

*МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Учебное пособие

Воронеж 2017

УДК 517.9(07)  
ББК 22.161.6я73  
М34

*Авторский коллектив:*  
*М.Е. Семенов, Н.Н. Некрасова,*  
*О.И. Канищева, А.И. Барсуков, М.А. Попов*

*Рецензенты:*  
*кафедра математики и физики*  
*Воронежского государственного аграрного университета*  
*имени Императора Петра I;*  
*В.В. Обуховский, проф., доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой*  
*высшей математики, Воронежского государственного*  
*педагогического университета*

**Математическое моделирование и дифференциальные уравнения :**  
**М34** учеб. пособие / М.Е. Семенов [и др.] ; ВГТУ. – Воронеж, 2017. – 151 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с учебными программами и тематическими планами изучения дисциплины «Математическое моделирование» для магистрантов всех направлений подготовки.

Изложение теоретического материала сопровождается подробными решениями примеров и задач. По каждой теме даны задачи для самостоятельного решения. Оно поможет студентам освоить основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

Предназначено для магистров, студентов и аспирантов.

Ил. 53. Библиогр.: 17 назв.

УДК 517.9(07)  
ББК 22.161.6я73

*Печатается по решению учебно-методического совета ВГТУ*

ISBN

© Семенов М.Е., Некрасова Н.Н.,  
Канищева О.И., Барсуков А.И.,  
Попов М.А., 2017  
© ВГТУ, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	6
<b>Введение</b> .....	7
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы.....	8
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия.....	8
1.2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основные понятия.....	11
1.3. Связь ОДУ высших порядков и систем ОДУ.....	15
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка.....	17
2.1. Основные понятия. Методы решения.....	17
2.2. Уравнения с разделяющимися переменными.....	20
2.3. Однородные уравнения 1-го порядка.....	22
2.4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.....	25
2.5. Уравнения Бернулли.....	28
2.6. Уравнения в полных дифференциалах.....	30
2.7. Поведение решений ОДУ 1-го порядка.....	31
2.8. Уравнения 1-го порядка. Поле направлений.....	34
2.9. Автономные уравнения 1-го порядка.....	37
2.10. Устойчивость решений ОДУ 1-го порядка.....	39
2.11. Асимптотическая устойчивость решений ОДУ 1-го порядка.....	41
2.12. Метод изоклин.....	42
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.....	47
3.1. Основные понятия. Понижение порядка.....	47
3.2. Уравнения, не содержащие независимой переменной.....	50
3.3. Уравнения, не содержащие искомой функции.....	51
3.4. Уравнения с однородной правой частью.....	52
3.5. Линейные ОДУ n-го порядка. Введение.....	54
3.6. Свойства решений линейного уравнения. Принцип суперпозиции.....	55
3.7. Линейные уравнения второго порядка. Гармонические колебания.....	56
3.8. Линейные уравнения 2-го порядка. Ангармонические колебания.....	58
3.9. Линейные уравнения 2-го порядка. Уравнение Ньютона... ..	60
3.10. Линейная зависимость и линейная независимость системы	

функций.....	65
3.11. Определитель Вронского.....	67
3.12. Исследование линейной независимости системы функций..	70
3.13. Линейная независимость решений линейного дифференциального уравнения.....	71
3.14. Структура решения линейного ОДУ n-го порядка.....	71
3.15. Структура общего решения линейного однородного уравнения.....	74
3.16. Метод вариации произвольных постоянных отыскания частного решения.....	75
3.17. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами.....	78
3.18. Метод подбора построения частного решения неоднородного уравнения.....	81
3.19. Уравнение Эйлера.....	85
4. Системы дифференциальных уравнений.....	87
4.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений Основные понятия.....	87
4.2. Фазовое пространство Фазовые траектории.....	88
4.3. Существование и единственность решения задачи Коши...	90
4.4. Интегрирование систем дифференциальных уравнений методом исключения.....	91
4.5. Линейные системы ОДУ. Основные понятия.....	93
4.6. Фундаментальная матрица решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений.....	96
4.7. Структура общего решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений.....	100
4.8. Структура общего решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений.....	101
4.9. Построение фундаментальной матрицы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера.....	104
4.10. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений.....	105
4.11. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову.....	110
4.12. Устойчивость положения равновесия линейных систем ОДУ.....	113
4.13. Устойчивость точек покоя нелинейных систем по	

линейному приближению.....	116
4.14. Неустойчивость по линейному приближению точек покоя нелинейных систем.....	120
4.15. Автономные системы дифференциальных уравнений. Основные понятия.....	122
4.16. Свойства фазовых траекторий.....	126
4.17. Фазовая плоскость, фазовые кривые, фазовый портрет автономной системы 2-го порядка.....	127
4.18. Векторное поле автономной системы 2-го порядка.....	128
4.19. Точки покоя линейной автономной системы 2-го порядка с постоянными коэффициентами.....	131
5. Численное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка.....	137
5.1. Постановка задачи. Задача Коши. Общие замечания.....	137
5.2. Метод Эйлера.....	139
5.3. Модифицированный метод Эйлера.....	140
5.4. Метод Рунге-Кутты.....	142
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	149
<b>Библиографический список</b> .....	150

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 447 с.
2. Боровских, А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Институт компьютерных исследований, 2004. – 540 с.
3. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – 10-е изд., доп. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 207 с.
4. Эльсгольц, Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – СПб.: Лань, 2002. – 218 с.
5. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. – Изд. 4-е, стер. – М.: УРСС, 2007. – 206 с.
6. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
7. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – М.: «Наука». Главное издательство физико-математической литературы, 1987. – 235 с.
8. Самарский, А.А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов . - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
9. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. - М.: Наука, 2008. – 176 с.
10. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 240 с.
11. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. - М.: Наука, 1986. – 288 с.
12. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Перевод с англ. И.С. Емельяновой. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2007. – 432 с.
13. Просветов, Г.И. Дифференциальные уравнения: задачи и решения. Учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – М.: Изд-во «Альфа-Пресс», 2011. – 88 с.
14. Егоров, А. И. Дифференциальные уравнения для инженерных направлений / А. И. Егоров, Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева. - Казань: Изд. КГУ, 2013. – 52 с.

15. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения. Введение в математическое моделирование / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. Изд-во: Университетская книга, Логос, 2007 в 2-х ч. – Ч. 2.

16. Мышенков, В.И. Численные методы: ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб.-пособ. для студ. спец. 073000/ В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков. – М.: МГУЛ, 2005. – 109 с.

17. Горелов, Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге–Кутты): учеб. пособие/ Ю.Н. Горелов. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.

Учебное издание

**СЕМЕНОВ Михаил Евгеньевич  
НЕКРАСОВА Наталия Николаевна  
КАНИЩЕВА Олеся Ивановна  
БАРСУКОВ Андрей Иванович  
ПОПОВ Михаил Александрович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Учебное пособие

для магистрантов всех направлений подготовки

В авторской редакции

Подписано в печать 07.07.2017. Формат 60x84 1/16.

Усл.-печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 10,9. Бумага для множительных аппаратов.

Тираж 100 экз. Заказ № 86 .

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

394026, Воронеж, Московский проспект, 14

Участок оперативной полиграфии издательства ВГТУ

394026, Воронеж, Московский проспект, 14