ЛЕКЦИЯ 1

Незатухающие колебания механических систем. Гармонический осциллятор.

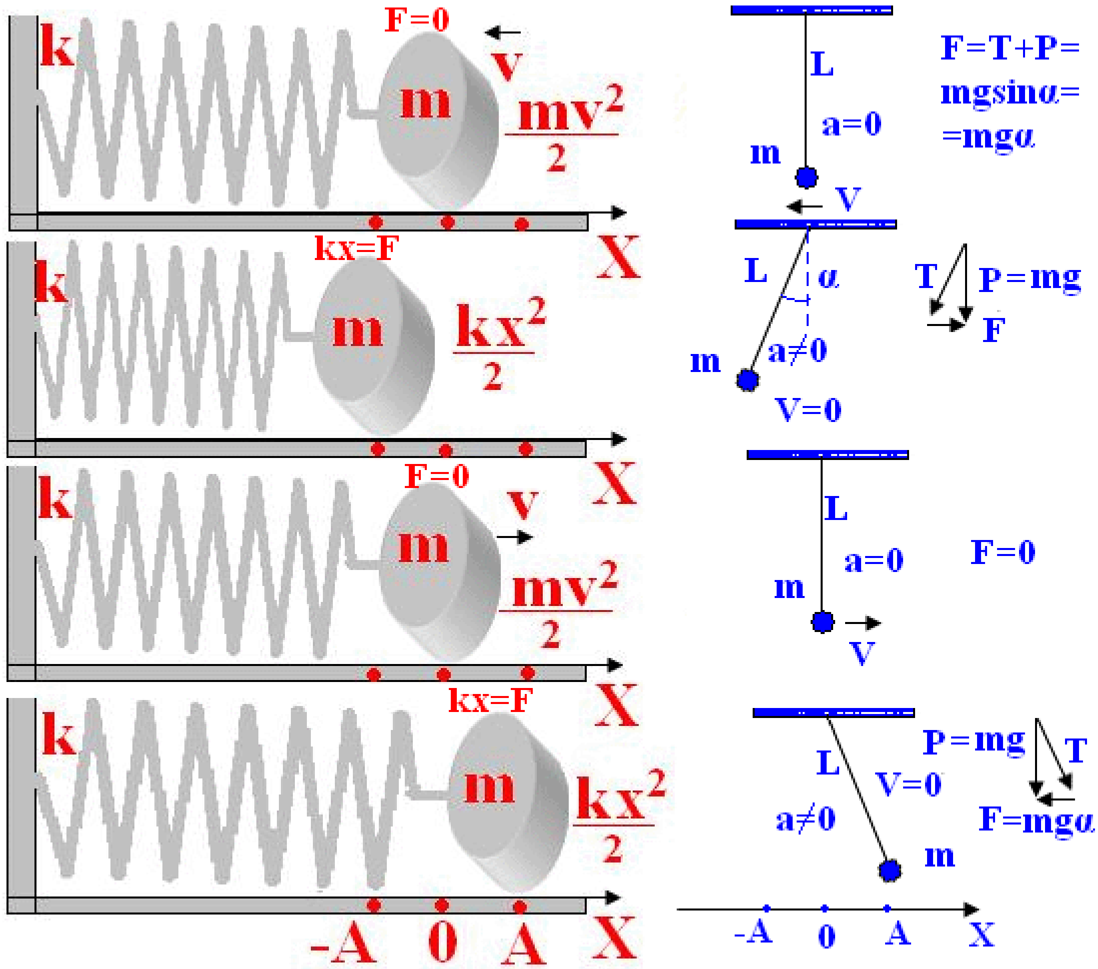


Рис. 1 – Ряд превращений механической энергии пружинного маятника и последовательность для энергии математического маятника при незатухающих колебаниях.

На рисунке 1 иллюстрация незатухающих колебаний, которые могут возникнуть при условии отсутствия диссипативных сил, как изнутри, так и снаружи представленных физических объектов. Это может быть, когда пружина абсолютно упругая, нить абсолютно нерастяжимая, а вокруг абсолютный вакуум, т.е. ситуация идеализированная.

Для пружинного маятника можно записать равенство силы (**ma**) возвращающей тело массой **m** силе упругости, которая, по закону Гука равна **kx**, сл-но, **ma=-kx.** По определению, ускорение есть вторая производная перемещения по времени, следовательно, $md^2x/dt^2+kx=0$, а заменив $k/m=\omega_0^2$, получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

это каноническое дифференциальное уравнение для незатухающих колебаний, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклическая (круговая) собственная частота, а

$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ – период колебаний. Решение канонического дифференциального уравнения даёт уравнение движение:

$$\boldsymbol{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)} \quad (2),$$

где **x** – отклонение материальной точки от положения равновесия в момент времени **t**; A – максимальное отклонение материальной точки от положения равновесия; **(ω_0t+φ)=Φ–** фаза колебания в момент времени **t**; **φ –** фаза колебания в момент времени **t=0**, т.е. начальная фаза. Определения для физического термина «фаза колебания» будет $\Phi = \mathbf{arccos}\frac{\mathbf{x(t)}}{\mathbf{A}}$**;** отношение (в угловой мере) отклонения в момент времени **t** к максимальному отклонению.

Аналогично, для математического маятника можно записать равенство силы (**ma**) возвращающей тело массой **m** силе **F=mgsin**$\boldsymbol{\alpha}$, как видно из схемы действия сил (см. рис.), при условии малого отклонения нити математического маятника от положения равновесия, $\boldsymbol{\alpha = sin\alpha = tg\alpha = x/L}$ **F=mgsin** $\boldsymbol{\alpha = mgx/L}$ сл-но, **ma=-** $\boldsymbol{mgx/L}$ **.** Получаем дифференциальное уравнение **d^2x/dt^2+** $\boldsymbol{gx/L}$ **=0**, а заменив **g/L=ω_0^2**, получим $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ получим (1) каноническое дифференциальное уравнение для незатухающих колебаний, где $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$ – собственная частота, а $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ – период колебаний. Решение канонического дифференциального уравнения даёт уравнение движение (2): $\boldsymbol{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$. Для пружинного и математического маятника, мы получили идентичные уравнения движения для незатухающих колебаний. Инициирует колебательный процесс, в первом случае, сила упругости пружины (**F=kx**), а во втором, равнодействующая сил гравитации и натяжения нити (**F=mgx/L**). В обоих случаях, сила имеет прямо пропорциональную зависимость от отклонения м.т. из положения равновесия, что приводит к идентичным уравнениям.

Физическую систему, совершающую процесс, описываемый уравнением (1), называют ***гармоническим осциллятором***. Также общепринято называть колебания гармоническими, если **F/x=const** и уравнение движения материальной точки можно записать набором гармонических функций синуса и косинуса, сл-но, пружинный и математический маятник совершают гармонические колебания. Аналогичные рассуждения можно применить к физическому маятнику, а также к любому физическому объекту (системе) при условии отсутствия диссипативных сил и убедится, что будет получено каноническое уравнение $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$**,** которое называют уравнением гармонического осциллятора. Это уравнение применимо для широкого перечня физических объектов от микрочастиц (электрон внутри атома, атом, молекула) до планетных систем и скопления галактик.

Если координату гармонического осциллятора (пружинный, математический маятник и т.д.) обозначить **X**, а импульс - **p**, то полная механическая энергия [под действием консервативных (упругость, гравитация) сил и исключительного отсутствия диссипативных (трение) сил], которая по закону сохранения не изменяется во времени, может быть записана суммой кинетической и потенциальной энергий: $const = \frac{\mathbf{p^2}}{\mathbf{2m}} + \frac{\mathbf{kX^2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{p^2}}{\mathbf{2m}} + \frac{\mathbf{m\omega_0^2X^2}}{\mathbf{2}}$.

Следовательно, $1 = \frac{\mathbf{p^2}}{\mathbf{2mE}} + \frac{\mathbf{X^2}}{\mathbf{2}E/\mathbf{m}\omega_0^2}$. Это уравнение, изображенного на рисунке эллипса, который называется фазовой траекторией гармонического осциллятора. Координатную плоскость (**X p**) называют фазовой плоскостью (см. рис. 2).

Площадь эллипса имеет размерность момента импульса гармонического осциллятора и равна произведению полуосей, умноженному на $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{\pi}\sqrt{\mathbf{2m}E}\sqrt{\mathbf{2}E/\mathbf{m}\omega_0^2} = \mathbf{2}\pi\frac{E}{\omega_0} = \acute{\mathbf{L}}$. Таким образом, для гармонического осциллятора величина запасенной энергии неизменна, величины импульса и момента импульса изменяются в процессе колебаний, как по величине, так и по направлению. Площадь (**Ĺ**) фазовой плоскости, ограниченная фазовой траекторией гармонического осциллятора, неизменна во времени при отсутствии диссипативных сил **Ĺ=2πE/ω=E/ν$_0$**, таким образом, полная энергия гармонического осциллятора $E=\nu_0$ Ĺ, где $\nu=2\pi\omega_0$ – частота его колебаний. Поскольку, **dĹ=PdX,** и $\acute{L} = \int \mathbf{PdX}$, то энергию гармонического осциллятора можно записать (см. рис. 2)

$$E = \boldsymbol{\nu_0} \int \mathbf{PdX}, \qquad (3),$$

соотношение (3) пригодится нам в третьем семестре. (!)

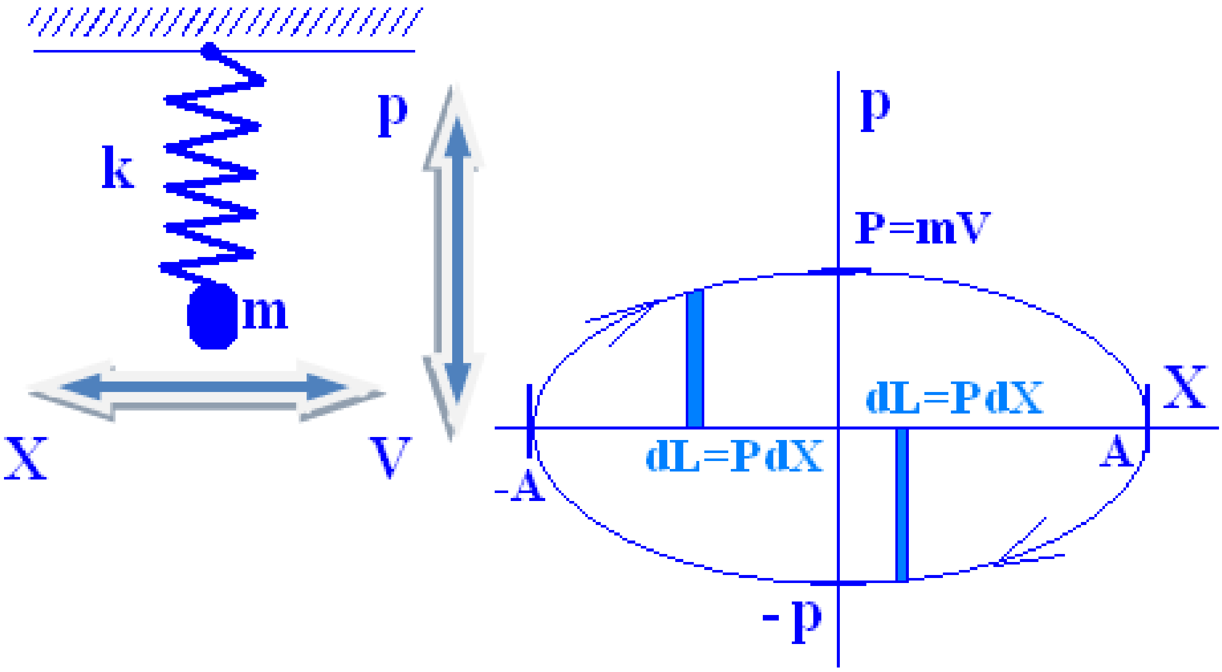


*Рис. 2– Фазовая траектория гармонического осциллятора в координатной плоскости (**X p**).*

Если продифференцировать выражение (2) по времени, получим скорость движения материальной точки в процессе гармонических колебаний

$$V = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -V_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4),$$

а дифференцируя дважды, получим величину ускорения

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -a_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5),$$

как видно, смещение из положения равновесия и ускорение изменяются в противофазе.

Кинетическая энергия гармонического осциллятора:

$$E_{кин}=mV^2/2=\frac{mA^2\omega_0^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (6).$$

Потенциальная энергия гармонического осциллятора:

$$E_{пот}=kx^2/2=\frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (7).$$

$$E_{пол}=E_{кин}+E_{пот}=\frac{kA^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \quad (8)$$

Уравнение полной энергии не содержит **t**, т.е. не зависит от времени.

Очевидно, что обнаружить гармонический осциллятор на оси X в интервале [-A, A] будет событием достоверным, т.е. его вероятность W=1. Плотность вероятности, как f(x)=dW/dx представлена на рисунке 3 и иллюстрирует тот факт, что вероятность обнаружить гармонический осциллятор вблизи положения равновесия намного меньше вероятности его обнаружения рядом с амплитудным значением отклонения от положения равновесия, поскольку $\mathbf{S_1}>\mathbf{S_2}$. Соотношение $W = \int f(x)\,dx = 1$ называется условием нормировки и отражает факт нахождения гармонического осциллятора в интервале [-A, A].

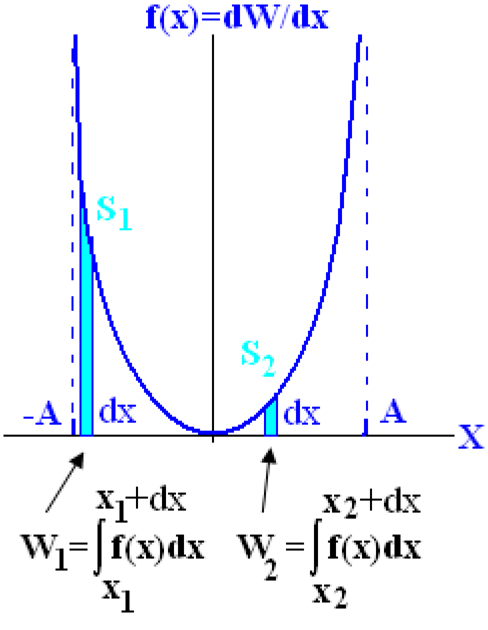


*Рис. 3– Плотность вероятности нахождения гармонического осциллятора в интервале координат (**-A, A**) на оси X.*

ЛЕКЦИЯ 2

2.1. **Затухающие колебания механических систем.**

Для иллюстрации затухающих колебаний можно использовать прежний рис. 1 ЛЕКЦИЯ 1, но добавить действие диссипативных сил, как изнутри (например, внутренне трение - взаимодействие атомов внутри пружины), так и снаружи (например, трение о воздух) представленных физических объектов. Т.е. пружина не абсолютно упругая, нить не абсолютно нерастяжимая, а вокруг среда (газ, жидкость), т.е. ситуация реальная. Для малой амплитуды и небольшой скорости колебаний сила трения пропорциональна величине скорости:

$$f = -rV = -r\dot{x} \qquad (9),$$

где r – коэффициент сопротивления, который зависит от вязкости и внутреннего трения окружающей среды; V – скорость движения тела в этой среде.

В новых реальных условиях для пружинного маятника можно записать вместо уравнения (1):

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (10),$$

где $\boldsymbol{\beta = r/2m}$, а заменив $\mathbf{k/m = \omega_0^2}$.

Это дифференциальное уравнение затухающих колебаний, но $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{k}{m}}}$ – собственная частота, т.е. частота с которой совершаются незатухающие колебания. Решая дифференциальное уравнение, получим уравнение движения для затухающих колебаний:

$$\boldsymbol{x(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)} \qquad (11),$$

где $\boldsymbol{x(t)}$ – отклонение материальной точки от положения равновесия в момент времени **t**; $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\beta t}}$ – амплитуда затухающих колебаний; **β** – коэффициент затухания; **ω** – частота затухающих колебаний; **(ωt+φ)=Φ**– фаза колебания в момент времени **t**; **φ** – фаза колебания в момент времени **t=0**, т.е. начальная фаза.

Собственная частота свободных колебаниях (**ω_0**) и частота затухающих колебаний (**ω**) связаны соотношением:

$$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2} \qquad (12),$$

следовательно, период затухающих колебаний

$$\mathrm{T} = \boldsymbol{2\pi} \Big/ \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (13).$$

При незначительном сопротивлении среды **($\beta \ll \omega_0$)**: **$\omega = \omega_0$**; частота и период колебаний затухающих колебаний совпадают с соответствующими характеристиками свободных (незатухающих) колебаний.

Для характеристики затухающих колебаний используют величину, называемую ***Декремент затухания***, определяемый, как

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta t} \qquad (14),$$

а натуральный логарифм этой величины – ***логарифмическим декрементом затухания***:

$$\lambda = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = lne^{\beta T} = \beta T \qquad (15).$$

Физический смысл логарифмического декремента затуханий: это величина обратная числу колебаний совершаемых за время уменьшения амплитуды колебания в **e** раз.

Ещё одна характеристика системы, совершающей затухающие колебания, - ***Добротность***:

$$\mathbf{Q=\pi/\lambda=\pi/\beta T} \qquad (16).$$

Ранее (Лекция 1) было показано, что в фазовой плоскости **(X p)** траектория гармонического осциллятора имеет форму эллипса. Для гармонического осциллятора, совершающего свободные незатухающие колебания, величина запасенной энергии неизменна. Для медленно затухающих колебаний при условии **β<<ω** импульс осциллятора определен, как:

$$\boldsymbol{P = mV = m\dot{x} = \frac{d\{A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)\}}{dt} = -mA\beta\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi) - mA\omega\mathrm{e}^{-\beta t}sin(\omega t+\varphi) = -mA\mathrm{e}^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t+\varphi) + \omega sin(\omega t+\varphi)] = -mA\omega\mathrm{e}^{-\beta t}sin(\omega t+\varphi)} \qquad (17)$$

Модуль импульса системы, совершающей затухающие колебания, со временем постоянно убывает по закону: $\boldsymbol{P = mA\omega\mathrm{e}^{-\beta t}}$.

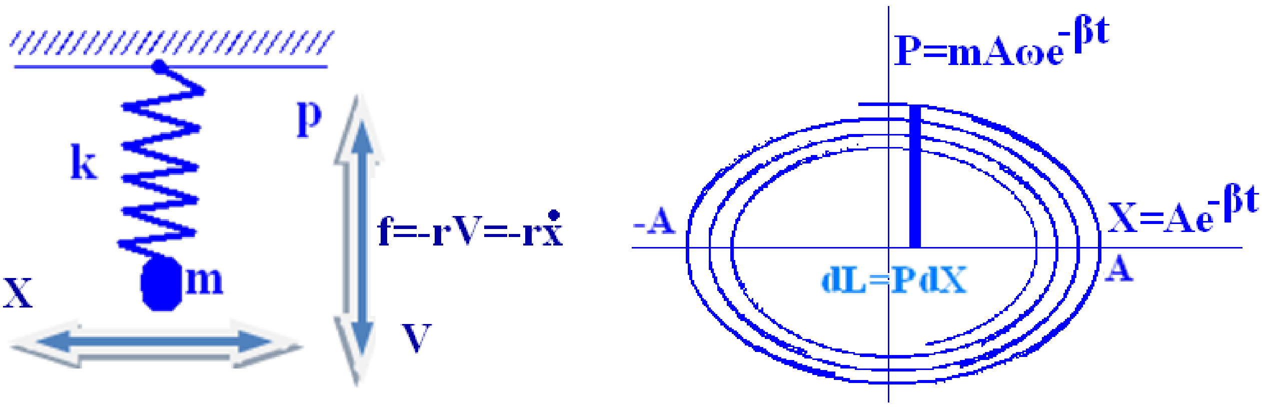


Рис. 3– Фазовая траектория осциллятора, совершающего затухающие колебания, в координатной плоскости ***(X p)***.

Итак, фазовая траектория осциллятора, иллюстрирует тот факт, что в процессе затухающих колебаний происходит закономерное (экспонента) убывание амплитуды, механической энергии, модуля импульса и момента импульса механической системы.

2.2. **<u>Вынужденные колебания механических систем.</u>**

Вынужденными колебаниями механической системы называют колебания, возникающие под действием внешней периодической силы, которая изменяется по гармоническому закону $f = F_0 cos\omega t$.

Дифференциальное уравнение движение (10) в этом случае принимает вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 cos\omega t \qquad (18),$$

где $f_0 = F_0/m$, $\beta = r/2m$.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \psi) \qquad (19),$$

$$\text{где } A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}, \qquad (20)$$

$$\psi = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (21)$$

Сумма уравнений (11) и (19) даёт общее решение уравнения (18):

$$x(t) = A e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \quad (22).$$

Иллюстрация уравнений движения **x(t)** материальной точки, совершающей незатухающие, затухающие и вынужденные колебания представлены на рисунке 4.

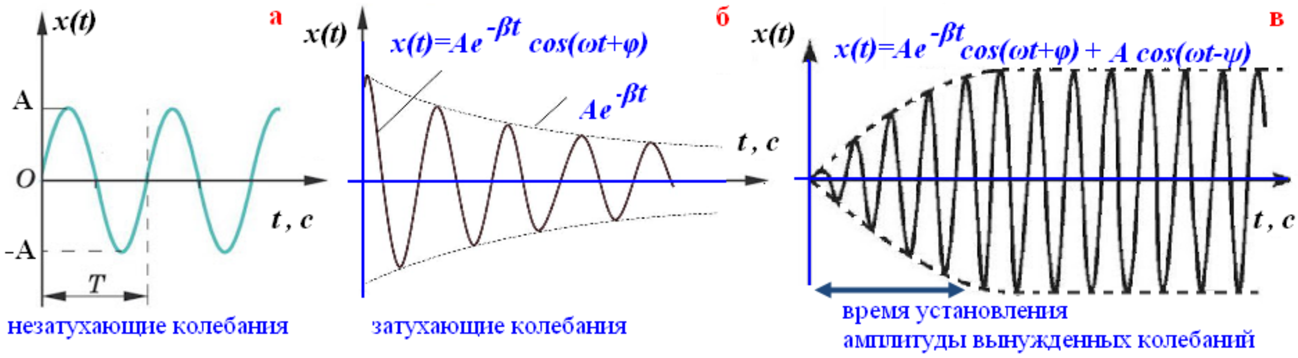


Рис. 4– Графическая иллюстрация свободных незатухающих (а), затухающих (б) и вынужденных (в) колебаний механической системы.

<u>Резонанс для колебаний механической системы.</u> Резкое возрастание амплитуды колебания механической системы называют РЕЗОНАНСОМ. Условие резонанса: сближение частоты колебаний вынуждающей силы и собственной частоты колебаний механической системы. Поскольку собственная частота колебаний величина неизменная (без изменения самой системы), то резонанс возникает и исчезает при изменении частоты вынуждающей силы. Чтобы найти максимальную величину амплитуды при резонансе необходимо продифференцировать выражение (20), приравнять производную нулю и получить:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0 \qquad (23).$$

Уравнение (23) имеет три решения ω=0 и $\omega = \mp\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Очевидно, что равенство нулю означает отсутствие колебательного процесса, а частота с отрицательным знаком не имеет физического смысла. Остается единственное решение для резонансной частоты вынуждающей силы:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{резонанса}} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \qquad (24).$$

Подставляя (24) в (20), получим:

$$\boldsymbol{A}_{\text{резонанса}} = \frac{\boldsymbol{f_0}}{\boldsymbol{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} \qquad (25).$$

Из соотношения (25) следует, что при отсутствии сил трения (β=0) частота резонанса совпадает с собственной частотой системы и амплитуда резонанса обращается в бесконечность, т.е. наступает разрушение механической системы. Согласно (12) при β~0 $\boldsymbol{A}_{\text{резонанса}} = \frac{\boldsymbol{f_0}}{\boldsymbol{2\beta\omega}}$.

На рисунке 5 представлены амплитудно-частотные зависимости, характеризующие вынужденные колебания механической системы для разных условий сопротивления среды.

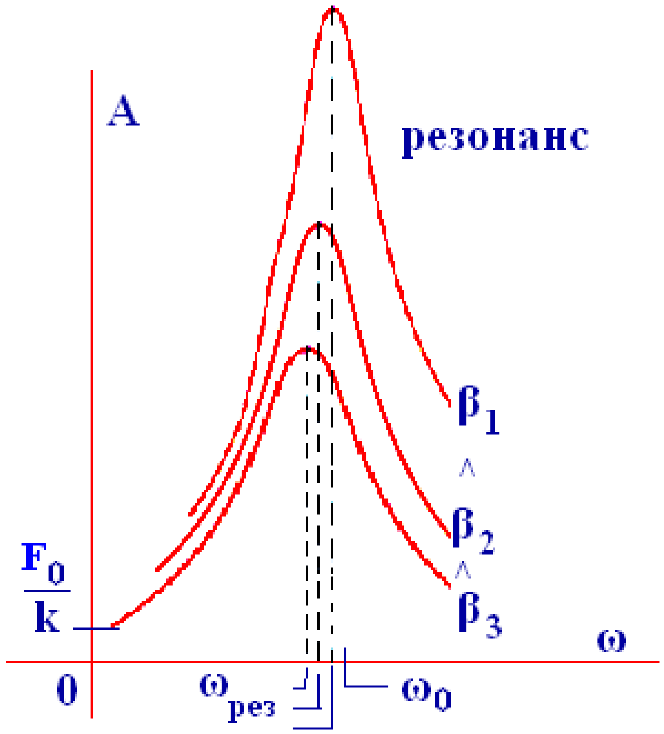


Рис. 5– Графическая иллюстрация явления резонанса – амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)) вынужденных колебаний механической системы; с увеличением сопротивления среды (β_1<β_2<β_3) уменьшается резонансная частота (ω_3>ω_3>ω_3).

АЧХ, представленные на рис. 5 называют резонансными кривыми. Из анализа резонансных кривых можно заметить, что при стремлении к нулю частоты вынуждающей силы - амплитуда достигают наименьшей величины F_0/k – смещение из положения равновесия под действием силы F_0. При стремлении частоты вынуждающей силы к бесконечности все АЧХ асимптотически стремятся к нулю, т.е. механическая система не успевает реагировать на внешнее воздействие и не смещается из положения равновесия, т.е. колебаний нет. Чем меньше сопротивление среды или меньше диссипативные силы, тем острее максимум АЧХ и сильнее явление резонанса.

Из уравнения (25) следует, что при $\beta \ll \omega_0$:

$$\boldsymbol{A}_{\text{резонанса}} \approx \frac{\boldsymbol{f_0}}{\boldsymbol{2\beta\omega_0}} \qquad (26).$$

$$\frac{\mathrm{A}_{\text{рез}}}{\mathrm{x}_{\boldsymbol{0}}} = \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\boldsymbol{2\beta}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{2\beta}\mathrm{T}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{Q} \qquad (27)$$

Таким образом, добротность колебательной системы равна отношению амплитуды при резонансе к смещению из положения равновесия при действии постоянной силы той же величины.

Вынужденные колебания всегда отстают по фазе от вынуждающей силы. В момент резонанса при условии $\omega_{\text{рез}} \sim \omega_0$ это отставание $\Delta\varphi \sim \pi/2$.

ЛЕКЦИЯ 3

3.1. **Распространение колебания в упругой среде.**

Если частица совершает гармонические колебания по закону: $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \psi)}$ в упругой среде (твёрдой, жидкой, газообразной), то колебания будут передаваться соседним частицам этой среды с сохранением частоты этих колебаний. На рис.1 дана иллюстрация процесса возникновения и распространения колебания частиц упругой среды. Исходно не деформированная среда (рис.1а) после взаимодействия с источником колебаний разделена на области, которые растянулись (на рис.1б обозначены красным цветом) или сжались (на рис.1б обозначены синим цветом).

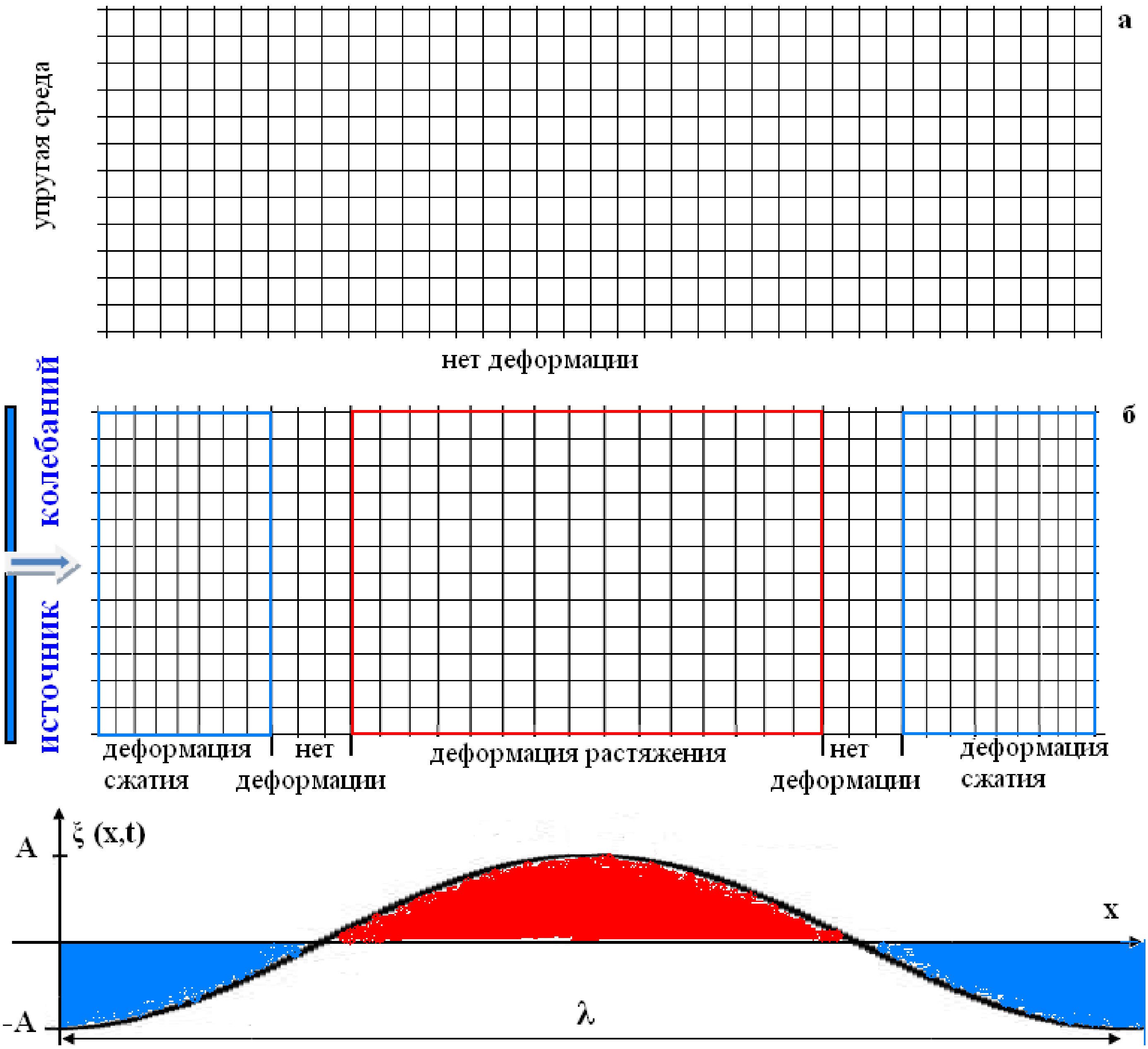


Рис. 1. – Иллюстрация процесса распространения деформации в упругой среде. Направление колебаний частиц упругой среды и направление распространения волнового фронта совпадают – плоская, продольная волна

Если величину отклонения частицы упругой среды от положения равновесия обозначить через **ξ(x,t)**, то с удалением от источника колебаний она изменяется так, как представлено на графике (рис.1). Очевидно, что чередование областей деформирования упругой среды означает перенос энергии колебаний в направлении от источника колебаний. На расстоянии **λ** происходит повторение фазы колебания, а именно, частица упругой среды, преодолев максимальную величину деформации сжатия, двигается к положению равновесия. Если период колебаний **T**, а скорость распространения колебаний в упругой среде обозначить ***V***, то

$$\lambda = V\,T \qquad (1).$$

<u>Процесс распространения колебаний с переносом энергии, но без переноса частиц материи в пространстве называют волновым процессом.</u>

На рис. 1 источник колебаний имеет форму плоской пластины, поэтому такой волновой процесс будет именоваться ***<u>плоской волной</u>***. Если источник имеет симметрию цилиндра или сферы, то соответствующие волновые процессы именуются *цилиндрическими и сферическими волнами*. ***<u>Волновой поверхностью</u>*** называется геометрическое место точек упругой среды, которые совершают колебания в одной фазе (синфазно). ***<u>Волновым фронтом</u>*** называют волновую поверхность на границе разделяющей область упругой среды (где колебания уже совершаются) и не возмущенной области (где колебания ещё не начались). Волновой процесс называют ***<u>продольной волной</u>***, если направление колебаний частиц упругой среды и направление распространения волнового фронта совпадают (рис. 1 б). Волновой процесс называют ***<u>поперечной волной</u>***, если направление колебаний частиц упругой среды и направление распространения волнового фронта взаимно перпендикулярны. Иллюстрацию волнового процесса – поперечной волны можно представить, если источник колебаний воздействует на упругую среду не перпендикулярно её поверхности (как на рис. 1б), а по касательной (тангенциально). Легко догадаться, что тангенциальное воздействие (по касательной) на поверхность жидкой или газообразной упругой среды, скорее всего, не приведёт к распространению деформации в объем среды. Напротив, тангенциальное и нормальное воздействие источника колебаний на поверхность твердого тела вызовут распространение колебаний в объём твердого тела. Поэтому, в твердых телах легко возбуждаются, как продольные, так и поперечные волновые процессы, а в газах и жидкостях только продольные.

<u>Длина волны</u> **λ** (1) – кратчайшее расстояние между частицами упругой среды, которые совершают колебания в одной фазе (синфазность), или расстояние на которое распространяется волновой процесс за один период колебания.

<u>Уравнением плоской волны</u> будем называть величину отклонения от положения равновесия материальной точки упругой среды **ξ (x, y, z, t)** в зависимости от координаты и времени от начала воздействия источника колебаний.

Для плоской волны величина отклонения от положения равновесия точки с радиус вектором (**r**) в момент времени (**t**):

$$\xi\,(x, y, z, t) = \xi\,(r, t) = A\cos(\omega t - kr) \qquad (2),$$

где **A** максимальная величина отклонения от положения равновесия; **ω** – частота гармонических колебаний; **k=2πn/λ** – волновой вектор; **n** – единичный вектор нормальный волновой поверхности; k=2π/λ – волновое число.

С учетом **kr**=$k_x x+k_y y+k_z z$ можно записать:

$$\boldsymbol{\xi\ (x, y, z, t)= \xi\ (r, t)}=A\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z) \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\xi\ (x, t)}=A\cos(\omega t-k_x x) \qquad (3.1)$$

для одномерной среды.

Уравнение плоской волны (3) – решение дифференциального уравнения, которое называют ***Волновое уравнение***.

Найдем вид волнового уравнения суммированием частных вторых производных уравнения плоской волны:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kr) = -\omega^2\xi, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_x^2\xi, \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_y^2\xi, \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_z^2\xi \qquad (4.4)$$

Складывая уравнения (4.2), (4.3), (4.4) получим:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2\xi \qquad (5),$$

из уравнений (4.1) и (5) следует, что:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \qquad (6),$$

а с учетом k=2π/λ, ω=2π/T, ω/k=λ/T= ***V,*** т.е. фазовая скорость волны (имеет физический смысл быстроты распространения фазы колебательного процесса в упругой среде) получим:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \qquad (6.1),$$

используя оператор Лапласа (сумма вторых частных производных по координатам) можно записать: $\Delta\xi = \frac{1}{\boldsymbol{V}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$.

<u>Скорость распространения плоской волны</u>. Как можно увидеть на рисунке 1, относительная деформация упругой среды при прохождении волны - $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}}$, т.е. градиент

волновой функции имеет смысл относительной деформации упругой среды. В свою очередь, градиент относительной деформации упругой среды будет $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. Из закона Гука σ=E ε, где σ – напряженность при деформации (F/S), E – модуль упругости, следует, что **F/S=E ε; F=m a=ρ V a= ρ S δx a; σ= ρ δx a=E ε; a ρ/E= ε/δx,** где **ρ** - плотность, **δx** - очень тонкий слой упругой среды. Вместо ускорения запишем вторую производную по времени, а вместо **ε/δx** вторую производную по координате, в итоге, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (7).$$

Сопоставляя уравнения (6) и (7) приходим к соотношению, определяющему ***фазовую скорость продольных упругих волн***:

$$V = \sqrt{\mathrm{E}/\rho} \qquad (8).$$

Из аналогичных рассуждений в отношении фазовой скорости распространения поперечных волн получим:

$$V = \sqrt{G/\rho} \qquad (8),$$

где G – модуль сдвига – характеристика упругих свойств материала в отношении сдвиговой деформации.

Следовательно, в твердых упругих средах один источник колебаний возбуждает сразу два волновых процесса – продольные и поперечные волны. Поскольку, модуль сдвига всегда меньше модуля Юнга для одного и того же материала – продольные волны распространяются быстрее поперечных волн.

3.1. **Энергия упругой волны.**

Волна распространяет потенциальную (ΔE_p) и кинетическую (ΔE_k) энергию, которой обладает бесконечно малый объем ΔV в упругой среде: $\Delta E_p=0.5E\varepsilon^2\Delta V$; $\Delta E_k=0.5\rho v^2\Delta V$.

$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$; $\mathrm{v} = \frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{t}}$; $\rho V^2 = E$; → $\mathbf{\Delta E_p=0.5\rho V^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2\Delta V}$; $\mathbf{\Delta E_k=0.5\rho(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2\Delta V}$.

Полная энергия $\mathbf{\Delta E= \Delta E_p+ \Delta E_k=0.5\rho V^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2\Delta V+0.5\rho(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2\Delta V=0.5\rho[V^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2+(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2]\Delta V}$.

Плотность энергии в упругой среде:

$$\mathbf{u=\Delta E/\Delta V=0.5\rho[V^2(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2+(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2]} \qquad (9).$$

Дифференцирование выражения (3.1) даёт:

$$\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\text{Ak}\sin(\omega t-kx); \qquad (10)$$

$$v=\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\text{A}\omega\sin(\omega t-kx); \qquad (11).$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим:

$$\mathbf{u=0.5\rho[}V^2\mathbf{A^2k^2sin^2(\omega t\text{-}kx)+A^2\omega^2sin^2(\omega t\text{-}kx)]=\rho A^2\omega^2sin^2(\omega t\text{-}kx)} \qquad (12).$$

Из (12) следует, что полная энергия в разные моменты времени в разных точках пространства различна: полная энергия равно нулю, если в этой точке пространства $\sin(\omega t-kx)=0$ и равна $\rho A^2\omega^2$, если $\sin(\omega t-kx)=1$. Следовательно, средняя величина плотности энергии $\mathbf{u=0.5\rho A^2\omega^2}$**;** среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительной энергией, распределенной по закону квадрата синуса. Источник этой энергии – источник колебаний. Волна переносит эту энергию в направлении распространения волнового фронта. Количество энергии, переносимое волной через площадь поперечного сечения в единицу времени называется ***потоком энергии Ф (скалярная величина)***. ***Плотностью потока энергии*** называют векторную величину, модуль которой $J=\Delta\Phi/\Delta S\cos\alpha$, где α – угол между направлением распространения волнового фронта и нормалью к поверхности ΔS.

Если выражение (12) умножить на скорость распространения волны в упругой среде, то получим плотность потока энергии:

$$J=\mathbf{uV=0.5\rho A^2\omega^2V} \qquad (13).$$

Вектор плотности потока энергии имеет размерность ватт/м^2, его принято называть вектором Умова.

Через вектор Умова можно дать полное определение потока энергии переносимой волной:

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{J}, \boldsymbol{dS} \qquad (14),$$

где под интегралом стоит скалярное произведение векторов **J** и **dS.** Вектор **J** по модулю равен $\mathbf{0.5\rho A^2\omega^2V}$, а по направлению совпадает с волновым вектором (направлением распространения волны). Вектор **dS** по модулю равен площади dS, а по направлению совпадает с нормалью к этой площадке.

Методический материал на тему: СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

ЗАДАЧА №1: Материальная точка (***М***) под действием пружины совершает незатухающие колебания $\mathbf{x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)}$. Математический маятник, закрепленный на **М**, совершает незатухающие колебания $\mathbf{x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)}$ (см. рис. 1). Под действием двух независимых упругих сил, материальная точка (***м***) участвует одновременно в двух колебаниях. Найти уравнение движение результирующего колебания м.т. ***м***.

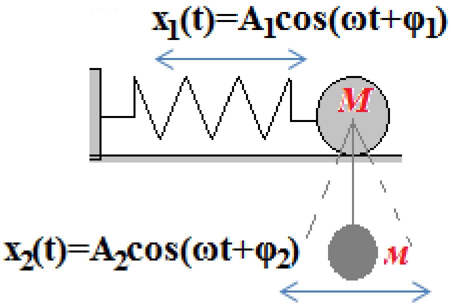
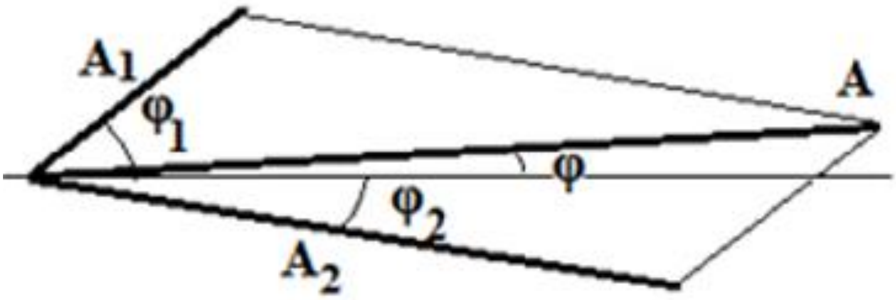


Рис. 1 – Два независимых колебания м.т. ***м*.**

РЕШЕНИЕ. Сложение уравнений движения (1, 2) приводит к соотношению (3). Графически такое сложение иллюстрирует векторная диаграмма на рисунке 2. Если отложить вектора по модулю равные амплитуде колебания и относительно произвольной оси повернуть их на угол равный начальной фазе колебания, то вектор равный их сумме будет иметь модуль равный амплитуде результирующего колебания. Для определения **А** можно использовать соотношение (4) - теорема косинусов. Начальная фаза результирующего колебания может быть определена из соотношения (5). Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания можно измерить на векторной диаграмме (рис. 2).



$$x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \qquad (1, 2)$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

$$A=\sqrt{(A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\Delta\varphi)} \qquad (4)$$

$$tg\varphi=(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)/(A_1\cos\varphi_2+A_1\cos\varphi_2) \qquad (5)$$

Рис. 2 – Векторная диаграмма для сложения колебаний (с одинаковой частотой), совершаемых в одном направлении.

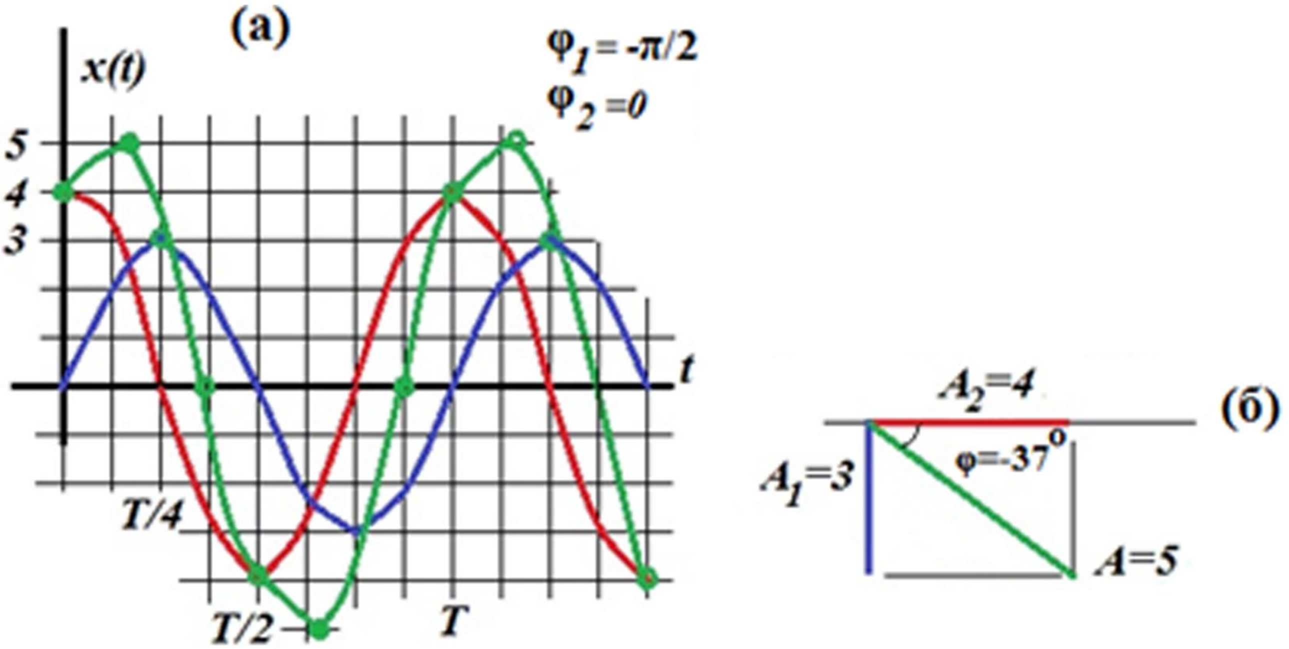
ЗАДАЧА №2: Найти амплитуду колебания (**А**), возникающего при наложении двух упругих волн одинаковой частоты и бегущих в одном направлении. Амплитуда одной волны **3** см, другой **4** см, неизменная разность фаз составляет **π/2**.

РЕШЕНИЕ: Поскольку распространение упругих волн одинаковой частоты и бегущих в одном направлении возбудит одновременные колебания частиц среды, которым отвечают уравнения (1, 2), с учетом принципа суперпозиции, имеем право записать соотношение **(3) см. рис.2**. Решения возможно в двух вариантах:

1) Для графического сложения (3) в координатах x=f(t) построим два графика: $\mathbf{x_1(t)=3cos(\omega t\text{-}\pi/2)}$ и $\mathbf{x_2(t)=4cos\omega t}$ см. рисунок **№3а**. Далее путем сложения величин отклонения в одинаковые моменты времени точек **x** двух графиков получаем искомый график результирующего колебания (см. зелёная линия на рис. **3а**).

2) Сложение с помощью векторной диаграммы представлен на рис. **3б**.

В обоих вариантах получаем амплитуду колебания A=0,05м.



$$x_1(t)=3\cos(\omega t-\pi/2)=3\sin\omega t$$

$$x_2(t)=4\cos\omega t$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\sqrt{(A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\Delta\varphi)}\cos[\omega t+\mathrm{arctg}(A_1/A_2)]=$$

$$=3\sin\omega t+4\cos\omega t=5\cos[\omega t+\mathrm{arctg}(-3/4)]=5\cos(\omega t-37^0)$$

ОТВЕТ: A = 0,05 м

Рис. 3 – Сложение колебаний одинаковой частоты, совершаемых в одном направлении. Метод графического сложения (**а**) и метод векторной диаграммы (**б**).

Дополнительная информация доступная в рамках ДО на первом семестре

https://cchgeu.ru/education/cafedras/kaffiz/?docs

ВГТУ/Образование/Кафедры/кафедра физики//Документы/Общие документы

Контрольно- измерительный материал для промежуточной аттестации студентов

Контрольная работа №1

Физика 1 часть_Механика

Контрольные задания для защиты лабораторных работ 320