МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФИТКБ __________ Гусев П.Ю.

«31» августа 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины

«Алгебра и геометрия»

Специальность 10.05.02 Информационная безопасность телекоммуникационных систем

Специализация специализация № 9 "Управление безопасностью телекоммуникационных систем и сетей"

Квалификация выпускника специалист по защите информации

Нормативный период обучения 5 лет и 6 м.

Форма обучения очная

Год начала подготовки 2021

Автор программы __________ Майорова С.П.

Заведующий кафедрой Высшей математики и физико-математического моделирования __________ Батаронов И.Л.

Руководитель ОПОП __________ Остапенко А.Г.

Воронеж 2021

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цели дисциплины

ознакомить обучаемых с основными понятиями и методами аналитической геометрии и элементами высшей алгебры, обеспечить теоретическую и практическую подготовку специалистов к деятельности, связанной с проектированием, созданием, исследованием и эксплуатацией систем обеспечения информационной безопасности телекоммуникационных систем в условиях существования угроз в информационной сфере

1.2. Задачи освоения дисциплины

- привить обучаемым навыки использования рассматриваемого математического аппарата в профессиональной деятельности;

- воспитать у обучаемых высокую культуру мышления, т.е. строгость, последовательность, непротиворечивость и основательность в суждениях, в том числе и в повседневной жизни

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Алгебра и геометрия» относится к дисциплинам обязательной части блока Б1.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс изучения дисциплины «Алгебра и геометрия» направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-3 - Способен использовать математические методы, необходимые для решения задач профессиональной деятельности

Компетенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции
ОПК-3	**Знать** - основные положения теории матриц, методы решения систем линейных уравнений, - основные понятия аналитической геометрии, - основные алгебраические структуры и методы работы с ними, - основные понятия векторной алгебры, в том числе линейные векторные и евклидовы пространства и их линейные преобразования
	Уметь - пользоваться методами описания объектов средствами аналитической геометрии - использовать основные методы линейной и общей алгебры для решения типовых задач дискретной математики
	Владеть навыками использования методов аналитической геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и физике; методами линейной алгебры

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Алгебра и геометрия» составляет 5 з.е.

Распределение трудоемкости дисциплины по видам занятий

очная форма обучения

Виды учебной работы	Всего часов	Семестры	
		1	2
Аудиторные занятия (всего)	126	54	72
В том числе:			
Лекции	72	36	36
Практические занятия (ПЗ)	54	18	36
Самостоятельная работа	27	18	9
Часы на контроль	27	-	27
Виды промежуточной аттестации – зачет с оценкой, экзамен	+	+	+
Общая трудоемкость: академические часы зач.ед.	180 5	72 2	108 3

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1 Содержание разделов дисциплины и распределение трудоемкости по видам занятий

очная форма обучения

№ п/п	Наименование темы	Содержание раздела	Лекции	Практ. зан.	СРС	Всего час
		Первый семестр				
1	Определители, матрицы, системы линейных уравнений	Определители второго и третьего порядка, их свойства. Перестановки элементов конечного множества, четные и нечетные перестановки, изменение четности перестановки при транспозиции. Подстановки *n*-й степени, их свойства. Определители *n*-го порядка, их свойства и вычисление. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). Матрицы и операции над ними, определитель произведения матриц. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Правило Крамера, матричный метод и метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Исследование систем, теорема Кронекера-Капелли. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений, структура множества решений.	16	8	8	32

2	Векторная алгебра	Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами, их свойства. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Координаты вектора, действия над векторами в координатной форме.	4	2	2	8
3	Аналитическая геометрия	Прямая линия на плоскости, различные виды ее уравнений. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Плоскость и прямая в пространстве, их уравнения и взаимное расположение. Кривые второго порядка на плоскости, их канонические уравнения. Поверхности второго порядка.	16	8	8	32
Второй семестр						
4	Основные алгебраические структуры	Бинарные операции на множестве. Нейтральный и обратный элементы. Понятие группы, кольца и поля, их простейшие свойства.	4	4	1	9
5	Поле комплексных чисел	Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа, действия над комплексными числами. Группа комплексных корней из единицы. Комплексно сопряженные числа.	4	4	1	9
6	Кольцо целых чисел	Делимость и деление с остатком в кольце целых чисел. НОД и НОК целых чисел. Алгоритм Евклида нахождения НОД. Линейное представление НОД. Простые числа. Основная теорема арифметики, каноническое разложение целых чисел. Отношение сравнимости целых чисел по модулю данного натурального числа, его свойства. Сравнения первой степени с одним неизвестным, их исследование и решение с помощью простейших свойств, по рекуррентной формуле и с помощью функции Эйлера. Системы сравнений. Кольцо классов вычетов, обратимые элементы и делители нуля этого кольца. Критерий того, что кольцо классов вычетов является полем.	10	10	4	24
7	Кольцо многочленов	Построение кольца многочленов над кольцом с единицей. Делимость и деление с остатком, схема Горнера,	8	8	1	17

		теорема Безу. НОД многочленов над полем, алгоритм Евклида его нахождения, линейное представление НОД. Неприводимые многочлены над полем, каноническое разложение многочлена. Неприводимые многочлены над полями комплексных, действительных и рациональных чисел. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами. Кольцо классов вычетов по модулю данного многочлена. Критерий того, что это кольцо является полем. Использование многочленов для построения конечных колец и полей.				
8	Линейные пространства и преобразования над ними	Понятие линейного пространства, его базис и размерность. Координаты вектора в данном базисе. Преобразование координат вектора при изменении базиса. Линейные операторы и их матрицы. Кольцо линейных операторов. Связь между матрицами одного и того же линейного оператора в разных базисах. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника и теорема Пифагора в пространствах со скалярным произведением. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.	10	10	2	22
		Итого	**72**	**54**	**27**	**153**

5.2 Перечень лабораторных работ

Не предусмотрено учебным планом

6. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ) И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В соответствии с учебным планом освоение дисциплины не предусматривает выполнение курсового проекта (работы) или контрольной работы.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

7.1. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

7.1.1 Этап текущего контроля

Результаты текущего контроля знаний и межсессионной аттестации оцениваются по следующей системе:

«аттестован»;

«не аттестован».

Компе-тенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции	Критерии оценивания	Аттестован	Не аттестован
ОПК-3	Знать - основные положения теории матриц, методы решения систем линейных уравнений, - основные понятия аналитической геометрии, - основные алгебраические структуры и методы работы с ними, - основные понятия векторной алгебры, в том числе линейные векторные и евклидовы пространства и их линейные преобразования	Знает основные понятия и методы алгебры и аналитической геометрии, способен их использовать для построения алгоритмов решения практических задач, а также построения требуемых алгебраических структур над произвольными полями	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах
	Уметь - пользоваться методами описания объектов средствами аналитической геометрии - использовать основные методы линейной и общей алгебры для решения типовых задач дискретной математики	Способен решать основные задачи алгебры и аналитической геометрии, системы линейных уравнений над полями, оперировать с многочленами и матрицами, умеет применять методы алгебры и геометрии для решения прикладных задач	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах
	Владеть навыками использования методов аналитической геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и физике; методами линейной алгебры	Способен использовать методы аналитической геометрии, векторной и линейной алгебры в смежных дисциплинах	Выполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах	Невыполнение работ в срок, предусмотренный в рабочих программах

7.1.2 Этап промежуточного контроля знаний

Результаты промежуточного контроля знаний оцениваются в 1, 2 семестре для очной формы обучения по четырехбалльной системе:

«отлично»;

«хорошо»;

«удовлетворительно»;

«неудовлетворительно».

Компе-тенция	Результаты обучения, характеризующие сформированность компетенции	Критерии оценивания	Отлично	Хорошо	Удовл.	Неудовл.
ОПК-3	Знать - основные положения теории матриц, методы решения систем линейных уравнений, - основные понятия аналитической геометрии, - основные алгебраические структуры и методы работы с ними, - основные понятия векторной алгебры, в том числе линейные векторные и евклидовы пространства и их линейные преобразования)	Тест	Выполнение теста на 90-100%	Выполнение теста на 80-90%	Выполнение теста на 60-80%	В тесте менее 60% правильных ответов
	Уметь - пользоваться методами описания объектов средствами аналитической геометрии - использовать основные методы линейной и общей алгебры для решения типовых задач дискретной математики	Решение стандартных практических задач	Задачи решены в полном объеме и получены верные ответы	Продемонстрирован верный ход решения всех, но не получен верный ответ во всех задачах	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены
	Владеть навыками использования методов аналитической	Решение прикладных задач в конкретной предметной	Задачи решены в полном объеме и получены	Продемонстрирован верный ход решения всех задач, но не получен	Продемонстрирован верный ход решения в большинстве задач	Задачи не решены

	геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и физике; методами линейной алгебры	области	верные ответы	верный ответ во всех задачах		

7.2 Примерный перечень оценочных средств (типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности)

7.2.1 Примерный перечень заданий для подготовки к тестированию

1. Из векторов $\vec{a}=(1;2;2)$, $\vec{b}=(1;3;1)$, $\vec{c}=(2;6;2)$ коллинеарными являются

1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, 2) $\vec{b}$ и $\vec{c}$, 3) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, 4) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$

2. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-9\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+6\vec{j}$. Тогда координаты вектора $5\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$ равны:

1) $(-16;33)$, 2) $(-46;31)$, 3) $(16;-47)$, 4) $(-16;27)$

3. Даны векторы $\vec{a}=(2;2;-1)$ и $\vec{b}=(7;5;2)$. Тогда их векторное произведение имеет вид:

1) $9\vec{i}-11\vec{j}-4\vec{k}$, 2) $9\vec{i}+11\vec{j}+24\vec{k}$, 3) $-9\vec{i}+11\vec{j}+4\vec{k}$, 4) $14\vec{i}+10\vec{j}-2\vec{k}$

4. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(-1;3;2)$ и $\vec{c}=(0;3;0)$, равен: 1) 5, 2) 15, 3) -15, 4) 6

5. Прямая, проходящая через две точки A(-3;1) и B(4;3), параллельна прямой:

1) $\frac{x}{2}-\frac{y}{7}=1$, 2) $\frac{x}{7}-\frac{y}{2}=1$, 3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1$, 4) $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$

6. Определите неизвестные коэффициенты в уравнении плоскости $3x+By+Cz-3=0$, параллельной плоскости $6x-2y+5z-3=0$.

1) $B=-1, C=-2{,}5$; 2) $B=1, C=-2{,}5$; 3) $B=-2, C=5$; 4) $B=4, C=-10$

7. Найдите неизвестный коэффициент в уравнении плоскости $x+By+2z-5=0$, перпендикулярной плоскости $x-3y+4z=0$:

1) $B=3$; 2) $B=-3$; 3) $B=1$; 4) $B=-1$

8. Укажите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}(2;0;-3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$

1) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{-3}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 4) $\frac{x+2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-1}$

9. Уравнение $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ на плоскости задает:

1) окружность, 2) эллипс, 3) гипербола, 4) парабола

10. Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & k & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при $k=\ldots$ 1) 1; 2) -12; 3) -3; 4) 12

11. Пусть определитель матрицы A третьего порядка равен 5. Чему равен определитель матрицы $2A^2$? 1) 10, 2) 25, 3) 50, 4) 200

12. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&0\end{pmatrix}$. Укажите, какие из следующих операций можно выполнить: а) $A+B$; б) AB; в) BA; г) B^TA; д) A^2; е) B^2.

13. Дана матрица A размера 4×5. Известно, что $\operatorname{rang} A=4$. Как изменится ранг, если добавить еще одну строку? 1) увеличится на 1; 2) уменьшится на 1; 3) не изменится; 4) указанных условий для ответа недостаточно.

14. Определите, при каких значениях $\lambda\in\mathbb{R}$ существует матрица, обратная данной $\begin{pmatrix}2&-\lambda&3\\-2&1&-4\\2&7&6\end{pmatrix}$. 1) $\lambda=1$; 2) $\lambda=5$; 3) $\lambda\neq1$; 4) $\lambda\neq5$

15. Если определитель Δ основной матрицы системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система:
1) имеет n решений; 2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений; 4) имеет бесконечно много решений.

16. Пусть A и A_p - основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений. Система совместна, если
1) $\operatorname{rang} A<\operatorname{rang} A_p$, 2) $\operatorname{rang} A\geq\operatorname{rang} A_p$, 3) $\operatorname{rang} A\leq\operatorname{rang} A_p$, 4) $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_p$.

17. Укажите, при каких значениях λ система $\begin{cases}\lambda x+4y=3\\ \lambda y+x=4\end{cases}$ имеет единственное решение:
1) $\lambda\neq\pm2$, 2) $\lambda=2$, 3) $\lambda\neq0$, 4) при любом λ

18. Укажите, какая из данных операций не является коммутативной на множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел:
1) $x*y=\frac{1}{x\cdot y}$; 2) $x*y=\frac{x+y}{2}$; 3) $x*y=x^y$; 4) $x*y=\frac{1}{x+y}$.

19. Укажите, какое из данных множеств относительно операции сложения действительных чисел является группой:
1) $\mathbb{R}_+$ - множество всех положительных действительных чисел;
2) $\mathbb{R}_-$ - множество всех отрицательных действительных чисел;
3) $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел;
4) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ - множество всех ненулевых действительных чисел.

20. Укажите, какое из данных множеств является группой относительно операции умножения: 1) множество $\mathbb{Z}$ целых чисел; 2) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;
3) множество $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ рациональных чисел, отличных от нуля;
4) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

21. Действительная часть комплексного числа $(3+i)^2$ равна 1) 8, 2) 3, 3) 10, 4) 9

22. Найдите аргумент комплексного числа $z=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ 1) $\frac{7\pi}{12}$, 2) $\frac{5\pi}{12}$, 3) $\frac{\pi}{12}$, 4) $-\frac{\pi}{6}$

23. Решение сравнения $29x\equiv35(\bmod 123)$ имеет вид:
1) $x\equiv20(\bmod 123)$; 2) $x\equiv35(\bmod 123)$; 3) $x\equiv103(\bmod 123)$; 4) нет решений.

24. Обратимыми элементами кольца вычетов $\mathbb{Z}_{135}$ являются:
1) 1, 5, 127; 2) 1, 34, 114; 3) 2, 19, 121; 4) 8, 41, 125.

25. Найдите НОД многочленов $f,g\in\mathbb{Q}[x]$, где $f(x)=12x^4-12x^3-9x^2+12x-6$, $g(x)=6x^3-3x^2-3x+3$. 1) x^2-x+1; 2) $6x^3-3x^2-3x+3$; 3) $x-1$; 4) 1.

26. Разложение многочлена $f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел имеет вид:
1) $(x+1)(x-2)(x^2-x+6)$; 2) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$; 3) $(x+1)(x-3)(x-2)^2$; 4) $(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)$.

27. Какова наибольшая степень многочленов $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, неприводимых над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел? 1) 1; 2) 2; 3) 4, 4) наибольшей степени нет

28. Найдите координаты вектора $\mathbf{a}=(24,-13)$ в базисе $\mathbf{e_1}=(2,-3)$, $\mathbf{e_2}=(7,1)$:

1) $(-2,4)$; 2) $(5,2)$; 3) $(5,-3)$; 4) $(-2,1)$.

29. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора: $A\mathbf{x}=(2x_1+x_3,x_2-x_3,x_1)$, $B\mathbf{x}=(x_2+2x_3,x_1,x_1-x_2)$. Найдите матрицу оператора AB.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

30. Пусть λ_1, λ_2 - различные собственные значения линейного оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^2$. Какой вид имеет матрица этого оператора в базисе из собственных векторов? 1) E; 2) $(\lambda_1+\lambda_2)E$; 3) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

7.2.2 Примерный перечень заданий для решения стандартных задач

1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенных по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известны длины векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и угол между ними: $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4$.

2. Найдите скалярное и векторное произведение векторов $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}$, построенных по данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(-2,1,1)$, $\vec{b}=(3,-2,4)$.

3. Даны вершины треугольника ABC, где $A(-1,3,3)$, $B(2,2,1)$, $C(0,3,-2)$. Найдите его площадь и косинус внутреннего угла B.

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(-1,2)$ и $B(4,-6)$. Преобразуйте полученное уравнение к виду: общему, каноническому, параметрическому, в отрезках, с угловым коэффициентом.

5. Даны вершины треугольника ABC, где $A(-3,3)$, $B(5,1)$, $C(6,-2)$. Составьте уравнения: стороны BC; высоты, опущенной из вершины A на сторону BC; медианы, проведенной из вершины C.

6. Прямая в пространстве задана общим уравнением $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$. Найдите ее каноническое и параметрическое уравнения.

7. Составьте уравнение плоскости в декартовой системе координат: а) по ее точке $A(1,2,3)$ и перпендикулярному к ней вектору $\vec{n}=(2,-1,-3)$; б) по трем ее точкам $A(-2,3,1)$, $B(1,4,-2)$, $C(2,1,1)$; в) по двум параллельным ей векторам $\vec{a}=(-1,2,1)$, $\vec{b}=(2,3,0)$ и точке $A(1,1,-1)$.

8. Укажите значения параметров α и β, при которых плоскости, заданные уравнениями $2x+\alpha y-3z-8=0$ и $5x-3y+\beta z+6=0$ будут перпендикулярными (параллельными).

9. Для данных матриц A и B найдите матрицы AB, BA, $A+B$, $A-B$, A^2-B^2, $3A^2-5A+2E$, где E - единичная матрица. Вычислите определители матриц A, B, AB, $A+B$, A^TB^T, A^T+B^T, A^3B^4.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Для данной матрицы A найдите обратную матрицу A^{-1}. Сделайте проверку, т.е. покажите, что $AA^{-1}=E$. Вычислите определитель матрицы A^{-1}. Убедитесь, что выполняется равенство $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Исследуйте совместность данной системы линейных уравнений. В случае совместности решите систему тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & =3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & =-4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & =-3 \end{cases}$$

12. Исследуйте совместность каждой из данных систем уравнений, найдите общее решение каждой системы двумя способами: а) методом Гаусса; б) с помощью фундаментальной системы решений.

$$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0 \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4 \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5 \end{cases}$$

13. Является ли группой $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$?

14. Является ли кольцом (полем) множество чисел $\{a+b\sqrt{2};\ a,b\in\mathbb{Z}\}$?

15. Вычислите $\dfrac{z_1+z_1z_2+z_2^2}{z_1+z_3}$, где $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1+i$.

16. Вычислите $\sqrt[3]{z}$, где $z=\dfrac{(2+2i)^7(-1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^{13}}$.

17. Выясните, какие из сравнений имеют решения, и решите их, сделайте проверку:
$3x\equiv 5(\mathrm{mod}\,19)$, $5x\equiv 12(\mathrm{mod}\,26)$, $8x\equiv 7(\mathrm{mod}\,14)$, $18x\equiv 15(\mathrm{mod}\,69)$, $285x\equiv 51(\mathrm{mod}\,363)$

18. Для колец $\mathbb{Z}/11$ и $\mathbb{Z}/20$ укажите множества всех обратимых элементов и всех делителей нуля. Для каждого обратимого элемента найдите обратный.

19. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Z}_2$ найдите обратную матрицу A^{-1}. Сделайте проверку.

20. Разложите многочлен $f(x)=6x^6+16x^5+5x^4-8x^3-7x^2-8x-4$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_3$.

21. Найдите НОД многочленов $f(x)$, $g(x)$ над полем $\mathbb{Z}_2$ и его линейное представление, если $f(x)=x^5+x+1$, $g(x)=x^4+x^3+1$.

22. Покажите, что данная система векторов $\mathbf{e_1}=(1,0,1)$, $\mathbf{e_2}=(0,1,0)$, $\mathbf{e_3}=(2,3,4)$ образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}=(1,-3,-3)$ в этом базисе.

23. Найдите координаты вектора $x=(9,3,7)$ в базисе B': e_1',e_2',e_3', если он задан в базисе B: e_1,e_2,e_3, где $e_1'=5e_1+2e_2+4e_3, e_2'=8e_1+3e_2+7e_3, e_3'=4e_1+e_2+4e_3$.

24. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора $A\mathbf{x}=(x_1+x_2,x_3,x_2-x_3)$ и $B\mathbf{x}=(2x_2,x_3,x_1)$. Найдите матрицу и явный вид оператора $2A-3B^2$.

25. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}$. Приводима ли матрица A к диагональному виду?

7.2.3 Примерный перечень заданий для решения прикладных задач

1. Для построения ряда криптосистем используются конечные поля. Можно ли построить конечное поле из 16 элементов? из 80 элементов? из 57 элементов?

2. В некоторых алгоритмах шифрования с открытым ключом требуется факторизация (разложение на множители) многочленов над конечными полями. Многочлен x^3+2x^2+4x+1 разложите на неприводимые множители над полем $\mathbb{Z}_5$.

3. Каждая буква русского алфавита (кроме букв ё, й) кодируется числом, соответствующим порядковому номеру буквы в алфавите. По одному из методов полиалфавитной замены закодированная фраза шифруется следующим образом: последовательность чисел (кодов) разбивается на блоки длиной 3, и затем каждый из полученных трехмерных векторов умножается на **обратимую** матрицу, заданную над полем $\mathbb{Z}_{31}$. Можно ли матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 29 & 0 & 1\\ 30 & 4 & 5\end{pmatrix}$ использовать для такого шифрования?

4. При использовании криптосистемы RSA формируется открытый ключ следующим образом. Выбираются два различных простых числа p и q, затем вычисляется их произведение $n=pq$. Может ли число n быть равным 103, 527, 1443?

5. При использовании метода шифрования RSA генерируется открытый ключ – пара натуральных чисел (n,e). Здесь число n равно произведению двух различных простых чисел p и q; число e удовлетворяет условиям: $e<m$ и $НОД(e,m)=1$, где $m=\varphi(n)$ и φ - это функция Эйлера. Известно, что $n=11\cdot 37$. Можно ли взять $e=180$, $e=359$?

6. Абонент получил сообщение, зашифрованное методом RSA, и открытый ключ, состоящий из двух чисел $n=407$ и $e=89$. Известно, что число n является произведением двух простых чисел p и q, причем число p абонент знает ($p=11$). Для дешифрования полученного сообщения абонент должен знать число d, которое удовлетворяет условию $ed\equiv 1 \pmod{m}$, где $m=(p-1)(q-1)$. Найдите это число d.

7. К базе данных с конфиденциальной информацией имеют доступ всего два человека, причем никто их них не должен заходить в базу данных в одиночку. Каждый день для первого их них генерируется матрица A, а для второго - матрица-столбец B. Код доступа X к базе данных можно получить, лишь решив систему линейных уравнений $AX=B$. Найдите код доступа, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -4\\ -3\end{pmatrix}$.

8. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2,1,2)$ и $\vec{b}=(3,-4,2)$.

9. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(2,2,3)$, $\vec{c}=(1,3,1)$.

10. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2,1,1)$, $B(6,-2,2)$, $C(4,3,2)$, $D(-6,8,7)$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины D.

7.2.4 Примерный перечень вопросов для подготовки к зачету

1) Определители второго и третьего порядка, их свойства.
2) Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки, столбца (для определителей второго и третьего порядка).
3) Перестановки из n элементов, их число. Изменение четности перестановок при транспозиции.
4) Четные и нечетные перестановки. Число четных и нечетных перестановок.
5) Подстановки. Теорема о числе подстановок n-й степени. Четные и нечетные подстановки, их число.
6) Понятие определителя n-го порядка. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы, определитель диагональной матрицы. Свойства определителей.
7) Способы вычисления определителей n-го порядка, примеры. Определитель Вандермонда.
8) Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца), следствие (с доказательством для определителей n-го порядка).
9) Миноры k-го порядка. Теорема Лапласа. Определитель матрицы с большим прямоугольником из нулей.
10) Матрицы и операции над ними (сумма и произведение матриц, умножение матрицы на число, транспонирование), свойства операций. Определитель произведения матриц.
11) Обратная матрица. Критерий существования обратной матрицы. Свойства обратной матрицы.
12) Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга методом элементарных преобразований.
13) Системы линейных уравнений, основные понятия. Матричная форма записи систем.
14) Правило Крамера и матричный метод решения систем линейных уравнений.
15) Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
16) Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности) и условие определенности систем линейных уравнений.
17) Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Структура множества решений однородной системы.
18) Неоднородные системы линейных уравнений. Структура общего решения.
19) Системы линейных неравенств. Основные понятия. Геометрическая интерпретация множества решений системы линейных неравенств.
20) Сведение системы линейных неравенств к системе линейных уравнений. Критерий совместности систем линейных неравенств.
21) Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами: сложение (вычитание) векторов, умножение вектора на число.
22) Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Действия над векторами в координатной форме (сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число). Условие коллинеарности векторов.
23) Скалярное произведение векторов, его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты.
24) Векторное произведение векторов, его свойства и геометрический смысл. Выражение векторного произведения через координаты.
25) Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл и выражение через координаты.
26) Различные виды уравнений прямой на плоскости: с угловым коэффициентом; проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом; через две данные точки; в отрезках; общее, каноническое и параметрическое.
27) Угол между прямыми на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

28) Различные виды уравнений плоскости: проходящей через данную точку с данным нормальным вектором; общее уравнение; проходящей через три данные точки; в отрезках.
29) Различные виды уравнений прямой в пространстве: прямая как линия пересечения двух плоскостей; каноническое и параметрическое уравнения; уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
30) Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
31) Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: угол между прямой и плоскостью, условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, точка пересечения прямой и плоскости.
32) Эллипс, его каноническое уравнение и график. Числовые характеристики эллипса.
33) Гипербола, ее каноническое уравнение и график. Числовые характеристики гиперболы.
34) Парабола, ее каноническое уравнение и график.

7.2.5 Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену

1) Внутренние бинарные операции на множестве, их виды, примеры. Нейтральный и обратный элементы, их свойства.
2) Понятие группы, ее простейшие свойства, примеры групп. Аддитивная и мультипликативная формы записи.
3) Кольцо, его простейшие свойства, примеры. Виды колец.
4) Делители нуля. Обратимые элементы кольца с единицей.
5) Понятие поля, его простейшие свойства, примеры.
6) Построение поля комплексных чисел.
7) Алгебраическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
8) Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Комплексные корни из единицы.
9) Комплексно сопряженные числа, их свойства.
10) Отношение делимости в кольце целых чисел. Свойства отношения делимости. Теорема о делении с остатком в кольце целых чисел.
11) Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида его вычисления. Теорема о линейном представлении НОД двух целых чисел.
12) Наименьшее общее кратное целых чисел, его свойства.
13) Простые числа. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение целых чисел. Использование канонического разложения для вычисления НОД и НОК.
14) Сравнения целых чисел по модулю данного натурального числа, их свойства. Критерий сравнимости.
15) Теоремы о разрешимости сравнений первой степени с одним неизвестным.
16) Функция Эйлера, ее свойства. Решение сравнений с помощью функции Эйлера.
17) Решение сравнений первой степени с одним неизвестным по рекуррентной формуле.
18) Системы сравнений. Китайская теорема об остатках.
19) Классы вычетов, действия над ними. Кольцо классов вычетов.
20) Обратимые элементы кольца классов вычетов. Критерий обратимости. Число обратимых элементов и число делителей нуля в кольце $\mathbb{Z}/m$.
21) Критерий того, что кольцо вычетов $\mathbb{Z}/m$ является полем.
22) Построение кольца многочленов над кольцом с единицей. Отношение делимости в кольце многочленов.
23) Значение и корень многочлена. Схема Горнера, теорема Безу. Теорема о делении с остатком.
24) Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида его вычисления. Теорема о линейном представлении НОД.

25) Неприводимые многочлены над полем, их свойства. Каноническое разложение многочлена.
26) Неприводимые многочлены над полями комплексных и действительных чисел.
27) Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами. Признак неприводимости Эйзенштейна.
28) Сравнения в кольце многочленов по модулю данного многочлена. Кольцо классов вычетов $P[x]/f$. Критерий того, что это кольцо является полем.
29) Использование многочленов для построения конечных полей. Поле из четырех элементов.
30) Понятие линейного пространства, примеры. Базис и размерность линейного пространства. Единственность разложения вектора по данному базису.
31) Матрица перехода, ее свойства. Преобразование координат вектора при изменении базиса.
32) Линейные операторы, определение, примеры. Матрица линейного оператора. Действия над линейными операторами.
33) Связь между матрицами одного и того же линейного оператора в разных базисах.
34) Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
35) Пространства со скалярным произведением. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

7.2.6. Методика выставления оценки при проведении промежуточной аттестации

Экзамен и зачет с оценкой проводятся по билетам, каждый из которых содержит два теоретических вопроса и две задачи.

Каждый правильный ответ на теоретический вопрос в билете оценивается в 2 балла, задача оценивается в 3 баллов. Максимальное количество набранных баллов – 10. Критерии оценки теоретического вопроса: 2 балла – студент знает и владеет основными понятиями и фактами, умеет проводить доказательства логично и грамотно или с небольшими неточностями; 1 балл – студент знает и владеет основными понятиями и фактами, доказательство теорем проводится с грубыми ошибками или отсутствует; 0 баллов – студент не знает и не владеет основными понятиями и фактами. Критерии оценки задачи: 3 балла – задание выполнено верно; 2 балла – имеются незначительные арифметические или логические погрешности;
1 балл – задание не выполнено, но имеется правильный подход к решению;
0 баллов – в остальных случаях.

Оценка «Неудовлетворительно» ставится в случае, если студент набрал не более 4 баллов.

Оценка «Удовлетворительно» ставится в случае, если студент набрал 5-6 баллов.

Оценка «Хорошо» ставится в случае, если студент набрал 7-8 баллов.

Оценка «Отлично» ставится, если студент набрал 9-10 баллов.

7.2.7 Паспорт оценочных материалов

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции	Наименование оценочного средства
1	Определители, матрицы, системы линейных уравнений	ОПК-3	Тест, решение задач, зачет
2	Векторная алгебра	ОПК-3	Тест, решение задач, зачет
3	Аналитическая геометрия	ОПК-3	Тест, решение задач, зачет
4	Основные алгебраические структуры	ОПК-3	Тест, решение задач, экзамен
5	Поле комплексных чисел	ОПК-3	Тест, решение задач, экзамен
6	Кольцо целых чисел	ОПК-3	Тест, решение задач, экзамен
7	Кольцо многочленов	ОПК-3	Тест, решение задач, экзамен
8	Линейные пространства и преобразования над ними	ОПК-3	Тест, решение задач, экзамен

7.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Тестирование осуществляется, либо при помощи компьютерной систем Тестирование осуществляется, с использованием выданных тест-заданий на бумажном носителе фронтальным способом в аудитории. Не разрешается пользоваться интернетом, разрешается – калькулятором. Время тестирования 90 мин. Затем осуществляется проверка теста экзаменатором и выставляется оценка согласно методики выставления оценки при проведении промежуточной аттестации. В тест включается также решение стандартных и прикладных задач.

8 УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

8.1 Перечень учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

1) Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учебник / В.А. Ильин; Э.Г. Позняк. - 7-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2009. - 224 с. - ISBN 978-5-9221-0511-8. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82797

2) Ильин, В. А. Линейная алгебра : учебник / В.А. Ильин; Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - ISBN 978-5-9221-0481-4. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974

3) Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учебник / А. И. Кострикин. – Москва: МЦНМО, 2009. – Часть 1. Основы алгебры. – 273 с. – ISBN 978-5-94057-453-8.
URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140

4) Сборник задач по математике для втузов : [Учеб. пособие]: В 4 ч. Ч.1 / Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Изд-во физ.-мат.лит., 2001. - 288 с.

5) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Алгебра [Электронный ресурс] : Курс лекций: Учеб. пособие. Ч.1. - Электрон. текстовые дан. (1 324 Кбайт). - Воронеж : ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2010.
6) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Алгебра [Электронный ресурс] : Курс лекций: Учеб. пособие. Ч.2. - Электрон. текстовые дан. (2 001 Кбайт). - Воронеж : ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2010.
7) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Алгебра [Электронный ресурс] : Курс лекций: Учеб. пособие. Ч.4. - Электрон. текстовые, граф. дан. (0,99 Мб). - Воронеж : ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011.
8) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Практикум по алгебре : учеб. пособие. - Воронеж : ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2006. - 158 с.
9) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Сборник индивидуальных заданий по алгебре и геометрии [Электронный ресурс] : Учеб. пособие. - Электрон. текстовые, граф. дан. (976 Кб). - Воронеж : ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет", 2012.
10) Майорова С.П. Элементы теории сравнений : Методические указания для организации самостоятельной работы по курсу "Алгебра" для студентов специальностей 090102, 090105 очной формы обучения - Воронеж : ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2008. - 44 с. - № 404-2008
11) Методические указания для организации самостоятельной работы по дисциплине «Алгебра и геометрия» для студентов специальностей 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной формы обучения [Электронный ресурс] / Сост.: С. П. Майорова, М. Г. Завгородний. - Воронеж : ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет", 2015. - № 249-2015
12) Майорова С.П., Завгородний М.Г. Сборник задач по алгебре и геометрии [Текст] : учебное пособие / ФГБОУ ВО "Воронеж. гос. техн. ун-т". - Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2017 - 200 с.

8.2 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

Компьютеры, оснащенные операционной системой Windows, программой для чтения документов в формате pdf Acrobat Reader.

Электронная образовательная среда ВГТУ https://old.education.cchgeu.ru/

Электронная научная библиотека http://elibrary.ru/

Электронно-библиотечная система http://www.iprbookshop.ru/
Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru/

9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Учебные аудитории, оснащенные техническими средствами, для проведения лекционных и практических занятий по математике.

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

По дисциплине «Алгебра и геометрия» читаются лекции, проводятся практические занятия, выполняется курсовой проект.

Основой изучения дисциплины являются лекции, на которых излагаются наиболее существенные и трудные вопросы, а также вопросы, не нашедшие отражения в учебной литературе.

Практические занятия направлены на приобретение практических навыков использования математического аппарата для решения задач, в том числе прикладного характера. Занятия проводятся путем решения конкретных задач в аудитории.

Большое значение по закреплению и совершенствованию знаний имеет самостоятельная работа студентов. Информацию о всех видах самостоятельной работы студенты получают на занятиях.

Освоение дисциплины оценивается на зачете и экзамене.

Вид учебных занятий	Деятельность студента
Лекция	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначение вопросов, терминов, материала, которые вызывают трудности, поиск ответов в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на лекции или на практическом занятии.
Практическое занятие	Конспектирование рекомендуемых источников. Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы. Прослушивание аудио- и видеозаписей по заданной теме, выполнение расчетно-графических заданий, решение задач по алгоритму.
Самостоятельная работа	Самостоятельная работа студентов способствует глубокому усвоению учебного материала и развитию навыков самообразования. Самостоятельная работа предполагает следующие составляющие: - работа с текстами: учебниками, справочниками, дополнительной литературой, а также проработка конспектов лекций;

	- выполнение домашних заданий и расчетов; - работа над темами для самостоятельного изучения; - участие в работе студенческих научных конференций, олимпиад; - подготовка к промежуточной аттестации.
Подготовка к промежуточной аттестации	При подготовке к зачету и экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу и решение задач на практических занятиях Готовиться к промежуточной аттестации следует систематически, в течение всего семестра. Интенсивная подготовка должна начаться не позднее, чем за месяц-полтора до промежуточной аттестации. Данные перед зачетом, экзаменом три дня эффективнее всего использовать для повторения и систематизации материала.