpha\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha - 1) = \ = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Мы получили выражение, стоящее в правой части равенства. Таким образом, тождество доказано.

Задания для самостоятельного решения

Преобразуйте выражение:

1) $1 - \sin^2 - \cos^2\alpha$; 4)$\sin\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$;

2) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$; 5) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$; 6) $\frac{\mathrm{tg}\,\beta+1}{1\mathrm{ctg}\,\beta}$.

Докажите тождество:
$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2.$$

Формулы приведения

Тригонометрические функции углов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ могут быть выражены через функции угла α с помощью формул, которые называют формулами приведения:

а) функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом 1 четверти;

б) для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функций заменяется на "кофункцию" (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс); для углов $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется.

Примеры:

1) $tg\,(\pi - \alpha) = -tg\alpha$; α-угол I четверти, $\pi - \alpha$ - угол II четверти, где tg<0;

2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = cos\alpha$; α - угол I четверти, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ угол I четверти, где sin>0; название меняется;

3) $tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$; α- угол I четверти, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ угол III четверти, где tg>0; название меняется;

4) $\sin(270°-\alpha)=-cosa$-угол I четверти, $270°-\alpha$ угол III четверти, где $sin< <0$, название сохраняется;

5) $\cos(2\pi+\alpha)=-cos\alpha$ -угол I четверти, $2\pi+\alpha$ угол I четверти, где $cos >> 0$, название сохраняется.

Применение формул приведения для нахождения значений тригонометрических функций угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

1) $\cos\frac{8\pi}{3}=cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=cos\frac{2\pi}{3}=cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-cos\frac{\pi}{3}==-\frac{1}{2}$.

2) $sin(-585°)=-sin585°=-sin(360°+225°)=-sin225°=-sin(180°+$ $+45°)$= $-(-sin45°)=sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения

1) Приведите к тригонометрической функции угла α

а) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$; б) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$;

в) $tg(\pi+\alpha)$; *г*) $\cos(2\pi+\alpha)$;

д) $ctg(\pi+\alpha)$; *е*) $\sin(\pi+\alpha)$.

2) Приведите к тригонометрической функции угла от 0˚ до 90˚:

а) $\cos 120°$; *б*) $\sin(-178°)$;

в) $\sin 680°$; *г*) $\cos(-1000°)$.

3) Найдите:

а) $cos120°$; *б*) $\sin(-150°)$;

в)$\text{tg}(-225°)$; *г*) $cos\,(-225°)$;

4) Упростите выражение:

а) $\sin(90°-\alpha)+\cos(180°+\alpha)+tg\,(270°+\alpha)+ctg\,(360°-\alpha)$;

б) $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-cos(\alpha-\pi)+tg(\pi-\alpha)+ctg\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

5) Преобразуйте выражение:

$$а)\ \frac{cos(-\alpha)\,cos(180°+\alpha)}{sin(-\alpha)\sin(90°+\alpha)};$$

$$б)\ \frac{sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-2)\cos(\alpha-\pi)}.$$

6) Докажите, что:

$$а)\ \frac{tg(\pi-\alpha)}{co\,s(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=tg^2\alpha;$$

$$б)\ \frac{\sin(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}\cdot\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=sin\alpha.$$

Формулы сложения и их следствия

Формулы сложения – формулы, выражающие тригонометрические функции сумму и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

cos(α-β)=cosα·cosβ+sinα·sinβ (1)

cos(α+β)=cosα·cosβ-sinα·sinβ (2)

sin(α+β)=sinα·cosβ+cosα·sinβ (3)

sin(α -β)=sinα·cosβ-cosα·sinβ (4)

tg(α-β)= $\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ (5);

tg(α+β)= $\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ (6).

Примеры использования формул сложения:

Пример 1: Вычислите cos15° и sin15°.

Представим 15° в виде разности 45°-30°.

Тогда cos 15°=cos(45°-30°)=cos 45°·cos30°+sin45°·sin30°= $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Sin 15°=sin(45°-30°)=sin45°·cos30°-cos45°·sin30°=$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2: Представив 105° как сумму 60°+45°, вычислите:

sin105°=sin(60°+45°)=sin60°·cos45°+cos60°·sin45°= $=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример 3: Упростите выражение cos(α-β)+cos(α+β).

cos(α-β)+cos(α+β)=cosα·cosβ+sinα·sinβ+cosα·cosβ-sinα·sinβ=2cosα·cosβ.

Задания для самостоятельного решения:

1)Используя формулы сложения, преобразуйте выражения:

а) sin(60°-β); б)cos(β-30°).

2)Представьте 75° как сумму 30°+45°, вычислите:

а) sin 75°; б) cos 75°.

3)Упростите:

а) cos(α-β)-cosα·cosβ; б)sin($\frac{\pi}{3}$+α)-$\frac{1}{2}$·sinα;

в)sinα·cosβ-sin(α-β); г)cos(α+$\frac{\pi}{4}$)+ $\frac{\sqrt{2}}{2}$·sinα.

4)Найдите значение выражения:

а) cos107°·cos 17°+sin107°·sin 17°;

б) sin 63°·cos 27°+cos 63°·sin 27°.

5) Известно, что α и β - углы II четверти, sinα=$\frac{4}{5}$, cosβ=-$\frac{15}{17}$. Найдите:
а) sin(α+β); в) cos(α-β);
б) sin(α-β) г) cos(α+β);

6) Известно, что tgα=$\frac{1}{2}$; tgβ=$\frac{1}{3}$. Найдите:
а) tg(α+β); б) tg(α-β);

7) Вычислите: а) tg15°; б) tg75°.

Формулы двойного угла

Положим в формулах: $sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha \cdot cos\beta + cos\,\alpha \cdot sin\beta$,
$cos(\alpha\ +\beta) = cos\ \alpha \cdot\ cos\beta - sin\ \alpha\ \cdot sin\beta$,
$tg\ (\alpha+\ \beta) = \frac{tg\alpha\ + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$ $\qquad \alpha\ = \beta$,
Получим тождества*:*
sin 2a=2sin a ·cos a,(1)
cos 2α = cos² α - sin² α, (2)
tg 2α = $\frac{2tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$. (3)
Эти тождества называются *формулами двойного угла*.

Примеры применения формул двойного угла

Пример 1. Найти значение sin 2α, зная, что cos α = -0,8 и α – угол 3-ей четверти.
$\sin^2\alpha\ +\cos^2\alpha\ = 1, \sin^2\alpha\ = 1-\cos^2\alpha, \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ = -\sqrt{1-0{,}64} =$
$= -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$
т.к. sin α < 0.

$$2)\sin 2\ \alpha\ = 2\sin\alpha\ \cdot\cos\alpha\ = 2(-0{,}6)(-0{,}8) = 0{,}96.$$

$$\text{Ответ}: \sin 2\ \alpha\ = 0{,}96.$$

***Пример* 2**. Упростите выражение
$\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos^3\ = \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$=

$$= \sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\ = \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos2\alpha = \frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha = \frac{1}{4}(2\sin2\alpha\cos2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin4\alpha.$$

В формулу (2)$\cos2\ \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, подставим $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$
Получим $\cos2\ \alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.
$\cos2\ \alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1 - \cos2\ \alpha$ (4)

В формулу (2)подставим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

Получим $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, тогда

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos2\alpha\ (5).$$

Формулы (4) и (5)используют в вычислениях и преобразованиях.

***Пример* 3**. Упростите: $\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{2sin^2\frac{\alpha}{2}}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}.\alpha=2*\frac{\alpha}{2}$$

$$1-cos\alpha=1-cos\left(2*\frac{\alpha}{2}\right)=2sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$cos\alpha=1+cos\left(2*\frac{\alpha}{2}\right)=2cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

1) Упростите выражение:

а) $\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin2\alpha}$;

в) $\frac{\sin2\beta}{\cos\beta}-\sin\beta$; г) $\cos2\alpha+\sin^2\alpha$;

д) $\cos^2\beta-\cos2\beta$; е) $\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha$.

2) Сократите дробь:

а) $\frac{\sin40^o;}{\sin 20^o}$ б) $\frac{\sin 100^o}{\cos 50^o}$;

в) $\frac{\cos 80^o}{\cos 40^o\ +\sin 40^o}$; г) $\frac{\cos36^o+\sin^2 18^o}{\cos18^o}$;

3) Дано: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\alpha-$ угол $2-$ ой четверти.
Найдите: а)$\sin2\alpha$, б)$\cos2\alpha$, в)$tg2\alpha$.

4) Дано: $tg\alpha=\frac{3}{4}, 180^o<\alpha<270^o$.
Найдите: а)$\sin2\alpha$, б)$\cos2\alpha$, в)$tg2\alpha$

5)Пусть $\cos\alpha=-0.6$ и $\alpha-$ угол $3-$ ей четверти.
Найдите: а)$\sin2\alpha$, б)$\cos2\alpha$, в)$tg2\alpha$.

6) Используя формулы двойного угла , выразите:
а)$\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ через тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$;
б)$\sin4\alpha, \cos4\alpha, tg4\alpha$ через тригонометрические функции угла 2α;
в) $\sin6\alpha, \cos6\alpha, tg6\alpha$ тригонометрические функции угла 3α.

7) Найдите значение $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$ и $0 < \alpha < \pi$.

8) Вычислите:

а) $2\sin 15^0 \cos 15^0$; в) $8\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin 105^o \cos 105^o$; г) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

д) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$; е) $4\cos^2\frac{\pi}{8} - 4\sin^2\frac{\pi}{8}$;

9) Упростите:

а) $\frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$; б) $\frac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta}$;

в) $\operatorname{ctg}\beta(1-\cos 2\beta)$; г) $\frac{1+\cos 4\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta}$;

д) $\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}$; е) $\frac{1+\cos(\pi+\beta)}{\sin(\pi-\beta)}$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Из формул сложения можно получить формулы, представляющие сумму и разность синусов и косинусов в виде произведения тригонометрических функций.

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (1),

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (2),

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (3),

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ (4),

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (5),

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (6).

Примеры применения формул**:**

Пример 1: Упростите сумму $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$.

$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ-50^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ * \cos(-20^\circ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$.

Пример 2: Преобразуйте разность в произведение

$\cos 0{,}3\pi - \sin 0{,}6\pi$

$\cos 0{,}3\pi - \sin 0{,}6\pi = \cos 0{,}3\pi - \sin(0{,}5\pi + 0{,}1\pi) = \cos 0{,}3\pi - \cos 0{,}1\pi =$

$= -2\sin\frac{0{,}3\pi+0{,}1\pi}{2}\sin\frac{0{,}3\pi-0{,}1\pi}{2}$ $\mathbf{= -2\sin 0{,}2\pi\cdot\sin 0{,}1\pi}$

Задания для самостоятельного решения:

1) Представьте в виде произведения:

а) $\sin 12° + \sin 20°$; г) $sin\frac{\pi}{6} - sin\frac{\pi}{9}$;

б) $\sin 52° - \sin 32°$; д) $\sin\alpha - \sin(\alpha + \frac{\pi}{36})$;

в) $cos\frac{\pi}{10} - cos\frac{\pi}{20}$; е) cos $(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ – cos $(\frac{\pi}{4} - \alpha)$;

2) Преобразуйте выражения в произведение:

а) tg 2α + tg α; в) $tg\frac{\pi}{12} + tg\frac{\pi}{3}$;

б) tg 3β – tg β; г) $tg\frac{4\pi}{5} - tg\frac{3\pi}{5}$.

3) Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{2}$ + cos α; г) 1-2cos α;

б) $\frac{1}{2}$ - sin α; д) $\sqrt{2}$+2cos α;

в) 2sin α+1; е) 2sin α$-\sqrt{3}$.

4) Докажите, что:

а) (sin 2α+sin 6α):(cos 2α+cos 6α) = tg 4α;

б) (cos 2α-cos 4α):(cos 2α+cos 4α) = tg 3α·tg α.

5) Найдите значение выражения:

а) (cos 68°-cos 22°):(sin 68°-sin 22°);

б) (sin130°+sin110°):(cos130°+cos110°).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение тригонометрической окружности.
2. Какой угол поворота считают положительным, отрицательным?
3. Какой буквой обозначают угол поворота; каким действительным числом он может выражаться?
4. Какой угол поворота считают углом 1,2,3,4 четверти?
5. Какой четверти принадлежат углы $0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \pm 360^\circ$?
6. Дайте определение синуса угла α, для каких значений угла α имеет смысл выражение sin α?
7. Дайте определение косинуса угла α; для каких значений α имеет смысл выражение cos α?
8. Дайте определение тангенса угла α; для каких значений α имеет смысл выражение tg α?
9. Дайте определение котангенса угла α; для каких значений α имеет смысл выражение ctg α?
10. Какие функции называют тригонометрическими?
11. Какова область значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса?
12. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс, котангенс в каждой координатной четверти?
13. Какие тригонометрические функции являются четными, нечетными?
14. В чем заключается свойство периодичности тригонометрических функций?
15. Что называют радианом?
16. Напишите основные тригонометрические тождества.
17. Напишите формулы двойного угла.

ТЕМА 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическим называется **уравнение,** в котором неизвестные находятся под знаком тригонометрических функций.

<u>Простейшие тригонометрические уравнения.</u>

Пусть a — некоторое число. **Простейшие тригонометрические уравнения** — это уравнения следующих видов:

$$\cos x = a, \quad \sin x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной x, для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение a.

Решение любого тригонометрического уравнения сводится, как правило, к решению одногоили нескольких простейших тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения мы будем решать с помощью тригонометрической окружности.

Уравнение $\cos x = a$.

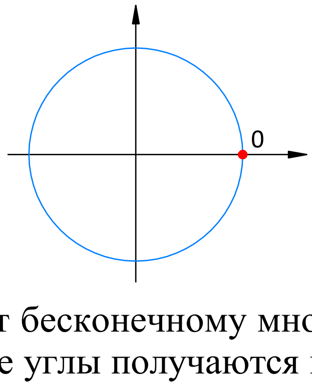
Напомним, что по определению $\cos x$ — это абсцисса точки x тригонометрической окружности, которая отвечает углу x. Этого достаточно для рассмотрения уравнения $\cos x = a$.

Если $a > 1$ или $a < 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений. В самом деле, косинус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу.

Если же $a \le 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет решения, причём решений будет бесконечно много. Сейчас мы научимся описывать все эти решения.

1. $\cos x = 1$.

Нас интересуют точки тригонометрической окружности, которые имеют абсциссу 1. Легковидеть, что имеется лишь одна такая точка:



Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: $0, 2\pi, 2\pi, 4\pi, 4\pi, 6\pi, 6\pi, \ldots$ Все перечисленные углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (то есть нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

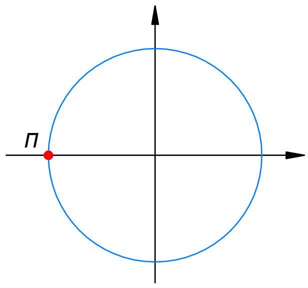
Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

$$x = 2\pi n, \; n \in Z.$$

Это и есть множество решений уравнения $\cos x = 1$.

2. cos x = −1.

На тригонометрической окружности имеется лишь одна точка с абсциссой −1:



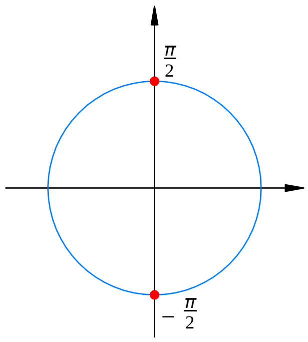
Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающихся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, то есть на целое число полных углов. Следовательно, все решения уравнения cos x = −1 записываются формулой:

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

· *для описания множества углов, отвечающих одной точке тригонометрической окружности, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить* $2\pi n$.

3. cos x = 0.

Отмечаем на тригонометрической окружности точки с нулевой абсциссой. Их две:



Эти точки образуют диаметральную пару (то есть служат концами диаметра тригонометрической окружности). Все углы, отвечающие точкам диаметральной пары, отличаются друг от друга на целое число углов π (то есть на целое число полуоборотов как в одну, так и в другую сторону).

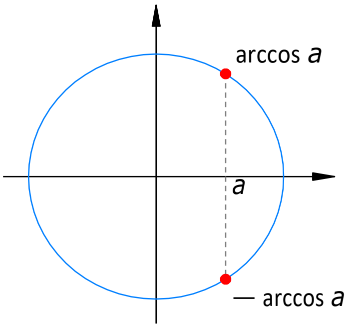
· *для описания множества углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрической окружности, нужно взять один угол из этого множества и прибавить* πn.

Следовательно, все решения уравнения cos x =0 описываются формулой:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

4. **cos *x* = *a*,** при $|a| \le 1$

Решение уравнения cos x = a, при |a| ≤ 1 в общем случае выглядит так:

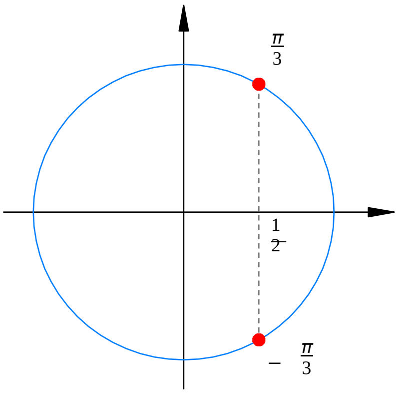


$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Примеры решения тригонометрических уравнений вида cos x = a:

Пример 1:

$\cos x = \frac{1}{2}$



Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $\frac{1}{2}$:

Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

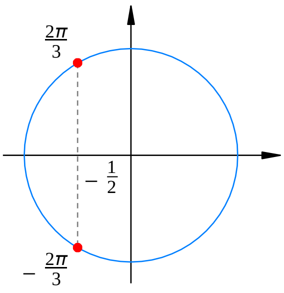
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 2:

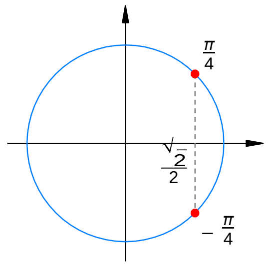
$cosx= -\frac{1}{2}$



$x =\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 3:

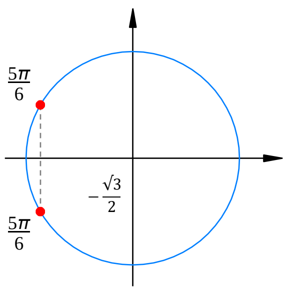
$cosx= \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in$ Z.

Пример 4:

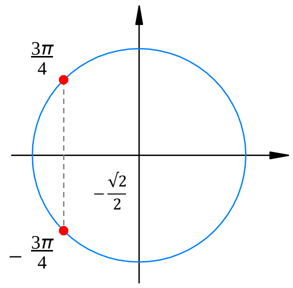
$cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$x= \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 5:

$cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

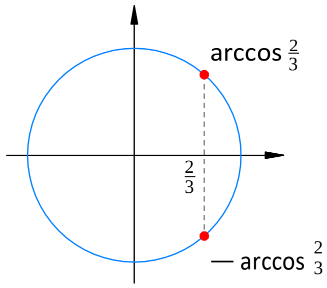


$x =\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 6:

$cosx = \frac{2}{3}$

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $\frac{2}{3}$:



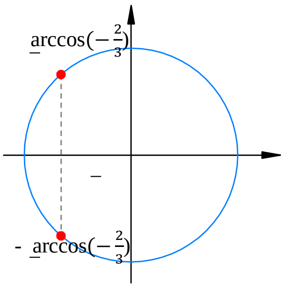
Верхняя точка отвечает углу arccos $\frac{2}{3}$: (напомним, что значения арккосинуса принадлежат отрезку $[0; \pi]$). Значит, решения данного уравнения описываются формулой:

$$x = \pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 7:

$\cos x = -\frac{2}{3}$

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $-\frac{2}{3}$:



Записываем ответ:

$x = \pm arccos(-\frac{2}{3}) + 2\pi n,\ n \in Z.$

Уравнение $\sin x = a$.

Для рассмотрения уравнения $\sin x = a$ достаточно определения синуса: $\sin x$ — это ордината точки x тригонометрической окружности, которая отвечает углу x.

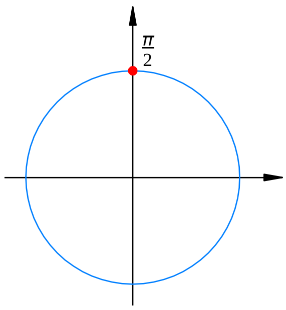
При $a > 1$ или $a < 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений, поскольку синус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу.

Если же $a \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечно много решений (снова вспомните статью «Обратные тригонометрические функции: прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sin x$ в бесконечном множестве точек).

Мы начинаем с уравнений, в правой части которых стоит табличное значение синуса.

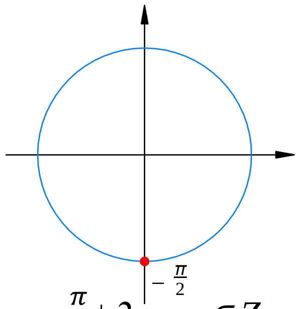
1. $\sin x = 1$.

На тригонометрической окружности имеется единственная точка с ординатой 1:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

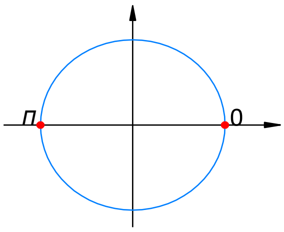
2. $\sin x = -1.$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

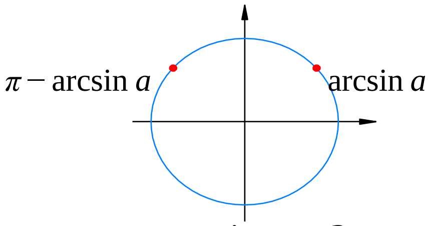
3. $\sin x = 0.$

На тригонометрической окружности имеются две точки с нулевой ординатой:



$$x = \pi n,\ n \in Z.$$

4. $\sin x = a$, при $|a| \le 1$

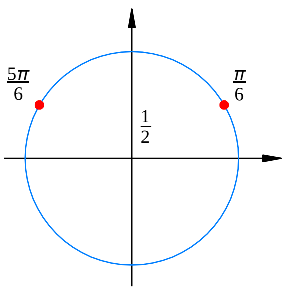


$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n,$$
$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z;$$
$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$$

Примеры решения тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$*:*

Пример 1:

$\sin x = \frac{1}{2}$



Возникает горизонтальная пара точек с ординатой $\frac{1}{2}$:

Правой точке соответствуют углы: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

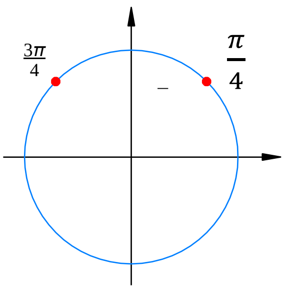
Левой точке соответствуют углы: $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Обе серии решений x_1 и x_2 можно записать в виде формулы $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$, в качестве множителя при ($1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\frac{\pi}{6}$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 2:

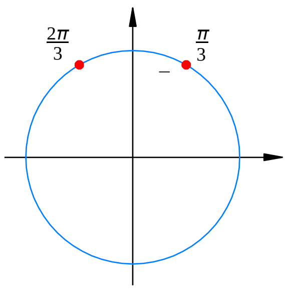
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 3:

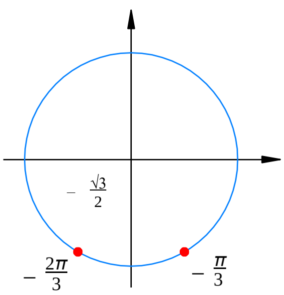
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$x=(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 4:

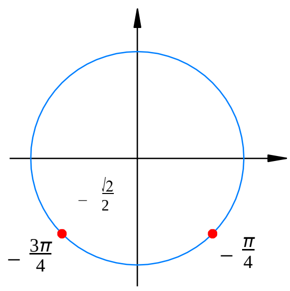
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 5:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

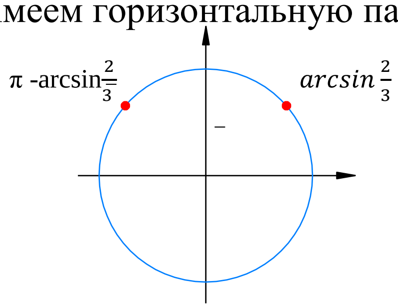


$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 6:

$sin\ x = \frac{2}{3}$

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $\frac{2}{3}$:



$x = (-1)^k\, arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in$ Z.

Уравнение $\mathbf{tg}\, x = a$.

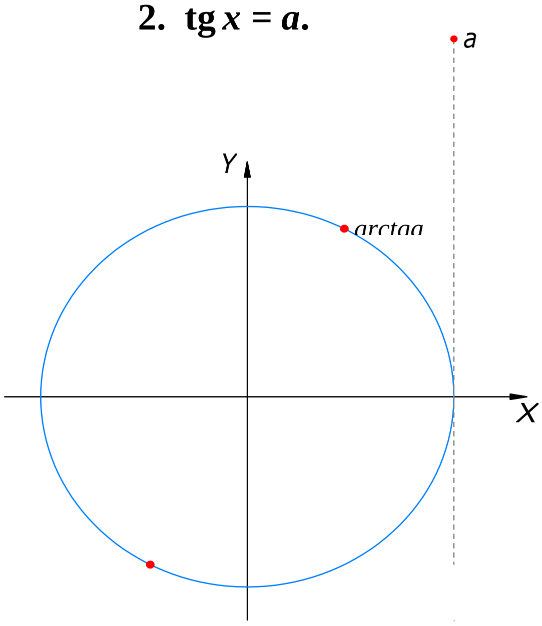
Вспомним, что тангенс может принимать любые значения (область значений функции y = tg x есть всё множество R). Стало быть, уравнение tg $x = a$ имеет решения при любом a.

1. tg x = 0.

Будучи записано в виде $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$, данное уравнение равносильно уравнению sin x = 0. Его решения, как мы знаем, имеют вид:

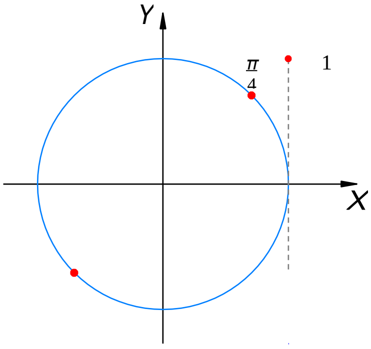
$$x = \pi n,\ n \in \text{Z}.$$

2. tg $x = a$.



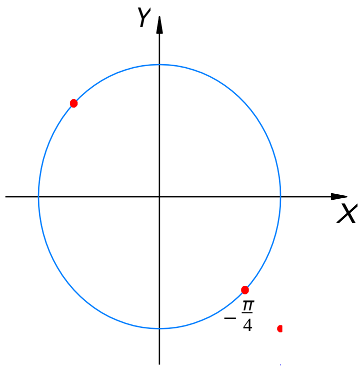
$$x = arctg\, a + \pi n,\ n \in Z.$$

3. tg *x* = 1.



$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

4. tg *x* = −1.

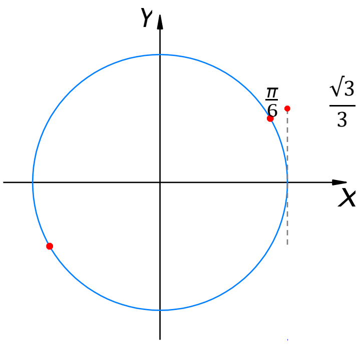


$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Примеры решения тригонометрических уравнений вида tg x = a:

Пример 1:

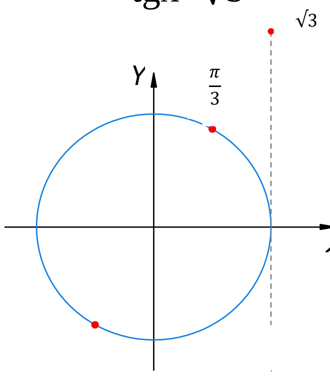
$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 2:

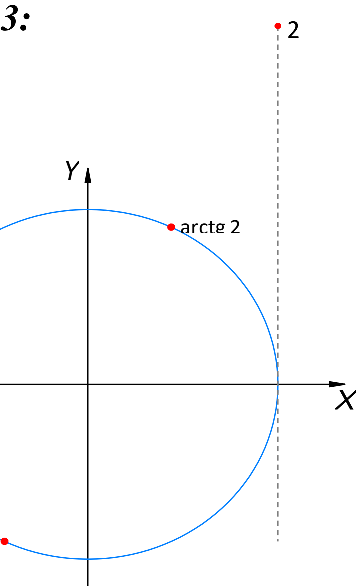
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 3:

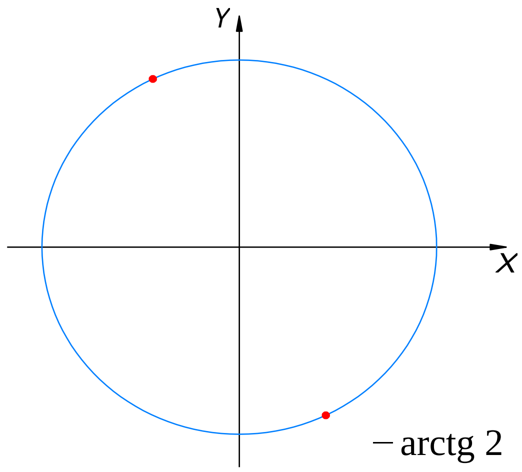
tg $x = 2$



$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 4:

tg x = - 2



Здесь мы воспользовались нечётностью арктангенса:

$arctg(-2) \ = \ -arctg\ 2.$

$x = -arctg\,2 + \pi n,\ n\ \in Z.$

Уравнение ctg x = a.

Уравнение $\boldsymbol{ctgx\ =a}$ можно не рассматривать отдельно, поскольку оно равносильно уравнению tg x $= \frac{1}{a}$ потому имеет решения x = arctg $\frac{1}{a}$, $+\,\pi$n (n ∈ Z).

Уравнение ctg $\boldsymbol{x = 0}$, будучи записано в виде $\frac{cosx}{sinx} = 0$, равносильно уравнению cos x = 0 и потому имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in$ Z.

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1) cos 2x = 1;
2) cos 3x = −1;
3) sin $\frac{x}{2}$ = −1;
4) sin 5x = 0;
5) sin $\frac{3x}{2}$ = 1;

6) $\cos\frac{x}{4} = 0$;

7) $\operatorname{tg} 2x = -1$;

8) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

9) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

10) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

11) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$;

12) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right) = 0$;

13) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0$;

14) а) Решите уравнение: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$;

15) а) Решите уравнение: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$;

16) а) Решите уравнение: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$; б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$;

17) а) Решите уравнение: $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$; б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$;

18) Решите уравнение: $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

19) Решите уравнение: $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение тригонометрического уравнения.
2. Какие тригонометрические уравнения являются простейшими?
3. Записать решение уравнения $\sin x = a$.
4. Записать решение уравнения $\cos x = a$.
5. Записать решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$.
6. Записать решение уравнения $\sin x = 0$.
7. Записать решение уравнения $\cos x = 0$.
8. Записать решение уравнения $\cos x = 1$.
9. Записать решение уравнения $\sin x = -1$.
10. Записать решение уравнения $\operatorname{tg} x = 0$.
11. Записать решение уравнения $\cos x = -1$.
12. Записать решение уравнения $\sin x = 1$.

ТЕМА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство (т.е. соотношение, в записи которого используется один из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$) называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина находится под знаком одной (или нескольких) тригонометрических функций.

Все тригонометрические неравенства можно разделить на две группы:

1) простейшие тригонометрические неравенства;
2) неравенства, сводящиеся к простейшим.

При решении простейших тригонометрических неравенств обычно используют следующие приемы:

1) с помощью тригонометрической окружности;
2) с помощью графиков тригонометрических функций.

Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию синус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию синус, т.е. неравенства вида:

$$\sin x > a,\ \sin x < a,\ \sin x \geq a,\ \sin x \leq a,\ \sin x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения одного из неравенств этой группы.

При решении неравенств вида $\boldsymbol{\sin x \geq a}$, например, с помощью единичной окружности поступают следующим образом: сразу используют тот факт, что синус – это ордината точки тригонометрической окружности. Далее рисуется декартова система координат и тригонометрическая окружность в ней. На оси ординат откладывается число, равное a (берётся из условия $\sin x \geq a$). Через полученную точку строится прямая, параллельная оси абсцисс. По отношению к имеющейся тригонометрической окружности эта прямая может занять одно из следующих трёх положений:

а) иметь с ней две общие точки (т.е. пересекать её в двух точках, расположенных симметрично относительно оси ординат). Заметим, что в этом случае число а будет удовлетворять условию

$$a \in (-1;1);$$

б) иметь только одну общую точку с ней (т.е. прямая касается тригонометрической окружности). В таком случае число a может быть равно 1 или –1;

в) не иметь общих точек с окружностью. Здесь либо $a \in (1; +\infty)$, либо $a \in (-\infty; -1)$;

В зависимости от того с каким случаем будем иметь дело, мы получим различные варианты ответа.

Если $a > 1$ (случай в), то неравенство $\sin x \geq a$, не имеет решений.

Если $a \leq -1$(сюда входят две ситуации: $a \in (-\infty;-1)$(случай в), $a = -1$ (Случай б), то неравенству $\sin x \geq a$ удовлетворяет любое значение x.

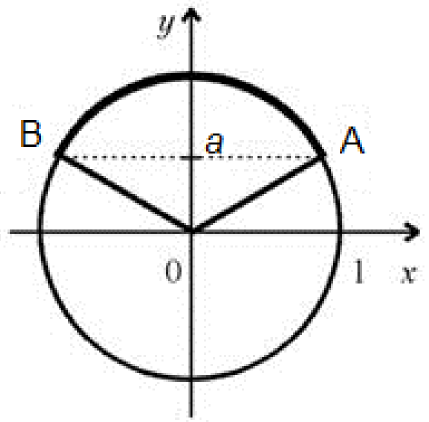


Рис. 6

Если $a \in (0;1)$ *(случай а),* то прямая АВ (рис. 6) разрежет окружность на две дуги. Кроме того из рисунка 6 видно, что данному неравенству будут удовлетворять лишь те точки, которые расположены на дуге *AB*, проходимой в положительном направлении (т.к. ординаты точек, расположенных на ней больше или равны *a*). Для удобства восприятия информации дугу *AB* выделяют либо штриховкой по внутреннему контуру окружности, либо линией большей толщины. Известно, что в таком случае точке А на тригонометрической окружности соответствуют числа

$x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$, в свою очередь точке В числа –

$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$.

Окончательное решение можно записать следующим образом:

$x \in [\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n],\ n \in Z$.

Если a=1(случай в), то прямая будет иметь только одну общую точку с тригонометрической окружностью, ордината этой точки будет равна 1, поэтому решением неравенства $\sin x \geq a$ будет

$x \in \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\},\ n \in Z$.

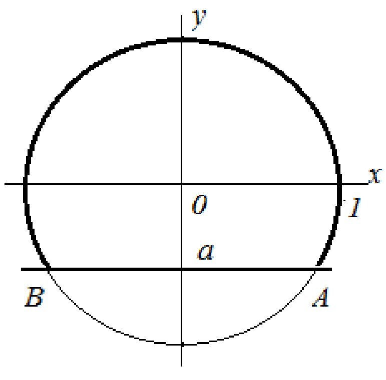


Рис. 7

Если $a \in (-1;0)$ *(случай а),* то прямая, параллельная оси абсцисс, разделит окружность на две дуги (рис. 7).

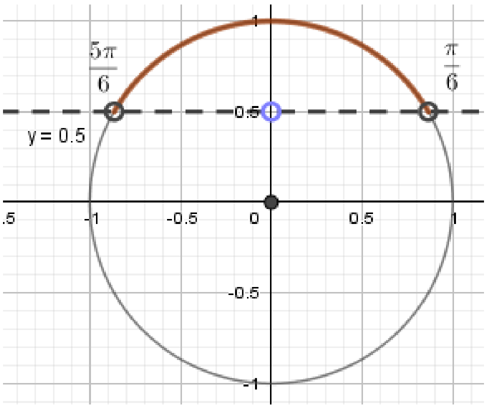
В таком случае решением неравенства будет:

$x \in [-\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n],\ n \in Z$.

Примеры решения тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$.

Пример 1:

$\sin x > \frac{1}{2}$;



1. Проводим горизонталь $y=\frac{1}{2}$, отмечаем точки пересечения (незакрашенные, т.к. неравенство строгое).

2. Решаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z,$

Подписываем точку справа $\frac{\pi}{6}$ и точку слева $\frac{5\pi}{6}$.

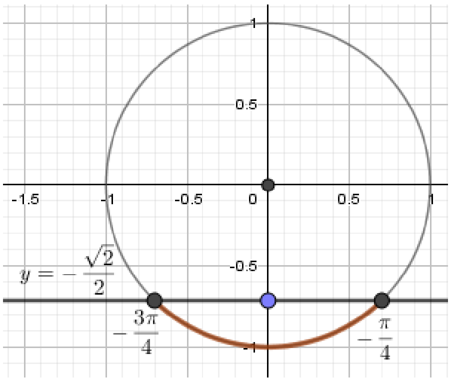
3. При обходе полученной дуги против часовой стрелки получаем интервал: $(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6})$.

Добавляем к концам интервала полный период.

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k),\ k \in Z.$

Пример 2:

$\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;



Проводим горизонталь у = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, отмечаем точки пересечения (закрашенные, т.к. неравенство нестрогое).

1. Решаем уравнение sin x = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $x_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$
   $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$
   $x = (-1)^k \arcsin(-\frac{\pi}{4}) + \pi k,\ k \in Z,$
2. Подписываем точку справа $-\frac{3\pi}{4}$ и точку слева $-\frac{\pi}{4}$.
3. При обходе полученной дуги против часовой стрелки получаем отрезок: $[-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}]$.
   Добавляем к концам интервала полный период.
   Ответ: $[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k]$, k ∈ Z.

Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию косинус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию косинус, т.е. неравенства вида:

$$\cos x > a,\ \cos x < a,\ \cos x \geq a,\ \cos x \leq a,\ \cos x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения одного из неравенств этой группы.

Шаг 1. В числовой окружности на оси косинусов отметить точку с абсциссой а. Провести вертикаль х = а, отметить точки её пересечения с окружностью.

Шаг 2. Решить уравнение cos$x$=a. Полученные базовые решения являются значениями точек пересечения, подписать их.

Шаг 3. Дуга числовой окружности **справа** от проведенной вертикали – искомое решение. Записать ответ, обходя дугу против часовой стрелки. Добавить к концам полученного интервала полный период.

Решение имеет вид: (- arccos a+2πk; arccos a +2πk), k ∈ Z.

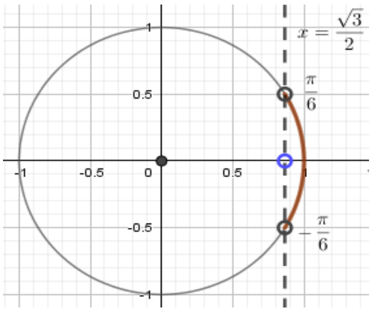
Алгоритм решения неравенства cos x ≥ a будет таким же, только точки на числовой окружности будут закрашенными, и в ответе будет отрезок (с квадратными скобками).

Алгоритм решения неравенства cos x < a будет отличаться тем, что в ответе нужно записывать дугу **слева** от вертикали x = a. При этом не забываем, что дугу нужно обходить в сторону возрастания, сверху вниз. Значение угла снизу должно быть больше, чем угла сверху.

Наконец, в неравенстве cos x ≤ a всё будет то же, что и в cos x <a. Только точки на концах будут закрашенными и войдут в ответ (с квадратными скобками).

Примеры решения тригонометрических неравенств вида
cos x >a, cos x< a, cos x ≥ a, cos x ≤ a.

Пример 1: $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



1. Проводим вертикаль $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, отмечаем точки пересечения (незакрашенные, т.к. неравенство строгое).

2. Решаем уравнение $\cos x= \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.

Подписываем точку снизу $-\frac{\pi}{6}$ и точку сверху $\frac{\pi}{6}$.

3. При обходе полученной дуги против часовой стрелки получаем интервал: $(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$. Добавляем к концам интервала полный период. Ответ: $(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию тангенс

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию тангенс, т.е. неравенства вида:

tg x >a, tg x< a, tg x≥ a, tg x≤ a, tg x ≠ a.

Представим далее алгоритм решения одного из неравенств этой группы.

Шаг 1. На оси тангенсов (касательной к числовой окружности в точке (1,0)) отметить точку с ординатой a. Провести луч из начала координат через отмеченную точку, отметить точку её пересечения с окружностью.

Шаг 2. Решить уравнение $\text{tg } x = a$. Полученное базовое решение является значением точки пересечения.

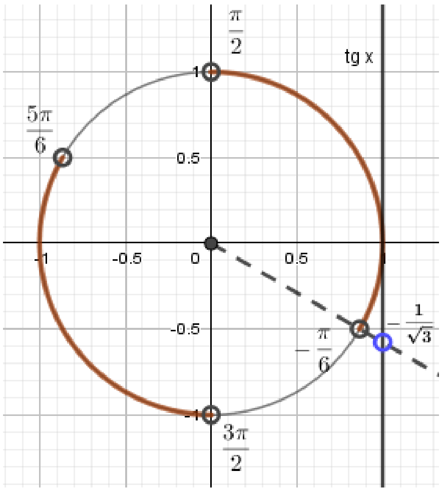
Шаг 3. Дуга числовой окружности от отмеченной точки до $\frac{\pi}{2}$ (в которой $\text{tg } x \to\infty$) – искомое решение. Записать ответ, обходя дугу против часовой стрелки. Добавить к концам полученного интервала полный период. Решение имеет вид:

$(\text{arctg } a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.

Примеры решения тригонометрических неравенств вида
tg x >a, tg x< a, tg x ≥ a, tg x ≤ a.

Пример 1:

tg x > - $\frac{\sqrt{3}}{3}$



1. На оси тангенсов отмечаем точку - $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Проводим луч из начала координат через эту точку.

2. Решаем уравнение tg x = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$

x = - $\frac{\pi}{6}$ + πk, k ∈ Z.

Подписываем точку снизу – $\frac{\pi}{6}$. Верхней границей интервала будет $\frac{\pi}{2}$, угол, в котором tg x →∞.

3. При обходе полученной дуги против часовой стрелки получаем интервал: (- $\frac{\pi}{6}$. ; $\frac{\pi}{2}$). Добавляем к концам интервала период для тангенса. Добавляем к концам интервала период для тангенса.

Ответ: (- $\frac{\pi}{6}$ + πk.; $\frac{\pi}{2}$ + πk), k ∈ Z.

Алгоритм решения неравенства tg x < a будет отличаться тем, что в ответе нужно записывать дугу от точки – $\frac{\pi}{2}$(в которой tg x →∞) до найденного арктангенса.

Для нестрогих неравенств будут получаться полуинтервалы, в которых точки ±$\frac{\pi}{2}$ (tg x→±∞) будут ограничены круглой скобкой, а найденные арктангенсы – квадратной.

Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию котангенс

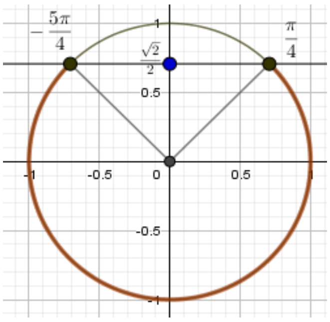
Решение неравенств с котангенсом аналогично решению с тангенсом. Для решения используется ось котангенсов (касательная к числовой окружности в точке (0;1)).

В неравенствах вида ctg x> a пределу ctg x→+∞ соответствует угол 0.
В неравенствах вида ctg x < a пределу ctg x→−∞ соответствует угол π.

Задания для самостоятельного решения:

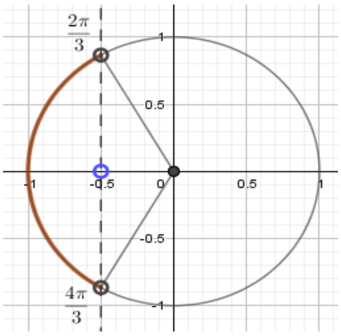
Решите неравенства:

1) $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

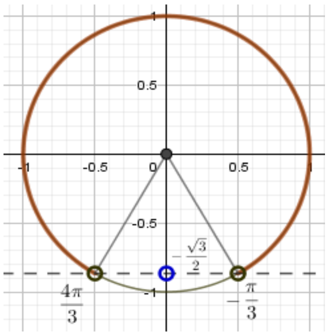


2) $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;

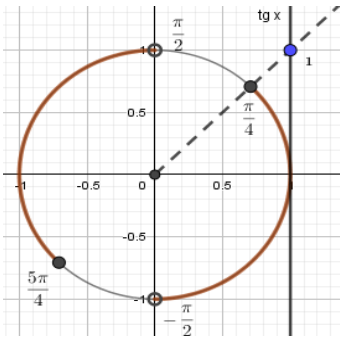
3) $\cos x < -\frac{1}{2}$;



4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;



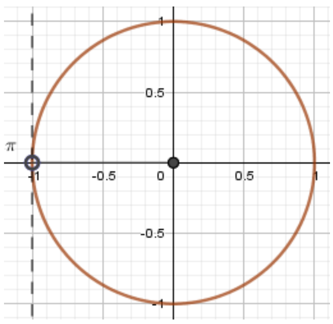
5) tg x ≥ 1;



6) cos x > -1;

Справа от вертикали x=−1 расположена вся числовая окружность, кроме точки π.

X ≠ π+2πk, k ∈ Z.

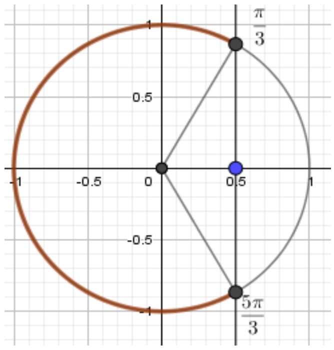


7) $4\cos^2\frac{x}{2} - 3 \le 0$;

$4\frac{1+\cos x}{2} \le 3$;

$2+2\cos x \le 3$;

$\cos x \le \frac{1}{2}$;



8) $\operatorname{tg} x \le 5$;

9) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$;

10) $\sin x < \frac{1}{3}$;

11) $\cos x \le 0{,}2$;

12) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$;

13) $\sin x > 2$;

14) $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$;

15) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

16) $\sin x > 0{,}5$;

17) $\cos x \ge -0{,}3$.

ТЕМА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Функция синус (y = sin x)

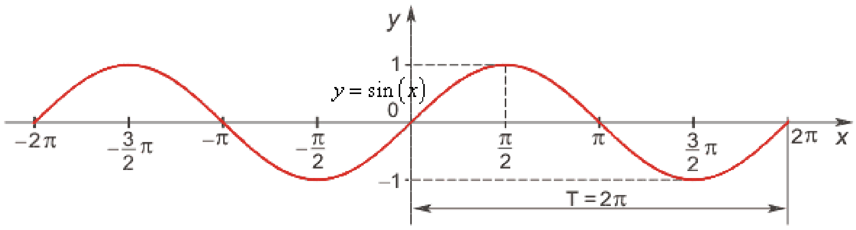


Рис. 8

Область определения функции — множество R всех действительных чисел.

Множество значений функции — отрезок [-1; 1].

Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in R$.

График функции симметричен относительно начала координат.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π: $\sin(x+2\pi\cdot k) = \sin x$, где $k \in Z$ для всех $x \in R$.

$\sin x = 0$ при $x = \pi\cdot k$, $k \in Z$.

$\sin x > 0$ (положительная) для всех $x \in (2\pi\cdot k,\ \pi+2\pi\cdot k)$, $k \in Z$.

$\sin x < 0$ (отрицательная) для всех $x \in (\pi+2\pi\cdot k,\ 2\pi+2\pi\cdot k)$, $k \in Z$.

Функция косинус (y = cos x)

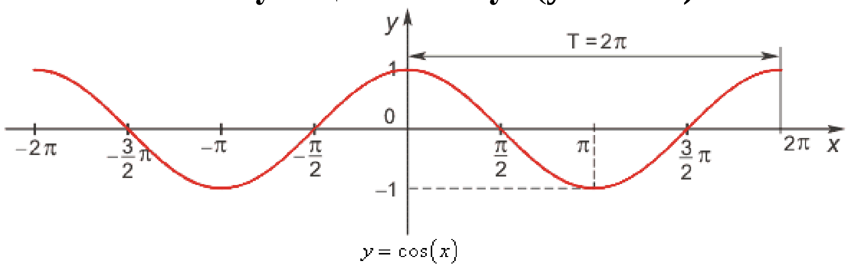


Рис. 9

Область определения функции — множество R всех действительных чисел.

Множество значений функции — отрезок [-1; 1].

Функция четная: cos(−x)= cos x для всех x ∈ R.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π: $\cos(x+2\pi\cdot k) = \cos x$, где $k \in Z$ для всех $x \in R$.

cos x = 0 при $x = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot k,\ k \in Z$.

cos x > 0 (положительная) для всех $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k),\ k \in Z$.

cos x < 0 (отрицательная) для всех $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k,\ \frac{3\pi}{2} + +2\pi\cdot k),\ k \in Z$.

Функция тангенс (y = tg x)

Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Множество значений функции — вся числовая прямая.

Функция нечетная: tg(−x)=−tg x для всех x из области определения.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т.е. $tg(x+\pi\cdot k) = tg\ x$, $k \in Z$ для всех x из области определения.

Функция возрастает на каждом из промежутков $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k)$, $k \in Z$.

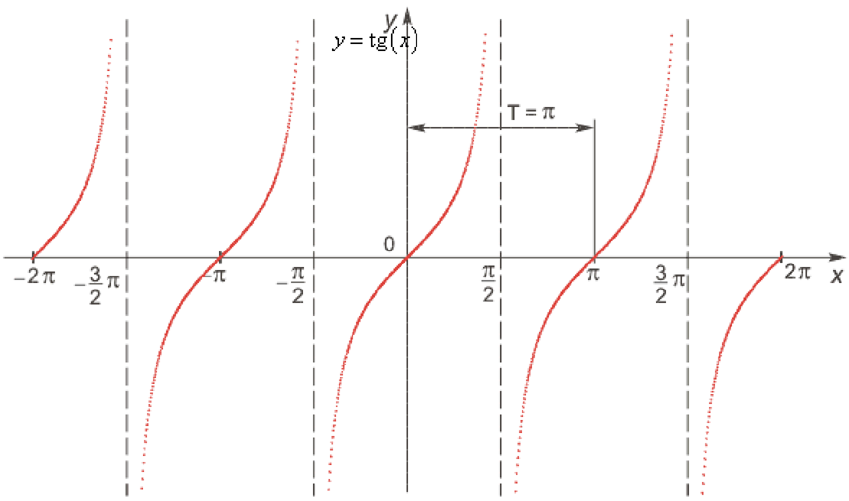


Рис. 10

Функция котангенс (y = ctg x)

Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел $x = \pi k,\ k \in Z$.

Множество значений функции — вся числовая прямая.

Функция нечетная: ctg(−x) =−ctg x для всех x из области определения.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т.е. ctg(x+$\pi \cdot k$) = ctg x, $k \in Z$ для всех x из области определения.

Функция убывает на каждом из промежутков x ∈ ($\pi \cdot k$, π+$2\pi \cdot k$), k ∈ Z.

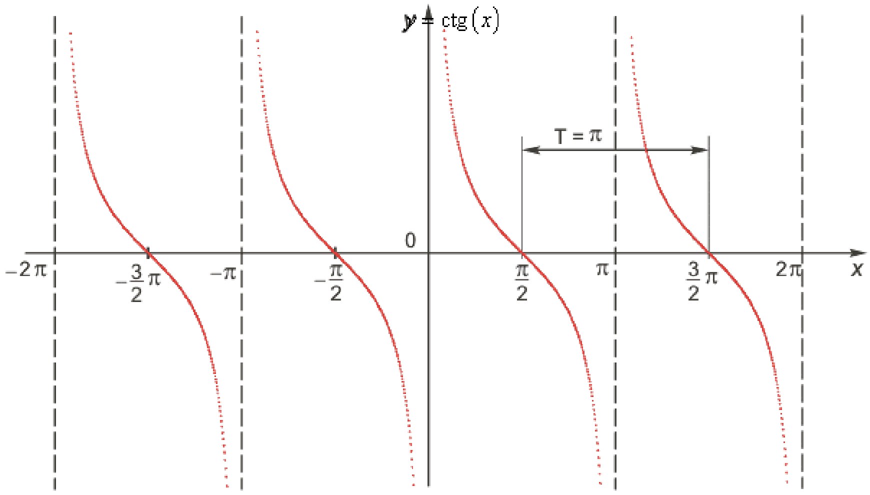
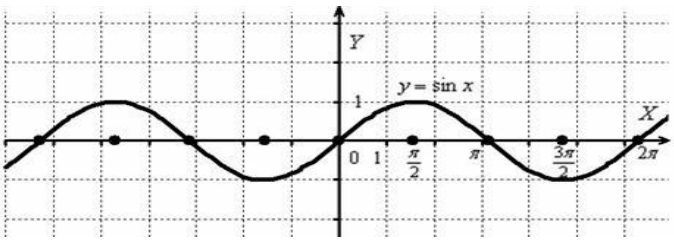


Рис. 11

Примеры заданий на построение графиков тригонометрических функций

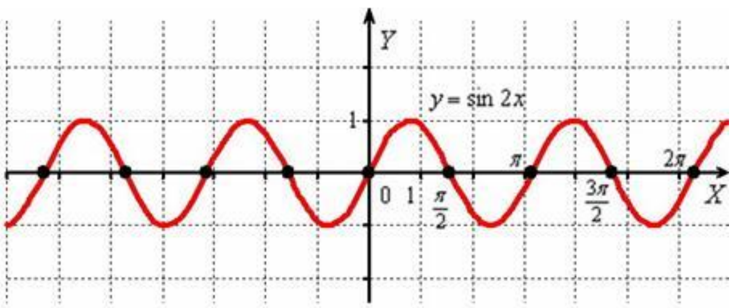
Пример 1: Построить график функции y = sin 2x

Сначала изобразим график синуса, его период равен T=2π:



Обратите внимание на масштаб в данных чертежах.

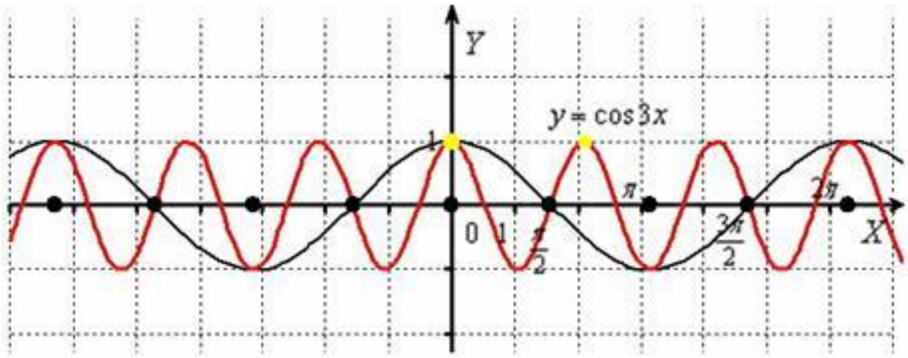
Чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку π≈3.14; π/2≈1.57; 2π≈6.28 и т.д., то есть на стандартном тетрадном листе в клетку аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра. Поэтому можно сделать это проще, зная поведение синусоиды. Мысленно возьмём синусоиду и сожмём её по оси OX в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ по оси абсцисс в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже сократился на половину: T=π

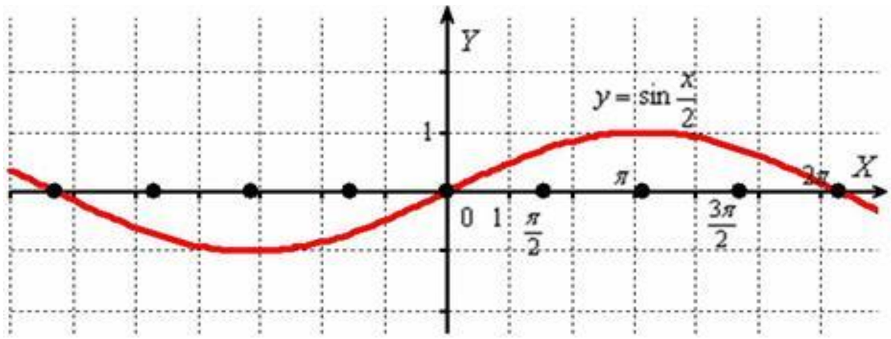
Пример 2: Построить график функции $y = \cos 3x$

График функции $y = \cos x$ сжимается по оси OX в 3 раза:



Итоговый график y=cos3x проведён красным цветом.
Исходный период T=2π косинуса закономерно уменьшается в три раза: T=$\frac{2\pi}{3}$, (отграничен жёлтыми точками).

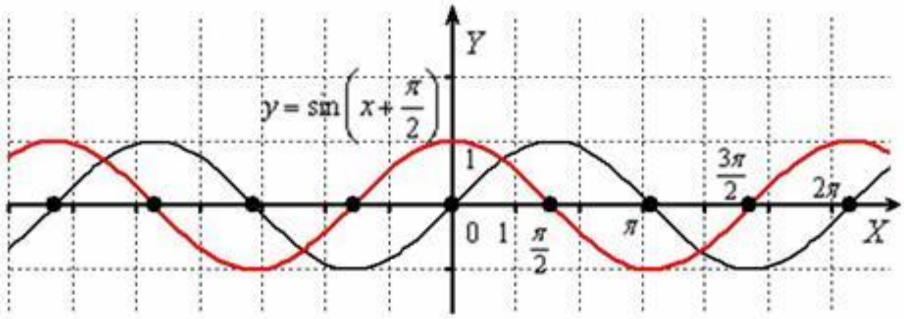
Пример 3: Построить график функции y=sin $\frac{x}{2}$, то есть растягиваем синусоиду по оси OX в 2 раза:



То есть, график функции y= sin $\frac{x}{2}$, получается путём растяжения графика y=sin x по оси абсцисс в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: T=2π×2=4π.

Пример 4: Построить график функции $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

График синуса y=sinx (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево:



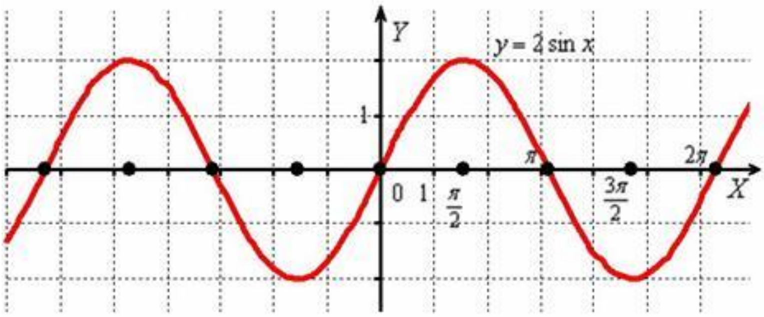
Внимательно присмотримся к полученному красному графику $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, это в точности график косинуса y=cos x.

По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию формулы приведения: $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

График функции y=cosx получается путём сдвига синусоиды y=sin x вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево.

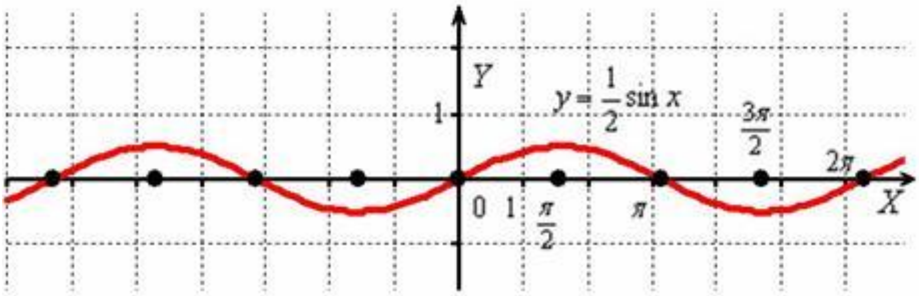
Пример 5: Построить графики функций y=2sin x, y=$\frac{1}{2}$ sin x.

Вытягиваем синусоиду вдоль оси OY в 2 раза:



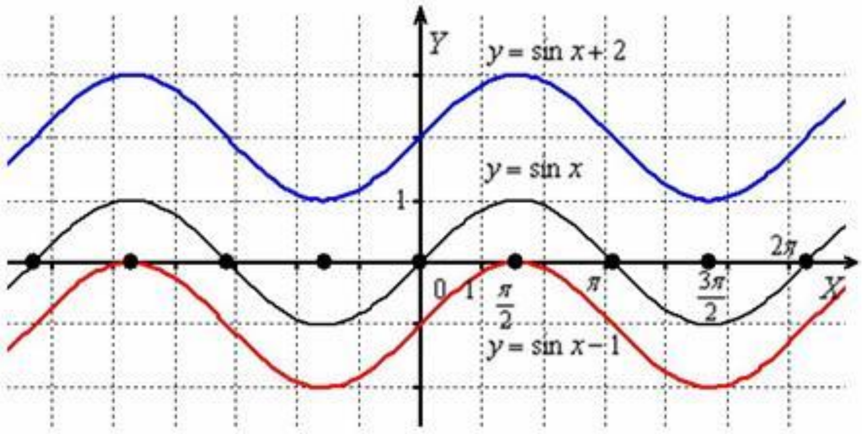
Период функции y=2 sin x не изменился и составляет T=2π, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились по модулю в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается E(y): y ∈ [-2;2].

Построение второго графика: сожмём синусоиду вдоль оси OY в 2 раза:



Аналогично, период T=2π не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза E(y): y ∈ [$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$].

Пример 6: Построить графики функций y=sin x + 2, y=sin x -1.



В первом случае переносим синусоиду на 2 единицы в вверх по оси OY. Во втором – вниз на 1 единицу по оси OY.

Графики обратных тригонометрических функций

Построим график **арксинуса: y = arcsin x:**

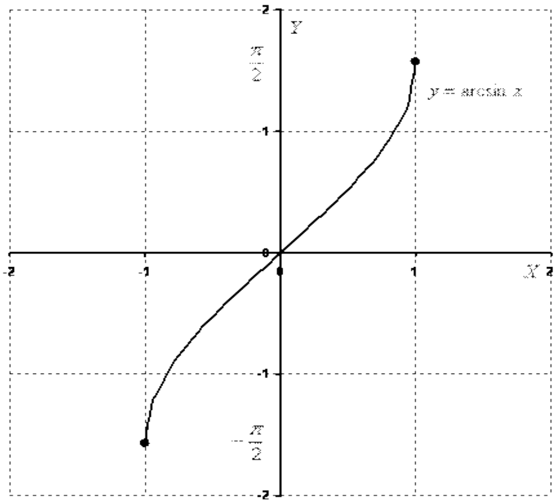


Рис. 12

Перечислим основные свойства функции y = arcsin x:
Область определения:D(y): x ∈ [-1;1].
Область значений: E(y): y ∈ $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
Арксинус – функция нечетная: arcsin(-x)=arcsin x.
Функция возрастает на всей области определения.
Асимптот нет.

Построим график **арккосинуса: y = arccos x.**

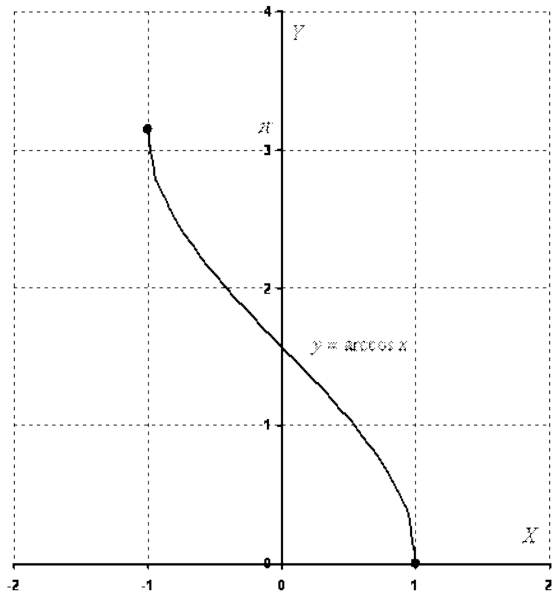


Рис. 13

Перечислим основные свойства функции y = arccos x:
Область определения:D(y): x ∈ [-1;1].
Область значений: E(y): y ∈ $[0;\ \pi]$.
Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
Функция убывает на всей области определения.
Асимптот нет.

Построим график **арктангенса: y = arctg x.**

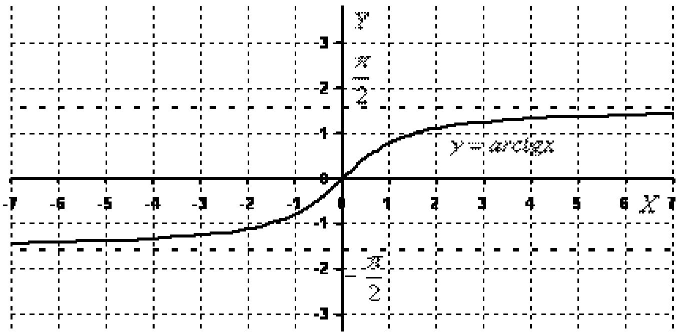


Рис. 14

Перечислим основные свойства функции y = arctg x:
Область определения множество всех действительных чисел.
Область значений: E(y): y ∈ $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.
Арктангенс – функция нечетная: arctg(-x)= arctg x.
Функция возрастает на всей области определения.
Горизонтальными асимптотами являются прямые y = $-\frac{\pi}{2}$; y = $\frac{\pi}{2}$.

Построим график **арккотангенса: y = arcctg x.**

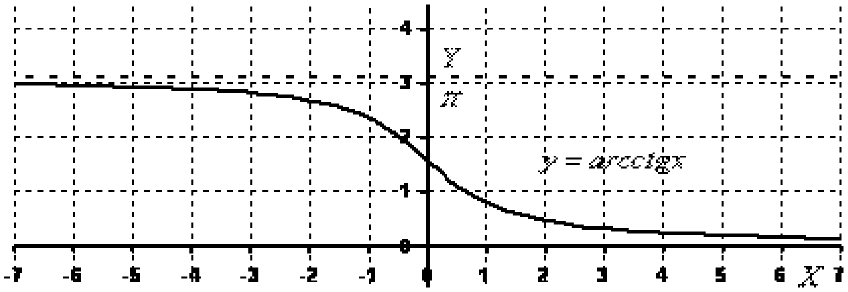


Рис.15

Перечислим основные свойства функции y = arcctg x:
Область определения множество всех действительных чисел.
Область значений: E(y): y ∈ $(0;\ \pi)$.
Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.
Функция убывает на всей области определения.
Горизонтальными асимптотами являются прямые y = 0; y = π.

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1) y = cos x + 2;
2) y = 2cos x;
3) y =cos (x + $\frac{\pi}{2}$);
4) y = tg 2x;
5) y =sin (x +$\frac{\pi}{4}$);
6) y = sin 2x + 1;
7) y = arcsin 3x;
8) y = cox $\frac{x}{4}$;
9) y = 2 cos (x +$\frac{\pi}{4}$);
10) y = sin $\frac{x}{2}$ - 2;
11) y =cos (x +$\frac{\pi}{2}$) + 1;
12) y = sin x - $\frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислить свойства функции y = sin x.
2. Перечислить свойства функции y = cos x.
3. Начертить график функции y = sin x.
4. Начертить график функции y = cos x.
5. Перечислить свойства функции y = tg x.
6. Перечислить свойства функции y = ctg x.
7. Начертить график функции y = tg x.
8. Начертить график функции y = ctg x.
9. Перечислить свойства функции y = arcsin x.
10. Перечислить свойства функции y = arccos x.
11. Начертить график функции y = arcsin x.
12. Начертить график функции y = arccos x.
13. Перечислить свойства функции y = arctg x.
14. Перечислить свойства функции y = arcctg x.
15. Начертить график функции y = arctg x.
16. Начертить график функции y = arcctg x.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тригонометрия, 10 класс учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.С., Теляковский С.А.- 10-е изд.-М.: Просвещение, 2012.

2.Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений /А.Н.Колмогоров, А.М. Абрамов и др.- 26-е изд.-М.: Просвещение, 2018.

3.Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017.

4. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. http://mathprofi.ru/
3. https://23.edu-reg.ru/

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА. ТРИГОНОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по изучению раздела «Тригонометрия»
для студентов 1 курса специальностей 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы», 11.02.16 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств», 11.02.17 «Разработка электронных устройств и систем», 12.02.10 «Монтаж, техническое обслуживание и ремонт биотехнических и медицинских аппаратов и систем», 15.02.10 «Мехатроника и робототехника (по отраслям)», 15.02.16 «Технология машиностроения»
очной формы обучения

Составители:
Рязанова Ольга Александровна
Журавлева Наталия Анатольевна
Тришина Наталья Викторовна

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор О.А. Рязановой

Подписано к изданию 08.11.2024
Уч.- изд. л. 2,4.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84