ФГБОУ ВО «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра экономики и управления на предприятии машиностроения

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по изучению курса, проведению практических занятий и самостоятельной работе по дисциплине «Транспортно-складская логистика» для студентов направлений подготовки 38.03.02 «Менеджмент» профиль «Логистика и управление цепями поставок» и 27.03.02 «Управление качеством» профиль «Управление качеством в логистике» всех форм обучения

Воронеж 2018

Составитель: к.э.н., доцент Щеголева Т.В.

УДК 658.512

Методические указания по изучению курса, проведению практических занятий и самостоятельной работе по дисциплине «Транспортно-складская логистика» для студентов направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент» профиль «Логистика и управление цепями поставок» и 27.03.02 «Управление качеством» профиль «Управление качеством в логистике» всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Т.В. Щеголева. - Воронеж, 2017. 52 с.

Методические указания содержат рекомендации по изучению тем курса, выполнению практических занятий, задания на самостоятельную работу и список рекомендуемой литературы.

Табл. 8 . Ил. 38 . Библиогр.: 8 назв.

Рецензент: к.э.н., доцент Н.Л. Володина

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Введение

В методических указаниях рассматриваются методы решения задач линейного программирования, известных в *исследовании операций* как *задачи транспортного типа,* с применением электронной таблицы Microsoft Excel. Интерес к этим задачам обусловлен не только спецификой их формализации и прикладной значимостью, но и рядом других причин, среди которых отметим следующие.

Во-первых, для задач транспортного типа естественным и удобным является их графическое представление в виде графа специального вида. Это представление в ряде случаев позволяет преобразовать к задачам транспортного типа даже такие задачи исследования операций, которые на первый взгляд не имеют с ними ничего общего, например, задача коммивояжера, и использовать для их решения эффективные вычислительные алгоритмы.

Во-вторых, Excel обладает развитым аппаратом численного анализа данных, позволяющим решать сложные задачи линейного программирования со многими неизвестными и ограничениями, что делает его очень удобным инструментом решения транспортных задач.

Данное учебное пособие рассчитано на читателей знакомых с основами работы в Excel и предназначено для студентов, изучающих транспортную логистику, а также может быть полезно инженерам и специалистам автотранспортных предприятий, занимающихся вопросами организации перевозок.

1. АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДАННЫХ В EXCEL

1.1. Подбор параметра

Excel располагает развитым аппаратом численного анализа данных, в основном, доступным через меню Сервис. Инструмент Подбор параметра из меню Сервис позволяет найти значение аргумента, удовлетворяющее желаемому значению функции. С его помощью можно получить результаты, которые трудно или невозможно получить непосредственно.

Задача 1.1. Положим на минуту, что Excel не имеет средств вычисления квадратного корня числа. Тем не менее, его можно найти, если использовать инструмент Подбор параметра, с помощью которого легко решать обратные задачи, имея постановку прямой задачи. Пусть на рис. 1.1-1 в клетку A2 вносится аргумент, а в B2 − функция вычисления квадрата от него.

Найдем квадратный корень числа 25. Вызвав окно Подбор параметра, зададим (см. рис. 1.1) следующие аргументы: Установить в ячейке: адрес клетки B2, в которой вычисляется новое Значение: 25, Изменяя значение ячейки: A2.

После нажатия кнопки OK, Excel выдает окно Результат подбора параметра (рис. 1.2), где отображаются ожидаемые результаты операции. В данном случае системе удалось подобрать аргумент при котором результат равен 25,00 (в клетке A2 мы увидим число 5,00). Далее, если решение найдено и пользователь согласен с ним, следует нажать кнопку OK, если нет выбрать кнопку Отмена.

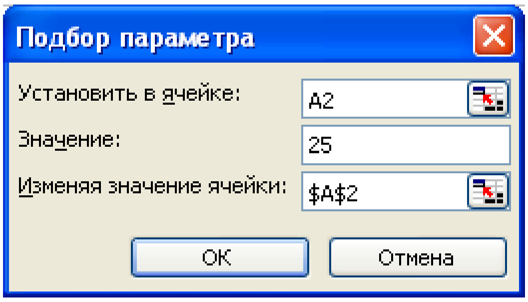


Рис. 1.1

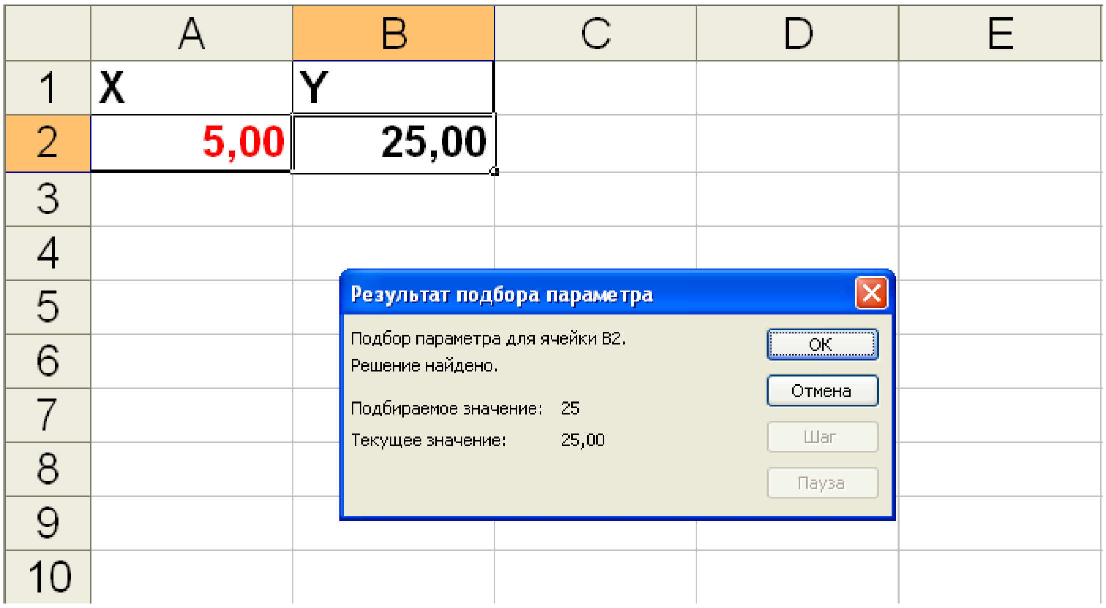


Рис. 1.2

Конечно, с помощью этого средства можно решать гораздо более интересные и сложные задачи.

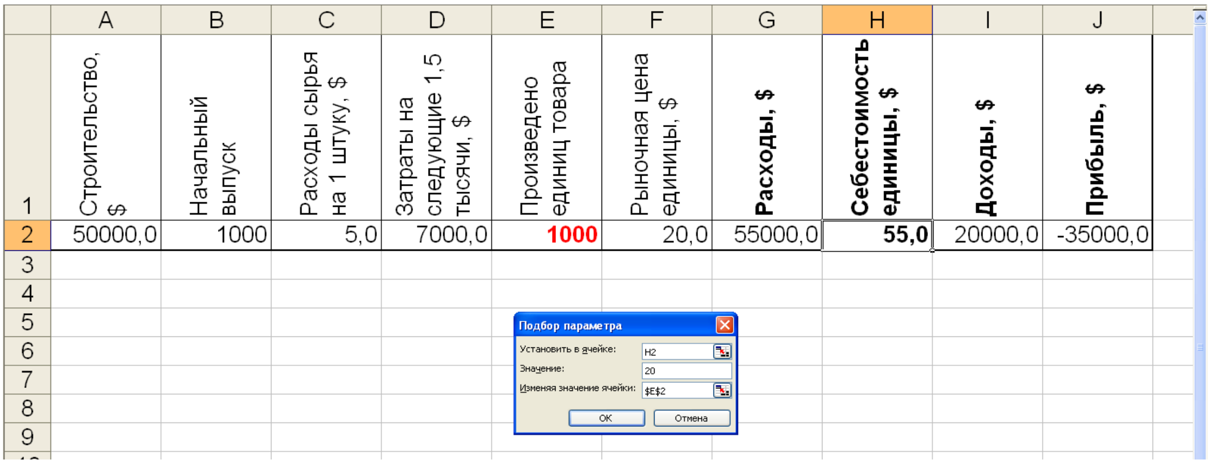
Задача 1.2. Положим, требуется проанализировать перспективы создания производства некоторого товара. Известно, что понадобятся первоначальные инвестиции на строительство в объеме $50000 для выпуска первых 1000 единиц продукции в месяц. Изготовление одного изделия требует сырья на сумму $5. Расширение выпуска возможно только партиями до 1500 штук, для чего каждый раз требуется покупка оборудования на $7000. Известна рыночная цена изделия, которая составляет $20. Нам нужно найти уровень производства, обеспечивающий его безубыточность, а также проанализировать динамику доходов, расходов, прибыли и себестоимости в зависимости от количества выпущенного товара. Отобразим наши данные и формулы в таблице, представленной на рис. 1.3.

Здесь:

<Расходы>=<Строительство>+<Сырье>+<Затраты на расширение>, следовательно для вычисления по статье Расходы в ячейку G2 необходимо ввести формулу:

=A2+E2*C2+ОКРУГЛВВЕРХ(ABS(E2-B2)/1500;0)*D2.

Последнее слагаемое в формуле учитывает дискретный характер расходов на расширение производства. Каждый раз, когда число единиц товара, на которое увеличивается выпуск, превышает 1,5 тыс. к расходам добавляется $7000 на покупку нового станка.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Строительство, $	Начальный выпуск	Расходы сырья на 1 штуку, $	Затраты на следующие 1,5 тысячи, $	Произведено единиц товара	Рыночная цена единицы, $	**Расходы, $**	**Себестоимость единицы, $**	**Доходы, $**	**Прибыль, $**
2	50000,0	1000	5,0	7000,0	**1000**	20,0	55000,0	**55,0**	20000,0	-35000,0

Рис. 1.3

Остальные формулы:

<Себестоимость>=<Расходы>/<Произведено товара> или H2=G2/E2.

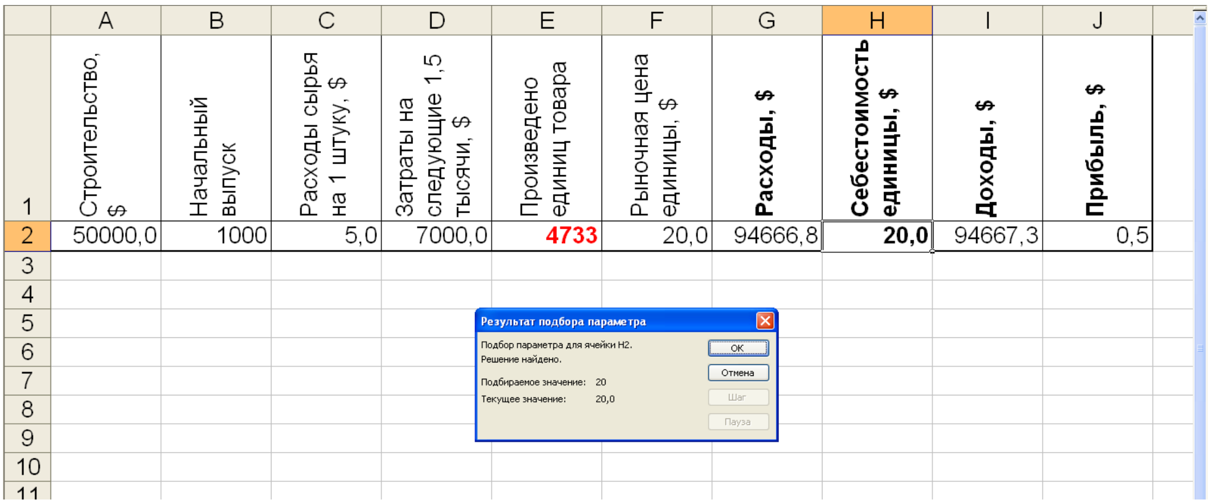
<Доход>=<Произведено товара>*<Рыночная цена> или I2=E2*F2.

<Прибыль>=<Доход>-<Расходы> или J2=I2-G2.

Первоначальный выпуск установлен в 1000 штук. Видим, что при этом результаты нашей деятельности принесут только убытки в объеме 3500$.

Наша задача в данном случае состоит в том, чтобы определить минимальное количество единиц выпускаемого товара, которое обеспечит безубыточность производства, т.е. когда <Прибыль>=0 или когда <Себестоимость>=<Рыночная цена>.

Это значение можно получить с помощью Подбора параметра. Результат представленный на рис. 1.4 показывает, что для окупаемости производства необходим выпуск не менее чем 4733 штук товара. Превышение этого значения уже будет приносить прибыль владельцам предприятия.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Строительство, $	Начальный выпуск	Расходы сырья на 1 штуку, $	Затраты на следующие 1,5 тысячи, $	Произведено единиц товара	Рыночная цена единицы, $	**Расходы, $**	**Себестоимость единицы, $**	**Доходы, $**	**Прибыль, $**
2	50000,0	1000	5,0	7000,0	**4733**	20,0	94666,8	**20,0**	94667,3	0,5

Рис. 1.4

С тем, чтобы проанализировать динамику бизнеса, на том же листе ниже построим таблицу, содержащую все вышеприведенные формулы (рис. 1.5). Аргументом таблицы является объем выпуска товара, начиная с 1000 и шагом 500. Из нее можно построить графики изменения расходов, доходов, прибыли (рис. 1.6). Ступенчатый характер кривых здесь объясняется влиянием очередных инвестиций (покупок станков) в расширение производства.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Строительство, $	Начальный выпуск	Расходы сырья на 1 штуку, $	Затраты на следующие 1,5 тысячи, $	Произведено единиц товара	Рыночная цена единицы, $	**Расходы, $**	**Себестоимость единицы, $**	**Доходы, $**	**Прибыль, $**
2	50000,0	1000	5,0	7000,0	1000	20,0	55000,0	55,0	20000,0	-35000,0
3										
4	50000,0	1000	5,0	7000,0	1000	20,0	55000,0	55,0	20000,0	-35000,0
5	50000,0	1000	5,0	7000,0	1500	20,0	64500,0	43,0	30000,0	-34500,0
6	50000,0	1000	5,0	7000,0	2000	20,0	67000,0	33,5	40000,0	-27000,0
7	50000,0	1000	5,0	7000,0	2500	20,0	69500,0	27,8	50000,0	-19500,0
8	50000,0	1000	5,0	7000,0	3000	20,0	79000,0	26,3	60000,0	-19000,0
9	50000,0	1000	5,0	7000,0	3500	20,0	81500,0	23,3	70000,0	-11500,0
10	50000,0	1000	5,0	7000,0	4000	20,0	84000,0	21,0	80000,0	-4000,0
11	50000,0	1000	5,0	7000,0	4500	20,0	93500,0	20,8	90000,0	-3500,0
12	50000,0	1000	5,0	7000,0	5000	20,0	96000,0	19,2	100000,0	4000,0
13	50000,0	1000	5,0	7000,0	5500	20,0	98500,0	17,9	110000,0	11500,0
14	50000,0	1000	5,0	7000,0	6000	20,0	108000,0	18,0	120000,0	12000,0
15	50000,0	1000	5,0	7000,0	6500	20,0	110500,0	17,0	130000,0	19500,0
16	50000,0	1000	5,0	7000,0	7000	20,0	113000,0	16,1	140000,0	27000,0

Рис. 1.5

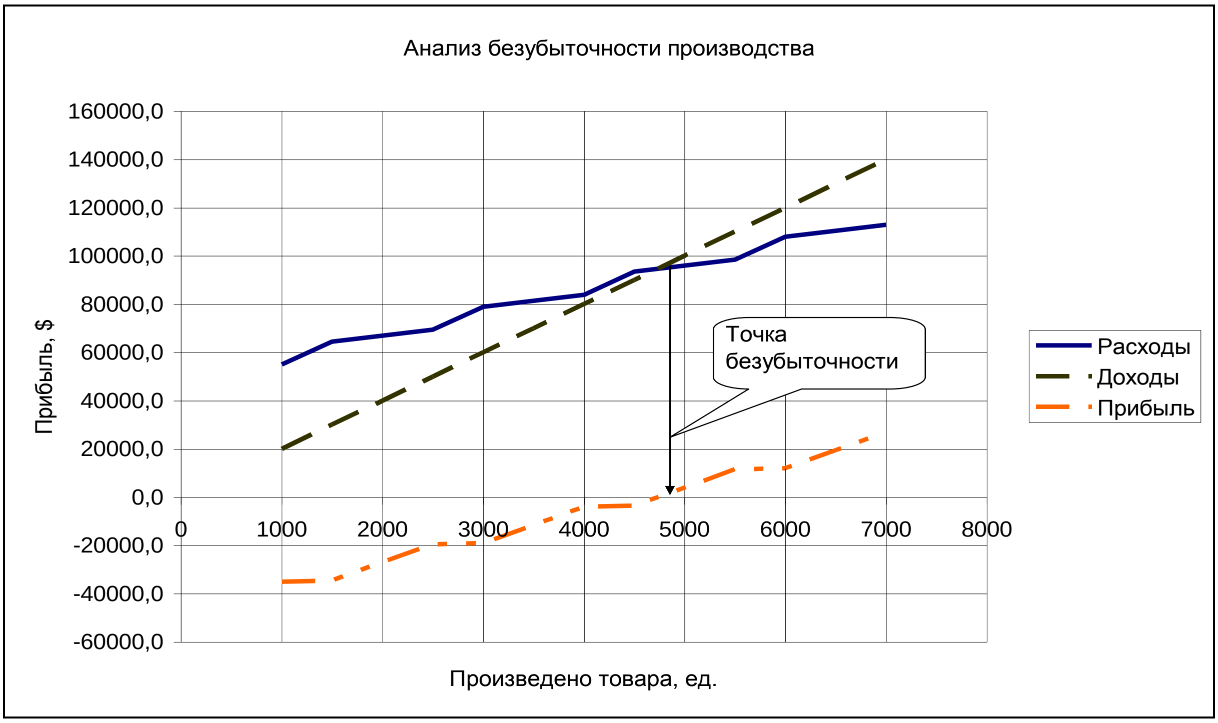


Рис. 1.6

Инструмент Подбор параметра позволяет решать сравнительно простые задачи. Значительно более сильное вычислительное средство описано ниже.

1.2. Поиск решения

Инструмент Поиск решения (в оригинальной версии пакета Solver − Решатель) из меню Сервис предоставляет пользователю гораздо более мощное аналитическое средство. Здесь можно искать решение систем уравнений, которые к тому же могут содержать ограничения. К таким задачам относятся важные для планирования коммерческой деятельности задачи линейного и нелинейного программирования.

Задачи линейного программирования описываются системами линейных уравнений и линейными целевыми функциями. Примерами таких задач являются задача о пищевом рационе, задача о распределении ресурсов, задача о рюкзаке, транспортная задача, задача о календарном планировании комплекса работ и другие.

Рассмотрим постановку задачи распределения ресурсов на следующем примере.

Задача 1.3. Положим, цех предприятия производит два вида продукции (Продукт 1 и Продукт 2). Следует рассчитать оптимальные недельные объемы производства этих продуктов с точки зрения максимизации прибыли. Прибыль (целевая функция − $L(X)$) от первого продукта составляет 5 единиц, от второго − 5,5.

На производстве действуют ограничения по сырью, трудовым ресурсам и транспортным расходам:

1. Для Продукта 1 требуется 3 единицы сырья, для Продукта 2 − 6. Всего цех располагает 18 единицами сырья.

2. Для изготовления Продукта 1 требуется 6 рабочих, для Продукта 2 − 4. В цехе − 24 рабочих.

3. Транспортные расходы на перевозку Продукта 1 составляют 2 единицы, а Продукта 2 − 1 единицу. Эти затраты не могут быть менее 2 единиц (цена аренды одного автомобиля минимальной грузоподъемности в течение дня). Полагаем, что вся дневная продукция цеха может быть вывезена на одном грузовике.

Кроме того, очевидно, что ни одна из переменных (число единиц продукции) не может быть менее нуля.

Отсюда запишем соотношения (объединены фигурной скобкой), из которых можно вычислить оптимальные объемы производства Продукта 1 и Продукта 2 (виды продукции обозначены как X_1 и X_2). Решением такого рода задач занимается раздел математики, называемый линейным программированием, но системы, содержащие не более двух переменных (или сводимые к ним), могут быть решены и графически.

$$\begin{cases} L(X) = 5X_1 + 5{,}5X_2 \to \max; \\ 3X_1 + 6X_2 \le 18, \\ 6X_1 + 4X_2 \le 24, \\ 2X_1 + X_2 \ge 2, \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Excel легко позволяет получить оптимальное решение без ограничения размерности системы неравенств и целевой функции. Пример построения такой таблицы применительно к рассмотренной выше задаче приведен на рис. 1.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	Вид ресурса	Продукт 1	Продукт 2	Вычисленные значения	Заданные ограничения			
2	1	Сырье	3	6	0,00	18			
3	2	Труд	6	4	0,00	24			
4	3	Транспорт	2	1	0,00	2			
5					Прибыль:				
6		Целевая функция	5	5,5	0,00				
7		Результаты	0,00	0,00					
8									

Рис. 1.7

Ограничения вносятся в верхнюю часть таблицы. Коэффициенты отношений – в область C2:D4, правая часть уравнений - в F2:F4. Коэффициенты целевой функции – в C6:D6. В процессе расчетов в области E2:E4 отображаются вычисляемые (фактические) значения правой части неравенств. Сюда вводятся формулы:

E2=СУММПРОИЗВ(C$7:D$7;C2:D2),

E3=СУММПРОИЗВ(C$7:D$7;C3:D3),

E4=СУММПРОИЗВ(C$7:D$7;C4:D4).

Аналогично значение целевой функции (прибыль) равно

E6=СУММПРОИЗВ(C$7:D$7;C6:D6).

Если размерность системы уравнений (как в нашем случае) невелика, можно воспользоваться более простыми функциями:

E2=C2*C$7+D2*D$7, E3=C3*C$7+D3*D$7,

E4=C4*C$7+D4*D$7, E6=C6*C$7+D2*D$7.

Результат (оптимальное количество Продукта 1 и Продукта 2) формируется в области C7:D7. Клетки, в которых вычисляются какие-то значения, выделены жирным шрифтом. Остальное – исходные данные.

Для оптимизации в Excel используется инструмент Поиск решения, вызываемый через меню Сервис, который предъявляет окно Поиск решения (рис. 1.8).

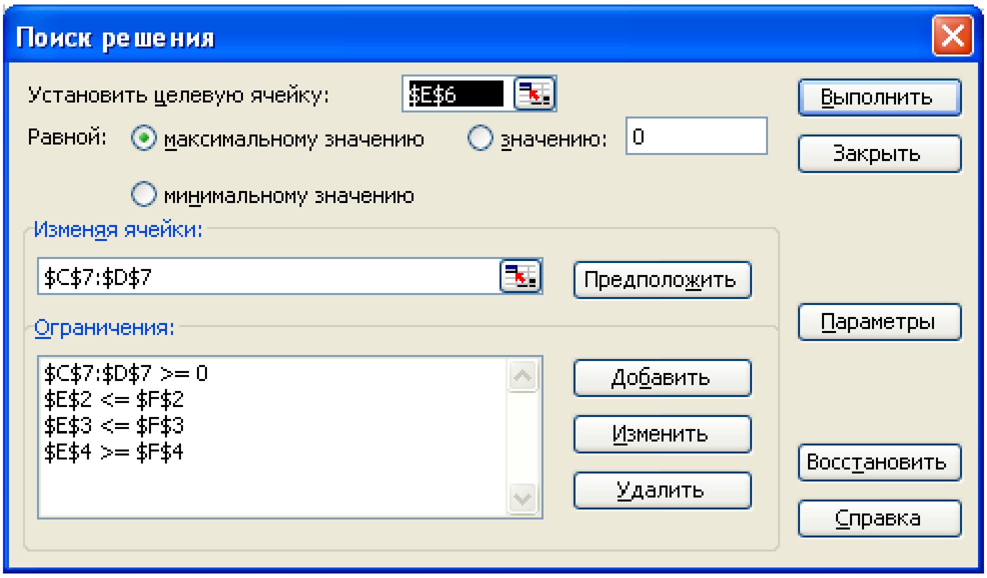
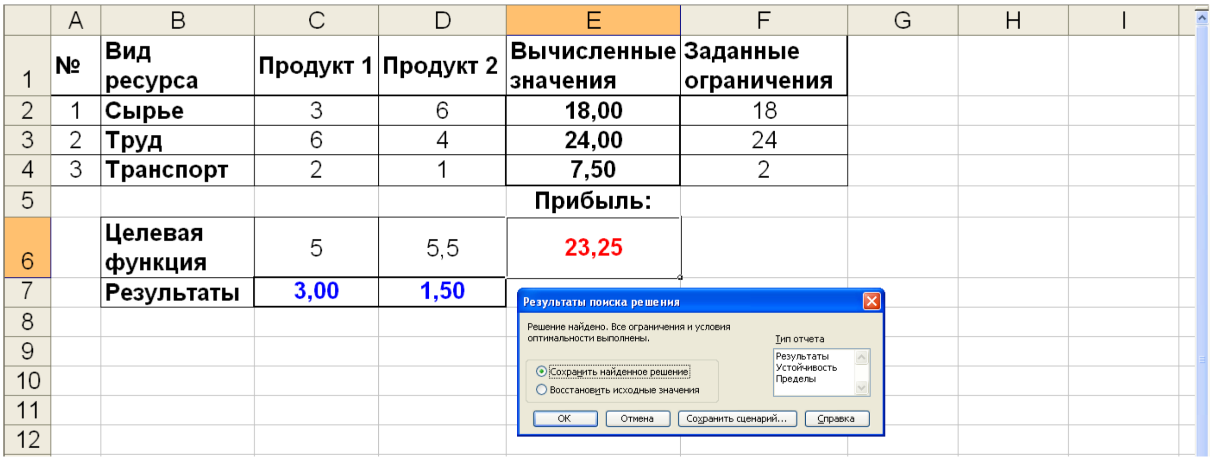


Рис. 1.8

В этом окне сначала задается ячейка, содержащая оптимизируемое значение (здесь $E$6), затем указывается его желаемое значение (у нас максимальному значению). Можно задать не только максимальное/минимальное значения, но и любую произвольную величину, введя ее в специальное поле – Равной значению. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки Добавить, которая вызывает окно их ввода.

После ввода всех ограничений и других условий следует нажать кнопку Выполнить для решения поставленной задачи.

Если вычисления оказались успешными, Excel предъявит окно Результаты поиска решения (рис. 1.9).



	A	B	C	D	E	F
1	№	Вид ресурса	Продукт 1	Продукт 2	Вычисленные значения	Заданные ограничения
2	1	Сырье	3	6	18,00	18
3	2	Труд	6	4	24,00	24
4	3	Транспорт	2	1	7,50	2
5					Прибыль:	
6		Целевая функция	5	5,5	23,25	
7		Результаты	3,00	1,50		

Рис. 1.9

Их можно сохранить, выбрав пункт Сохранить найденное решение или отказаться – Восстановить исходные значения. Сохраним их. Кроме того, можно получить один из трех видов отчетов – Результаты, Устойчивость, Пределы, позволяющие лучше осознать полученные результаты, в том числе, оценить их достоверность.

Задача 1.4. Допустим требуется максимально полно выполнить заказ на поставку некоторого однородного жидкого материала (например, машинного масла) в объеме 1400 кг. в имеющуюся у продавца тару (контейнеры емкостью по 270 кг., бочки по 130 кг. и канистры по 90 кг.). Считаем, что отгружать товар можно в любой таре в любой комбинации таким образом, чтобы, по возможности, весь товар был размещен без остатка, т.е.

<отгружено>≤<вес_заказа>.

Отсюда можно сформировать еще несколько ограничений:

<емкость_контейнера>*<число_контейнеров>+
+<екость_бочки>*<число_бочек>+
+<емкость_канистры>*<число_канистр>≤<вес_заказа>,
<число_контейнеров>≥0, <число_бочек>≥0, <число_канистр>≥0, <число_контейнеров>=<целое>, <число_бочек>=<целое>, <число_канистр>=<целое>.

Рабочий лист Excel с таблицей оптимизации должен содержать заданные данные и формулы:

E2=B2*B3+C2*C3+D2*D3,

G2=F2-E2.

Для решения снова используем инструмент Поиск решения, где введем параметры, как показано на рис. 1.10.

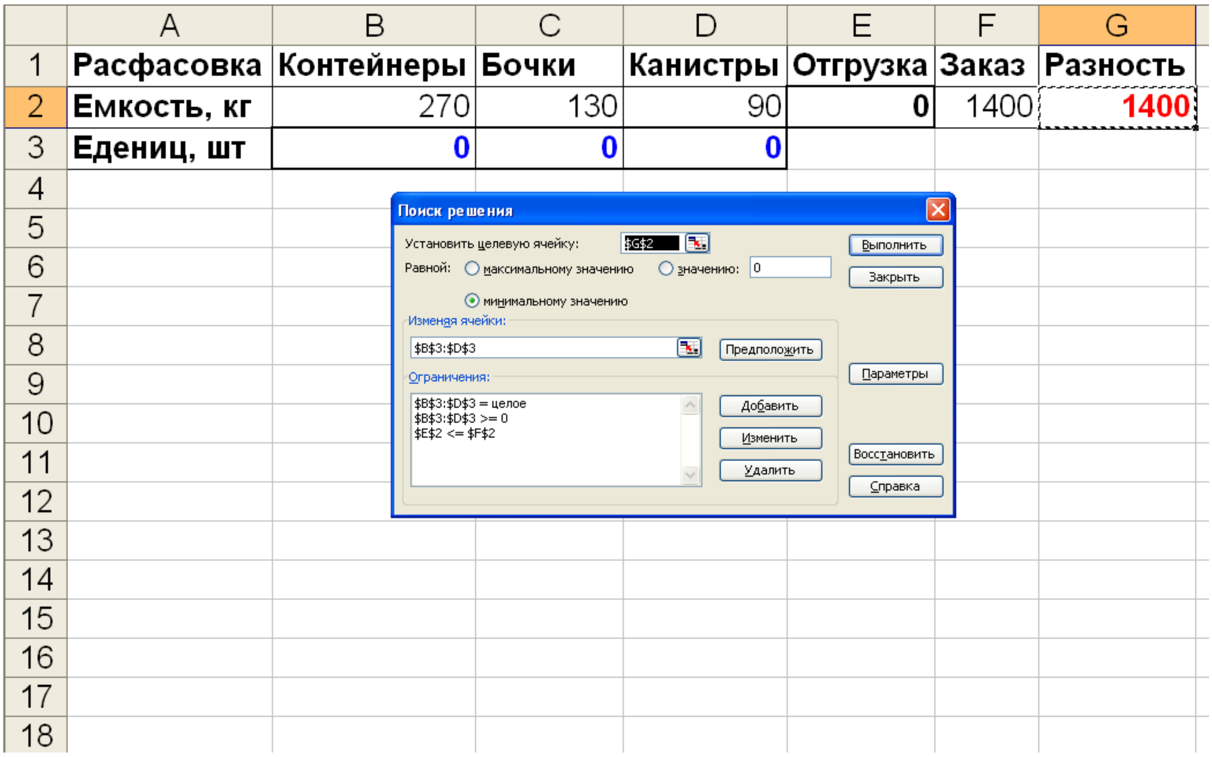


Рис. 1.10

В качестве критерия используется значение разности (в ячейке G2) между заказанным объемом и фактически отгруженным. На рис. 1.11 показан результат поиска.

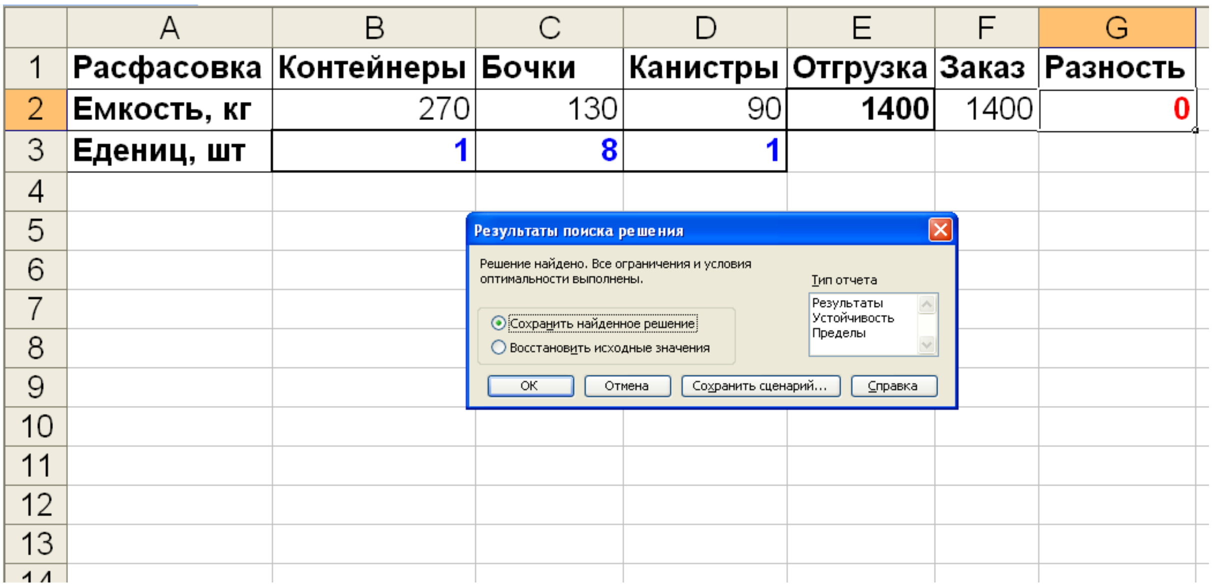


Рис. 1.11

Таким образом, полученное решение позволяет отгрузить весь товар без остатка потребителю с использованием в качестве тары одного контейнера, восьми бочек и одной канистры.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Используя MS Excel, найти решение для модели линейного программирования, соответствующей заданному варианту (табл.1.1).

Таблица 1.1

Варианты задач для самостоятельного решения

№ варианта	Математическая модель
1	$L(X)=5x_1+7x_2-6x_3+9x_4+8x_5\to\max;$ $\begin{cases}0{,}7x_1+0{,}9x_2+1{,}5x_3+2{,}3x_4+1{,}8x_5\le 50000,\\0{,}4x_1+1{,}1x_2-0{,}5x_3+1{,}3x_4-2{,}8x_5\ge 32000,\\0{,}5x_1+1{,}8x_3+0{,}7x_4+2x_5\le 40000,\\2{,}2x_1-1{,}4x_2-0{,}8x_3+0{,}9x_4=15000,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
2	$L(X)=x_1+4x_3+8x_4-12x_5\to\min;$ $\begin{cases}x_1+\ 9x_2+2x_3-4x_4=250,\\0{,}4x_1+x_2-5x_3+3x_4+8x_5\le 460,\\0{,}5x_1+\ 10\mathrm{x}_2-8x_3+6x_4+2x_5\le 190,\\11x_2-8{,}5x_3+3x_4+2\mathrm{x}_5=210,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
3	$L(X)=-45x_1+65x_2+2x_4-3x_5\to\max;$ $\begin{cases}15x_1+18x_2+34x_4-22x_5=56,\\2x_1+7x_3-4x_4+3x_5\ge 91,\\0{,}2x_1+0{,}8x_2+1{,}5x_3+0{,}9x_4+4x_5\le 26,\\1{,}8x_1-42x_2+6{,}4x_3+3x_5=15,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right).\end{cases}$

Продолжение табл. 1.1

№ варианта	Математическая модель
4	$L(X)=14x_1-9x_2-x_4+6{,}4x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1+10x_2-28x_4+5x_5 \le 245, \\ 0{,}8x_1+1{,}7x_2-0{,}2x_3-0{,}5x_4=9, \\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5 \le 54, \\ 8x_1+6{,}2x_2-4{,}8x_4+2{,}9x_5 \ge 17, \\ x_j \ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
5	$L(X)=46x_1+2{,}3x_2+9{,}4x_3-4x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1+7{,}8x_3+12x_4+9x_5 \ge 49, \\ 2{,}3x_2+5x_3+5{,}6x_4-x_5 \le 86, \\ 16x_1-40x_4+29x_5=50, \\ 190x_1-98x_2-4x_4+150x_5 \ge 300, \\ x_j \ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
6	$L(X)=0{,}5x_1+1{,}8x_3-9{,}2x_4+14x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 9{,}6x_2+15{,}7x_3+24x_4-8x_5 \le 74, \\ 0{,}8x_1+11{,}1x_2-4{,}5x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=22, \\ 14x_1+45x_2-38x_4+26x_5 \le 46, \\ 220x_1-148x_2-7x_3+95x_5 \ge 150, \\ x_j \ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
7	$L(X)=12x_2+89x_3-5x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1+9{,}6x_2+15{,}7x_3+22x_4-8x_5 \le 73, \\ 0{,}9x_1+11{,}1x_2-4{,}3x_3+1{,}5x_4+6{,}4x_5=19, \\ 14x_1+45x_2-38x_4+26x_5 \le 49, \\ 220x_1-150x_2+3x_3+95x_5=133, \\ x_j \ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

Продолжение табл. 1.1

№ варианта	Математическая модель
8	$L(X)=4x_1+6x_2-14x_3+49x_5\to\min;$ $\begin{cases}21x_1+9x_2-2x_4-12x_5\ge 58,\\110x_2-60x_3+80x_4-45x_5=290,\\5x_2+27x_3-14x_4+x_5\le 72,\\87x_1-6{,}4x_2+130x_4=140,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1{,}5}\right).\end{cases}$
9	$L(X)=-38x_1+60x_2+x_3+4x_4+8x_5\to\max;$ $\begin{cases}18x_1+4x_2+2x_3-12x_5\le 86,\\2x_2+19x_3-7x_4+10x_5=130,\\0{,}4x_1+3x_2-4{,}2x_3+2x_4-5x_5\le 34,\\2{,}1x_1+13x_2-20x_3+6x_4=18,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1{,}5}\right).\end{cases}$
10	$L(X)=10x_1+40x_3+13x_4+56x_5\to\min;$ $\begin{cases}7x_1+16x_3+5x_4+25x_5\le 600,\\8x_1+1{,}7x_2-0{,}5x_4+4{,}7x_5=890,\\6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5\le 270,\\84x_1+62x_2+80x_3+14x_5\ge 2300,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1{,}5}\right).\end{cases}$
11	$L(X)=84x_1+5{,}7x_2+10x_4-3x_5\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+8{,}5x_2+16x_3+10x_5\ge 50,\\10{,}4x_1+6x_3+2x_4+4x_5\le 120,\\19x_1+18x_2-20x_4+30x_5=600,\\200x_1+45x_2-8x_3+3{,}4x_4\ge 210,\\x_j\ge 0\left(\mathrm{j}=\overline{1{,}5}\right).\end{cases}$

Окончание табл. 1.1

№ варианта	Математическая модель
12	$L(X)=0{,}84x_2-4x_3+3{,}8x_4+12x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 15x_1+9{,}6x_2+34x_4-8x_5 \le 180, \\ 0{,}6x_1+11{,}1x_2-2{,}6x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=68, \\ 14x_1+64x_3-38x_4+12x_5 \le 81, \\ 190x_1-148x_2-7x_3+84x_5 \ge 230, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.1. Математическая постановка задачи

В исследовании операций под *транспортной задачей* обычно понимают задачу выбора плана перевозок некоторого товара (изделий, груза) от m источников (пунктов производства, поставщиков) к n стокам (станциям назначения, пунктам сбыта), обеспечивающего минимальные транспортные затраты. При этом предполагают, что: а) мощность i-го источника (объем поставок товара от i-го источника) равна $S_i>0$, $i=1,...,m$; б) мощность j-го стока (объем поставок товара к j-му стоку) равна $D_j>0$, $j=1,...,n$; в) стоимость перевозки единицы товара (в условных денежных единицах) от i-го источника к j-му стоку равна c_{ij}; г) суммарная мощность всех источников равна суммарной мощности всех стоков, т.е. $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$.

Далее под объемом товара будем понимать его количество в фиксированных единицах измерения.

Для математического описания транспортной задачи вводят переменные x_{ij}, обозначающие объемы поставок товара от i-го источника к j-му стоку. В этом случае $x_{i1}+x_{i2}+...+x_{in}$ — общий объем поставок товара от i-го источника, т.е. мощность этого источника; $x_{1j}+x_{2j}+...+x_{mj}$ — общий объем поставок товара к j-му стоку, т.е. мощность этого стока; $c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+...+c_{mn}x_{mn}$ — суммарная стоимость перевозок товара от источников к стокам. С учетом этого рассматриваемая задача может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \\ x_{ij} \ge 0, \\ x_{ij} \in N \cup \{0\}. \end{cases}$$

На рис. 2.1 показано представление транспортной задачи в виде сети с m пунктами отправления и n пунктами назначения, которые показаны в виде узлов сети. Дуги, соединяющие узлы сети, соответствуют маршрутам, связывающим пункты отправления и назначения. С дугой (i,j), соединяющей пункт отправления i с пунктом назначения j, соотносятся два вида данных: стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из пункта i в пункт j и количество перевозимого груза x_{ij}. Объем грузов в пункте отправления i равен S_i, а объем грузов в пункте назначения j равен D_j. Задача состоит в определении неизвестных величин x_{ij}, минимизирующих суммарные транспортные расходы и удовлетворяющих ограничениям, накладываемым на объемы грузов в пунктах отправления (предложение) и пунктах назначения (спрос).

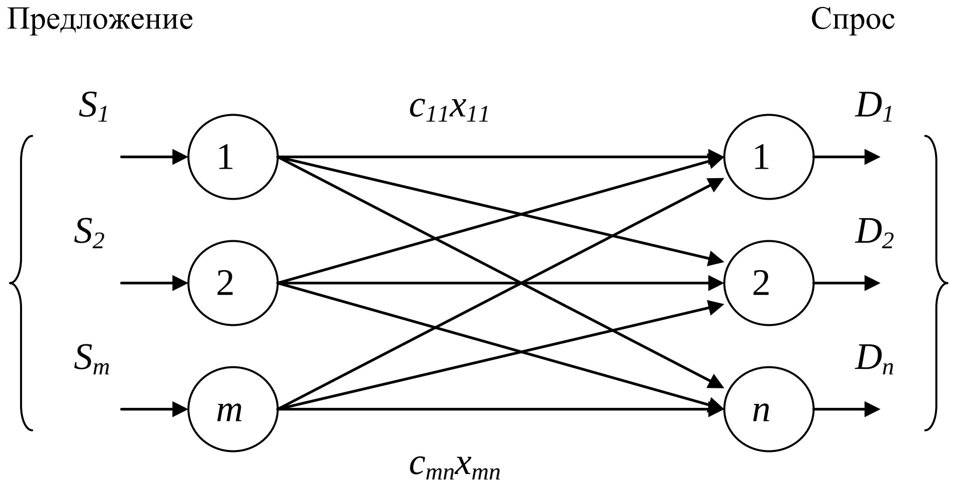


Рис. 2.1

2.2. Решение классической транспортной задачи в Excel

Рассмотрим решение классической транспортной задачи на основе примера заимствованного из книги Хэмди А. Таха[1]. Из этого же источника взяты задачи для самостоятельного решения, представленные в конце данного раздела.

Задача 2.1. Автомобильная компания MG Auto имеет три завода в Лос-Анджелесе, Детройте и Новом Орлеане и два распределительных центра в Денвере и Майами. Объемы производства заводов компании в сле-

[1] Таха, Хэмди, А. Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. - 912 с.

дующем квартале составят соответственно 1000, 1500 и 1200 автомобилей. Ежеквартальная потребность распределительных центров составляет 2300 и 1400 автомобилей. Расстояние (в милях) между заводами и распределительными центрами приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Расстояния между заводами и распределительными центрами, *мили*

Поставщики	Потребители	
	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новый Орлеан	1275	850

Транспортная компания оценивает свои услуги в 8 центов за перевозку одного автомобиля на одну милю. В результате получаем, представленную в табл. 2.2, стоимость перевозок (с округлением до доллара) по каждому маршруту.

Таблица 2.2

Стоимость перевозок, *долл.*

Поставщики	Потребители	
	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	$80	$215
Детройт	$100	$108
Новый Орлеан	$102	$68

Основываясь на данных из табл. 2.2, формулируем следующую задачу линейного программирования.

Минимизировать

$L(X)=80x_{11}+215x_{12}+100x_{21}+108x_{22}+102x_{31}+68x_{32} \to \min$

при ограничениях

$x_{11}+x_{12}=1000$ (Лос-Анджелес),

$x_{21}+x_{22}=1500$ (Детройт),

$x_{31}+x_{32}=1200$ (Новый Орлеан),

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=2300$ (Денвер),

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1400$ (Майами),

$x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2.$

Эти ограничения выражены в виде равенств, поскольку общий объем произведенных автомобилей (S=1000+1500+1200=3700) равен суммарному спросу распределительных центров (D=2300+1400=3700).

Данную задачу можно решить симплекс-методом или с помощью так называемой транспортной таблицы. Решение данной задачи в Excel представлено на рис. 2.2 – рис. 2.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Стоимость перевозки одного автомобиля						
2			Денвер	Майами			
3		Лос-Анджелес	80	215			
4		Детройт	100	108			
5		Новый Орлеан	102	68			
6							
7	Таблица-план оптимального закрепления						
8	Поставщики	Предложение	Потребители		Сумма		
9			Денвер	Майами			
10			Спрос				
11			2300	1400	3700		
12	Лос-Анджелес	1000	0	0	0		
13	Детройт	1500	0	0	0		
14	Новый Орлеан	1200	0	0	0		
15	Сумма	3700	0	0			
16							
17	Стоимость перевозок, $		0				
18							
19							
20							

Целевая ячейка

Рис. 2.2

Исходные данные для решения классической транспортной задачи целесообразно представить в виде двух таблиц (см. рис. 2.2), в первой из которых представлены значения стоимости перевозок единицы товара c_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю. Во второй таблице представлены: значения S_i предложения каждого i-го поставщика; значения D_j спроса каждого j-го потребителя; переменные x_{ij}, первоначально принимающие нулевые значения; вспомогательная строка и вспомогательный столбец "Сумма". Целевая ячейка C17 должна содержать формулу, выражающую целевую функцию:

=СУММПРОИЗВ(C3:D6;C12:D14).

Используя меню Сервис⇒Поиск решения открываем диалоговое окно Поиск решения (см. рис. 2.3), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке Выполнить.

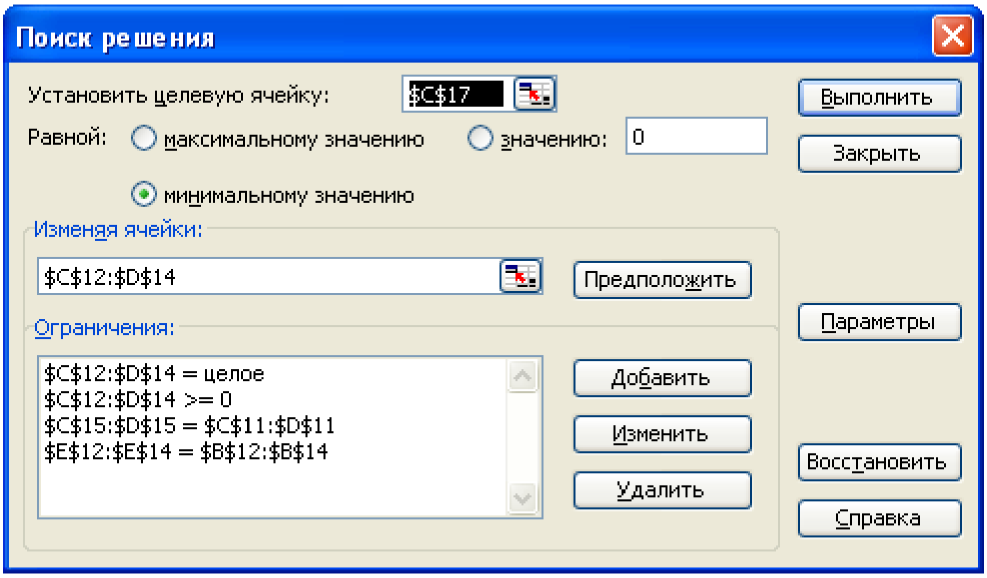


Рис. 2.3

Оптимальное решение данной задачи представлено на рис. 2.4. Оно предполагает перевозку 1000 автомобилей из Лос-Анджелеса в Детройт, 1300 автомобилей - из Детройта в Денвер, 200 автомобилей - из Детройта в Майами и 1200 - из Нового Орлеана в Майами. Минимальная стоимость перевозок составляет 313200 долларов.

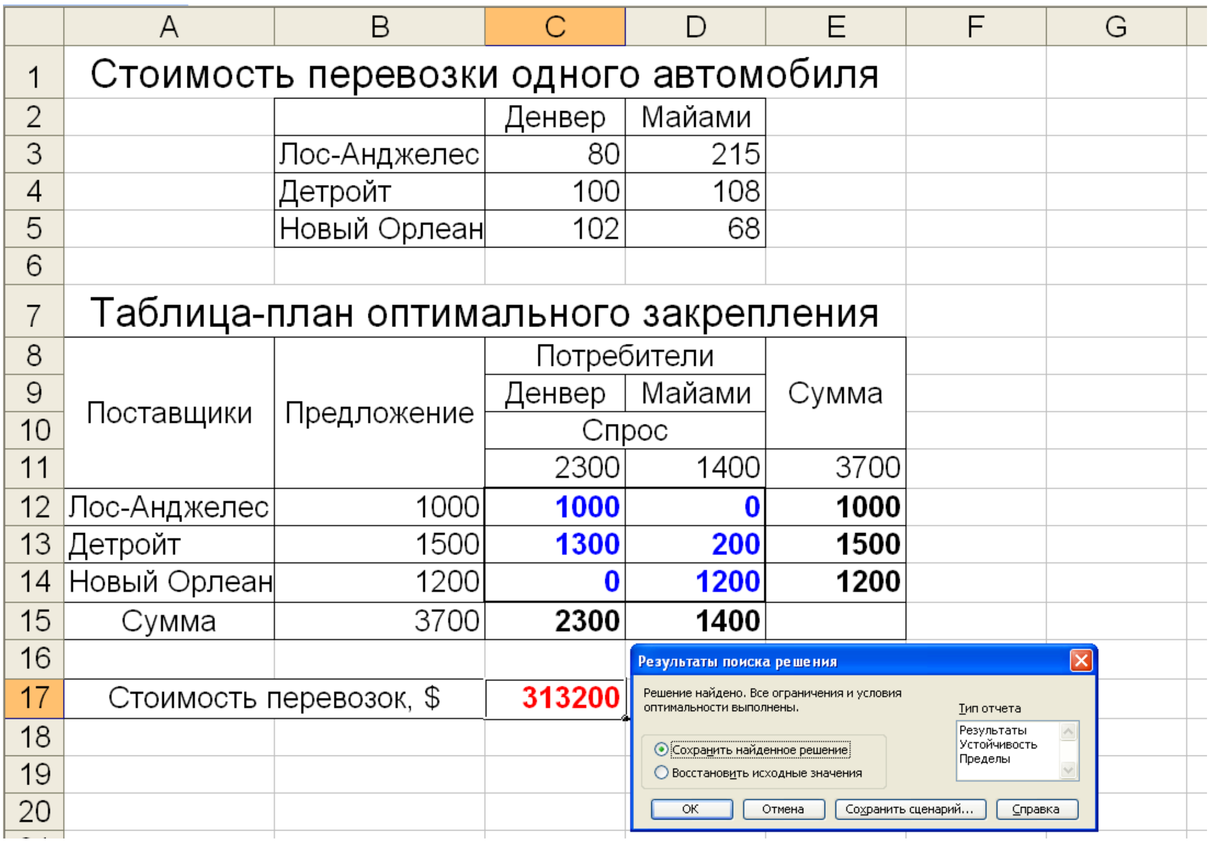


Рис. 2.4

Когда суммарный объем предложений (грузов, имеющихся в пунктах отправления) не равен общему объему спроса на товары (грузы), запрашиваемые пунктами назначения, транспортная задача называется несбалансированной. В этом случае, при решении классической транспортной задачи методом потенциалов, применяют прием, позволяющий несбалансированную транспортную задачу сделать сбалансированной. Для этого вводят фиктивные пункты назначения или отправления. Выполнение баланса транспортной задачи необходимо для того, чтобы иметь возможность применить алгоритм решения, построенный на использовании транспортных таблиц. В Excel несбалансированная транспортная задача решается путем изменения ограничений по спросу (если спрос превышает предложение) или по предложению (если предложение превышает спрос), т.е. система ограничений будет иметь вид:

в первом случае, либо

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le S_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \\ x_{ij} \ge 0, \\ x_{ij} \in N \cup \{0\}. \end{cases}$$

во втором случае.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le D_j, \\ x_{ij} \ge 0, \\ x_{ij} \in N \cup \{0\}. \end{cases}$$

Рассмотрим решение несбалансированной транспортной задачи в Excel, используя приведенный выше пример.

Задача 2.2. В рамках модели компании MG Auto предположим, что завод в Детройте уменьшил выпуск продукции до 1300 автомобилей (вместо 1500, как было ранее). В этом случае общее количество произведенных автомобилей (S_i=3500) меньше общего количества заказанных (D_j=3700) автомобилей. Таким образом, очевидно, что часть заказов распределительных центров Денвера и Майами не будет выполнена. На рис. 2.5 и рис. 2.6 представлено решение данной задачи в Excel.

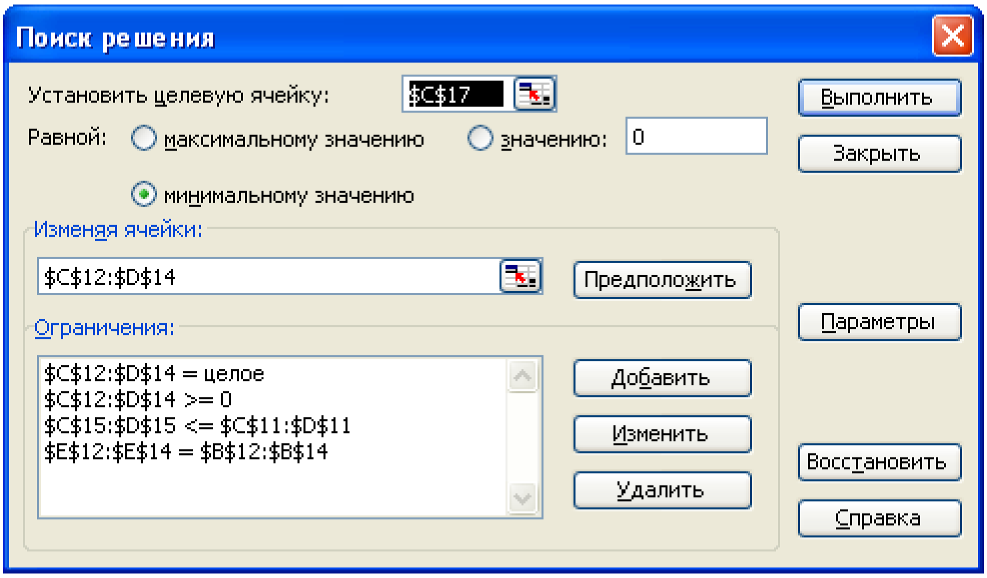
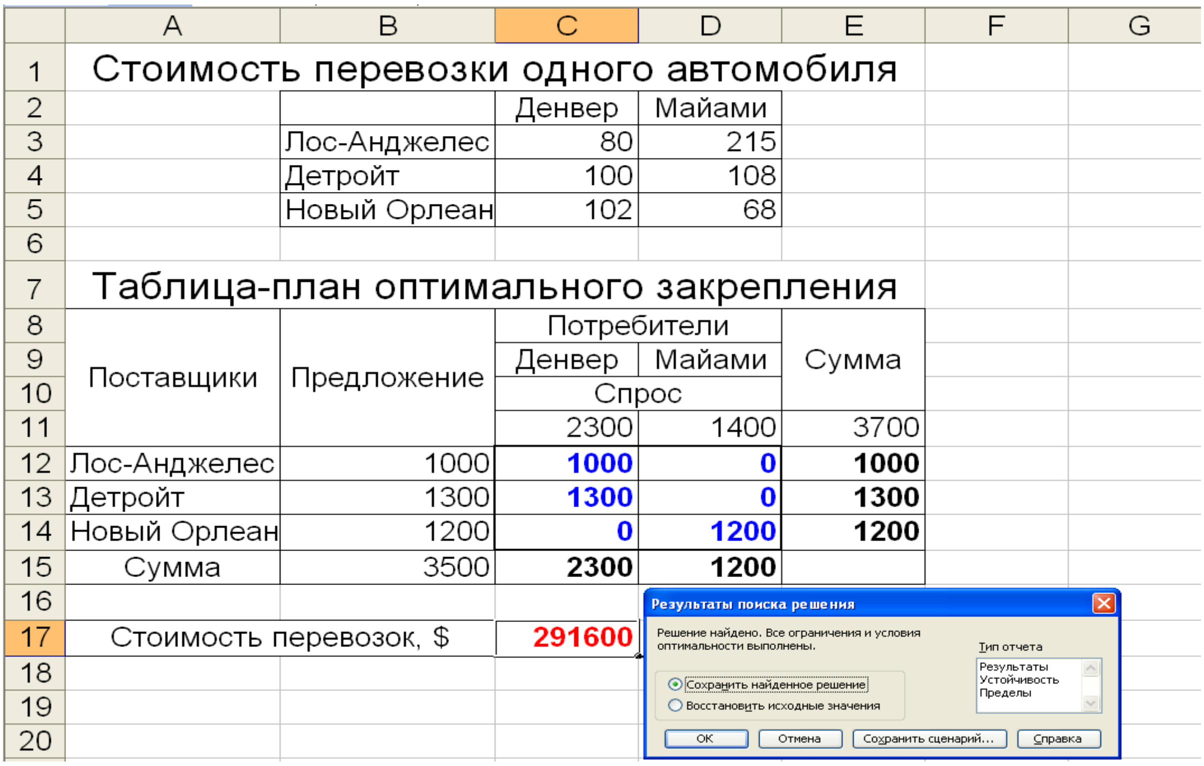


Рис. 2.5



	A	B	C	D	E	F	G
1	Стоимость перевозки одного автомобиля						
2			Денвер	Майами			
3		Лос-Анджелес	80	215			
4		Детройт	100	108			
5		Новый Орлеан	102	68			
6							
7	Таблица-план оптимального закрепления						
8	Поставщики	Предложение	Потребители		Сумма		
9			Денвер	Майами			
10			Спрос				
11			2300	1400	3700		
12	Лос-Анджелес	1000	**1000**	**0**	**1000**		
13	Детройт	1300	**1300**	**0**	**1300**		
14	Новый Орлеан	1200	**0**	**1200**	**1200**		
15	Сумма	3500	**2300**	**1200**			
16							
17	Стоимость перевозок, $		**291600**				
18							
19							
20							

Рис. 2.6

В таблице-плане оптимального закрепления на рис. 2.6 представлено оптимальное решение. Решение показывает, что спрос распределительного центра Денвера будет удовлетворен полностью, а в распределительный центр Майами из заказа в 1400 автомобилей не будет поставлено 200 автомобилей.

Если предположить, что заказ распределительного центра Денвера составляет всего 1900 автомобилей, то получим ситуацию, когда предложение превышает спрос. Решение данной задачи в Excel представлено на рис. 2.7 и рис. 2.8. Решение показывает, что 400 автомобилей завода Детройта не востребованы дилерами.

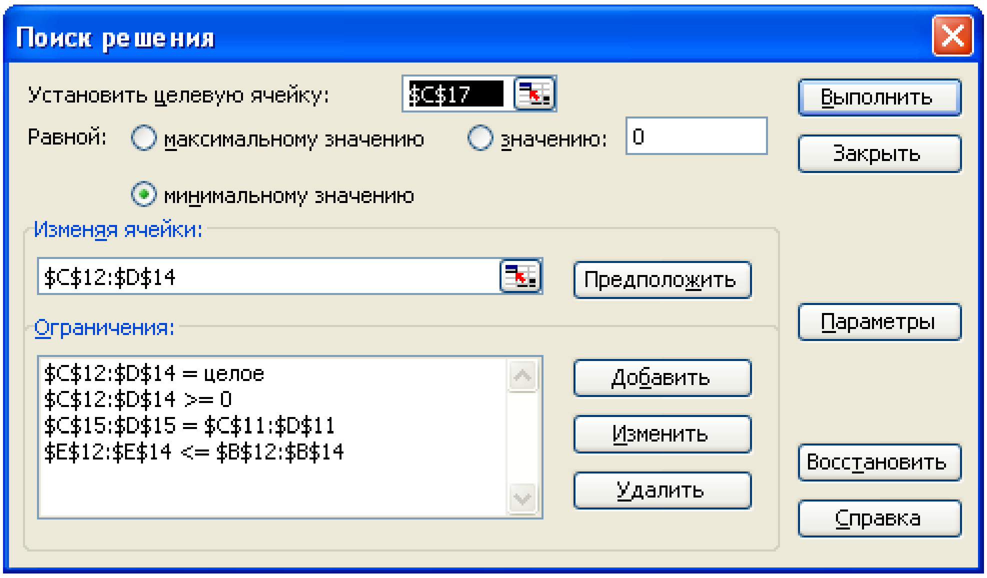
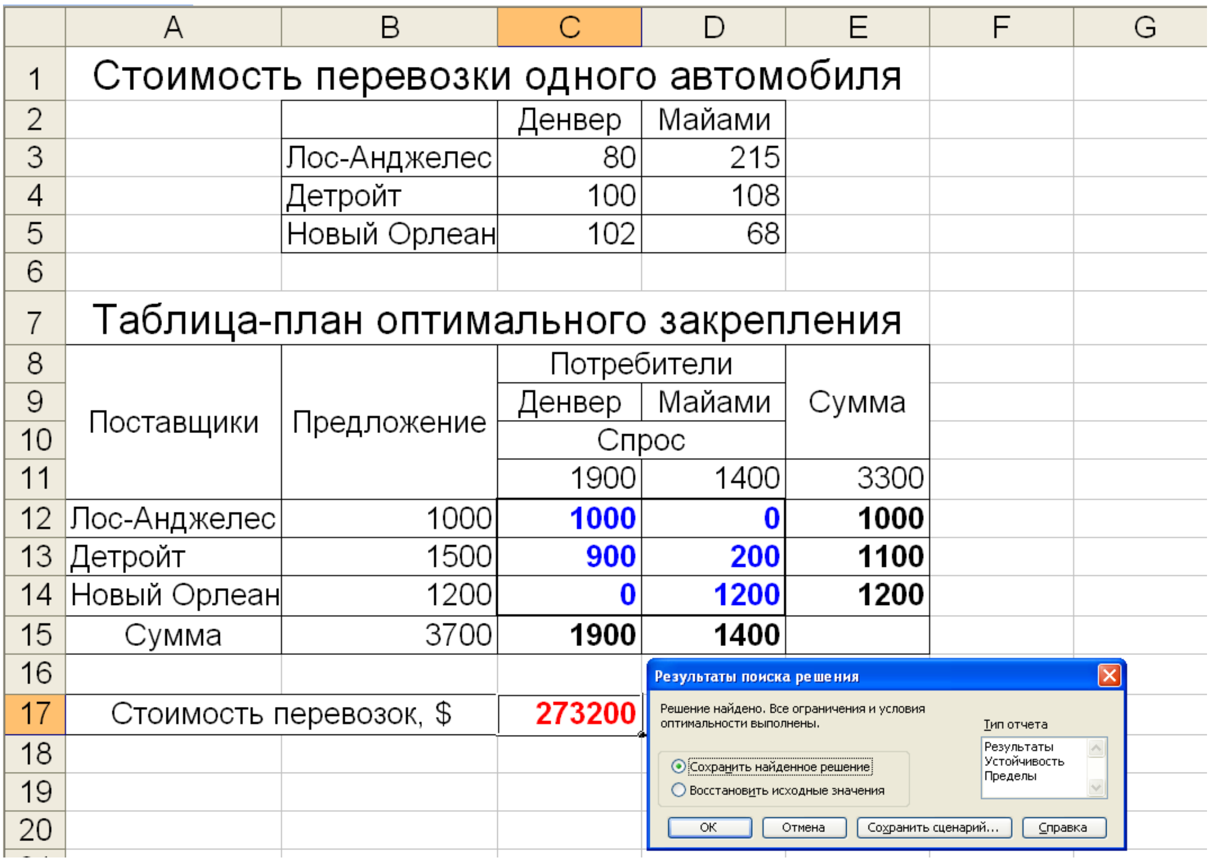


Рис. 2.7



	A	B	C	D	E
1	Стоимость перевозки одного автомобиля				
2			Денвер	Майами	
3		Лос-Анджелес	80	215	
4		Детройт	100	108	
5		Новый Орлеан	102	68	
6					
7	Таблица-план оптимального закрепления				
8	Поставщики	Предложение	Потребители		Сумма
9			Денвер	Майами	
10			Спрос		
11			1900	1400	3300
12	Лос-Анджелес	1000	**1000**	**0**	**1000**
13	Детройт	1500	**900**	**200**	**1100**
14	Новый Орлеан	1200	**0**	**1200**	**1200**
15	Сумма	3700	**1900**	**1400**	
16					
17	Стоимость перевозок, $		**273200**		

Рис. 2.8

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

В пунктах *A* и *B* находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта *A* в пункты 1, 2, 3 равна соответственно 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 т соответственно, а из пункта *B* в пункты 1, 2, 3 - 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 т соответственно.

Составьте табличную модель транспортной задачи и оптимизируйте ее в Excel.

Задача 2

Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 штук, втором – 30, третьем – 20, четвертому – 40 штук. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д.е.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки автомобилей в Excel.

Задача 3

Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	10
B	2	1	3	30
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков, в Excel.

Задача 4

Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму – 70, третьему – 50 и четвертому – 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д.е. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов в Excel.

Задача 5

На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100, пункту 3 – 200, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д.е.) 80, 30, 50, 20; со склада В – 40, 10, 60, 70; со склада С -10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки в Excel.

Задача 6

Завод имеет три цеха – А, В, С и четыре склада – 1; 2; 3; 4. Цех А производит 30 тыс. шт. изделий, цех В – 40; цех С – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 – 20 тыс. шт. изделий; склад 2 – 30; склад 3 – 30 и склад 4 – 10 тыс. шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 – соответственно (д.е.): 20, 30, 40, 40; из цеха В – соответственно 30, 20, 50, 10; а из цеха С – соответственно 40, 30, 20, 60.

Составьте план перевозки изделий, минимизирующий транспортные расходы, в Excel.

Задача 7

Имеются две станции технического обслуживания (СТО), выполняющие ремонтные работы для трех автопредприятий. Производственные мощности СТО, стоимость ремонта в различных СТО, затраты на транспортировку от автопредприятий на СТО и обратно и прогнозируемое количество ремонтов в планируемом периоде на каждом автопредприятии приведены в следующей таблице:

СТО	Стоимость ремонта ед., д.е.	Затраты на транспортировку, тыс. руб.			Производственная мощность, шт.
		АТП-1	АТП-2	АТП-3	
1	520	60	70	20	10
2	710	40	50	30	8
Потребное количество, шт.		6	7	5	18

Требуется определить, какое количество автомашин из каждого автопредприятия необходимо отремонтировать на каждый СТО, чтобы суммарные расходы на ремонт и транспортировку были минимальными. Постройте табличную модель данной задачи и оптимизируйте ее в Excel.

Задача 8

Имеются два хранилища с однородным продуктом, в которых сосредоточено 200 и 120 т продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 80, 100 и 120 т. Расстояния от хранилищ до потребителей (8 км) следующие:

Хранилище	Потребители		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км постоянны и равны 5 у.е.

Определите в Excel план перевозок продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

Задача 9

Промышленный концерн имеет два заводы и пять складов в различных регионах страны. Каждый месяц первый завод производит 40,а второй 70 ед. продукции. Вся продукция, производимая заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. Издержки транспортировки продукции от завода до склада следующие (ед.):

Заводы	Склады				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Определите в Excel план перевозок из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

Задача 10

Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11 и 7 млн. галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 2 км составляет 5 д.е. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

№ завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат в Excel.

Задача 11

Автомобили перевозятся на трайлерах из трех центров распределения пяти продавцам. Стоимость перевозки в расчете на 1 км пути, пройденного трайлером, равна 60 д.е. Один трайлер может перевозить 15 автомобилей. Стоимость перевозок не зависит от того, насколько полно загружается трайлер. В приведенной ниже таблице указаны расстояния между центрами распределения и продавцами, а также величины, характеризующие ежемесячный спрос и объемы поставок, исчисляемые количеством автомобилей:

Центр распределения	Продавцы					Объем поставок, шт.
	1	2	3	4	5	
1	80	120	180	150	50	300
2	60	70	50	65	90	350
3	30	80	120	140	90	120
Спрос на автомобили, шт.	110	250	140	150	120	770

Составьте табличную модель транспортной задачи и оптимизируйте ее в Excel.

Задача 12

Решите задачу распределения станков четырех различных типов по шести типам работ. Пусть имеются 30, 45, 25 и 20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30, 20, 10, 40, 10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться операция 6. Исходя из коэффициентов стоимости операции, представленных в следующей таблице, постройте модель и выполните оптимальное распределение станков по работам:

Тип станков	Тип работы					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	-
4	11	12	9	3	1	3

Составьте табличную модель транспортной задачи и оптимизируйте ее в Excel.

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПУНКТАМИ

3.1. Математическая постановка задачи

Одно практически важное обобщение классической транспортной задачи связано с учетом возможности доставки товара от i-го источника к j-му стоку по маршруту, проходящему через некоторый *промежуточный пункт* (склад). Так, например, промежуточные пункты являются составной частью распределительной системы любой крупной компании, имеющей сеть универсальных магазинов во многих городах. Такая компания обычно имеет зональные оптовые базы (источники), снабжающие товарами более мелкие региональные склады (промежуточные пункты), откуда эти товары поступают в розничную торговую сеть (стоки). При этом товар для каждого фиксированного стока в общем случае может быть доставлен не из любого источника и по маршрутам, не обязательно проходящим через все промежуточные пункты. Кроме того, промежуточные пункты могут обладать вполне определенной спецификой. Так, например, при транспортировке товара от источника к стоку по маршруту, проходящему через склад, часть товара может быть использована для создания неприкосновенного запаса на складе.

Задачу выбора плана перевозок товаров от источников стокам с учетом промежуточных пунктов, обеспечивающего минимальные транспортные затраты и потребности стоков, в исследовании операций называют *транспортной задачей с промежуточными пунктами*. Для приобретения практических навыков в построении математических моделей таких задач обратимся к следующему примеру.

Пример 3.1. Торговая фирма имеет восемь складов, на которых сосредоточены все имеющиеся в наличии запасы товара. Перед началом рекламной компании решено перераспределить часть запасов товара между складами в соответствии с прогнозами сбыта в районах их размещения. Требуется разработать план перевозок товара между складами, который позволит при минимальных транспортных затратах создать на каждом складе необходимый запас товара.

На рис. 3.1 представлена схема размещения складов, на которой указаны: а) склады в виде *узлов сети* с номерами от 1 до 8; б) избыток товара на складе, который должен быть перераспределен в системе складов (указан в квадратных скобках рядом с узлом сети положительным числом и выражен в единицах измерения товара); в) недостаток товара на складе, который должен быть устранен за счет его поставок с других складов системы (указан в квадратных скобках рядом с узлом сети отрицательным числом); г) возможность перевозки товара со склада *i* на склад *j* (ориентированная дуга от круга с номером *i* к кругу с номером *j*); д) затраты, связанные с перевозкой единицы товара со склада *i* на склад *j* (величина c_{ij} рядом с соответствующей ориентированной дугой, выраженная в денежных единицах).

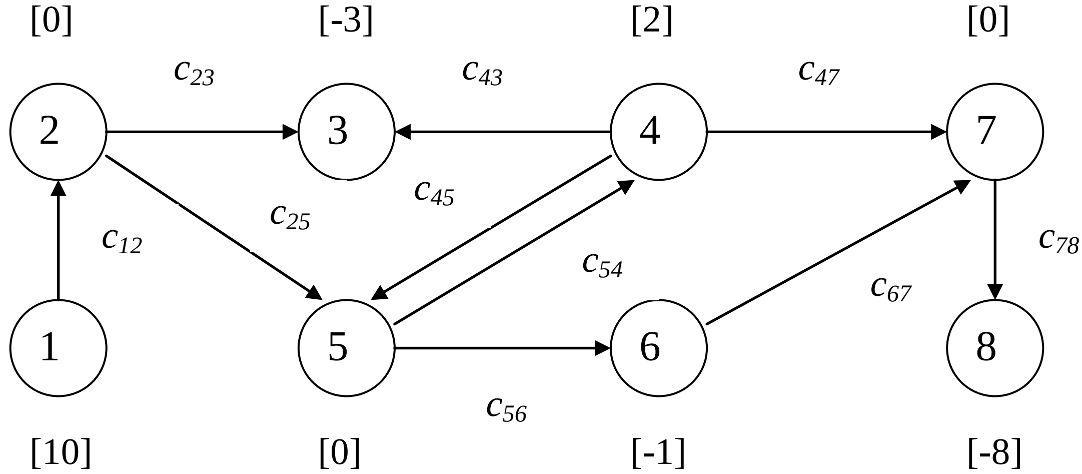


Рис. 3.1

На рис. 3.1 видно, что суммарный избыток товара, имеющийся на складах системы с номерами 1 и 4, равен суммарному недостатку товара, имеющемуся на складах с номерами 3, 6 и 8 той же системы. Перераспределение товара может происходить через склады с номерами 2, 4-7, которые в рассматриваемой задаче и являются *промежуточными* или *транзитными пунктами*. *Истинным пунктом отправления* является лишь склад с номером 1, на котором имеется избыток товара и с которого товар можно только вывозить, а *истинными пунктами назначения* являются склады с номерами 3 и 8, на которых есть недостаток товара, и на эти склады товары можно только завозить. Заметим также, что между складами с номерами 4 и 5 возможны перевозки в обоих направлениях, но в общем случае $c_{45} \neq c_{54}$ (например, наличие одностороннего движения по кратчайшему маршруту). Объемы спроса и предложения, соответствующие этим пунктам отправления и назначения, вычисляются следующим образом.

Объем предложения *истинного пункта отправления* = объем исходного предложения.

Объем предложения *транзитного пункта* = объем исходного предложения + объем буфера.

Объем спроса *истинного пункта назначения* = объем исходного спроса.

Объем спроса *транзитного пункта* = объем исходного спроса + объем буфера.

Объем буфера должен быть таким, чтобы вместить объем всего предложения (или спроса).

Пусть J — множество номеров складов, на которые товар может быть доставлен с k-го склада, а I — множество номеров складов, с которых товар может быть доставлен на k-й склад. T_k — величина *чистого запаса* товара, равная объему исходного предложения или исходного спроса. Тогда математическую модель данной задачи можно представить следующим образом:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i \in I}^{m} \sum\limits_{j \in J}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\
\sum\limits_{j \in J}^{n} x_{ij} = S_i, \\
\sum\limits_{i \in I}^{m} x_{ij} = D_j, \\
x_{ij} \geq 0, \\
x_{ij} \in N \cup \{0\}. \\
\sum\limits_{j \in J}^{n} x_{kj} + x_{kk} = T_k + B; \\
\sum\limits_{i \in I}^{n} x_{ik} + x_{kk} = B.
\end{cases}
$$

В специальной литературе по исследованию операций[2] приводится доказательство того, что рассматриваемая транспортная задача с промежуточными пунктами эквивалентна классической транспортной задаче.

3.2. Решение транспортной задачи с промежуточными пунктами в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel транспортной задачи с промежуточными пунктами.

Задача 3.1. Найти решение транспортной задачи с промежуточными пунктами, рассмотренной в примере 3.1, если стоимость перевозки единицы товара составляет: c_{12}=3 у.е., c_{23}=7 у.е., c_{25}=3 у.е., c_{43}=6 у.е., c_{45}=4 у.е., c_{47}=5 у.е., c_{54}=5 у.е., c_{56}=3 у.е., c_{67}=5 у.е., c_{78}=2 у.е.

На рис. 3.2 представлены таблицы Стоимость перевозки единицы товара и План перевозок товара между складами, сформированные на рабочем листе Excel. Здесь в таблице Стоимость перевозки единицы товара мы видим, что если между отдельными складами отсутствует возможность перевозки товара, то в соответствующие ячейки таблицы (выделенные темным фоном) заносится любое большое число (в данном случае 100). Для того, чтобы найти в таблице Плана перевозок товара между складами объем предложения и объем спроса, определим объем буфера B по следующему правилу:

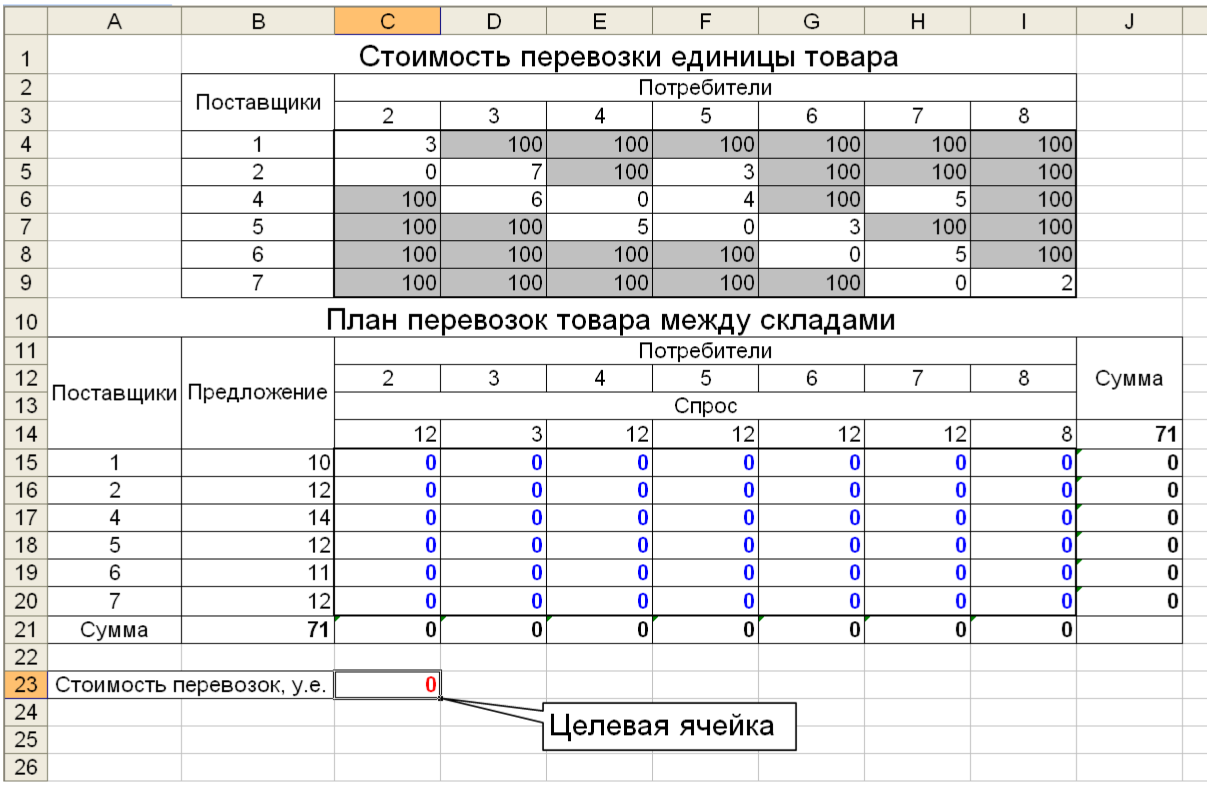
B = общий объем предложения = S_1+S_4= 10+2 = 12 ед.

или

B = общий объем спроса = $D_3+D_6+D_8$= 3+1+8 = 12 ед.

Для остальных складов объемы предложения S_i или объемы спроса D_j равны нулю (см. рис. 3.1).

[2] Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2000. -436 с.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Стоимость перевозки единицы товара							
2		Поставщики	Потребители							
3			2	3	4	5	6	7	8	
4		1	3	100	100	100	100	100	100	
5		2	0	7	100	3	100	100	100	
6		4	100	6	0	4	100	5	100	
7		5	100	100	5	0	3	100	100	
8		6	100	100	100	100	0	5	100	
9		7	100	100	100	100	100	0	2	
10			План перевозок товара между складами							
11	Поставщики	Предложение	Потребители							Сумма
12			2	3	4	5	6	7	8	
13			Спрос							
14			12	3	12	12	12	12	8	71
15	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0
16	2	12	0	0	0	0	0	0	0	0
17	4	14	0	0	0	0	0	0	0	0
18	5	12	0	0	0	0	0	0	0	0
19	6	11	0	0	0	0	0	0	0	0
20	7	12	0	0	0	0	0	0	0	0
21	Сумма	71	0	0	0	0	0	0	0	
22										
23	Стоимость перевозок, у.е.		0							
24										
25										
26										

Рис. 3.2

В целевую ячейку, в данном случае C23, необходимо занести формулу: =СУММПРОИЗВ(C4:I9;C15:I20).

Используя меню Сервис⇒Поиск решения открываем диалоговое окно Поиск решения (см. рис. 3.3), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке Выполнить.

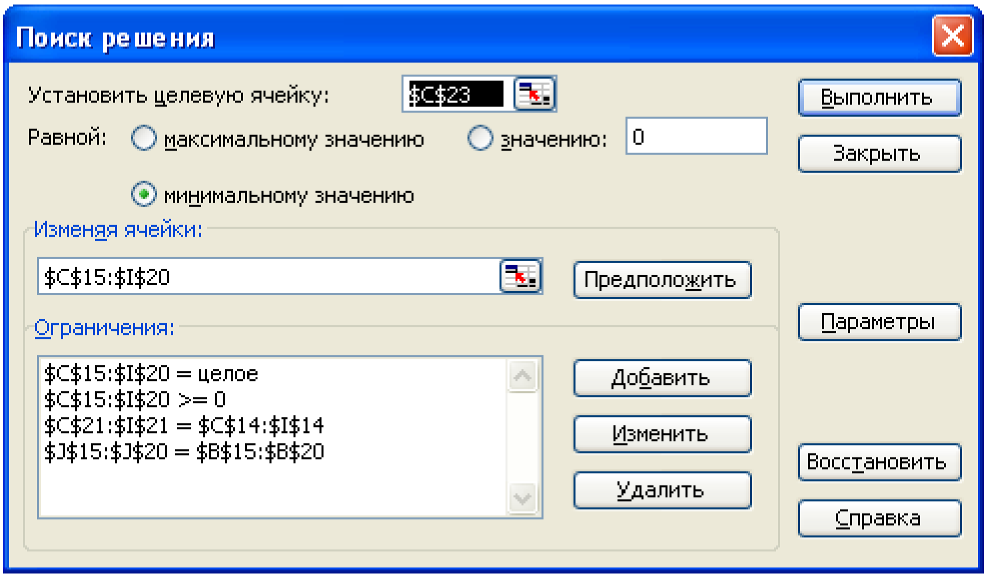
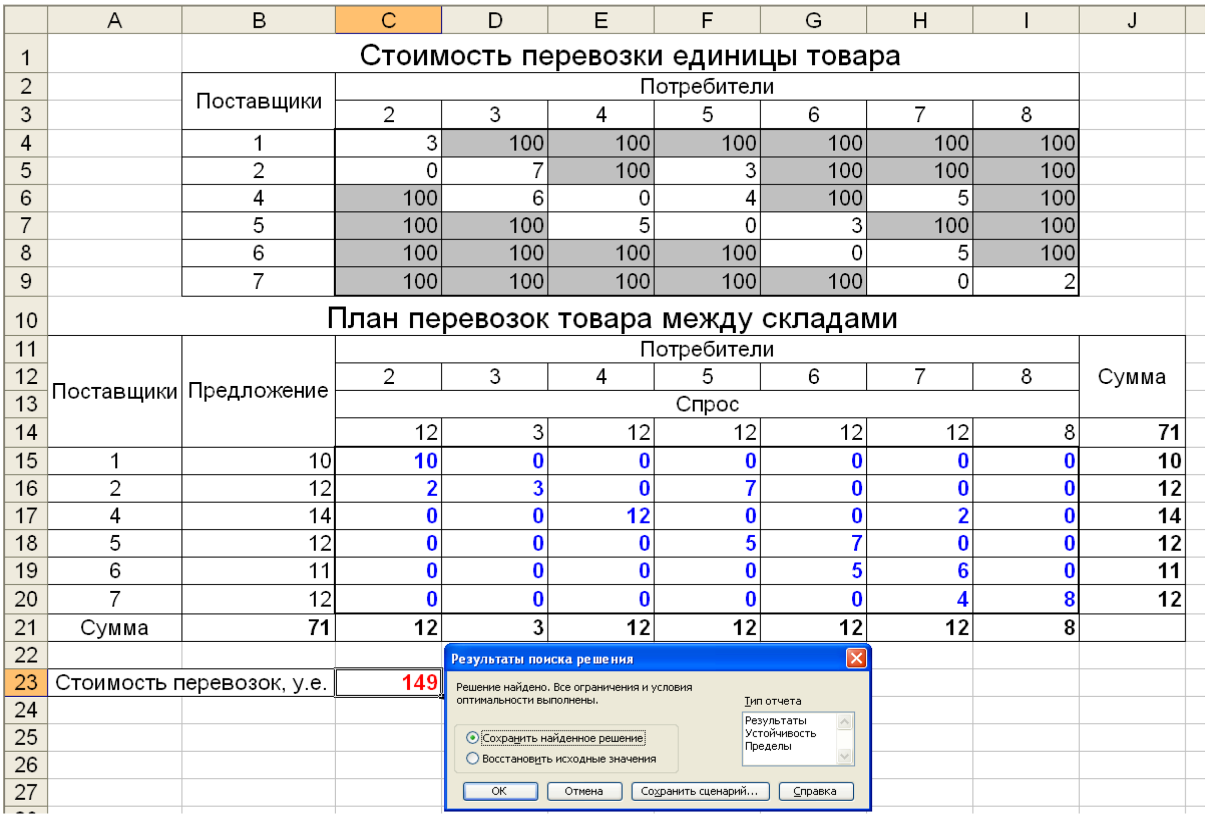


Рис. 3.3

Результат решения данной задачи представлен на рис. 3.4.



Стоимость перевозки единицы товара

Поставщики	Потребители 2	3	4	5	6	7	8
1	3	100	100	100	100	100	100
2	0	7	100	3	100	100	100
4	100	6	0	4	100	5	100
5	100	100	5	0	3	100	100
6	100	100	100	100	0	5	100
7	100	100	100	100	100	0	2

План перевозок товара между складами

Поставщики	Предложение	Потребители 2	3	4	5	6	7	8	Сумма
		Спрос							
		12	3	12	12	12	12	8	71
1	10	10	0	0	0	0	0	0	10
2	12	2	3	0	7	0	0	0	12
4	14	0	0	12	0	0	2	0	14
5	12	0	0	0	5	7	0	0	12
6	11	0	0	0	0	5	6	0	11
7	12	0	0	0	0	0	4	8	12
Сумма	71	12	3	12	12	12	12	8	

Стоимость перевозок, у.е. 149

Рис. 3.4

Здесь мы видим, что оптимальный план перевозок товара между складами следующий:

- со склада 1 (истинный пункт отправления) товар в количестве трех единиц транзитом через склад 2 отправлен на склад 3, который является истинным пунктом назначения;
- со склада 1 (истинный пункт отправления) товар в количестве семи единиц транзитом через склады 2 и 5 отправлен на склад 6, где одна единица товара используется для пополнения запаса на этом складе;
- со склада 6 товар в количестве шести единиц транзитом через склад 7 отправлен на склад 8, который также является истинным пунктом назначения;
- со склада 4 избыток товара в количестве четырех единиц отправлен на склад 8 транзитом через склад 7.

Стоимость перевозок при этом минимальна и составляет 149 условных денежных единиц.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найдите решение в Excel задачи 3.1, если c_{12}=10 у.е., c_{23}=7 у.е., c_{25}=9 у.е., c_{43}=5 у.е., c_{45}=4 у.е., c_{47}=12 у.е., c_{54}=6 у.е., c_{56}=8 у.е., c_{67}=3 у.е., c_{78}=8 у.е.

Задача 2

В транспортной сети, показанной на рис. 3.5, осуществляются перевозки из пунктов 1 и 2 в пункты 5 и 6 через транзитные пункты 3 и 4. Стоимость перевозок показана на этом же рисунке. Постройте транспортную модель с промежуточными пунктами и решите задачу в Excel.

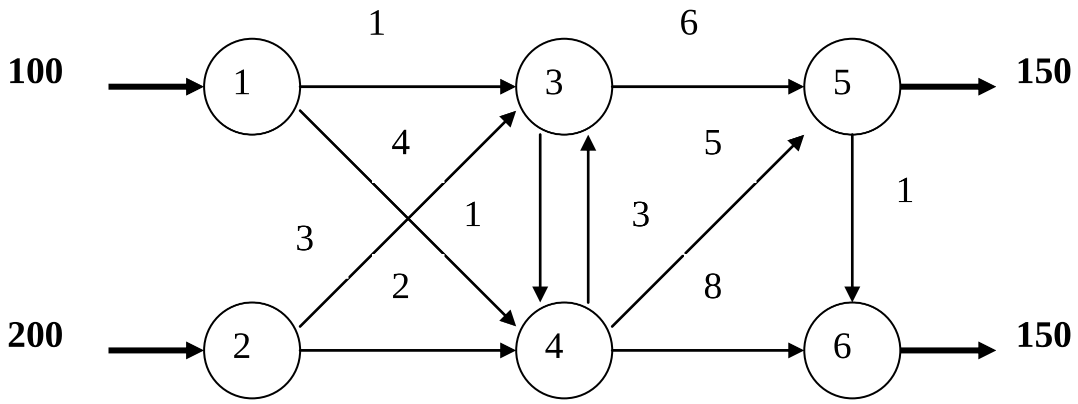


Рис. 3.5

Задача 3

Пусть в предыдущей задаче пункты 1 и 2 связаны транспортной магистралью со стоимостью перевозки в $1, а стоимость перевозки из пункта 1 в пункт 3 возросла до $5. Найдите оптимальный план перевозок.

Задача 4

На рис. 3.6 показана транспортная сеть перевозок автомобилей между тремя заводами (пункты 1, 2 и 3) и тремя дилерами (пункты 6, 7 и 8) через два распределительных центра (пункты 4 и 5). Стоимость перевозок (в сотнях долларов) составляет: c_{14}=1; c_{15}=0,3; c_{24}=0,8; c_{25}=4,3; c_{34}=2; c_{35}=4,6; c_{45}=0,5; c_{46}=0,2; c_{47}=4,5; c_{48}=6; c_{58}=1,9.

Постройте транспортную модель с промежуточными пунктами и найдите ее оптимальное решение в Excel.

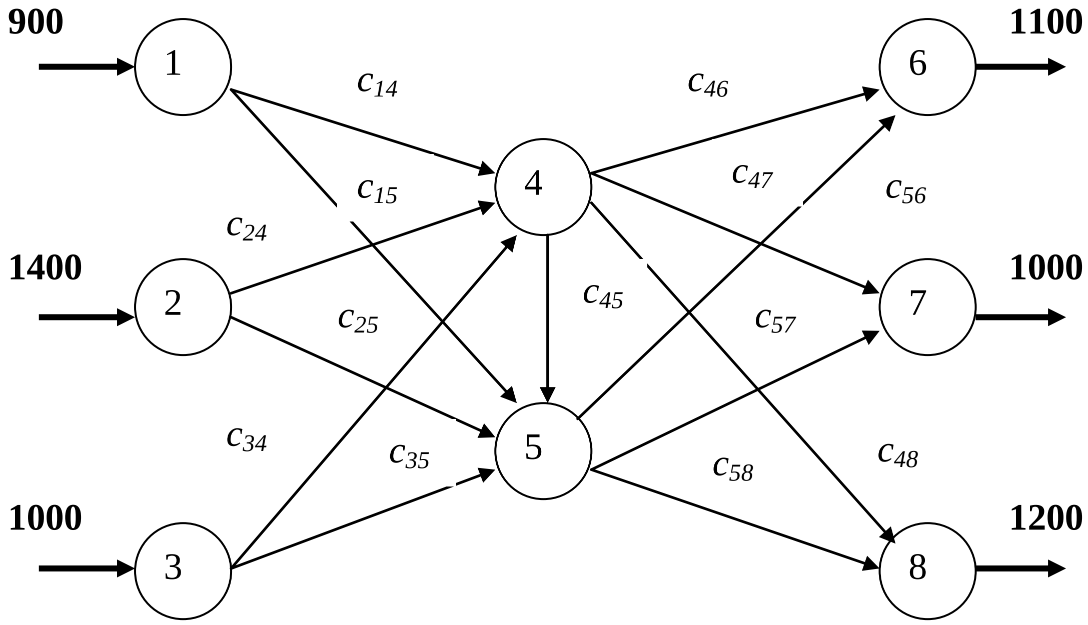


Рис. 3.6

Задача 5

Предположим в задаче 4 распределительный центр (пункт 4 на рис. 3.6) может продать 240 автомобилей самостоятельно. Найдите новое оптимальное решение.

Задача 6

Предположим, в задаче 4 производство автомобилей на первом заводе возросло с 900 до 1500 автомобилей, при неизменном спросе на них. Найдите новое оптимальное решение.

Задача 7

Пусть в задаче 4 спрос на автомобили первого дилера вырос с 1100 до 1300, второго − с 1000 до 1200, а третьего − с 1200 до 1300 автомобилей. Производство автомобилей осталось на прежнем уровне. Найдите новое оптимальное решение.

Задача 8

Две фабрики снабжают определенной продукцией три магазина. Объемы производства фабрик равны 200 и 300 единиц продукции, а потребности магазинов составляют 100, 200 и 50 единиц продукции. Величины стоимости перевозок приведены в таблице:

		Фабрики		Магазины		
		1	2	1	2	3
Фабрики	1	\$0	\$6	\$7	\$8	\$9
	2	\$6	\$0	\$5	\$4	\$3
Магазины	1	\$7	\$2	\$0	\$5	\$1
	2	\$1	\$5	\$1	\$0	\$4
	3	\$8	\$9	\$7	\$6	\$5

Постройте транспортную модель с промежуточными пунктами и найдите ее оптимальное решение в Excel.

Задача 9

На рис. 3.7 показана сеть нефтепроводов. Узлы этой сети соответствуют насосным и принимающим станциям. Расстояние (в милях) между станциями приведены на схеме сети. Стоимость транспортировки одного галлона нефти между двумя станциями пропорциональна длине нефтепровода, соединяющего эти станции. Постройте транспортную модель с промежуточными пунктами и найдите ее оптимальное решение в Excel.

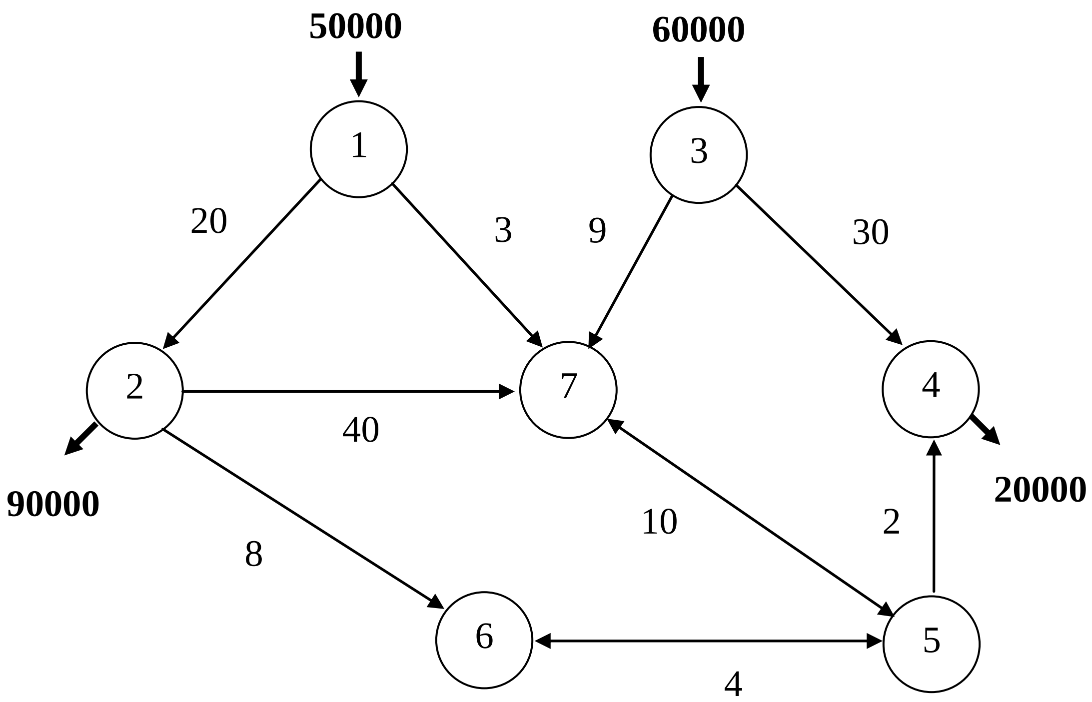


Рис. 3.7

Задача 10

Два автомобильных завода (пункты 1 и 2) связаны с тремя дилерами (пункты 5, 6 и 7), имеющими два транзитных (перевалочных) центра (пункты 3 и 4), как показано на рис. 3.8. Заводы производят 1000 и 1200 автомобилей. Заказы дилеров составляют соответственно 800, 900 и 300 автомобилей. Стоимость перевозки одного автомобиля (в сотнях долларов) показана на рис. 3.8. Постройте транспортную модель с промежуточными пунктами и найдите ее оптимальное решение в Excel.

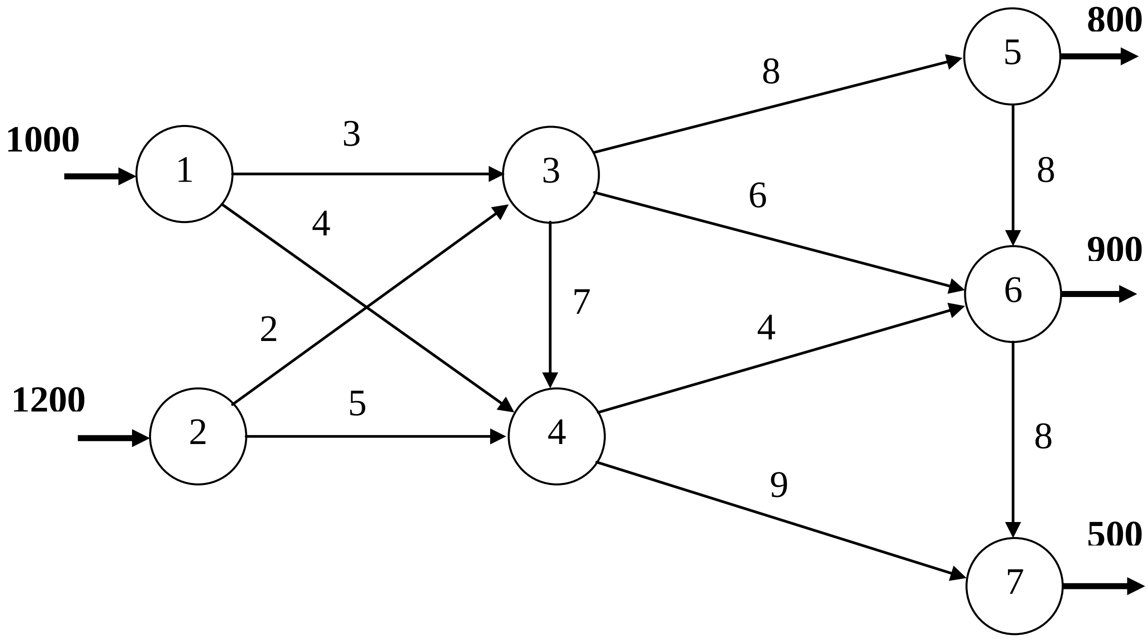


Рис. 3.8

Задача 11

Предположим, в задаче 10 производство автомобилей на первом заводе возросло с 1000 до 1500 автомобилей, при неизменном спросе на них. Найдите новое оптимальное решение.

Задача 12

Пусть в задаче 10 спрос на автомобили первого дилера вырос с 800 до 1000, второго − с 900 до 1100, а третьего − с 500 до 800 автомобилей. Производство автомобилей осталось на прежнем уровне. Найдите новое оптимальное решение.

4. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

4.1. Математическая постановка задачи

Предположим, что имеется n различных работ, каждую которых может выполнить любой из n привлеченных исполнителей. Стоимость выполнения i-й работы j-м исполнителем известна и равна c_{ij} (в условных денежных единицах). Необходимо распределить исполнителей по работам (назначить одного исполнителя на каждую работу) так, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением всего комплекса работ.

В исследовании операций задача, сформулированная выше известна как *задача о назначениях*. Введем переменные x_{ij}, принимающие значение 1 в случае, когда i-ю работу выполняет j-й исполнитель и значение 0 во всех остальных случаях, $i,j = 1, n$. Тогда ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\dots n,$$

гарантирует выполнение каждой работы лишь одним исполнителем, ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\dots n,$$

гарантирует, что каждый из исполнителей будет выполнять лишь одну работу. Стоимость выполнения всего комплекса работ равна

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Таким образом, задача о назначениях имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,\dots,n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,n; \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Задача о назначениях является частным случаем *классической транспортной задачи*, в которой надо положить $n = m$, $S_i = 1$, $i = 1,...,n$, $D_j = 1$, $j == 1,...,n$. При этом условие $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i,j = 1,...,n$, означает выполнение *требования целочисленности* переменных x_{ij}. Это связано с тем, что *мощности* всех *источников* и *стоков* равны единице, откуда следует, что в допустимом целочисленном решении значениями переменных могут быть только 0 и 1.

Как частный случай классической транспортной задачи, задачу о назначениях можно рассматривать как *задачу линейного программирования*. Поэтому в данном случае используют терминологию и теоретические результаты линейного программирования.

В задаче о назначениях переменное x_{ij}, может принимать значение 0 или 1. При этом в любом допустимом решении лишь n переменных могут принимать значения 1. Таким образом, любое *допустимое базисное решение* задачи о назначениях будет *вырожденным*.

На практике встречаются задачи о назначениях, в постановках которых параметр c_{ij} для $i,j= 1,...,n$ понимается как эффективность выполнения i-й работы j-м исполнителем. В этих случаях нужно так распределить работы между исполнителями, чтобы суммарная эффективность их выполнения был бы максимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max,$$

где максимум ищется при указанных выше ограничениях.

4.2. Решение задачи о назначениях в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel задачи о назначениях на основании следующего примера.

Задача 4.1. У автотранспортной компании имеется n автомобилей разных марок. Автомобили разных марок имеют разную грузоподъёмность q_i (*т*) и разные удельные эксплуатационные затраты c_i (*$/км*). Компания получила заказы от m клиентов на перевозку грузов. Причём в каждом заказе указан объём перевозимого груза Q_j (*т*) и расстояние перевозки $\boldsymbol{L}_j$ (*км*). Требуется, используя табличный процессор Excel, оптимальным образом назначить автомобили на рейсы для выполнения заказов клиентов, полагая тарифы на перевозки одинаковыми.

Покажем, что представленная задача удовлетворяет рассмотренным выше требованиям.

1) Поскольку тарифы одинаковые, то в качестве целевой функции следует выбрать эксплуатационные затраты. Эти затраты необходимо минимизировать путём оптимального распределения автомобилей по клиентам.

2) Поскольку в общем случае $m \neq n$, то задачу необходимо сбалансировать путём введения фиктивных заказов или фиктивных автомобилей. Получим:

а) При $n>m$ заказов меньше, чем автомобилей (избыток провозных возможностей). В этом случае дополнительно вводятся n-m фиктивных клиентов с нулевыми объёмами заказов (т.е. $Q_j=0$ и $L_j=0$). Поскольку для фиктивных клиентов заказы нулевые, то для их выполнения будут назначаться самые неэффективные по затратам автомобили. Практически выполнение заказа фиктивного клиента означает резервирование автомобиля (автомобиль остаётся в парке).

б) При $n<m$ заказов больше, чем автомобилей (недостаток провозных возможностей). В этом случае дополнительно вводятся m-n фиктивных автомобилей с бесконечно большими удельными затратами (т.е. $c_j \to \infty$). Практически это означает отказ от самых невыгодных в смысле затрат заказов.

3) Окончательно получим сбалансированную задачу, описываемую квадратной матрицей эксплуатационных затрат размерностью $k \times k$, где $k=\max\{m,n\}$.

Алгоритм решения данной задачи в Excel сводится к следующему.

Количество рейсов i-го автомобиля у j-го клиента вычисляется по формуле

$$z_{ij} = \frac{Q_j}{q_i}, \text{ для всех } i=1,2,\ldots k;\ j=1,2,\ldots k.$$

Количество рейсов - величина целочисленная, принимающая значение большее или равное 1. Для её вычисления следует воспользоваться функцией округления частного от деления в большую сторону. Например, если исходные данные находятся в ячейках B7:C7 и D4:D5, то количество рейсов определяется функцией (второй параметр функции округления равен 0) = ОКРУГЛВВЕРХ($B7/D$5;0).

Пробег *i*-го автомобиля у *j*-го клиента вычисляется по формуле

$R_{ij} = z_{ij} \times L_j$.

Эксплуатационные затраты вычисляются по формуле

$S_{ij} = R_{ij} \times c_i = z_{ij} \times L_j \times c_i$,

где c_i – удельные эксплуатационные затраты, связанные с назначением *i*-го автомобиля для обслуживания *j*-го клиента, т.е. для приведенного выше примера в ячейку D7 необходимо занести формулу

= ОКРУГЛВВЕРХ($B7/D$5;0)*$C7*D$4.

Дополнительная целочисленная переменная логического типа принимает значения

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ïðè íàçíà÷åíèè} \\ 0, & \text{èíà÷å} . \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} S_{ij} \times x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = 1; \qquad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1; \qquad x_{ij} \ge 0 \ \text{ целое для всех } i,j = 1,2,\ldots k.$$

Найдем решение задачи 3.1 в Excel, используя следующие исходные данные.

Автотранспортная компания располагает 10 автомобилями разных марок: 3 автомобиля марки A; 3 автомобиля марки B; 2 автомобиля марки C; 1 автомобиль марки D; 1 автомобиль марки E.

Характеристики автомобилей представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Характеристики		Марка автомобиля				
		A	B	C	D	E
Грузоподъёмность, *т*	q_i	20	16	8	5	2,5
Удельные затраты, *$/км*	c_i	0,8	0,55	0,35	0,25	0,13

Компанией получены заказы от 9 клиентов. Характеристики заказов представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Характеристики		Клиенты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объём груза, *т*	Q_j	250	200	350	69	50	12	30	20	60
Расстояние, *км*	L_j	60	40	80	140	50	120	60	100	90

На рис. 4.1 представлена таблица с исходными данными. Поскольку заказов меньше имеющихся у компании автомобилей, необходимо ввести фиктивного клиента с нулевым объёмом перевозок. В той же таблице произвести необходимые промежуточные расчёты затрат по приведённой выше формуле.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2							Матрица затрат Sij						
3													
4			---> c	0,8	0,8	0,8	0,55	0,55	0,55	0,35	0,35	0,25	0,13
5			---> q	20	20	20	16	16	16	8	8	5	2,5
6	№	Q, *т*	L, *км*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	250	60,0	=ОКРУГЛВВЕРХ($B7/D$5;0)*$C7*D$4				528,0	528,0	672,0	672,0	750,0	780,0
8	2	200	40,0	320,0	320,0	320,0	286,0	286,0	286,0	350,0	350,0	400,0	416,0
9	3	350	80,0	1152,0	1152,0	1152,0	968,0	968,0	968,0	1232,0	1232,0	1400,0	1456,0
10	4	60	140,0	336,0	336,0	336,0	308,0	308,0	308,0	392,0	392,0	420,0	436,8
11	5	50	50,0	120,0	120,0	120,0	110,0	110,0	110,0	122,5	122,5	125,0	130,0
12	6	12	120,0	96,0	96,0	96,0	66,0	66,0	66,0	84,0	84,0	90,0	78,0
13	7	30	60,0	96,0	96,0	96,0	66,0	66,0	66,0	84,0	84,0	90,0	93,6
14	8	20	100,0	80,0	80,0	80,0	110,0	110,0	110,0	105,0	105,0	100,0	104,0
15	9	60	90,0	216,0	216,0	216,0	198,0	198,0	198,0	252,0	252,0	270,0	280,8
16	10	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
17													
18													
19													
20													

Рис. 4.1

На рис. 4.2 представлены Матрица X_{ij}, содержащая переменные логического типа x_{ij} и Матрица произведения S_{ij}*X_{ij}, в которой отразится результат оптимального закрепления автомобилей за клиентами и, соответствующие этому закреплению, минимальные затраты.

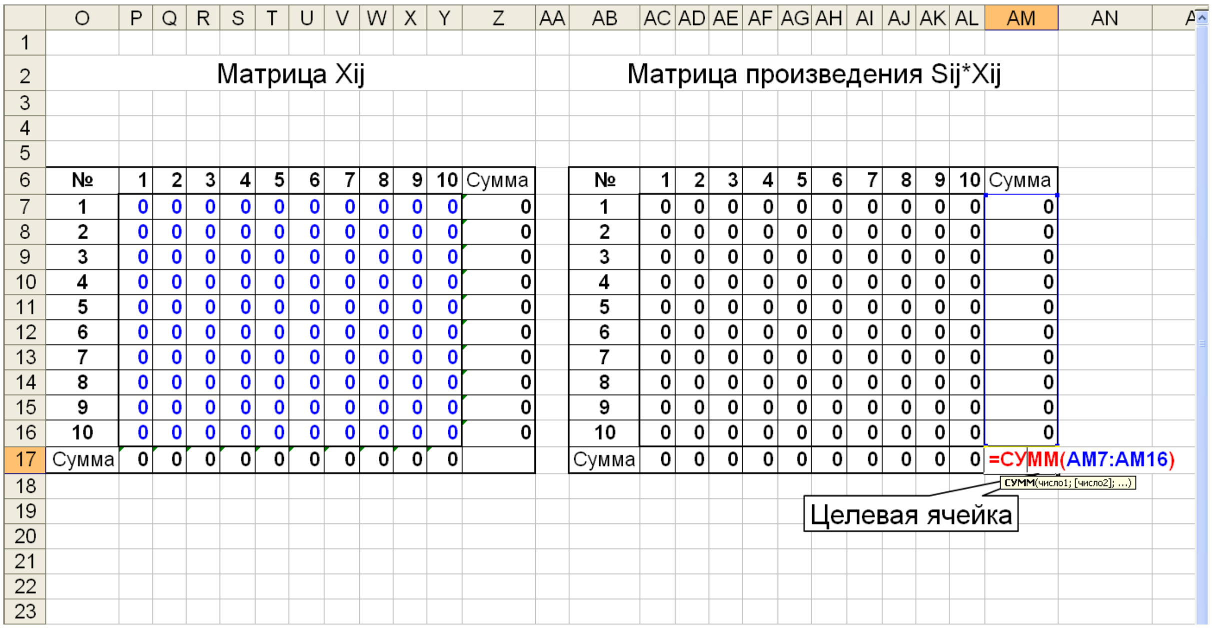


Рис. 4.2

Используя меню Сервис⇒Поиск решения открываем диалоговое окно Поиск решения (см. рис. 4.3), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек со значениями логической переменной x_{ij} (Матрица X_{ij}) и ограничения, и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке Выполнить.

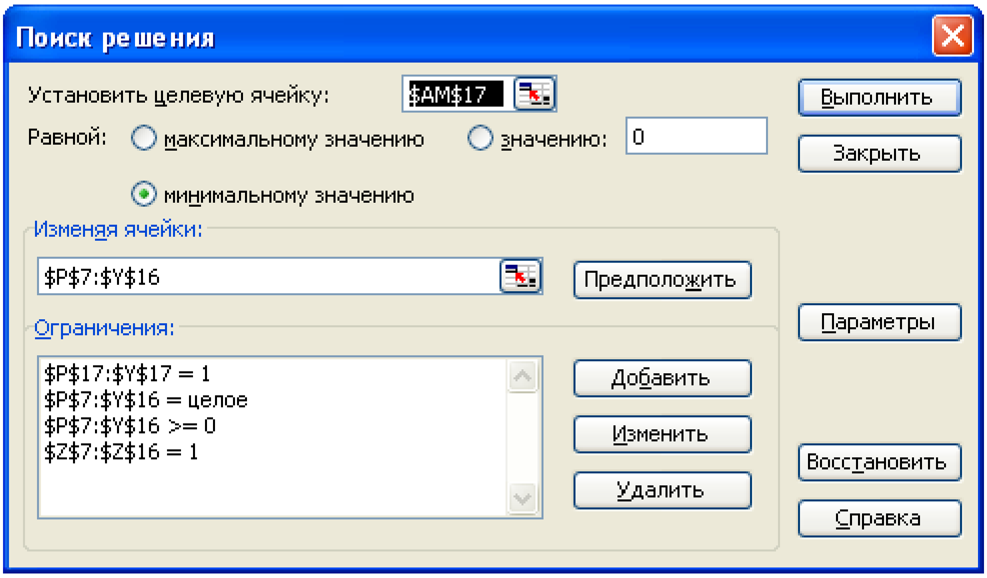
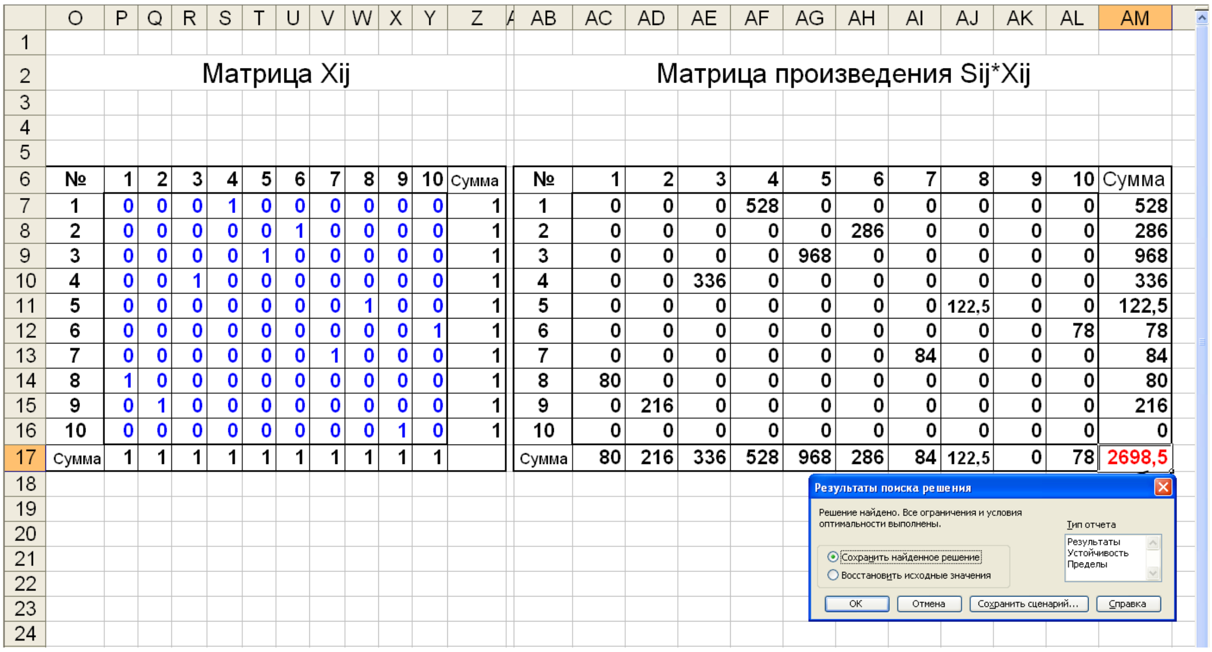


Рис. 4.3

Результат поиска будет находиться в изменяемых ячейках Матрицы X_{ij} (i - автомобиль; j - клиент) и в целевой ячейке (эксплуатационные затраты) (см. рис. 4.4).



Матрица Xij

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Сумма	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Матрица произведения Sij*Xij

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	528	0	0	0	0	0	0	528
2	0	0	0	0	0	286	0	0	0	0	286
3	0	0	0	0	968	0	0	0	0	0	968
4	0	0	336	0	0	0	0	0	0	0	336
5	0	0	0	0	0	0	0	122,5	0	0	122,5
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	78	78
7	0	0	0	0	0	0	84	0	0	0	84
8	80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80
9	0	216	0	0	0	0	0	0	0	0	216
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	80	216	336	528	968	286	84	122,5	0	78	2698,5

Рис. 4.4

Здесь мы видим, что оптимальный план назначения автомобилей на выполнение заказов следующий:

- первый автомобиль назначается на выполнение заказа восьмого клиента;
- второй автомобиль – девятого клиента;
- третий автомобиль – четвертого клиента;
- четвертый автомобиль – первого клиента;
- пятый автомобиль – третьего клиента;
- шестой автомобиль – второго клиента;
- седьмой автомобиль – седьмого клиента;
- восьмой автомобиль – пятого клиента;
- девятый автомобиль – десятого клиента;
- десятый автомобиль – шестого клиента.

Очевидно, что девятый автомобиль, назначенный фиктивному десятому клиенту, будет простаивать в парке. Эксплуатационные затраты при этом минимальны и составят $2698,5.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу 4.1, используя исходные данные о характеристике заказов, представленные в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Варианты задач для самостоятельного решения

№	Характеристики заказов	Клиенты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Q_j, *т*	37	25	50	6	64	80	49	55	68
	L_j, *км*	145	254	246	215	159	240	286	127	63
2	Q_j, *т*	82	66	28	53	72	31	45	43	28
	L_j, *км*	125	172	227	163	246	230	231	213	62
3	Q_j, *т*	91	92	52	14	34	7	51	90	70
	L_j, *км*	251	122	167	229	186	263	284	107	286
4	Q_j, *т*	9	77	62	13	75	50	58	11	66
	L_j, *км*	82	252	215	182	291	105	162	264	117
5	Q_j, *т*	88	51	44	93	58	67	27	97	51
	L_j, *км*	260	148	300	155	136	225	154	67	286
6	Q_j, *т*	93	66	23	80	61	66	61	48	76
	L_j, *км*	174	50	158	289	67	132	53	227	89
7	Q_j, *т*	79	23	59	48	42	79	84	61	100
	L_j, *км*	173	133	251	150	182	95	193	254	73
8	Q_j, *т*	46	41	69	64	55	77	76	90	21
	L_j, *км*	214	223	124	142	288	159	139	210	239
9	Q_j, *т*	88	40	55	68	58	74	96	37	20
	L_j, *км*	296	72	99	265	80	143	102	215	110
10	Q_j, *т*	75	96	73	23	82	14	77	26	39
	L_j, *км*	199	81	228	64	64	225	280	165	166
11	Q_j, *т*	86	40	64	78	78	80	84	89	24
	L_j, *км*	233	296	153	244	298	249	227	172	102
12	Q_j, *т*	12	38	13	35	6	48	83	24	99
	L_j, *км*	73	225	64	219	281	265	138	249	240

5. ЗАДАЧА ВЫБОРА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

5.1. Математическая постановка задачи

Пусть задана некоторая сеть (рис. 5.1), каждой ориентированной дуге которой соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь из i-го узла сети в ее заданный j-й узел. К этой задаче, известной в исследовании операций как *задача выбора кратчайшего пути*, сводятся такие практически важные задачи, как задача о замене оборудования, задача о календарном планировании комплекса работ и т.д.

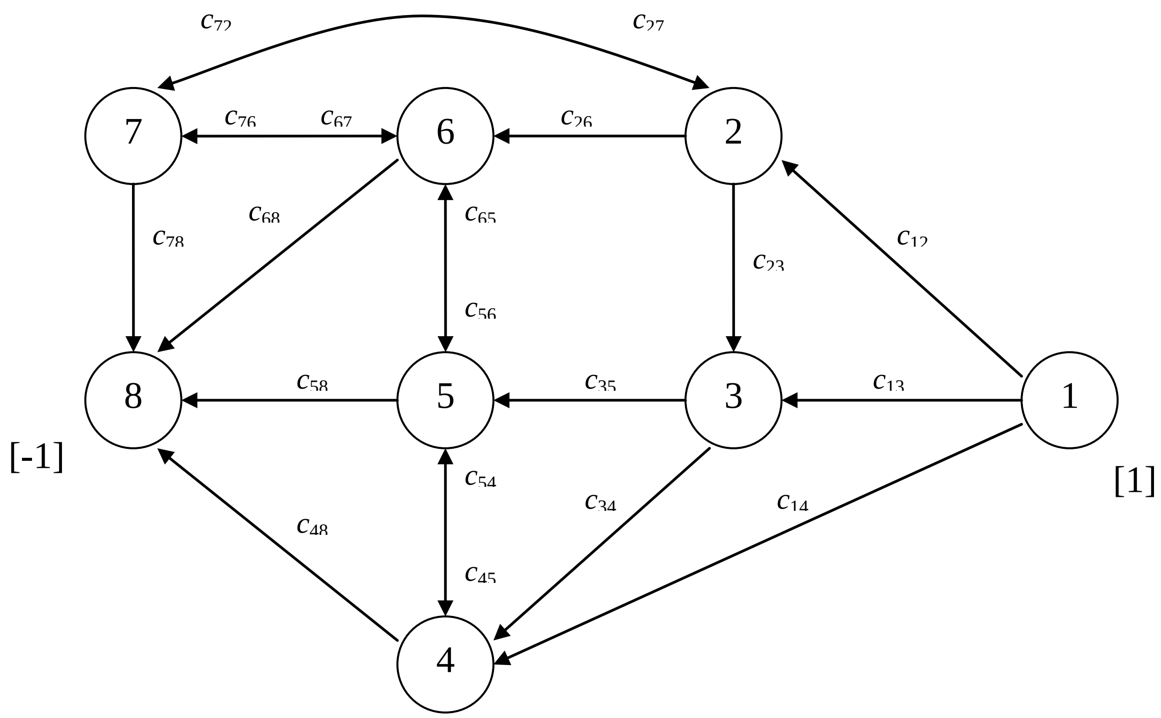


Рис. 5.1

Как правило, в сети выделяют один узел, который является конечным (пункт или станция назначения, сток). Задача заключается в отыскании кратчайшего пути в этот конечный узел (на рис. 5.1 конечным является узел с номером 8) из некоторого другого узла сети (например, из первого узла сети на рис. 5.1). Величина c_{ij} определяет расстояние от i-го узла сети до ее j-го узла.

Величина c_{ij} может измеряться в единицах, отличных от единиц длины. Так, например, c_{ij} может представлять собой стоимость проезда от i-го до j-го узла сети. Тогда задача заключается в отыскании пути минимальной стоимости. Величина c_{ij} может также определять время переезда от i-го до j-го узла сети. При этом необходимо найти путь с минимальной продолжительностью переезда.

При решении прикладных задач, сводящихся к задаче выбора кратчайшего пути, часто встречаются ситуации, когда $c_{ij} \neq c_{ji}$. Кроме того, как правило, не выполняется так называемое неравенство треугольника: $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ для всех или некоторых значений индексов i, j, k.

Существуют сети, содержащие циклы, каждый из которых представляет собой замкнутый путь (путь, исходящий из некоторого узла сети и возвращающийся в него же). Так, в сети представленной на рис. 5.1, много циклов, один из них содержит узлы с номерами 2, 3, 5, 6 и 7. Как правило, в задачах исследования операций значения c_{ij} положительны и общая длина цикла является положительной. Следовательно, решение задачи выбора кратчайшего пути не может содержать циклов.

Предположим, что для сети, представленной на рис. 5.1, необходимо найти кратчайший путь от узла с номером 1 (источник) до узла с номером 8 (сток). Установим связь этой задачи с классической транспортной задачей.

Пример 5.1. Рассмотрим транспортную задачу с промежуточными пунктами, сеть которой представлена на рис. 5.1. При этом предположим, что: а) в узле с номером 1 имеется избыточная единица товара; б) в узле с номером 8 имеется недостаток единицы товара; в) узлы с номерами 2−7 являются промежуточными пунктами с нулевыми чистыми запасами (потребность в дополнительных поставках товара равна нулю). Необходимо разработать план перевозок товара между узлами сети (складами), который при минимальных транспортных затратах позволит на каждом складе поддерживать нулевой чистый запас товара.

Как и в примере 3.1 (см. раздел 3 учебного пособия), считаем, что каждой ориентированной дуге сети соответствует переменное модели x_{ij}, представляющее собой количество товара, которое должно быть отправлено с i-го склада на j-й. Для каждого k-го промежуточного пункта вводим переменное x_{kk} с соответствующим ему коэффициентом $c_{kk} = 0$ в целевой функции, а величину чистого запаса обозначаем через T_k. Если множество пар индексов (i, j), соответствующих ориентированным дугам сети, представленной на рис. 5.1, обозначить через J, то рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{(i,j)\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\
\sum\limits_{(i,j)\in J} x_{kj} - \sum\limits_{(i,j)\in J} x_{ik} = T_k \\
T_1 = 1, T_8 = -1, T_k = 0, k = 2,\ldots,7, \\
x_{ij} \ge 0, (i,j) \in J.
\end{cases}
$$

Сформулированная выше задача о нахождении кратчайшего пути эквивалентна классической транспортной задаче.

5.2. Решение задачи о нахождении кратчайшего пути в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel задачи о нахождении кратчайшего пути.

Задача 5.1. Задача выбора кратчайшего пути задана сетью, изображенной на рис. 5.1. Найдите кратчайший путь от узла с номером 1 до узла с номеров 8, если c_{12}=1 км, c_{13}=4 км, c_{14}=6 км, c_{23}=3 км, c_{26}=5 км, c_{27}=1 км, c_{34}=3 км, c_{35}=5 км, c_{45}=1 км, c_{48}=4 км, c_{54}=1 км, c_{56}=1 км, c_{58}=2 км, c_{65}=1 км, c_{67}=3 км, c_{68}=4 км, c_{72}=1 км, c_{76}=3 км, c_{78}=7 км.

На рис. 5.2 представлены Таблица кратчайших расстояний и План перевозок товара по кратчайшему пути, сформированные на рабочем листе Excel. Здесь в Таблице кратчайших расстояний мы видим, что если между отдельными складами отсутствует возможность перевозки товара, то в соответствующие ячейки таблицы (выделенные темным фоном) заносится любое большое число (в данном случае 100).

Не сложно заметить, что данная задача решается аналогично решению транспортной задачи с промежуточными пунктами (см. раздел 3). В целевую ячейку, в данном случае C24, необходимо занести формулу: =СУММПРОИЗВ(C4:I10;C16:I22).

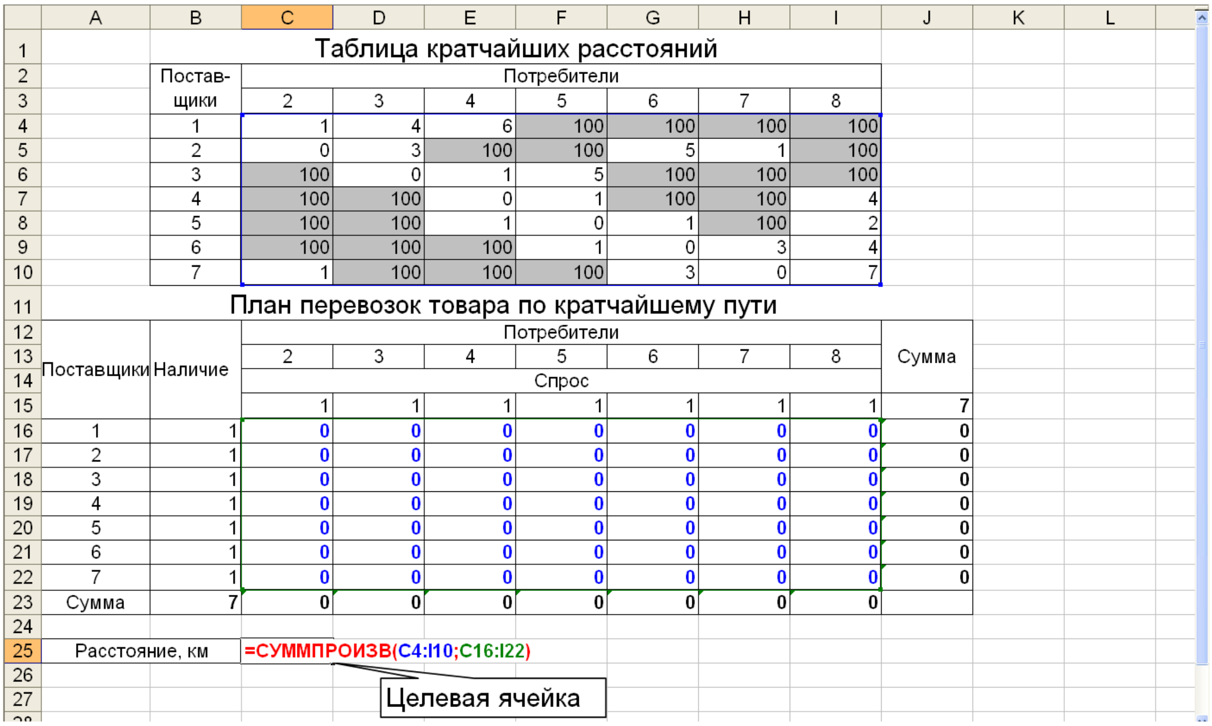


Таблица кратчайших расстояний

Постав-щики	Потребители						
	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	6	100	100	100	100
2	0	3	100	100	5	1	100
3	100	0	1	5	100	100	100
4	100	100	0	1	100	100	4
5	100	100	1	0	1	100	2
6	100	100	100	1	0	3	4
7	1	100	100	100	3	0	7

План перевозок товара по кратчайшему пути

Поставщики	Наличие	Потребители							Сумма
		2	3	4	5	6	7	8	
		Спрос							
		1	1	1	1	1	1	1	7
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	7	0	0	0	0	0	0	0	

Расстояние, км =СУММПРОИЗВ(C4:I10;C16:I22)

Целевая ячейка

Рис. 5.2

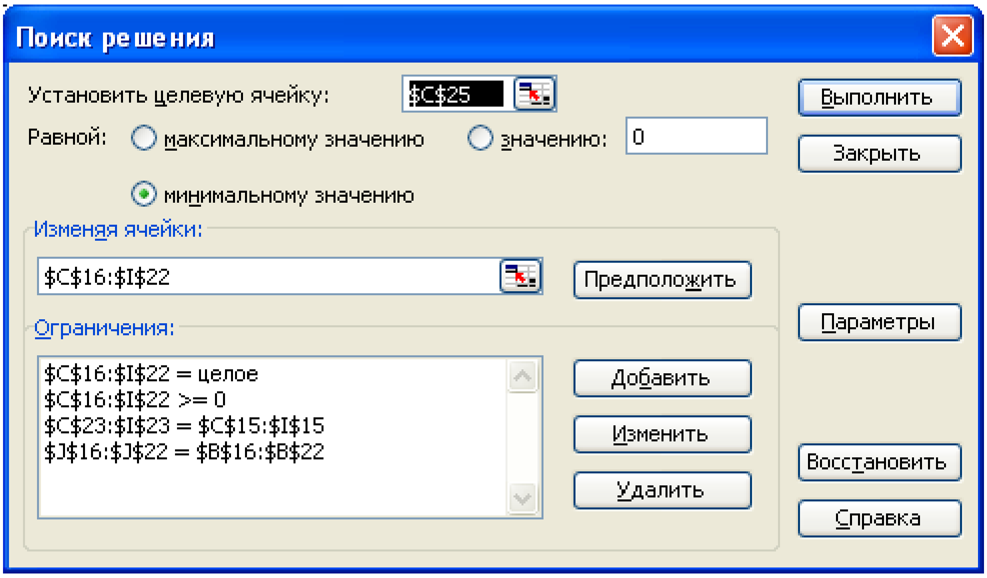


Рис. 5.3

Используя меню **Сервис⇒Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** (см. рис. 5.3), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке **Выполнить**.

Результат решения данной задачи представлен на рис. 5.3.

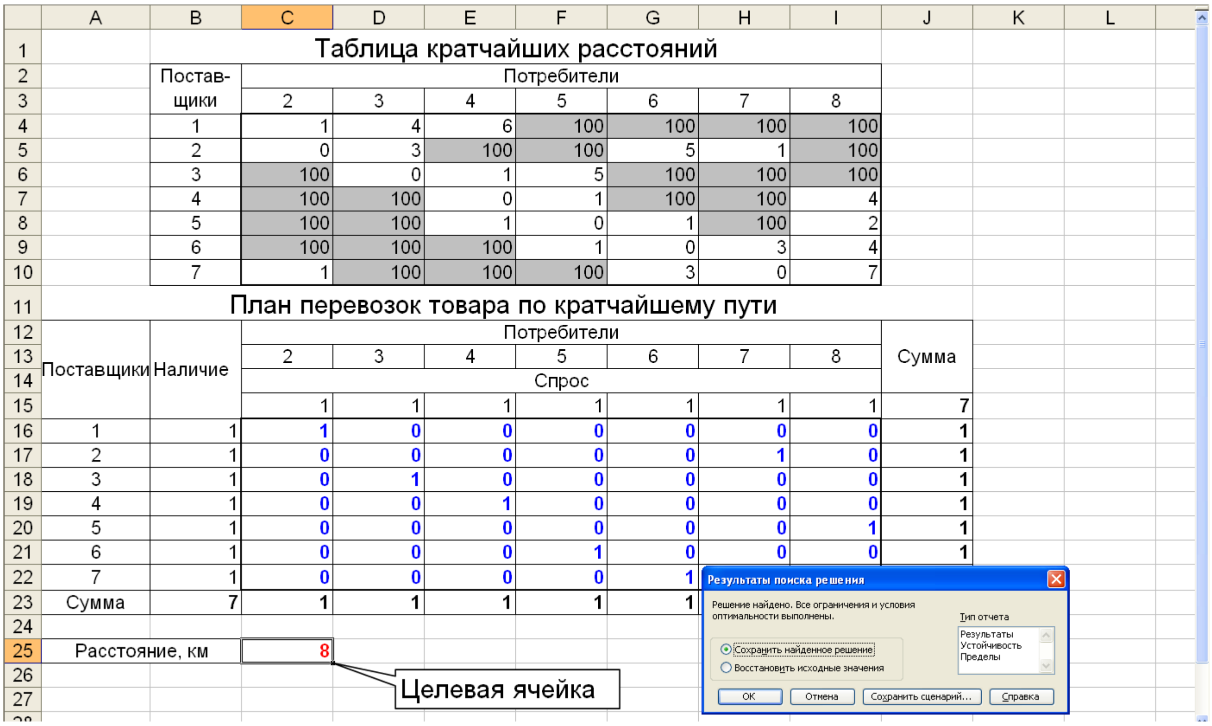


Таблица кратчайших расстояний

Постав-щики	Потребители 2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	6	100	100	100	100
2	0	3	100	100	5	1	100
3	100	0	1	5	100	100	100
4	100	100	0	1	100	100	4
5	100	100	1	0	1	100	2
6	100	100	100	1	0	3	4
7	1	100	100	100	3	0	7

План перевозок товара по кратчайшему пути

Поставщики	Наличие	Потребители 2	3	4	5	6	7	8	Сумма
	Спрос	1	1	1	1	1	1	1	7
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	1	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1
6	1	0	0	0	1	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	1			
Сумма	7	1	1	1	1	1			

Расстояние, км: 8

Рис. 5.3

Здесь мы видим, что кратчайший путь перевозки товара следующий: 1→2→7→6→5→8. Расстояние перевозки при этом составит 8 км. Аналогично данную задачу можно решить и на максимум, т.е. найти самый длинный путь доставки товара.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу 5.1, используя данные о расстояниях между узлами транспортной сети, представленные в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Варианты задач для самостоятельного решения

***c*(*ij*)**	**Расстояние между смежными узлами транспортной сети *c*(*ij*), *км* по вариантам**											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
***c*(12)**	7	8	2	1	8	7	7	4	9	5	3	5
***c*(13)**	7	2	6	10	4	3	8	10	9	4	2	1
***c*(14)**	3	10	4	6	10	6	5	6	8	2	3	8
***c*(23)**	8	5	5	9	4	5	2	3	10	5	8	4
***c*(26)**	7	5	5	1	7	8	3	3	4	1	1	7

Окончание табл. 5.1

***c*(*ij*)**	**Расстояние между смежными узлами транспортной сети *c*(*ij*), *км* по вариантам**											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
***c*(27)**	8	3	7	10	7	6	7	7	2	6	3	5
***c*(34)**	9	9	7	7	5	8	10	3	8	1	9	2
***c*(35)**	1	2	6	7	7	5	4	4	5	3	6	6
***c*(45)**	5	6	7	9	2	4	3	5	8	2	8	4
***c*(48)**	8	2	3	4	3	8	5	1	8	6	9	3
***c*(54)**	2	4	2	7	9	8	7	3	2	9	8	10
***c*(56)**	6	2	5	9	9	5	9	6	9	7	9	10
***c*(58)**	4	1	3	7	3	5	8	2	8	7	4	3
***c*(65)**	9	10	3	9	6	1	1	5	2	6	10	9
***c*(67)**	8	4	10	1	6	4	7	4	2	6	3	8
***c*(68)**	8	3	8	6	8	5	4	6	1	5	7	9
***c*(72)**	10	3	4	8	6	4	10	1	8	2	5	8
***c*(76)**	6	1	10	1	10	6	10	9	5	4	10	8
***c*(78)**	10	7	5	6	7	7	5	2	2	4	7	1

6. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

6.1. Математическая постановка задачи

В *задаче коммивояжера* заданы n пунктов (городов, складов, магазинов и т.п.) и матрица С расстояний между ними, в общем случае несимметричная. Размер этой матрицы $n \times n$, ее элементы c_{ij} по смыслу задачи неотрицательные. Требуется построить такой маршрут обхода всех n пунктов (по одному разу каждого), при котором общая длина пути будет минимальной.

Сформулируем задачу коммивояжера как задачу на орграфе. Рассмотрим ориентированный граф

$$G = (V, E, h),$$

где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – конечное множество вершин; $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – конечное множество дуг; h – весовая функция дуг.

Вершины – это пункты (города), дуги – пути, вес $c_{ij}=h(v_i,v_j)$ каждой дуги e_{ij} – это расстояние от пункта v_i до пункта v_j. В общем случае $c_{ij} \neq c_{ji}$, т.к. мы рассматриваем несимметричную задачу. Требуется построить простой цикл из n вершин (и, соответственно, n дуг) минимального общего веса.

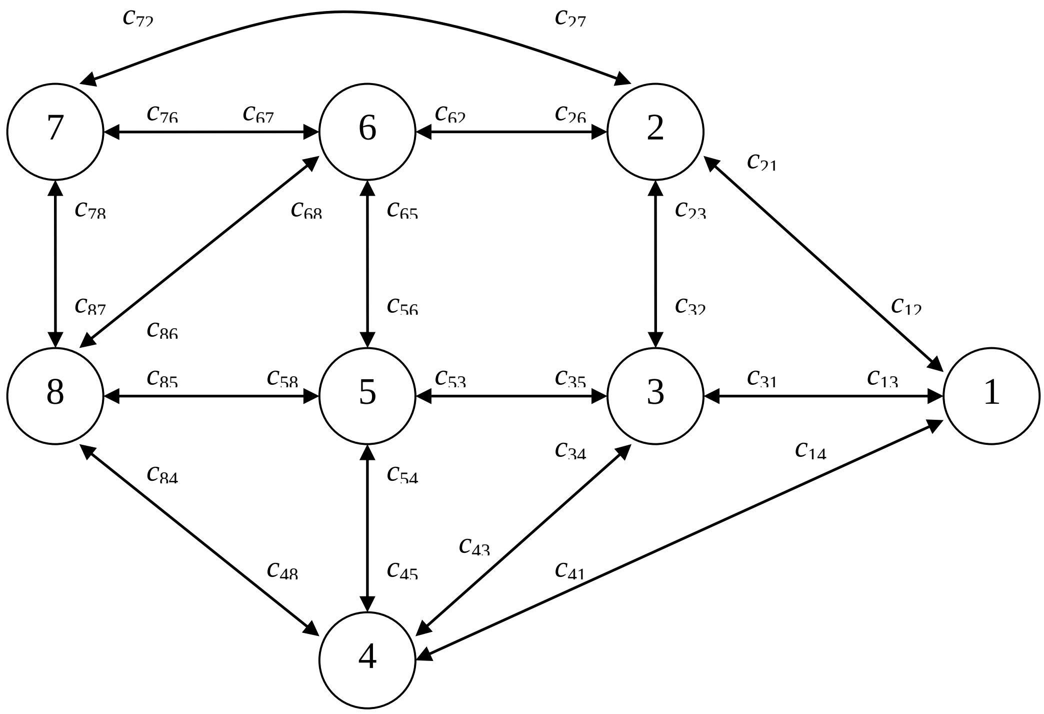


Рис. 6.1

Как и многие задачи теории графов, эта задача допускает формулировку в терминах *целочисленного линейного программирования*. Введем в рассмотрение целочисленные переменные x_{ij}, ассоциированные с дугами e_{ij}. Всего таких переменных будет столько, сколько и дуг: $m = n(n-1)$. Каждая из них может принимать только одно из двух возможных значений: 1 или 0 в зависимости от того, входит или нет дуга e_{ij} в искомый цикл:

$$x_{ij} \in \{0,1\} (\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Целевая функция в данной задаче – это общий вес дуг, входящих в цикл:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

На переменные x_{ij}, наложены также ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 (\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}); \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}); \end{cases}$$

означающие, что из каждой вершины v_i должна выходить ровно одна дуга и в каждую вершину v_j должна входить одна дуга.

И, наконец, нужно еще, чтобы цикл был полным, т.е. состоял из n вершин и n дуг. Чтобы устранить маленькие циклы (подциклы), введем в рассмотрение неограниченные действительные переменные u_i, ассоциированные с вершинами. Эти ограничения имеют вид:

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \le n - 1 (\forall i, j \in \{2,3,\ldots,n\}, i \ne j).$$

Доказательство того, что любой цикл из n вершин удовлетворяет данным условиям, приводится в специальной литературе.[3]

Окончательно имеем задачу в следующей постановке:

[3] Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 (\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}); \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}); \\
u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \le n-1 (\forall i, j \in \{2,3,\ldots,n\}, i \ne j); \\
x_{ij} \in \{0,1\} (\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}); \\
u_i \in R (\forall i \in \{2,3,\ldots,n\}).
\end{cases}
$$

Таким образом, имеем смешанную задачу целочисленного линейного программирования. Смешанную – потому, что часть переменных − целочисленные, а часть – непрерывные. Всего у нас $n(n-1)$ целочисленных переменных x_{ij} и n непрерывных неограниченных переменных u_i.

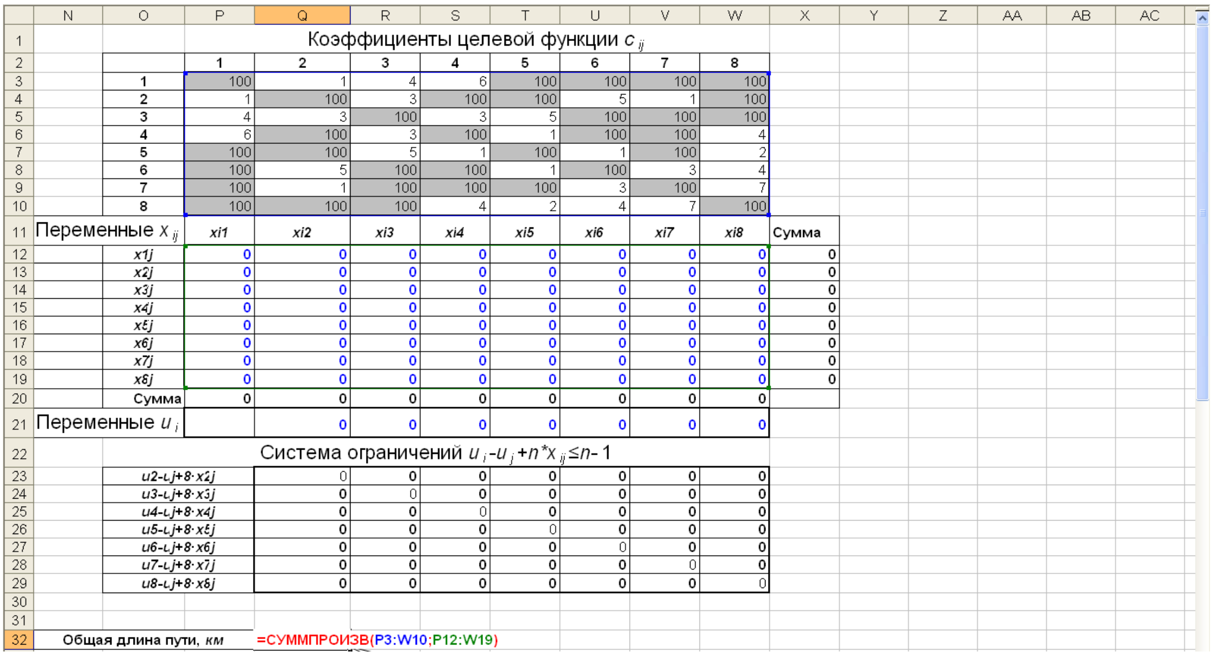
6.2. Решение задачи о нахождении кратчайшего пути в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel задачи коммивояжера.

Задача 6.1. Пусть задана сеть, изображенная на рис. 6.1. Найдите кратчайший путь объезда всех пунктов, если: $c_{12}=c_{21}=1$ *км*; $c_{13}=c_{31}=4$ *км*; $c_{14}=c_{41}=6$ *км*; $c_{23}=c_{32}=3$ *км*; $c_{26}=c_{62}=5$ *км*; $c_{27}=c_{72}=1$ *км*; $c_{34}=c_{43}=3$ *км*; $c_{35}=c_{53}=5$ *км*; $c_{45}=c_{54}=1$ *км*; $c_{48}=c_{84}=4$ *км*; $c_{56}=c_{65}=1$ *км*; $c_{58}=c_{85}=2$ *км*; $c_{67}=c_{76}=3$ *км*; $c_{68}=c_{86}=4$ *км*; $c_{78}=c_{87}=7$ *км*.

На рис. 6.2 и 6.3 представлена табличная модель рассматриваемой задачи, сформированная на рабочем листе Excel. Данные скомпонованы в виде трех матриц Коэффициенты целевой функции c_{ij}, Переменные x_{ij}, Система ограничений u_i-u_j+n*x_{ij}≤n-1 и вектора-строки Переменные u_i.

В целевую ячейку, в данном случае Q32, необходимо занести формулу: =СУММПРОИЗВ(P3:W10;P12:W19). В таблицу Система ограничений u_i-u_j+n*x_{ij}≤n-1 заносятся формулы, как показано на рис. 6.3. Изменяемыми ячейками, куда будут помещены результаты поиска решения, являются матрица Переменные x_{ij} и вектор-строка Переменные u_i.



Коэффициенты целевой функции c_{ij}

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	100	1	4	6	100	100	100	100
2	1	100	3	100	100	5	1	100
3	4	3	100	3	5	100	100	100
4	6	100	3	100	1	100	100	4
5	100	100	5	1	100	1	100	2
6	100	5	100	100	1	100	3	4
7	100	1	100	100	100	3	100	7
8	100	100	100	4	2	4	7	100

Переменные x_{ij}	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5	xi6	xi7	xi8	Сумма
x1j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x3j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x4j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x5j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x6j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x7j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x8j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	0	0	0	0	0	0	0	0	
Переменные u_i		0	0	0	0	0	0	0	

Система ограничений $u_i - u_j + n^*x_{ij} \le n-1$

u2-uj+8·x2j	0	0	0	0	0	0	0
u3-uj+8·x3j	0	0	0	0	0	0	0
u4-uj+8·x4j	0	0	0	0	0	0	0
u5-uj+8·x5j	0	0	0	0	0	0	0
u6-uj+8·x6j	0	0	0	0	0	0	0
u7-uj+8·x7j	0	0	0	0	0	0	0
u8-uj+8·x8j	0	0	0	0	0	0	0

Общая длина пути, *км* =СУММПРОИЗВ(P3:W10;P12:W19)

Рис. 6.2

Система ограничений $u_i - u_j + n^*x_{ij} \le n-1$

	Q	R	S	T	U	V	W
u2-uj+8·x2j	0	=$Q$21-R21+8*R13	=$Q$21-S21+8*S13	=$Q$21-T21+8*T13	=$Q$21-U21+8*U13	=$Q$21-V21+8*V13	=$Q$21-W21+8*W13
u3-uj+8·x3j	=$R$21-Q21+8*Q14	0	=$R$21-S21+8*S14	=$R$21-T21+8*T14	=$R$21-U21+8*U14	=$R$21-V21+8*V14	=$R$21-W21+8*W14
u4-uj+8·x4j	=$S$21-Q21+8*Q15	=$S$21-R21+8*R15	0	=$S$21-T21+8*T15	=$S$21-U21+8*U15	=$S$21-V21+8*V15	=$S$21-W21+8*W15
u5-uj+8·x5j	=$T$21-Q21+8*Q16	=$T$21-R21+8*R16	=$T$21-S21+8*S16	0	=$T$21-U21+8*U16	=$T$21-V21+8*V16	=$T$21-W21+8*W16
u6-uj+8·x6j	=$U$21-Q21+8*Q17	=$U$21-R21+8*R17	=$U$21-S21+8*S17	=$U$21-T21+8*T17	0	=$U$21-V21+8*V17	=$U$21-W21+8*W17
u7-uj+8·x7j	=$V$21-Q21+8*Q18	=$V$21-R21+8*R18	=$V$21-S21+8*S18	=$V$21-T21+8*T18	=$V$21-U21+8*U18	0	=$V$21-W21+8*W18
u8-uj+8·x8j	=$W$21-Q21+8*Q19	=$W$21-R21+8*R19	=$W$21-S21+8*S19	=$W$21-T21+8*T19	=$W$21-U21+8*U19	=$W$21-V21+8*V19	0

Рис. 6.3

Используя меню **Сервис⇒Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** (см. рис. 6.4), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке **Выполнить**.

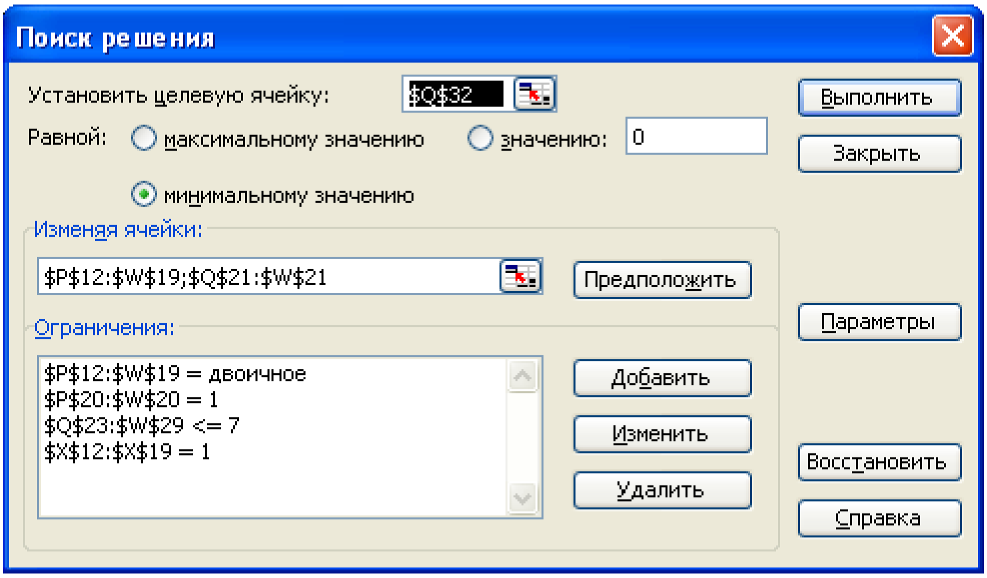
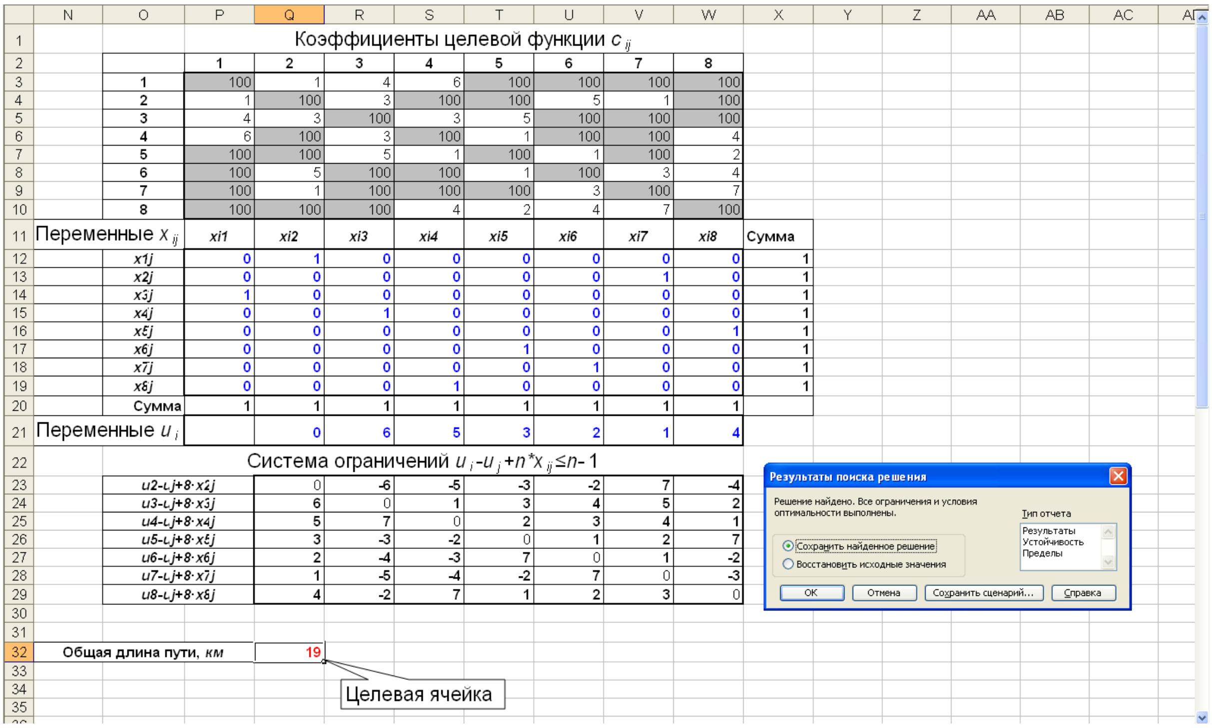


Рис. 6.4

Результат решения данной задачи представлен на рис. 6.5.



Коэффициенты целевой функции c_{ij}

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	100	1	4	6	100	100	100	100
2	1	100	3	100	100	5	1	100
3	4	3	100	3	5	100	100	100
4	6	100	3	100	1	100	100	4
5	100	100	5	1	100	1	100	2
6	100	5	100	100	1	100	3	4
7	100	1	100	100	100	3	100	7
8	100	100	100	4	2	4	7	100

Переменные x_{ij}	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5	xi6	xi7	xi8	Сумма
x1j	0	1	0	0	0	0	0	0	1
x2j	0	0	0	0	0	0	1	0	1
x3j	1	0	0	0	0	0	0	0	1
x4j	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x5j	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x6j	0	0	0	0	1	0	0	0	1
x7j	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x8j	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Сумма	1	1	1	1	1	1	1	1	
Переменные u_i		0	6	5	3	2	1	4	

Система ограничений $u_i - u_j + n*x_{ij} \le n-1$

u2-uj+8·x2j	0	-6	-5	-3	-2	7	-4
u3-uj+8·x3j	6	0	1	3	4	5	2
u4-uj+8·x4j	5	7	0	2	3	4	1
u5-uj+8·x5j	3	-3	-2	0	1	2	7
u6-uj+8·x6j	2	-4	-3	7	0	1	-2
u7-uj+8·x7j	1	-5	-4	-2	7	0	-3
u8-uj+8·x8j	4	-2	7	1	2	3	0

Общая длина пути, *км* 19

Рис. 6.5

Здесь мы видим, что полный замкнутый путь минимальной длины, найденный в Excel с помощью программы **Поиск решения** следующий: 1→2→7→6→5→8→4→3→1 (рис. 6.6). Общая длина пути при этом составит 19 км.

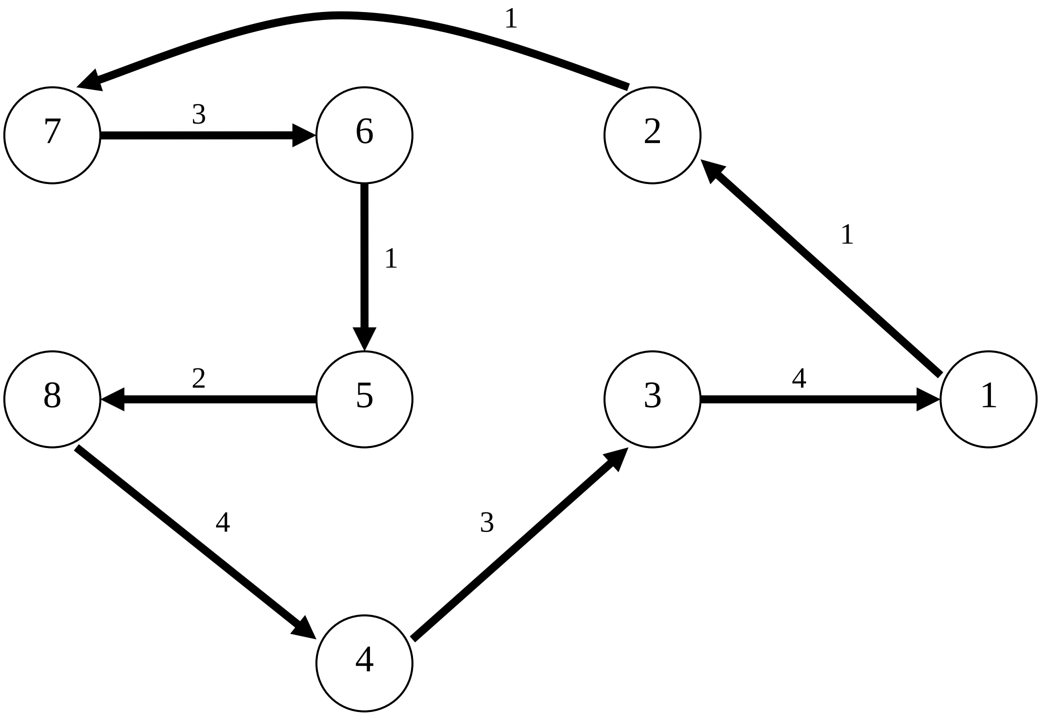


Рис. 6.6

6.3. Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу 6.1, используя данные о расстояниях между узлами транспортной сети, представленные в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Варианты задач для самостоятельного решения

$c(ij)$	Расстояние между смежными узлами транспортной сети $c(ij)$, *км* по вариантам											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c(12)=c(21)$	10	3	8	7	8	3	10	10	6	4	6	3
$c(13)=c(31)$	5	10	4	6	2	10	5	10	10	6	7	8
$c(14)=c(41)$	6	4	5	6	3	2	6	9	4	4	5	4
$c(23)=c(32)$	1	6	3	9	8	4	5	6	5	9	2	3
$c(26)=c(62)$	10	7	5	8	7	2	3	9	10	4	8	5
$c(27)$	1	7	3	3	5	8	4	9	7	2	3	5
$c(34)=c(43)$	4	3	6	10	5	10	3	4	2	5	4	6
$c(35)=c(53)$	6	3	2	2	9	10	4	9	4	9	9	8
$c(45)$	1	5	1	1	10	9	8	3	4	4	10	7
$c(48)=c(84)$	7	10	3	2	9	3	7	7	5	7	3	10
$c(54)$	4	6	1	2	5	3	3	6	4	2	10	8
$c(56)$	5	10	6	8	2	3	10	1	4	4	9	3
$c(58)=c(85)$	7	2	3	4	4	7	7	3	9	9	8	7
$c(65)$	9	8	4	5	1	7	7	2	1	3	8	2
$c(67)$	1	5	6	10	8	2	9	8	5	9	10	3
$c(68)=c(86)$	6	2	5	10	10	10	1	4	1	3	7	9
$c(72)$	7	9	1	2	9	2	1	6	7	5	1	6
$c(76)$	7	3	8	3	9	2	6	10	6	4	2	5
$c(78)=c(87)$	1	2	7	2	7	7	7	9	6	10	3	5

Список рекомендуемой литературы

1. **Волков И.К., Загоруйко Е.А.** Исследование операций: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. − М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. − 436 с.

2. **Дубина А.Г., Орлова С.С., Шубина И.Ю., Хромов А.В.** Excel для экономистов и менеджеров. – СПб.: Питер, 2014. – 295 с.

3. **Леоненков А.В.** Решение задач оптимизации в среде MS Excel. – СПб.: БХВ-Петербург, 2015. – 704 с.

4. **Модели и методы теории логистики:** Учеб. пособие / Под ред. В.С. Лукинского. – СПб.: Питер, 2013. – 176 с. – (Серия «Учебные пособия»).

5. **Мур Джеффри, Уэдерфорд Ларри, и др.** Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2014. – 1024 с.

6. **Неруш Ю.М.** Логистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. – 495 с.

7. **Попов А.А.** Excel: практическое руководство: Учеб. пособие для вузов. − М.: ДЕСС КОМ, 2011. − 302 с.

8. **Таха, Хэмди, А.** Введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер. с англ. − М.: Издательский дом "Вильямс", 2011. − 912 с.

Содержание