ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»

И.Н. Пантелеев

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ: ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2010

УДК 681.3.06(075)

Пантелеев И.Н. Высшая математика. Функции нескольких переменных: практикум: учеб. пособие / И.Н. Пантелеев. Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2010. – 218 с.

Учебное пособие включает материал, необходимый для подготовки к практическим занятиям по курсу высшей математики в первом семестре. Содержит краткий теоретический материал по методам вычисления пределов, производных, экстремумов функций нескольких переменных и общему исследованию функций с приложениями к задачам геометрии, механики и физики, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные методы решения.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлениям 280100 «Безопасность жизнедеятельности», 280200 «Защита окружающей среды», специальностям 280103 «Защита в чрезвычайных ситуациях», 280101 «Безопасность жизнедеятельности в техносфере» и дисциплине «Высшая математика». Предназначено студентам очной формы обучения.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в текстовом редакторе Microsoft Word 2003 и содержатся в файле Vmfmm_DifFNP1.pdf.

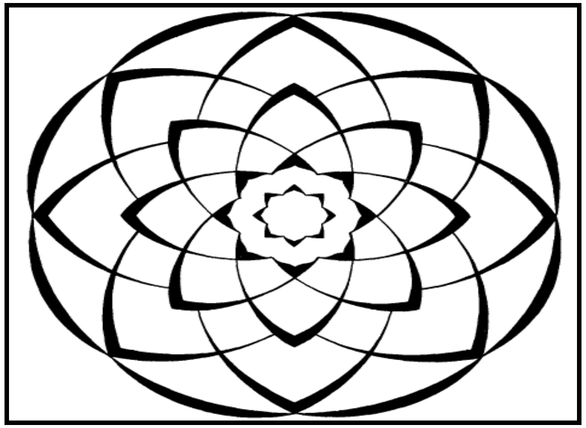
Ил. 36. Библиогр.: 12 назв.

Рецензенты: кафедра физики Воронежской государственной технологической академии (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Безрядин); профессор Г.Е. Шунин

**И.Н. Пантелеев**

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ: ПРАКТИКУМ

**Учебное пособие**



**Воронеж 2010**

Учебное издание

Пантелеев Игорь Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ:
ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор И.Н. Пантелеева

Подписано к изданию 15.12.2010.
Уч.- изд. л. 11,8.

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

# ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия - помочь студентам научиться самостоятельно решать задачи по курсу высшей математики, при условии, что изучение теории должно выполняться по рекомендованному в программе учебнику и конспекту лекций. В пособии рассмотрены следующие вопросы теории функций нескольких переменных: функции от двух или $n$ переменных, область определения, геометрическое толкование, частные производные и дифференцирование сложных функций, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениям. Пособие предназначено главным образом для использования во время практических занятий по высшей математике, в качестве задачника для самостоятельной работы и при подготовке к контрольным работам.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, теоремы без доказательств, главнейшие формулы, методы и способы решения задач. Решение типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности.

Характерной особенностью является включение решений задач вычислительного характера, что позволяет развивать необходимые навыки и умение для студентов инженерных специальностей. Кроме того, значительное внимание уделено методам решения прикладных задач с физическим смыслом.

Часть задач была заимствована из сборников задач по курсу математического анализа: Берман Г.Н., Минорский В.П., Демидович Б.П., Бугров Я.С., Никольский Я.С.

Пособие включает задания для типового расчета по дифференциальному исчислению по основным разделам, изучаемым в курсе высшей математики в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 280100 «Безопасность жизнедеятельности».

# 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 1.1. Понятие о функции нескольких переменных. Область определения

**$1^0$.** Если в силу некоторого закона каждой совокупности $n$ чисел $(x, y, z, ..., t)$ из некоторого множества $E$ ставится в соответствие определенное значение переменной $u$, то $u$ называется функцией от $n$ переменных $x, y, z, ..., t$, определенной на множестве $E$ и обозначается $u = f(x, y, z, ..., t)$.

Переменные $x, y, z, ..., t$ называются аргументами функции, множество $E$ - областью определения функции.

Частным значением функции называется значение функции в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0, ..., t_0)$ и обозначается $f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0, ..., t_0)$.

Областью определения функции называется множество всех значений аргументов, которым соответствуют какие-либо действительные значения функции.

**$2^0$.** Функция двух переменных $z = f(x, y)$ в пространстве представляется некоторой поверхностью. То есть, когда точка с координатами $x, y$ пробегает всю область определения функции, расположенную в плоскости $xOy$, соответствующая пространственная точка, вообще говоря, описывает поверхность.

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ рассматривают как функцию точки некоторого множества точек трехмерного пространства. Аналогично, функцию $n$ переменных $u = f(x, y, z, ..., t)$ рассматривают как функцию точки некоторого $n$-мерного пространства.

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называется совокупность точек плоскости $xOy$, в которых функция имеет одинаковые значения, и обозначается $f(x,y)=C$. Различным значениям $C$ соответствуют различные поверхности уровня.

***1.1.*** Пусть $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. ***Найти*** а) частные значения функции в точках $M(1,1)$; $N(3,-4)$; б) $f(x-1,x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{x}\right)$.

**Решение.** а) Чтобы найти частные значения функции $f(x,y)$ в точках $M$ и $N$, необходимо подставить координаты этих точек в выражение функции. Тогда частное значение функции в точке $M$ будет $f(1,1)=\dfrac{1\cdot 1}{1^2+1^2}=\dfrac{1}{2}$, а в точке $N$ будет $f(N)=\dfrac{3\cdot(-4)}{3^2+(-4)^2}=-\dfrac{12}{25}$.

б) Чтобы найти требуемые значения функций, необходимо переменным $x,y$ присвоить значения $x-1,x+1$, соответственно в первом случае и $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x}$ - во втором. Тогда будем иметь

$$f(x-1,x+1)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)},$$

$$f\left(\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{y}\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

***1.2. Найти*** $f(x,y)$, если а) $f\left(\dfrac{y}{x},x-y\right)=x^2-y^2$;

б) $f(2x+y,2x-y)=xy$.

**Решение.** а) Обозначим $u=\dfrac{y}{x}$, $\upsilon = x-y$. Разрешая эти уравнения относительно $x, y$, будем иметь $x=\dfrac{\upsilon}{1-u}$, $y=\dfrac{u\upsilon}{1-u}$. Представим заданную функцию через новые переменные

$$f(u,\upsilon)=\frac{\upsilon^2}{(1-u)^2}-\frac{u^2\upsilon^2}{(1-u)^2}=\frac{\upsilon^2(1-u^2)}{(1-u)^2}=\frac{\upsilon^2(1+u)}{1-u}.$$

Если переименовать переменные $u,\upsilon$ в $x, y$, то получим $f(x,y)=\dfrac{1+x}{1-x}y^2$.

б) Обозначим $u=2x+y$, $\upsilon=2x-y$. Откуда $x=\dfrac{1}{4}(u+\upsilon)$, $y=\dfrac{1}{2}(u-\upsilon)$.

Запишем заданную функцию через новые переменные $f(u,\upsilon)=\dfrac{1}{8}(u^2-\upsilon^2)$.

Если переименовать переменные $u,\upsilon$ в $x, y$, будем иметь $f(x,y)=\dfrac{1}{8}(x^2-y^2)$.

***1.3. Найти*** область определения функций:

а) $z=\ln(x^2+y^2-1)$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}}}$; в) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

г) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; д) $z=\ln xy$; е) $f(\rho,\varphi)=\rho\sqrt{\sin\varphi}$.

**Решение.** а) Функция определена, если $x^2+y^2-1>0$ или $x^2+y^2>1$, т.е. областью существования данной функции является часть плоскости вне единичного круга с центром в начале координат.

б) Функция $z$ принимает вещественные значения при условии $1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}>0$ или $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}>1$, т.е. областью существования функции является открытый эллипс. Граница эллипса не входит в область существования функции.

в) Функция определена, если $x \neq 0$ и $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$ или $-x \leq y \leq x$. Областью существования функции является часть плоскости, заключенная между двумя биссектрисами $y = x$ и $y = -x$ и содержащая ось $Ox$, за исключением начала координат $O(0,0)$.

г) Функция определена, если $x + y \geq 0$ и $x - y \geq 0$, т.е. областью существования функции является внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами, включая сами биссектрисы.

д) Функция определена, если $xy > 0$, т.е. областью существования функции является часть плоскости, лежащая внутри первого и третьего координатных углов, исключая границы.

е) Функция принимает вещественные значения при условии $\sin\varphi \geq 0$, т.е. $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\rho$ - любое. Областью определения будет верхняя полуплоскость.

***1.4. Найти*** область определения функций:

а) $u = \ln(z - x^2 - y^2)$; б) $u = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$;

в) $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

**Решение.** а) Функция зависит от трех переменных и принимает вещественные значения при $z - x^2 - y^2 > 0$, или $z > x^2 + y^2$, т.е. областью существования функции $u$ является часть пространства, заключенная внутри параболоида, исключая сам параболоид.

б) Функция зависит от трех переменных и принимает вещественные значения при $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\geq 0$, или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, т.е. областью существования функции $u$ является часть пространства, заключенная внутри трехосного эллипсоида, включая границу.

в) Функция зависит от трех переменных и определена, если $z\neq 0$ и $-1\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\leq 1$, или $0\leq x^2+y^2\leq z^2$.

***1.5. Найти*** линии и поверхности уровня функций:

а) $z=x^2-y^2$; б) $u=x^2+y^2+z^2$.

**Решение.** а) Уравнение линий уровня имеет вид $x^2-y^2=C$, т.е. линии уровня равносторонние гиперболы. При $C>0$ вершины гиперболы расположены на оси $Ox$, при $C<0$ - на оси $Oy$.

б) Уравнение поверхностей уровня имеет вид $x^2+y^2+z^2=C$, т.е. поверхности уровня – это семейство сферических поверхностей с центром в начале координат.

## 1.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

**1$^0$.** Число $A$ называется пределом функции $f(M)$ при $M\to M_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ всегда найдется такое число $\delta>0$, что для любых точек $M$, отличных от $M_0$ и удовлетворяющих условию $|MM_0|<\delta$, будет иметь место неравенство $|f(M)-A|<\varepsilon$.

Предел обозначают $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$. В случае функции двух переменных $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

**$2^0$.** Теоремы о пределах. Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ при $M \to M_0$ стремятся каждая к конечному пределу, то

а) $\lim\limits_{M \to M_0}(f_1(M) + f_2(M)) = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) + \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

б) $\lim\limits_{M \to M_0}(f_1(M) f_2(M)) = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f_1(M)}{f_2(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)}$; $\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M) \neq 0$.

**$3^0$.** Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0$, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

а) функция $f(M)$ определена в точке $M_0$;

б) существует предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если в точке $M_0$ нарушено хотя бы одно из этих условий, то функция в этой точке терпит разрыв. Точки разрыва могут образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т.д. Функция $f(M)$ называется непрерывной в области $G$, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Из определения непрерывности функции в точке следует, что бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

**2.1.** Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1} - 1}{x + y}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$.

**Решение.** а) Преобразуем предел следующим образом

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}.$$

Пусть $y=kx$, тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{kx^2}{x(1+k)(\sqrt{kx^2+1}+1)}=0$

б) Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a}{a}=1$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\dfrac{\sin xy}{xy}=2\cdot 1=2$.

в) Пусть $y=kx$, т.е. рассмотрим изменение $x$ и $y$ вдоль прямой. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\left(x^2-k^2\right)}{x^2\left(x^2+k^2\right)}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Таким образом, предел имеет различные значения в зависимости от выбранного $k$, т.е. функция не имеет предела.

г) Воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{\beta\to 0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=e$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

***2.2. Найти*** точки разрыва функций: а) $z=\ln(x^2+y^2)$;

б) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

**Решение.** а) Функция $z=\ln(x^2+y^2)$ терпит разрыв в точке $x=0$, $y=0$.

Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой разрыва.

б) Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. $x^2+y^2-z^2=0$. Следовательно, поверхность конуса $x^2+y^2=z^2$ является поверхностью разрыва.

## 1.3. Частные производные первого порядка

**1$^0$.** Пусть $(x_0,y_0)$ - некоторая произвольная фиксированная точка из области определения функции $z=z(x,y)$. Придавая переменной $x$ приращение $\Delta x$, находим приращение функции $z=z(x,y)$ в точке $(x_0,y_0)$ по переменной $x$: $\Delta z=(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)$. Предел отношения $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ называется частной производной 1-го порядка от функции $z$ по переменной $x$ в точке $(x_0,y_0)$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $z'_x(x,y)$. Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z$ по $y$: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_y(x,y)$. Производная от функции $z=z(x,y)$ по $x$ находится, в предположении, что $y$ остается постоянной, по обычным правилам и формулам дифференцирования. Если функция зависит от нескольких переменных $z=z(x_1,x_2,...,x_n)$, то частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ находится в предположении, что все переменные (кроме $x_i$) постоянные величины.

**2$^0$.** Функция $z=z(x_1,x_2,...,x_n)$ называется однородной функцией степени $m$, если для некоторого действительного числа $\lambda\neq 0$ справедливо выражение

$$z(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=\lambda^m z(x_1,x_2,...,x_n).$$

*Теорема Эйлера.* Если однородная степени $m$ функция $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные по каждой из переменных $x_i$, то справедливо равенство

$$mz(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 z'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$x_2 z'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + x_n z'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

***3.1. Найти*** частные производные: а) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

б) $z = xy\sin(2x + 3y)$; в) $z = \sqrt[3]{\cos(2x - y)}$; г) $z = 2^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$;

д) $z = \ln tg\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4}\right)$; е) $z = xye^{10y - x}$; ж) $z = \dfrac{1}{arctg\,\dfrac{x}{y}}$.

**Решение.** а) Полагая $y$ постоянной величиной, находим производную по $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Полагая $x$ постоянной величиной, находим производную по $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

б) Полагая $y$ постоянной величиной, находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(\sin(2x + 3y) + 2x\cos(2x + 3y))$. Полагая $x$ постоянной величиной, находим $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x(\sin(2x + 3y) + 3y\cos(2x + 3y))$.

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}(2x - y) \cdot 2 = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x - y)}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}(2x-y)(-1)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x-y)}}.$$

г) $$\frac{\partial z}{\partial x}=2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\ln 2\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x^2+y^2}{x^2y}\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}\ln 2\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{x^2+y^2}{xy^2}\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}.$$

д) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{tg\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{tg\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)}\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)}.$$

е) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y(e^{10y-x}+xe^{10y-x}(-1))=ye^{10y-x}(1-x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x(e^{10y-x}+ye^{10y-x})\cdot 10=xe^{10y-x}(1+10y).$$

ж) $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\left(arctg\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(arctg\frac{x}{y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\left(arctg\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{x}{(x^2+y^2)\left(arctg\frac{x}{y}\right)^2}.$$

***3.2. Найти*** частные производные: а) $u=x3y^2+\dfrac{y}{z}$;

б) $u=\sqrt{t-x^2-y^2-z^2}$.

**Решение.** а) Полагая $y$, $z$ постоянными величинами, находим производную по $x$: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2$. Полагая $x$, $z$ постоянными величинами, находим $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y + \frac{1}{z}$.

Полагая $x$, $y$ постоянными, имеем $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$.

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}(-2z) = -\frac{z}{\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

***3.3. Найти:*** а) $f_x'(1;2)$, $f_y'(1;2)$, если $f(x,y) = x^3y - xy^3 + 1$; б) $u_x'(1;0;2)$, $u_y'(1;0;2)$; $u_z'(1;0;2)$, если $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

**Решение.** а) Находим частные производные и вычисляем их значения в точке $(1;2)$

$$f_x' = 3x^2y - y^3,\ f_y' = x^3 - 3xy^2,\ f_x'(1;2) = -2,\ f_y'(1;2) = -11.$$

б) Находим частные производные и вычисляем их значения в точке $(1;0;2)$

$$u_x' = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2},\ u_y' = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2},\ u_z' = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$u_x'(1;0;2) = \frac{2}{5},\ u_y' = 0,\ u_z' = \frac{4}{5}.$$

***3.4. Показать***, что: а) $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; б) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, если $z = x\ln\dfrac{y}{x}$.

**Решение.** а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^3} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

Поставляя их в уравнение, получим

$$-\frac{y^2x^2}{3x^2} + \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - \frac{2xy^2}{3x} - \frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y^2 = -y^2 + y^2 = 0.$$

б) Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \ln\dfrac{y}{x} - 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y}$.

Подставляя производные в уравнение, будем иметь $x\ln\dfrac{y}{x} - x + y\dfrac{x}{y} = x\ln\dfrac{y}{x} = z$.

***3.5. Проверить*** теорему Эйлера для функций:

а) $z = x^3 - xy^2 + y^3$; б) $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$.

**Решение.** а) Для функции двух переменных теорема Эйлера имеет вид $xz'_x + yz'_y = mz$. Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$. Таким образом,

$$x(3x^2 - y^2) + y(-2xy + 3y^2) = 3(^3 - xy^2 + y^3) = 3z.$$

б) Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Таким образом, $\dfrac{xy}{x^2 + y^2} - \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = 0$, поскольку заданная функция однородная степени $m = 0$.

## 1.4. Дифференциал функции и его применение к приближенным вычислениям

**1$^0$.** Пусть изменение функции $z = f(x, y)$ вызвано изменением только одной переменной, например, $x$. Тогда приращение $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции по $x$. Частным дифференциалом функции $z$ по $x$ называется главная часть частного приращения, линейная относительно приращения $\Delta x$. Частный дифференциал от функции $z$ по $x$ равен произведению частной производной по $x$ на дифференциал независимой переменной, т.е.

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x .$$

Аналогично,

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \partial y .$$

Если функция многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то частные дифференциалы будут

$$d_{x_1} z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \partial x_1 ,\ d_{x_2} z = \frac{\partial z}{\partial x_2} \partial x_2 ,\ \dots ,\ d_{x_n} z = \frac{\partial z}{\partial x_n} \partial x_n$$

**2$^0$.** Если независимые переменные получают приращения $\Delta x$, $\Delta y$, то полное приращение функции $z = f(x, y)$ определяется выражением

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

Полным дифференциалом функции называется главная часть полного приращения, линейная относительно приращений $\Delta x$, $\Delta y$.

Полный дифференциал от функции $z$ равен сумме ее частных дифференциалов, т.е.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y .$$

В случае функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\partial x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\partial x_n .$$

**3⁰.** При достаточно малых приращениях независимый переменных, полное приращение функции приблизительно равно ее полному дифференциалу $\Delta u \approx du$. Это равенство используется для приближенного вычисления значения функции в точке $M(x, y, ..., z)$, если проще найти значения функции и ее частных производных в достаточно близкой точке $M_0(x_0, y_0, ..., z_0)$

$$u(M) \approx u(M_0) + u'_x(M_0)dx + u'_y(M_0)dy + ... + u'_z(M_0)dz ,$$

где $x - x_0 = dx$, $y - y_0 = dy$, … , $z - z_0 = dz$.

***4.1. Найти*** частные дифференциалы: а) $z = \sqrt[3]{x^2 + y}$;

б) $u = \ln(x^2 + y^2 - 2z^2$.

**Решение.** а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + y)^2}}$$

Умножая на соответствующие дифференциалы аргументов, получим

$$d_x z = \frac{2xdx}{3\sqrt[3]{(x^2 + y)^2}}; \; d_y z = \frac{dy}{3\sqrt[3]{(x^2 + y)^2}}.$$

б) Функция трех переменных. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 2z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 2z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4z}{x^2 + y^2 - 2z^2}.$$

Отсюда, частные дифференциалы

$$d_x u == \frac{2xdx}{x^2+y^2-2z^2},\ d_y u == \frac{2ydy}{x^2+y^2-2z^2}$$

$$d_z u == -\frac{4zdz}{x^2+y^2-2z^2}.$$

***4.2. Найти*** полный дифференциал функции:

а) $z = arctg\,\frac{x-4}{1+xy}$; б) $u = x^{y^z}$.

**Решение.** а) Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-4}{1+xy}\right)^2}\frac{1+xy-(x-y)y}{(1+xy)^2} = \frac{1+y^2}{1+x^2-xy+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-4}{1+xy}\right)^2}\frac{-1-xy-(x-y)y}{(1+xy)^2} = -\frac{1+y^2}{1+x^2-xy+y^2};$$

Полный дифференциал находим по формуле (4)

$$dz = \frac{(1+y^2)dx-(1+x^2)dy}{1+x^2-xy+y^2}.$$

б) Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1},\ \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^{z^z}}\ \ln xy^z\ln y.$$

Отсюда, полный дифференциал

$$\partial u = y^z x^{y^z-1}dx + x^{y^z}\,y^{z-1}z\ln xdy + x^{y^z}\,y^z\ln x\ln ydz =$$
$$= y^z x^{y^z}\left(\frac{dx}{x}+\frac{z\ln x}{y}dy+\ln x\ln ydz\right).$$

***4.3.*** При помощи полного дифференциала ***вычислить*** приближенно: а) $\ln(\sqrt[4]{0{,}97}+\sqrt[3]{1{,}04}-1)$; б) $(1{,}02)^4\cdot 0{,}98)^3\cdot(2{,}03)^2$.

**Решение.** а) Рассмотрим функцию $z = \ln(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1)$. Требуется найти значение функции в точке $M(0{,}97;1{,}04)$. Однако проще найти значение функции в вспомогательной точке $M_0(1;1)$.

Найдем сначала дифференциалы аргументов $dx = x - x_0 = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$, $dy = y - y_0 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$ и воспользуемся формулой (6)

$$z(M) = z(M_0) + \left.\frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1}\right|_{M_0} dy,$$

$$\ln(\sqrt[4]{0{,}97} + \sqrt[3]{1{,}04} - 1) = \ln(\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1) + \frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{1}}}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1}(-0{,}03) +$$

$$\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1}}}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{1} - 1} 0{,}04 = -\frac{0{,}03}{4} + \frac{1}{3} = 0{,}326.$$

б) Требуется найти значение функции $u = x^4 y^3 z^2$ в точке $M((1{,}02;0{,}98;2{,}03)$. Пусть $M_0((1;1;2)$ будет вспомогательной точкой. Найдем дифференциалы аргументов $dx = x - x_0 = 0{,}02$; $dy = y - y_0 = -0{,}02$; $dz = z - z_0 = 0{,}03$ и воспользуемся формулой (6)

$$u(M) = u(M_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} dy + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} dz =$$

$$+ 1^4 1^3 2^2 + 4 \cdot 1^3 1^3 2^2 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 1^4 1^2 2^2 (-0{,}02) + 2 \cdot 1^4 1^3 2 \cdot 0{,}03 =$$

$$= 4 + 0{,}16 - 0{,}24 + 0{,}12 = 4{,}04.$$

***4.4.*** Стороны прямоугольного параллелепипеда равны; $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 6$ см. ***Найти*** приближенно величину изменения длины диагонали параллелепипеда, если $a$ увеличивается на 3 мм, $b$ - на 1 мм, а $c$ уменьшается на 2 мм.

**Решение.** Диагональ параллелепипеда равна $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$. Изменение длины заменим приближенно дифференциалом

$$\Delta l = dl = \frac{2ada}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{2bdb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{2cdc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ada + bdb + cdc) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 6(-2)) =$$

$= \dfrac{2}{7}(-0{,}3) = -0{,}0857$, т.е. длина уменьшилась на 0,857 мм.

***4.5.*** Дана функция $z = 4xy + 5x - 2y$ и две точки $A(1;3)$, $B(1{,}04;2{,}97)$.

Требуется: а) ***вычислить*** приближенное значение функции в точке $B$;

б) вычислить точное значение функции в точке $B$ и оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции дифференциалом.

**Решение.** а) Формула (6) для нашего случая примет вид $z(B) = z(A) + z'_x(A)dx + z'_y(A)dy$.

Найдем: $z(1;3) = 4 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 11$; $z'_x = 4y + 5$, $z'_x(1;3) = 17$, $z'_y = 4x - 2$, $z'_y(1;3) = 2$, $dx = x - x_0 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $dy = y - y_0 = 2{,}97 - 3 = -0{,}03$.

Отсюда приближенное значение функции в точке $B$
$z(B) = 11 + 17 \cdot 0{,}04 + 2(-0{,}03) = 11{,}62$.

б) Найдем точное значение функции в точке $B$
$z(B) = 4 \cdot 1{,}04 \cdot 2{,}97 + 5 \cdot 1{,}04 - 2 \cdot 2{,}97 = 11{,}6152$.

Если $a$ есть приближенное значение числа $a^o$, то относительная погрешность $\delta$ определяется по формуле $\delta = \left|\frac{a^o - a}{a}\right|$.

Таким образом, $\delta = \left|\frac{11{,}61 - 11{,}62 - a}{11{,}62}\right| = 0{,}00086$.

Принимая приближенное число 11,62 за 100 %, находим, что относительная погрешность в процентах равна 0,007 %.

## 1.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

**1$^0$.** Частные производные первого порядка от функции многих переменных $u = f(x, y, ..., t)$ обычно зависят от тех же переменных и их можно еще раз дифференцировать.

Частными производными второго порядка называются частные производные от частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}; \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}; \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx}, \ldots$$

Смешанные частные производные, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Частными производными третьего порядка называются частные производные от частных производных второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u'''_{xxx}; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = u'''_{xxy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=u'''_{xxy}\,;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}=u'''_{xyy}\,,\ldots$$

Частные производные других высших порядков определяются аналогично.

**$2^0$.** Дифференциалом второго порядка от функции двух независимых переменных $u=f(x,y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала

$$d(du)=d^2u\,;$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x \partial y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\,.$$

Аналогично определятся дифференциал третьего порядка

$$d(d^2u)=d^3u\,;$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\partial x^2 \partial y+3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\partial x \partial y^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3\,.$$

В общем случае для дифференциалов высших порядков справедлива символическая формула

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u\,,$$

где сначала выражение в скобках формально возводится в степень $n$, а затем при символе $\partial^n$ подписывается $u$.

В многомерном случае $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет место аналогичная символическая формула

$$d^n u=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^n u\,.$$

***5.1. Найти*** частные производные второго порядка

а) $z=\ln(x^2+y^2)$; б) $u=xy+yz+zx$.

**Решение.** а) Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\,.$$

Отсюда вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Последние два выражения наглядно доказывают, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

б) Находим сначала частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z, \ \frac{\partial u}{\partial y}=x+z, \ \frac{\partial u}{\partial z}=y+x.$$

Отсюда частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=1, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1.$$

***5.2. Найти:*** а) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, если $z=\cos(xy)$;

б) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, если $u=(xyz)^3$.

**Решение.** а) Поскольку смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, то последовательно дифференцируя, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x\sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-(2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy))=x^2y\sin(xy)-2x\cos(xy);$$

б) Функция от трех независимых переменных. Смешанная производная по переменным будет

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3(xyz)^2 xy = 3x^3 y^3 z^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 9x^3 y^2 z^2 , \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 27x^2 y^2 z^2 .\backslash$$

***5.3. Найти:*** а) $z'''_{xxy}(0;1)$; б) $z'''_{xyy}(0;1)$, если $z = e^{x^2 y}$.

**Решение.** а) Требуется найти значение частной производной третьего порядка в точке (0,1). Находим сначала частную производную $z'_y = x^2 e^{x^2 y}$,

$$z''_{xy} = 2xe^{x^2 y} + x^2 e^{x^2 y} 2xy = 2x(1 + x^2 y)x^2 e^{x^2 y} ,$$

$$z'''_{xxy} = 4x^2 y(1 + x^2 y)e^{x^2 y} + (2 + 6x^2 y)e^{x^2 y} .$$

Отсюда $z'''_{xxy}(0;1) = 2$.

б) Используя результат предыдущего примера $z''_{xy}$, находим $z'''_{xyy} = 2x^3 e^{x^2 y} + 2x(1 + x^2 y)x^2 e^{x^2 y}$. Отсюда значение производной в точке $z'''_{xyy}(0;1) = 0$.

***5.4. Показать***, что функции удовлетворяют уравнениям:

а) $u = A\sin\lambda x \cos a\lambda t$, $u = e^{-\cos(at+x)}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

б) $z = e^{xy}$, $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

**Решение.** а) Найдем частные производные второго порядка от первой функции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Aa\lambda \sin\lambda x \sin a\lambda t , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A(a\lambda)^2 \sin\lambda x \cos a\lambda t ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\lambda \cos\lambda x \cos a\lambda t , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda^2 \sin\lambda x \cos a\lambda t .$$

Подставляя вторые производные в уравнение, получим

$-Aa^2\lambda^2 \sin\lambda x \cos a\lambda t = -Aa^2\lambda^2 \sin\lambda x \cos a\lambda t$,

что и требовалось доказать.

Найдем теперь частные производные от второй функции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\sin(at+x)e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a^2\cos(at+x) + a^2\sin(at+x))e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(at+x)e^{-\cos(at+x)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\cos(at+x) + \sin^2(at+x))e^{-\cos(at+x)}.$$

Подставляя вторые производные в уравнение, получим

$$a^2(\cos(at+x)+\sin(at+x))e^{-\cos(at+x)} =$$
$$= a^2(\cos(at+x)+\sin(at+x))e^{-\cos(at+x)}$$

что и требовалось доказать.

б) Находим вторые частные производные от функции

$$z = e^{xy},\ \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy},\ \frac{\partial y}{\partial x} = xe^{xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Подставляя вторые частные производные в уравнение, получим $x^2y^2e^{xy} - y^2x^2e^{xy} = 0$, что и требовалось проверить.

Найдем вторые частные производные для $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}y\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3}{4}\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}.$$

Подставляя вторые частные производные в уравнение, получим

$$x^2\frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y}{x^2} - y^2\frac{3}{4}\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} = 0,\quad \frac{3}{4}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{4}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

что и требовалось проверить.

**5.5. *Найти:*** а) $d^2z$, если $z = x\ln\dfrac{y}{x}$; б) $d^2u$, если $u = e^{xyz}$;

в) $d^3z$, если $z = e^x \sin y$.

**Решение.** а) При нахождении дифференциала второго порядка воспользуемся формулой (1). Для этого найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\frac{y}{x} - 1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}.$$

Таким образом, $\quad d^2 z = -\dfrac{dx^2}{x} + \dfrac{2dxdy}{y} - \dfrac{xdy^2}{y^2}$.

б) В данном случае функция трех переменных. Пользуясь формулой (4), запишем дифференциал второго порядка

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (yz)^2 e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (xz)^2 e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (xy)^2 e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (z + xyz^2)e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (y + xy^2 z)e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (x + x^2 yz)e^{xyz}.$$

Отсюда имеем

$d^2u = e^{xyz}((yzdx)^2 + (xzdy)^2 + (xydz)^2 +$

$$+(z+xyz^2)dxdy+(y+xy^2z)dxdz+(x+x^2yz)dydz).$$

в) Воспользуемся формулой (2). Найдем частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=e^x\cos y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-e^x\cos y.$$

Окончательно получим

$$d^3z=e^x\sin ydx^3+3e^x\cos ydx^2dy-3e^x\sin ydxdy^2-$$

$$-e^x\cos ydy^3=e^x(\sin ydx^3+3\cos ydx^2dy-3dinydxdy^2-\cos ydy^3).$$

### 1.6. Дифференцирование сложных функций

**1⁰.** Функция вида $z=f(u,\upsilon,...,w)$ называется сложной функцией от независимых переменных $x,y,...,t$, если она задана посредством промежуточных аргументов: $u=u(x,y,...,t)$, $\upsilon=\upsilon(x,y,...,t)$, … , $w=w(x,y,...,t)$.

Частная производная сложной функции по независимой переменной равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные от этих аргументов по независимой переменной

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$

……………………..

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+...+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Если все промежуточные аргументы будут функциями только одной независимой переменной $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$, $w = w(x)$, то $z$ будет функцией только $x$ и производная такой сложной функции называется полной производной

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{d\upsilon}{dx} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Если функция $z$ вида $z = f(x, u, \upsilon, \ldots, w)$, где $u, \upsilon, \ldots, w$ - функции только $x$, то полная производная определятся по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{d\upsilon}{dx} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

**2⁰.** Если функция $z = f(u, \upsilon, \ldots, w)$ сложная, то дифференциал первого порядка сохраняет свой вид (свойство инвариантности формы первого дифференциала) и находится по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}d\upsilon + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}dw.$$

Дифференциал 2-го порядка от сложной функции находится по формуле

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial u}\partial u + \frac{\partial}{\partial \upsilon}\partial \upsilon + \ldots + \frac{\partial}{\partial w}\partial w\right)^2 z +$$
$$+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}d^2\upsilon + \ \ldots\ + \frac{\partial z}{\partial w}d^2 w.$$

.

***6.1. Найти*** производные сложных функций:

а) $z = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}$, $u = \cos x$, $\upsilon = \sin x$; б) $z = x^3 \ln y$, $x = 2u + 3\upsilon$, $y = \dfrac{u}{\upsilon}$; *в)* $u = xyz$, $x = \ln t$, $y = 1 + t^2$, $z = \sin t$;

г) $z = x \ln u \sin \upsilon$, $u = \cos x$, $\upsilon = x^2 - 1$.

**Решение.** а) Поскольку промежуточные аргументы $u, \upsilon$ являются функциями только одной независимой переменной

$x$, то производную находим по формуле (2) $\frac{dz}{dx} = -\frac{u}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}} \sin x + \frac{\upsilon}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}} \cos x = -\cos x \sin x + \sin x \cos x = 0$.

б) Промежуточные аргументы $x, y$ являются функциями двух независимых аргументов $u, \upsilon$. В этом случае формулы (1) примут вид

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \upsilon} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \upsilon} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \upsilon}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3x^2 \ln y \cdot 2 + \frac{x^3}{y}\frac{1}{\upsilon} = 6(2u+3\upsilon)^2 \ln\frac{u}{\upsilon} + \frac{(2u+3\upsilon)^3}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial \upsilon} = 3x^2 \ln y \cdot 3 + \frac{x^3}{y}\left(-\frac{1}{\upsilon^2}\right) = 9(2u+3\upsilon)^2 \ln\frac{u}{\upsilon} + \frac{(2u+3\upsilon)^3}{u}.$$

в) Функция $u$ зависит от трех промежуточных аргументов, которые в свою очередь зависят только от одной независимой переменной, поэтому по формуле (2)

$$\frac{du}{dt} = yz\frac{1}{t} + xz2t + xy\cos t = \frac{1+t^2}{t}\sin t + 2t\ln t \sin t + (1+t^2)\ln t \cos t.$$

г) Здесь независимая переменная $x$ явно входит в выражение функции, поэтому воспользуемся формулой (3)

$$\frac{dz}{dx} = \ln u \sin\upsilon + \frac{x}{u}\sin\upsilon(-\sin x) + x\ln u\cos\upsilon \cdot 2x =$$

$$= \ln\cos x \cdot \sin(x^2-1) - \sin(x^2-1) + 2x^2 \ln\cos x \cdot \cos(x^2-1).$$

***6.2. Найти*** $dz$ и $d^2 z$, если $z = f(u,\upsilon)$, $u = \sin(xy)$, $\upsilon = \ln\frac{x}{y}$.

**Решение.** При нахождении дифференциала 1-го порядка воспользуемся формулой (4), где

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy\,;$$

$$d\upsilon=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\,.$$

Тогда

$$dz=f'_u(y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy)+f'_\upsilon\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right).$$

При вычислении дифференциала 2-го порядка по формуле (5) найдем сначала $d^2u$ и $d^2\upsilon$:

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=-y^2\sin(xy)dx^2-2xy\sin(xy)dxdy-x^2\sin(xy)dy^2$$

$$d^2\upsilon=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}dy^2=-\frac{dx^2}{x^2}+\frac{dy^2}{y^2}\,.$$

Таким образом,

$$d^2z=f''_{uu}(y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy)^2+2f''_{u\upsilon}(y\cos(xy)dx+$$

$$+x\cos(xy)dy)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)+f''_{\upsilon\upsilon}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)^2-$$

$$-f'_u\sin(xy)(ydx+xdy)^2+f'_\upsilon\left(\frac{dy^2}{y^2}-\frac{dx^2}{x^2}\right)^2=$$

$$=f''_{uu}\cos^2(xy)(ydx+xdy)^2+f''_{u\upsilon}\cos(xy)(ydx+xdy)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)+$$

$$+f''_{\upsilon\upsilon}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)^2-f'_u\sin(xy)(ydx+xdy)^2+f'_\upsilon\left(\frac{dy^2}{y^2}-\frac{dx^2}{x^2}\right).$$

## 1.7. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций

**1$^0$.** Неявной функцией от нескольких независимых переменных $x, y,..., t$ называется переменная $z$, если она задана уравнением $F(x, y,..., t, z) = 0$, которое не разрешено относительно $z$.

*Первый способ.* Частные производные неявной функции $z$, заданной уравнением $F(x, y,..., t, z) = 0$, где $F$ - дифференцируемая функция переменных $(x, y,..., t, z)$, определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \ \ldots \ ; \ \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

при условии, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

*Второй способ.* Дифференцируя уравнение $F(x, y,..., t, z) = 0$ будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

Находя отсюда $dz$ и сравнивая с формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

находим соответствующие частные производные.

**2$^0$.** Если неявная функция $y$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, где $F$ - дифференцируемая функция переменных $x$ и $y$, то производная неявной функции будет

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right).$$

Производные высших порядков вычисляются последовательными дифференцированием формулы (2).

**3⁰.** Пусть неявные функции $u = u(x, y, z)$ и $\upsilon = \upsilon(x, y, z)$ заданы системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(u, \upsilon, x, y, z) = 0; \\ F_2(u, \upsilon, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

*Первый способ*. Если якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, \upsilon)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \upsilon} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \upsilon} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$ находятся из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial \upsilon}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial \upsilon}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}$ определяются аналогично.

*Второй способ.* Дифференцируя заданные уравнения, находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных. Решая полученную систему относительно $du, d\upsilon$ и сравнивая эти выражения с полными дифференциалами

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

$$d\upsilon = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy + \frac{\partial \upsilon}{\partial z}dz,$$

находим искомые частные производные.

**4⁰.** Пусть функция $z$ от переменных $x, y$ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,\upsilon),\ y = y(u,\upsilon),\ z = z(u,\upsilon).$$

*Первый способ.* Для нахождения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ составим дифференцированием систему

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial \upsilon}d\upsilon; \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial \upsilon}d\upsilon; \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}d\upsilon. \end{cases}$$

Если якобиан $\frac{D(x,y)}{D(u,\upsilon)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix} \neq 0$, то решая первые два уравнения относительно $du, d\upsilon$ и поставляя их в третье, из сравнения полученного выражения с полным дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

*Второй способ.* Дифференцируем сначала первые два уравнения по $x$ и, из получившейся системы, находим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$. Далее, дифференцируем первые два уравнения по $y$ и, из получившейся системы, находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$. Затем, дифференцируя третье уравнение по $x$ и $y$ и подставляя туда ранее найденные частные производные от $u,\upsilon$ по $x, y$, находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

***7.1. Найти*** частные производные: а) $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$; б) $z^3 - xyz = 2a^2$.

**Решение.** а) Функция $z$ задана неявно. Полагая $F(x, y, z, t) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, по формулам (1) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;\ \frac{\partial F}{\partial t} = -2t;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};\ \ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{z}.$$

С другой стороны, дифференцируя данное уравнение, будем иметь $2xdx + 2ydy + 2zdz - 2tdt = 0$.

Находим отсюда $dz$, т.е. полный дифференциал неявной функции

$$dz = \frac{tdt - xdx - ydy}{z} = \frac{t}{z}dt - \frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy.$$

Сравнивая с формулой полного дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

окончательно получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{z}.$$

Полагая $F(x, y, z) = z^3 - xyz - 2a = 0$, находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz;\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz;\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - xy.$$

Отсюда по формулам (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{3z^2 - xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{3z^2 - xy}.$$

*Второй метод.* Дифференцируем

$$3z^2dz - yzdx - xzdy - xydz = 0$$

Находим дифференциал

$$\partial z = \frac{-yzdx - xzdy}{3z^2 - xy} = -\frac{yz}{3z^2 - xy}dx - \frac{xz}{3z^2 - xy}dy .$$

Сравнивая с полным дифференциалом функции от двух переменных, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{3z^2 - xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{3z^2 - xy}.$$

***7.2.*** $y = x + \ln y$, ***найти*** $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$ и дифференциал $dy$.

**Решение.** Пусть $F(x, y) \equiv y - x - \ln y = 0$. Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$. Отсюда по формуле (2) получим

$$y' = -\frac{-1}{\frac{y-1}{y}} = \frac{y}{y-1}.$$

Вторую производную находим дифференцированием первой производной по $x$, учитывая, что $y$ есть функция $x$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y-1}\right) = \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}.$$

Аналогично, третья производная

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -\frac{y'(y-1) - 3yy'}{(y-1)^4} = -\frac{y(1+2y)}{(y-1)^5}.$$

Дифференциал функции будет $dy = y'_x dx = \frac{y}{y-1}dx$.

***7.3. Найти*** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**Решение.** Функция $z$ от двух независимых переменных задана неявно. Полагая $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, находим сначала по формулам (1) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\,;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\,;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z\,;\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ находим дифференцированием первой производной по $x$, учитывая, что $z$ есть функция $x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{z - xz'_x}{z^2} = -\frac{z + \frac{x^2}{z}}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{z^3}.$$

Смешанную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ находим дифференцированием первой производной по $y$, учитывая, что $z$ есть функция $y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{xz'_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{z - yz'_y}{z^2} = -\frac{z + \frac{y^2}{z}}{z^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3} = \frac{x^2 - a^2}{z^3}.$$

***7.4. Найти*** $dz$ и $d^2 z$, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**Решение.** Дифференциал от функции $z$ находится по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Поскольку функция задана неявно, то частные производные находим по формулам (1), где

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

Таким образом, $dz=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}dx-\frac{c^2}{b^2}\frac{x}{z}dy$.

Дифференциал второго порядка находится по формуле

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\partial x\partial y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\frac{z-xz'_x}{z^2}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2z^2-c^2x^2}{a^2z^3}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{b^2-y^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)=-\frac{c^2xz'_y}{a^2z^2}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d}{dy}\left(-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)=-\frac{c^2}{b^2}\frac{z-xz'_y}{z^2}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{b^2z^2-c^2y^2}{b^2z^3}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{a^2-x^2}{z^3}$$

Отсюда,

$$d^2z=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}((b^2-y^2)dx^2+2xydxdy+(a^2-x^2)dy^2).$$

***7.5.*** Неявные функции $u$ и $\upsilon$ заданы системой

$$\begin{cases} u+\upsilon+x+y+z=0, \\ u^2+\upsilon^2+x^2+y^2+z^2=R^2. \end{cases}$$

***Найти*** частные производные $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial z}$.

**Решение.** Полагая $F_1(u,\upsilon,x,y,z)=u+\upsilon+x+y+z$ и $F_2(u,\upsilon,x,y,z)=u^2+\upsilon^2+x^2+y^2+z^2-R^2$, система для определения $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial \upsilon}{\partial z}$, аналогичная системе (3), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F_1}{\partial \upsilon}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F_2}{\partial \upsilon}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} + 1 = 0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial z} + 2\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему относительно производных, получим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\upsilon - z}{u - \upsilon},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \frac{z - u}{u - \upsilon}.$$

Решим этот пример *вторым* способом. Найдем дифференциалы от заданных функций

$$\begin{cases} du + d\upsilon + dx + dy + dz = 0, \\ udu + \upsilon d\upsilon + xdx + ydy + zdz = 0, \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно $du, d\upsilon$

$$\partial u = \frac{\upsilon - x}{u - \upsilon}dx + \frac{\upsilon - y}{u - \upsilon}dy + \frac{\upsilon - z}{u - \upsilon}dz\ ,$$

$$\partial \upsilon = \frac{x - u}{u - \upsilon}dx + \frac{y - u}{u - \upsilon}dy + \frac{z - u}{u - \upsilon}dz\ .$$

Сравнивая эти выражения с полными дифференциалами, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\upsilon - z}{u - \upsilon},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \frac{z - u}{u - \upsilon}.$$

Замечание. Из формул для $du, d\upsilon$ следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\upsilon - x}{u - \upsilon},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{x - u}{u - \upsilon},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\upsilon - y}{u - \upsilon},\ \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{y - u}{u - \upsilon}.$$

*7.6.* Функции $u$ и $\upsilon$ независимой переменной $x$ заданы системой уравнений: $u^2+\upsilon^2=x^2$, $u^2+2\upsilon^2+3x^2=1$, ***найти*** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}$.

**Решение.** Функции заданы неявно. Полагая $F_1(u,\upsilon,x)=u^2+\upsilon^2-x^2$, $F_2(u,\upsilon,x)=u^2+2\upsilon^2+3x^2-1$, находим сначала систему (3)

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}-2x=0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+6z=0. \end{cases}$$

Отсюда первые производные $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{5x}{u}$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=-\frac{4x}{u}$.

Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{u}\right)=5\frac{u-x\dfrac{du}{dx}}{u^2}=5\frac{u^2-5x^2}{u^3},$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{4x}{u}\right)=-4\frac{\upsilon-x\dfrac{d\upsilon}{dx}}{u^2}=-4\frac{\upsilon^2+4x^2}{u^3}.$$

*7.7.* Функции $u$ и $\upsilon$ независимой переменной $x$ заданы системой уравнений $u+\upsilon+x=0$, $u\upsilon x=1$. ***Найти:*** $d^2u$, $d^2\upsilon$.

**Решение.** Дифференцируя, находим уравнения, связывающие дифференциалы всех трех переменных

$$\begin{cases} du+d\upsilon+dx=0, \\ x\upsilon du+uxd\upsilon+u\upsilon dx=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно дифференциалов $du$, $d\upsilon$, будем иметь

$$du=\frac{u(\upsilon-x)}{x(u-\upsilon)}dx,\ d\upsilon=\frac{\upsilon(x-u)}{x(u-\upsilon)}dx.$$

Дифференцируя повторно

$$d^2u=\frac{(du(\upsilon-x)+u(d\upsilon-dx))dx(u-\upsilon)x-u(\upsilon-x)dx(dx(u-\upsilon)}{x^2(u-\upsilon)^2}+$$

$$+\frac{x(du-d\upsilon))}{x^2(u-\upsilon)^2}=\frac{(u(\upsilon-x)^2+u(\upsilon(x-u)-x(u-\upsilon)))x(u-\upsilon)}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-u(\upsilon-x)(x(u-\upsilon)^2+x(u(\upsilon-x)-\upsilon(x-u)))}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=$$

$$=\frac{ux((\upsilon^2+x^2-u\upsilon-xu)(u-\upsilon)-(\upsilon-x(\upsilon^2+x^2-ux-x\upsilon))}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=$$

$$=\frac{3(\upsilon^2+x^2-\upsilon^2)}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2.$$

$$d^2\upsilon=\frac{(d\upsilon(x-u)+\upsilon(1-du))x(u-\upsilon)dx-\upsilon(x-u)dx(dx(u-\upsilon)dx+x(du-d\upsilon))}{x^2(u-\upsilon)^2}=$$

$$=\frac{(\upsilon(x-u)^2+\upsilon(x(u-\upsilon)-u(\upsilon-x)))x(u-\upsilon)}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-\upsilon(x-u)(x(u-\upsilon)^2+x(u(\upsilon-x)-\upsilon(x-u)))}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=$$

$$=\frac{\upsilon x(((x-u)^2+(xu-x\upsilon-\upsilon u+ux))x(u-\upsilon)}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2+$$

$$+\frac{-(x-u)((u-\upsilon)^2+(u\upsilon-ux-\upsilon x+u\upsilon)))}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=$$

$$=\frac{\upsilon x(x^2+u^2+\upsilon^2)(u-\upsilon)-(x-u)+(u^2+\upsilon^2+x^2))}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=$$

$$=\frac{3(u^2+\upsilon^2+x^2)}{x^3(u-\upsilon)^3}dx^2=-d^2u.$$

***7.8.*** Функции $u$ и $\upsilon$ независимых переменных $x$ и $y$ заданы неявно системой уравнений: $xu+y\upsilon=0$, $u+\upsilon+x+y=1$.

***Найти*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}$.

**Решение.** Найдем сначала первые частные производные. Полагая $F_1(u,\upsilon,x,y) = xu + y\upsilon$ и $F_2(u,\upsilon,x,y) = u + \upsilon + x + y - 1$, находим систему (3) для определения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + u = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно производных, получим:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{u - x}{x - y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y - u}{x - y}.$$

Аналогично

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} + \upsilon = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + 1 = 0. \end{cases}$$

откуда: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y - \upsilon}{x - y}$, $\quad \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = \dfrac{\upsilon - x}{x - y}$.

Повторно дифференцируя и учитывая, что функции $u$ и $\upsilon$ зависят от переменных $x$ и $y$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y - u}{x - y}\right) = \frac{-\dfrac{\partial u}{\partial x}(x - y) - (y - u)}{(x - y)^2} = \frac{2(u - y)}{(x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y - u}{x - y}\right) = \frac{\left(1 - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(x - y) + (y - u)}{(x - y)^2} = \frac{x - y + \upsilon - u}{(x - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-\upsilon}{x-y}\right)=\frac{\left(1-\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)(x-y)+(y-\upsilon)}{(x-y)^2}=\frac{2(x-\upsilon)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u-x}{x-y}\right)=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)(x-y)-(u-x)}{(x-y)^2}=\frac{2(y-u)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\upsilon-x}{x-y}\right)=\frac{\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}-1\right)(x-y)-(\upsilon-x)}{(x-y)^2}=\frac{y-x+u-\upsilon}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\upsilon-x}{x-y}\right)=\frac{\frac{\partial\upsilon}{\partial y}(x-y)+(\upsilon-x)}{(x-y)^2}=\frac{2(\upsilon-x)}{(x-y)^2}.$$

***7.9.*** Функции $u$ и $\upsilon$ независимых переменных $x$ и $y$ заданы неявно системой уравнений: $u+\upsilon=x$, $u\upsilon=y$. ***Найти*** $d^2u$, $d^2\upsilon$.

***Решение.*** Найдем сначала $du$ и $d\upsilon$. Для этого продифференцируем заданные уравнения

$$\begin{cases} du+d\upsilon=dx, \\ \upsilon du+ud\upsilon=dy. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $du$ и $d\upsilon$, получим

$$du=\frac{udx-dy}{u-\upsilon},\quad d\upsilon=\frac{dy-\upsilon dx}{u-\upsilon}.$$

Дифференцируем повторно

$$d^2u=\frac{dudx(u-\upsilon)-(udx-dy)(du-d\upsilon)}{(u-\upsilon)^2}=$$

$$=\frac{(udx-dy)dx(u-\upsilon)-(udx-dy-dy-\upsilon dx)(udx-dy)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{(udx-\upsilon dx-udx+2dy-\upsilon dx)(udx-dy)}{(u-\upsilon)^3}=\frac{2(dy-\upsilon dx)(udx-dy)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{2(udxdy-(dy)^2-u\upsilon(dx)^2+\upsilon dxdy)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=-\frac{2(-u\upsilon(dx)^2-(u+\upsilon)^2dxdy+(dx)^2)}{(u-\upsilon)^3}.$$

$$d^2\upsilon=\frac{-d\upsilon dx(u-\upsilon)-(dy-\upsilon dx)(du-d\upsilon)}{(u-\upsilon)^2}=$$

$$=\frac{-(dy-\upsilon dx)(u-\upsilon)dx-(dy-\upsilon dx)(udx-2dy+\upsilon dx)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{(-udx+\upsilon dx-udx+2dy-\upsilon dx)(dy-\upsilon dx)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{2(dy-udx)(dy-\upsilon dx)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{2((dy)^2-udxdy-\upsilon dxdy+u\upsilon(dx)^2)}{(u-\upsilon)^3}=$$

$$=\frac{2(u\upsilon(dx)^2-(u+\upsilon)^2dxdy+(dy)^2)}{(u-\upsilon)^3}=-d^2u.$$

***7.10. Найти*** $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x=u\upsilon$, $y=u+\upsilon$, $z=u-\upsilon$.

**Решение.** Функция задана параметрически. Дифференцируя, находим систему из трех уравнений, связывающую дифференциалы всех переменных

$$\begin{cases} dx=\upsilon du+ud\upsilon; \\ dy=du+d\upsilon; \\ dz=du-d\upsilon. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим дифференциалы $du$ и $d\upsilon$

$$du=\frac{dx-udy}{\upsilon-u};\qquad d\upsilon=\frac{dx-\upsilon dy}{u-\upsilon}.$$

Подставляя найденные выражения в третье уравнение и сравнивая с полным дифференциалом $dz$, будем иметь

$$dz=\frac{dx-udy}{\upsilon-u}-\frac{dx-\upsilon dy}{u-\upsilon}=-\frac{2}{u-\upsilon}dx+\frac{u+\upsilon}{u-\upsilon}dy\ ;$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{u-\upsilon};\qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{u+\upsilon}{u-\upsilon}.$$

***7.11. Найти*** $dz$, если $x=e^u\sin\upsilon$, $y=e^u\cos\upsilon$, $z=u\upsilon$.

**Решение.** Функция задана параметрически. Дифференцируя все три выражения, находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных

$$\begin{cases} dx=e^u\sin\upsilon du+e^u\cos\upsilon d\upsilon; \\ dy=e^u\cos\upsilon du-e^u\sin\upsilon d\upsilon; \\ \qquad dz=\upsilon du+ud\upsilon. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $du$ и $d\upsilon$:

$$du=\frac{\sin\upsilon dx+\cos\upsilon dy}{e^u},\qquad d\upsilon=\frac{\cos\upsilon dx-\sin\upsilon dy}{e^u}.$$

Подставляя $du$, $d\upsilon$ в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{\upsilon}{e^u}(\sin\upsilon dx+\cos\upsilon dy)+\frac{u}{e^u}(\cos\upsilon dx-\sin\upsilon dy)=$$
$$=e^{-u}((\upsilon\sin\upsilon+u\cos\upsilon)dx+(\upsilon\cos\upsilon-u\sin\upsilon)dy).$$

## 1.8. Замена переменных в дифференциальных выражениях

В некоторых дифференциальных выражениях производные по одним переменным целесообразно выразить через производные по другим переменным. Для этого используются правила дифференцирования сложных функций.

***8.1. Преобразовать*** дифференциальное уравнение $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$, полагая $x=\sin t$.

**Решение.** Выразим производные от $y$ по $x$ через производные от $y$ по $t$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\cos t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\cos t+\dfrac{dy}{dt}\sin t}{\cos^2 t\cos t}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя полученные производные в данное уравнение и заменяя $x$ на $\sin t$, будем иметь

$$(1-\sin^2 t)\left(\frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}\right)-\frac{\sin t}{\cos t}\frac{dy}{dt}+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

***8.2. Преобразовать*** уравнение $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3}=3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, приняв $y$ за аргумент, а $x$ за функцию.

**Решение.** Выразим производные от $y$ по $x$ через производные от $x$ по $y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=$$

$$=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\frac{d}{dy}\left[\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right]\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^4}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Подставляя эти производные в данное уравнение, будем иметь

$$-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^6}=3\frac{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^6},\qquad \frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}=0.$$

Так как обратная производная существует и $\frac{dx}{dy}\neq 0$, то уравнение окончательно примет вид $\frac{d^3x}{dy^3}=0$.

***8.3. Преобразовать*** к полярным координатам уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

**Решение.** Полярные координаты связаны с декартовыми формулами: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Рассматривая $\rho$ как функцию $\varphi$, дифференциалы $dx$, $dy$ примут вид: $dx=\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi$, $dy=\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi$, откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi d\rho+\rho\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi d\rho-\rho\sin\varphi d\varphi}=\frac{\sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}+\rho\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}-\rho\sin\varphi}.$$

Подставляя в данное уравнении $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$, выраженные через новые переменные $\rho$, $\varphi$, получим

$$\frac{\sin\varphi \dfrac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi}{\cos\varphi \dfrac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi} = \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi},$$

$$-\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = -\rho\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Таким образом, $\dfrac{d\rho}{d\varphi} = \rho$.

***8.4. Преобразовать*** уравнение $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, перейдя к новым независимым переменным $u, \upsilon$, если $u = x$, $\upsilon = \dfrac{y}{x}$.

**Решение.** Выразим частные производные от $z$ по $x$, $y$ через частные производные от $z$ по $u, \upsilon$. Воспользуемся формулами дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}.$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \upsilon}.$$

Подставляя найденные производные в данное уравнение и выражая $x, y$ через $u, \upsilon$, будем иметь

$$u\frac{\partial z}{\partial u} - \upsilon\frac{\partial z}{\partial \upsilon} + \upsilon\frac{\partial z}{\partial \upsilon} - z = 0 \quad \text{или} \quad u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0.$$

***8.5. Преобразовать*** уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, приняв за новые независимые переменные $u = x + y$, $\upsilon = \frac{y}{x}$, а за новую функцию $w = \frac{z}{x}$.

**Решение.** Выразим частные производные от $z$ по $x, y$ через частные производные от $w$ по $u, \upsilon$. Для этого найдем дифференциалы данных выражений:

$$du = dx + dy\,,\ d\upsilon = \frac{xdy - ydx}{x^2}\,,\ dw = \frac{xdz - zdx}{x^2}\,.$$

С другой стороны дифференциал $dw$ как от функции двух переменных $u, \upsilon$ равен $dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial \upsilon}d\upsilon$.

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial \upsilon}d\upsilon = \frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial u}(dx + dy) + \frac{\partial w}{\partial \upsilon}\left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}\right)dx = \frac{dz}{x} - \frac{z^2}{x}dx$$

Разрешим это выражение относительно $dz$

$$dz = \left(\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial \upsilon} + \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial \upsilon}\right)dy\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial w}{\partial u}du - \upsilon\frac{\partial w}{\partial \upsilon} + w\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial \upsilon}\,.$$

***8.6. Преобразовать*** уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, перейдя к сферическим координатам.

**Решение**. Сферические координаты связаны с декартовыми формулами $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\sin\theta$.

Преобразование можно провести в два приема, полагая сначала $x=\rho\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (считая $z$ неизменным), затем $z=\rho\cos\theta$, $r=\rho\sin\theta$ (считая $\varphi$ неизменной).

Преобразуем сначала выражение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Воспользуемся формулами дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Решая эту систему относительно $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Вторые частные производные равны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+$$

$$+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+$$

$$+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$ .

Учитывая, что $z=\rho\cos\theta$ и $r=\rho\sin\theta$, первые два члена в правой части последнего выражения могут быть записаны аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, аналогично (*), примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+$$
$$+\frac{1}{\rho\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{ctg\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

## 1.9. Экстремум функции

**1⁰.** Экстремумом функции называется максимум или минимум функции. Функция двух независимых переменных $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет максимум (минимум), если значение функции в этой точке больше (меньше ее значений в любой точке $M(x, y)$, расположенной в окрестности точки $M_0$, т.е. $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$, для всех точек $M$, удовлетворяющих условию $\left|M_0M\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - достаточно малое число.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке ее частные производные первого порядка равны нулю

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Точки, в которых выполняются условия (1), называются стационарными точками функции, однако не в каждой стационарной точке функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремуму. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причем функция дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные в точке $M_0$. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}:$$ и

$D = AC - B^2$. Тогда:

1) если $D > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум при $A < 0 (C < 0)$ и минимум при $A > 0 (C > 0)$;

2) если $D < 0$, то экстремума в точке нет;

3) если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

**2$^0$.** Функция нескольких независимых переменных $z = z(x_i)$ $(i = 1,2,...,n)$ в точке $M_0(x_i^o)$ имеет максимум (минимум), если значение функции в этой точке больше (меньше) ее значений в любой точке $M_0(x_i)$, расположенной в окрестности точки $M_0$, т.е. $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$, для всех $M$, удовлетворяющих условию $M_0M < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - достаточно малое число.

*Необходимое условие экстремума.* Если дифференцируемая функция $z = z(x_i)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_i^o)$, то в этой точке ее частные производные равны нулю

$$\frac{\partial^2 f(x_i^o)}{\partial x_ш} = 0 \quad (i = 1,2,...,n).$$

Точки, в которых первые частные производные равны нулю, называются *стационарными*, однако не в каждой стационарной точке функция имеет экстремум.

*Достаточные условия экстремума.* Пусть $M_0(x_i^o)$ - стационарная точка функции $z = z(x_i)$, причем эта функция дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные в точке $M_0$. Тогда:

1) если второй дифференциал $d^2z(M_0, \Delta x_i) < 0$ $(i = 1,2,...,n)$, то функция имеет в точке $M_0$ максимум, а если $d^2z(M_0, \Delta x_i) > 0$ - минимум, причем $\Delta x_i = x_i - x_i^o \neq 0$ $(i = 1,2,...,n)$ одновременно;

2) если $d^2z(M_0, \Delta x_i)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения при различных значениях $\Delta x_i$, т.е. является знакопеременной функцией $\Delta x_i$, то точка $M_0$ не является точкой экстремума функции;

3) если $d^2z(M_0, \Delta x_i) = 0$ при $\Delta x_i \neq 0$ $(i = 1,2,...,n)$ одновременно, то для выяснения существования экстремума функции требуются дополнительные исследования.

Если ввести обозначения $z'''_{x_i x_k}(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) = a_{ik}$ $(imk = 1,2,...,n)$, то достаточные условия экстремума могут быть определены знаком квадратичной формы от переменных

$\Delta x_1^o,...,\Delta x_n^o$. Если квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$ является положительной, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

то в стационарной точке $(x_1^o, x_2^o,..., x_n^o)$ будет минимум; если отрицательной, то максимум. Если квадратичная форма может принимать значения противоположных знаков, то в стационарной точке $(x_1^o, x_2^o,..., x_n^o)$ экстремума нет. При равенстве квадратичной формы нулю требуются дополнительные исследования на экстремум.

***9.1. Найти*** экстремум функции:

а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; б) $z = 3xy - 4x - 8y$;

в) $z = x^3 + y^3 - 6x + 2\sqrt{y^3}$; г) $z = 1 + (x-1)^2 (y+1)^4$;

д) $z = 1 - x^{2/3} - y^{2/3}$.

**Решение.** а) Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 6$. Приравниваем производные нулю и находим стационарную точку

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ 2y - x - 6 = 0. \end{cases}$$

Из решения системы это будет точка $x_0 = -4$, $y_0 = 1$. Вопрос о характере экстремума решается с помощью достаточного признака. Находим: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ и $D = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Так как $A > 0$, то точка $(-4,1)$ будет точкой минимума функции $z$. Значение функции в этой точке будет $z_{\min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$.

б) Находим частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y - 4$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 8$. Приравнивая производные нулю, находим критические точки, которые лежат внутри области определения функции: $3y - 4 = 0$, $3x - 8 = 0$, следовательно, $x_0 = \dfrac{8}{3}$, $y_0 = \dfrac{4}{3}$.

Воспользуемся теперь достаточным признаком. Для этого найдем вторые производные: : $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ и $D = AC - B^2 = -9 < 0$., то экстремума в точке $x_0 = \dfrac{8}{3}$, $y_0 = \dfrac{4}{3}$ нет.

в) Находим частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 3\sqrt{y}$, приравниваем их к нулю и находим критические точки $M_1(\sqrt{2},0)$ и $M_2(-\sqrt{2},0)$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le +\infty$ представляет половину плоскости лежащую выше оси $Ox$ .Поскольку точки $M_1$ и $M_2$ расположены не внутри области определения функции, а на ее границе $y = 0$, то они не являются критическими.

Следовательно, исследуемая функция, как не имеющая критических точек, экстремума не имеет, т.к. граничные точки не могут быть точками экстремума.

г) Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)(y+1)^4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x-1)^2(y+1)^3$, Из решения системы $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ находим единственную точку $M_0(-1,1)$.

Вычисляем вторые производные $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(y+1)^4$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8(x-1)(y+1)^3$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12(x-1)^2(y+1)^2$ и значение $D = AC - B^2$ в критической точке $M_0(-1,1)$. Поскольку $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Рассмотрим знак приращения функции $\Delta z = -z(M_0)$ в окрестности точки $M_0$. Если $y_M < -1$, то $\Delta z = (x-1)^2(y+1)^4 > 0$, а если $y_M > -1$, то $\Delta z > 0$. Если $x_M < 1$, то $\Delta z > 0$; если $x_M > 1$, то $\Delta z > 0$. Следовательно, вблизи $M_0$ приращение $\Delta z > 0$ и точка $M_0(-1,1)$ является точкой минимума $z_{\min} = 1$.

д) Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Частные производные не равны нулю ни при каких значениях $x, y$ и обращаются в бесконечность в точке $M_0(0,0)$. Следовательно, в точке $M_0$ производные не существуют и точка $M_0$ является критической, поскольку принадлежит области определения функции.

Исследуем знак приращения функции в точках достаточно близких к точке $M_0$.

Приращение $\Delta z = z(M) - z(M_0) = -x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ имеет отрицательный знак при любых отличных от нуля значениях $x, y$. Таким образом, точка $M_0$ есть точка максимума $z_{\max} = 1$.

***9.2. Найти*** экстремальные значения:

а) $u = xyz(4 - x - y - z)$;

б) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

**Решение.** а) Функция трех переменных. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yz(4 - x - y - z) - xyz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xz(4 - x - y - z) - xyz,$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = xy(4 - x - y - z) - xyz.$$

Приравнивая их к нулю, находим стационарные точки $M_1(0;0;0)$ и $M_2(1;1;1)$. Вычисляем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2yz, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2xz, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z(4 - x2 - 2y - z), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x(4 - x - 2y - 2z),$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y(4 - 2x - y - 1z)$. Нетрудно заметить, что второй дифференциал в точке $M_1$ равен нулю. Поэтому для выяснения существования экстремума рассмотрим приращение функции в точке $M_1(0;0;0)$, т.е. $\Delta u = u(M) - u(M_1) = xyz(4 - x - y - z)$

Так как знак приращения функции в точках $M$, достаточно близких к точке $M_1(0;0;0)$, может быть как положительным, так и отрицательным, то экстремума функции в точке $M_1$ нет.

Исследуем функцию на экстремум в стационарной точке $M_2(1;1;1)$. Для этого выясним знак определителя (4) в точке $M_2$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Поскольку квадратичная форма отрицательна, то в точке $M_2(1;1;1)$ функция имеет максимум $u_{max} = 1$.

б) Функция $z$ двух независимых переменных $x, y$ задана неявно. Найдем частные производные. Полагая $F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{10y - 2x - 2z}{10z - 2x - 2y}$$

Приравнивая производные к нулю: $10x - 2y - 2z = 0$ и $10y - 2z - 2z = 0$, будем иметь $x = y$, $z = 5x - y = 4x$. Исключая $y$ и $z$ из исходного выражения

$$10x^2 + 5 \cdot 16x^2 - 2x^2 - 8x^2 - 8x^2 - 72 = 0,$$

получим две стационарные точки $x = y = \pm 1$.

Вычислим вторые производные

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(10 - z'_x)(10z - 2x - 2y) - (10x - 2y - 2x)(10z'_x - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2},$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(-2 - 2z'_y)(10z - 2x - 2y) - (10x - 2y - 2x)(10z'_y - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(10 - z'_y)(10z - 2x - 2y) - (10x - 2y - 2x)(10z'_y - 2)}{(10z - 2x - 2y)^2}$$

Найдем значение $D = AC - B^2$ в точке $x = y = 1$. Вычисляя производные: $A = -\frac{5}{18}$, $B = \frac{1}{18}$, $C = -\frac{5}{18}$, будем иметь $D = \frac{25}{18^2} - \frac{1}{18^2} = \frac{2}{27} > 0$. Так как $A < 0$, то в точке $x = y = 1$ функция имеет максимум.

Найдем теперь значение $D$ в точке $x = y = -1$. Вычисляя производные: $A = \frac{5}{18}$, $B = -\frac{1}{18}$, $C = \frac{5}{18}$, получим $D = \frac{2}{27} > 0$. Поскольку $A > 0$, то в точке $x = y = -1$ функция имеет минимум.

***9.3. Найти*** размеры прямоугольного бассейна, данного объема $V$ так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество плитки.

**Решение.** Пусть $x$ - длина, $y$ - ширина, $z$ - высота бассейна. Тогда его объем равен $V = xyz$. Полная поверхность бассейна $S = xy + 2(x + y)z$. Исключая отсюда $z$, будем иметь $S = xy + 2\left(\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right)$.

Исследуем функцию $S(x, y)$ на экстремум. Найдем частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - 2\frac{V}{x^2},\ \frac{\partial S}{\partial y} = x - 2\frac{V}{y^2}$$

и приравняем их к нулю

$$\begin{cases} x^2 y = 2V, \\ y^2 x = 2V. \end{cases}$$

Из решения системы имеем $x_0 = y_0 = 0$ и $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Поскольку нулевой вариант нас не устраивает, то подставляя $x$ и $y$ в уравнение связи $V = xyz$, находим высоту $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

## 1.10. Наибольшее и наименьшее значения функций

Пусть функция $z = f(M)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной и замкнутой области $D$. Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции следует найти все экстремумы функции, лежащие внутри $D$, и экстремумы на границе. Наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет искомым решением.

Если установлено, что наибольшее или наименьшее значение функции имеет место во внутренних точках, которые принадлежат $D$, найдем искомое наибольшее (наименьшее) значение функции.

Если область $D$ не является ограниченной и замкнутой, то среди значений функции $z = f(M)$ в ней может и не быть ни наибольшего, ни наименьшего значения. Наличие или отсутствие наибольшего (наименьшего) значения функции в этом случае определяется из рассмотрения конкретных условий задачи.

***10.1. Найти*** наибольшее и наименьшее значения функции: а) $z = x^2 - y^2 - x + y; x = 0, x = 2, y = 0, y = 1;$

б) $z = x^2 + 3y^2 + x - y; x = 1, y = 1, x + y = 1;$

в) $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y); x = 0, y = 0, x + y = 2\pi;$

**Решение.** а) Заданная область представляет прямоугольник. Найдем стационарные точки функции $z$, лежащие внутри прямоугольника. Частные производные приравниваем к нулю:

$$z'_x = 2x - 1 = 0, z'_y = -2y + 1 = 0. \text{ Отсюда } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, имеется одна критическая точка $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Значение функции в этой точке $z(M) = 0$. Исследование функции на экстремум в этой точке не обязательно.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области.

При $x=0$ имеем $z=-y^2+y$, т. е. задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения этой функции на отрезке $0 \le y \le 1$. Находим стационарную точку $z_y^{'}=-2y+1; y=\frac{1}{2}$. Поскольку $z_{yy}^{''}=-2<0$, то точка $y=\frac{1}{2}$ является точкой максимума $z_{\max}\left(0;\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

В граничных точках функция равна $z(0,0)=0; z(0,1)=0$. При $y=0$ имеем $z=x^3-x$. Исследуем эту функцию на отрезке $0 \le y \le 2$.

Находим $z_x^{'}=2x-1; x=\frac{1}{2}; z_{xx}^{''}=2>0$. Точка $x=\frac{1}{2}$ - точка минимума; $z_{\min}\left(\frac{1}{2};0\right)=-\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(0,0)=0$ и $z(2,0)=2$.

При $y=1$ имеем $z=x^2-x$. Отсюда $z_{\min}\left(\frac{1}{2};1\right)=-\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(0,1)=0$ и $z(2,1)=2$.

При $x=2$ имеем $z=2-y^2+y$. Исследуя эту функцию на отрезке $0 \le y \le 1$.

Находим $z_y^{'}=-2y+1$, $y=\frac{1}{2}$, $z_{yy}^{''}=-2<0$. Точка $y=\frac{1}{2}$ - точка максимума, $z_{\max}\left(2;\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$. На границе отрезка $z(2,0)=2$, $z(2,1)=2$.

Сравнивая вычисленные значения $z$ во внутренней стационарной точке и на границе заданной области, находим, что наибольшее значение функция имеет в точке

$z_{\max}\left(2;\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$. Наименьшее значение функции равно $z_{\min}=-\frac{1}{4}$. Наименьшее значение функция принимает в двух точках $\left(\frac{1}{2};0\right)$ и $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

б) Заданная область представляет треугольник (рис. 1.1). Найдем стационарные точки: $z_x^{'}=2x+1$, $z_y^{'}=6y-1$, $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{6}$. Поскольку имеется одна стационарная точка и она лежит вне треугольника, то функция может иметь наименьшее и наибольшее значения только на границе области. Исследуем функцию на наибольшее и наименьшее значения на границе.

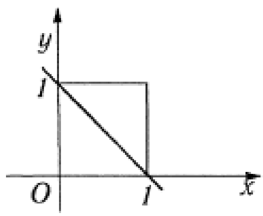



Рис. 1.1

При $x=1$ имеем $x=2+3y^2-y$. Исследуем эту функцию на отрезке $0\le y\le 1$.

Находим $z_y=6y-1$, $y=\frac{1}{6}$, $z_{yy}^{"}=6>0$. Точка $y=\frac{1}{6}$- точка минимума; $z_{\min}\left(1;\frac{1}{6}\right)=\frac{23}{12}$. На границе отрезка $z(1,0)=2$, $z(1,1)=4$.

При $y=1$ имеем $z=x^2+x+2$. Исследуем эту функцию на отрезке $0\le x\le 1$.

Находим $z_x' = 2x+1$, $x = -\frac{1}{2}$. Так как точка $x = -\frac{1}{2}$ лежит вне отрезка, то вычисляем значения функции на границе отрезка: $z(0,1) = 2$ и $z(1,1) = 4$.

При $x + y = 1$ имеем $z = 4y^2 - 4y + 2$. Исследуем эту функцию на отрезке $0 \le y \le 1$. Находим $z_y' = 8y - 4$, $y = \frac{1}{2}$, $z_{yy}'' = 8 > 0$. Точка $y = \frac{1}{2}$ - точка минимума $z_{\min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = 1$. В граничных точках функция равна $z(0,1) = 2$, $z(1,0) = 2$.

Сравнивая значения функции на границе заданной области, находим наименьшее значение $z_{\min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = 1$ и наибольшее $z_{\max}(1,1) = 4$.

в) Заданная область представляет треугольник (рис. 1.2).

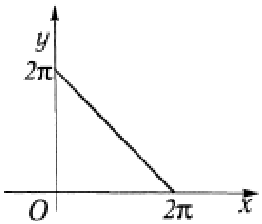



Рис. 1.2

Ищем стационарные точки, лежащие внутри области. Находим производные и приравниваем их к нулю

$$\frac{dz}{dx} = \cos x - \cos(x+y) = 0, \quad \frac{dz}{dy} = \cos y - \cos(x+y) = 0.$$

Из решения системы имеем: $\cos x - \cos y = 0$, $\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$, $y = \pm x + 2k\pi$. Поскольку $x$ изменяется в промежутке $0 < x < 2\pi$, то достаточно рассмотреть случай $y = x$. Функция при $y = x$ примет вид $z = 2\sin x - \sin 2x$.

Откуда $z_x^{'} = 2\cos x - 2\cos 2x$, $\cos x - \cos 2x = 0$, $2x = \pm x + 2k\pi$.

Значение $x = 2k\pi$ не лежит внутри области и его не следует рассматривать.

Следовательно, $y = x = \dfrac{2}{3}k\pi$ и при $k = 1$ это будет точка $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, $y_0 = \dfrac{2\pi}{3}$. Так как точка $(x_0, y_0)$ - единственная стационарная точка в области и функция в ней равна $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, то на границе, т. е. при $x = 0, y = 0, x + y = 2\pi$ функция равна нулю $z = 0$. В точке $(x_0, y_0)$ функция принимает наибольшее значение, а на границе наименьшее.

***10.2.*** На плоскости $Oxy$ ***найти*** точку $M(x, y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых: $x = 0, y = 0, x - y + 1 = 0$ была бы наименьшей.

**Решение.** Заданные прямые в прямоугольной системе координат образуют треугольник. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ внутри треугольника и определим квадраты расстояний до соответствующих прямых. Поскольку квадраты расстояний до прямых $x = 0, y = 0$ соответственно равны $x^2$ и $y^2$, а квадрат расстояния от точки до прямой $x - y + 1 = 0$ по формуле $d = \dfrac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ равен $\left(\dfrac{x - y + 1}{\sqrt{2}}\right)^2$, то сумма квадратов расстояний будет $u = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}(x - y + 1)^2$.

Исследуем эту функцию двух переменных на экстремум: $\dfrac{du}{dx} = 3x - y + 1 = 0$, $\dfrac{du}{dy} = -x + 3y - 1 = 0$. Отсюда единственная стационарная точка $M(x, y)$ имеет координаты $x = -\dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}$.

Так как $A=\dfrac{d^2u}{dx^2}=3$, $B=\dfrac{d^2u}{dxdy}=-1$, $C=\dfrac{d^2u}{dy^2}=3$ и $D=AC-B^2=8>0$ при $A>0$ $(C>0)$, то в точке $M\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ функция $u$ суммы квадратов расстояний минимальна.

***10.3.*** Из всех треугольников данного периметра $2p$ ***найти*** тот, который имеет наибольшую площадь.

**Решение.** Обозначим стороны треугольника через $x, y, z$; тогда по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ или, учитывая, что $x+y+z=2p$, будем иметь $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.

Чтобы найти наибольшее значение площади, достаточно найти наибольшее значение подкоренной функции $u=(p-x)(p-y)(x+y-p)$.

Вычисляем производные и приравниваем их нулю

$$\frac{du}{dx}=-(p-y)(x+y-p)+(p-y)(p-x)=0,$$

$$\frac{du}{dy}=-(p-x)(x+y-p)+(p-x)(p-y)=0.$$

Из решения системы уравнений находим единственную стационарную точку $x=y=z=\dfrac{2p}{3}$. Находим вторые производные в этой точке: $A=\dfrac{d^2u}{dx^2}=-\dfrac{2p}{3}$, $B=\dfrac{d^2u}{dxdy}=\dfrac{p}{3}$, $C=\dfrac{d^2u}{dy^2}=-\dfrac{2p}{3}$.

Поскольку $D=AC-B^2=\dfrac{p^2}{3}>0$ и $A<0$ $(C<0)$, то исследуемая функция имеет в этой точке максимум.

Вопрос о максимуме функции в точке $x = y = z = \dfrac{2p}{3}$ можно было бы решить и чисто геометрически. В данном случае мы имеем равносторонний треугольник и площадь треугольника максимальна, поскольку, чем больше отличается размер одной стороны от двух других, тем площадь треугольника меньше.

***10.4. Представить*** положительное число $a$ в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

**Решение.** По условию задачи требуется найти наименьшее значение суммы $S = x + y + z + t$ при условии, что $xyzt = a$. Представляя $t$ в виде $t = \dfrac{a}{xyz}$ и подставляя это выражение в сумму, будем иметь $S = x + y + z + \dfrac{a}{xyz}$, т. е. функцию трех переменных, причем $x > 0, y > 0, z > 0$. Найдем стационарную точку.

Для этого вычислим производные и приравняем их к нулю

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{ayz}{(xyz)^2} = 0,\ \frac{dS}{dy} = 1 - \frac{axz}{(xyz)^2} = 0,\ \frac{dS}{dy} = 1 - \frac{axy}{(xyz)^2} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $x = y = z = t = \sqrt[4]{a}$, т. е. все множители равны. Докажем, что в этой точке сумма принимает максимальное значение. Действительно, при приближении какой-либо переменной к пограничным значениям $x = 0, y = 0, z = 0$ равно как и при удалении в бесконечность, функция суммы $S$ бесконечно возрастает. Следовательно, найденная стационарная точка будет той точкой, в которой сумма $S$ будет наименьшей.

## 1.11. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

**1$^0$.** *Условным экстремумом* функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные $x, y$ в окрестности этой точки удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y) = 0$, т. е. $f(M_0) > f(M)$ или $f(M_0) < f(M)$ при $\varphi(x,y) = 0$ и $M \neq M_0$.

Для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа

$$u(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \tag{1}$$

где $\lambda$ - неопределенный постоянный множитель (множитель Лагранжа).

Необходимые условия условного экстремума определяются системой

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \lambda\frac{d\varphi}{dx} = 0; \quad \frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \lambda\frac{d\varphi}{dy} = 0 \tag{2}$$

$$\varphi(x,y) = 0$$

Пусть $x_0, y_0, \lambda_0$ - решение этой системы.

Составим определитель

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & u''_{xx}(M_0, \lambda_0) & u''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & u''_{xy}(M_0, \lambda_0) & u''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Если $D < 0$, то функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум, а если $D > 0$ - условный минимум.

**2$^0$.** Функция нескольких независимых переменных $z = z(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ в точке $M_0(x_i^o)$ имеет условный экстремум, если в некоторой окрестности точки $M_0$ для всех ее точек $x_i$, удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(x_i) = 0$,

$(k=1,2,...,m; m<n)$, выполняется неравенство $f(M_0)>f(M)\vee f(M_0)<f(M);\ (M_0\neq M)$.

Функция Лагранжа имеет вид

$$u(x_i,\lambda_k)=z(x_i)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_i), \qquad (4)$$

где $\lambda_k(k=1,2,...,m)$ - множители Лагранжа, причем их число соответствует числу уравнений связи.

Необходимые условия условного экстремума определяются системой $n+m$ уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx_i}=0 & (i=1,2,...n);\\ \varphi_k(M)=0 & (k=1,2,...m)\end{cases}$$

Решая эту систему относительно неизвестных, находим $\lambda_k^0$ и координаты точки $x_i^0$, в которой возможен условный экстремум.

*Достаточные условия условного экстремума:*

1) если второй дифференциал $d^2u(x_i^0,\lambda_k^0,dx_i)<0$, при условии, что $dx_i$ удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\varphi_k(x_i^0)}{dx_i}dx=0 \quad (k=1,2,...,m) \qquad (5)$$

При $\sum_{i=1}^{n}dx_i^2\neq 0$, то функция $z=z(x_i)$ в точке $M_0(x_i^o)$ имеет условный максимум;

2) если $d^2u(x_i^0,\lambda_k^0,dx_i)>0$, при условии (5), то функция в точке $M_0(x_i^o)$ имеет условный минимум.

***11.1. Найти*** условные экстремумы функций:

а) $z=x+3y$ при $x^2+y^2=10$; б) $u=x-2y+2z$ при $x^2+y^2+z^2=9$; в) $u=xyz$ при $x+y+z=5, xy+yz+xz=8$.

**Решение.** а) Геометрически задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения аппликаты $z$ плоскости

$z = x + 3y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 10$;

Составим функцию Лагранжа $u(x, y, z) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$ и найдем частные производные: $\frac{du}{dx} 1 + 2\lambda x$; $\frac{du}{dy} = 3 + 2\lambda y$. Необходимые условия существования экстремума определяются системой (2)

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

которая имеет решения:

$$x_1 = 1, y_1 = 3, \lambda_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1, y_2 = -3, \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\frac{d^2u}{dx^2} = 2\lambda$, $\frac{d^2u}{dxdy} = 0$, $\frac{d^2u}{dy^2} = 2\lambda$, то $d^2u = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. При $\lambda = -\frac{1}{2}$, $d^2u < 0$, следовательно, функция имеет в точке $M_1(1,3)$ условный максимум $z_{\max} = 10$. При $\lambda = \frac{1}{2}$, $d^2u > 0$, следовательно, функция имеет в точке $M_2(-1,-3)$ условный минимум $z_{\min} = -10$.

Условный максимум, минимум функции может быть найден также с помощью определителя (3). Для этого находим в точке $M_1$: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 10$, $\varphi'_x(M_1) = 2$, $\varphi'_y(M_1) = 6$, $u''_{xx}(M_1, \lambda_1) = -1$, $u''_{xy}(M_1, \lambda_1) = 0$, $u''_{yy}(M_1, \lambda_1) = -1$

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -40 < 0,$$

т. е. функция в точке $M_1$ имеет условный максимум.

Аналогично, в точке $M_2$

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 40 > 0,$$

т. е. функция в точке $M_2$ имеет условный минимум.

б) Функция трех независимых переменных. Составим функцию Лагранжа

$$w = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

и найдем частные производные

$$\frac{dw}{dx} = 1 + 2\lambda x,\ \frac{dw}{dy} = -2 + 2\lambda x,\ \frac{dw}{dz} = 2 + 2\lambda z.$$

Запишем необходимые условия существования условного экстремума

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \quad 1 - 2\lambda y = 0, \\ 1 + 2\lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Из решения этой системы имеем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ z_1 = -2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ y_2 = -2,\ z_2 = 2.$$

Вычислим вторые производные

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 2\lambda,\ \frac{d^2w}{dy^2} = 2\lambda,\ \frac{d^2w}{dz^2} = 2\lambda,$$

$$\frac{d^2w}{dxdy} = \frac{d^2w}{dxdz} = \frac{d^2w}{dydz} = 0$$

и найдем второй дифференциал в первой критической точке $d^2w\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0$. Поскольку знак второго дифференциала функции Лагранжа положительный, то исследуемая функция в этой точке имеет условный минимум $u_{\min} = -9$.

Знак второго дифференциала во второй критической точке $d^2w\left(1,-2,2,-\dfrac{1}{2}\right)=-1<0$ отрицательный, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум $u_{\max}=9$.

в) В данном случае уравнений связи два. Составляем функцию Лагранжа

$$w=xyz+\lambda_1(x+y+z-5)+\lambda_2(xy+yz+xz-8).$$

Необходимые условия существования условного экстремума определяются системой уравнений

$$\frac{dw}{dx}=yz+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 z=0,$$
$$\frac{dw}{dy}=xz+\lambda_1+\lambda_2 z+\lambda_2 x=0,$$
$$\frac{dw}{dz}=xy+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 x=0,$$
$$x+y+z=5,\ xy+yz+xz=8.$$

Из решения этой системы уравнений находим критические точки: $M_1(2,2,1)$, $M_2\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $M_3(2,1,2)$, $M_4\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $M_5(1,2,2)$, $M_6\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

Вычисляем вторые частные производные

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d^2w}{dy^2}=\frac{d^2w}{dz^2}=0,$$

$$\frac{d^2w}{dxdy}=z+\lambda_2,\ \frac{d^2w}{dydz}=x+\lambda_2,\ \frac{d^2w}{dxdz}=y+\lambda_2$$

и определяем знак второго дифференциала в стационарных точках. В точке $M_1$ $d^2w(2,2,1,\lambda_2=-1)=4>0$ функция имеет условный минимум $u_{\min}=4$. В точке $M_2$ $d^2w(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3},\lambda_2=-\dfrac{7}{3})=-4<0$ функция имеет условный максимум $u_{\max}=4\dfrac{4}{27}$. Аналогично вычисляется знак второго дифференциала и в четырех остальных точках. Так в точках

$M_3, M_5$ функция имеет условный минимум равный $u_{\min} = 4$, а в точках $M_4, M_6$ - максимум $u_{\max} = 4\frac{4}{27}$.

***11.2.*** В эллипсоид ***вписать*** прямоугольный параллелепипед наибольшего обьема.

**Решение.** В силу симметрии заданных геометрических фигур достаточно исследовать на условный экстремум функцию объема $V = xyz$, т. е. объема параллелепипеда расположенного в первом октанте. Учитывая, что уравнение связи есть уравнение эллипсоида, составим функцию Лагранжа

$$u = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

Находим частные производные $\frac{du}{dx} = yz + \lambda\frac{2x}{a^2}$, $\frac{du}{dy} = xz + \lambda\frac{2y}{b^2}$, $\frac{du}{dz} = xy + \lambda\frac{2z}{c^2}$, тогда необходимое условие экстремума будет

$$yz + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0,\ xz + \lambda\frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$xy + \lambda\frac{2z}{c^2} = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решая эту систему, будем иметь $x = \pm a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \pm b\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \pm c\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку рассматривается только первый октант, то условный экстремум будет в точке с координатами $x = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = b\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = c\frac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда следует, что прямоугольный параллелепипед наибольшего объема имеет измерения $x = a\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = b\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $z = c\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

# 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ

## 2.1. Касательная и нормаль к плоской кривой

**1⁰.** В случае неявного задания кривой $F(x, y) = 0$ уравнение касательной в точке $(x_0, y_0)$ имеет вид

$$F_x^{'}(x, y)(x - x_0) + F_y^{'}(x, y)(y - y_0) = 0\,. \qquad (1)$$

Уравнение нормали

$$F_y^{'}(x, y)(x - x_0) + F_x^{'}(x, y)(y - y_0) = 0$$

или

$$\frac{x - x_0}{F_x^{'}} = \frac{y - y_0}{F_y^{'}} \qquad (2)$$

**2⁰.** Если кривая задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и имеет угловой коэффициент $tg\alpha = \dfrac{y_1^{'}}{x_1^{'}}$, то уравнение касательной

$$y - y_0 = \frac{y_0^{'}}{x_0^{'}}(x - x_0) \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{x_0^{'}} = \frac{y - y_0}{y_0^{'}} \qquad (3)$$

Уравнение (3) справедливо и для случая, когда $x_t^{'} = 0$, а $y_t^{'} \neq 0$, т. к. это означает, что равен нулю и соответствующий предыдущий член. Только в особой точке, где $x_t^{'} = 0$ и $y_t^{'} = 0$, уравнение (3) теряет смысл.

**3⁰.** Если кривая задана полярным уравнением $p = p(\varphi)$, то переходя к прямоугольным координатам $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$, угол наклона касательной определяется выражением

$$tg\alpha = \frac{y_\varphi^{'}}{x_\varphi^{'}} = \frac{\rho_\varphi^{'}\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho_\varphi^{'}\cos\varphi - \rho\sin\varphi} \qquad (4)$$

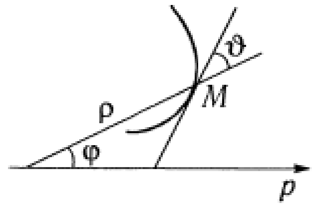



Рис. 2.1

Положение касательной в полярных координатах обычно определяют углом $\theta$ с продолжением радиус-вектора (рис. 2.1), а не углом $\alpha$ с полярной осью

$$tg\theta = \frac{\rho}{\rho_{\varphi}'} \tag{5}$$

***1.1. Найти*** уравнение касательной и нормали к кривой $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $M(1,-2)$.

**Решение.** Функция задана не явно. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением (1). Находим значения частных производных в заданной точке

$$\frac{dF}{dx} = 6x^2 - 2xy^2 - 3; \quad \left.\frac{dF}{dx}\right|_M = -5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2y + 1; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = 5.$$

Таким образом, $-5(x-1) + 5(y+2) = 0$ или $x - y - 3 = 0$.

Уравнение нормали находим по формуле (2):

$$5(x-1) + 5(y+2) = 0 \text{ или } x + y + 1 = 0.$$

***1.2. Написать*** уравнение касательной и нормали к циклоиде $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$ в точке $M$, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

**Решение.** Находим координаты точки $M$:

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1, \; y_0 = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

Вычислим производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ и найдем угловой коэффициент касательной в точке $M$:

$$y'(x_0) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Таким образом, уравнение касательной примет вид $y - 1 = 1\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)$ или $x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0$. Уравнение нормали, соответственно, будет $y - 1 = -\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right)$ или $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$.

***1.3. Определить*** положение касательной и нормали к лемнискате $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

**Решение.** Воспользуемся формулой (5). Продифференцируем уравнение лемнискаты, считая $\rho$ функцией $\varphi$ $\quad \rho\rho'_\varphi = -2a^2\sin 2\varphi$.

Разделив это уравнение на уравнение лемнискаты, получим

$$tg\theta = \frac{\rho}{\rho'_\varphi} = -ctg 2\varphi, \quad \text{откуда} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2\varphi.$$

Если обозначить через $\alpha$ и $\beta$ углы наклона касательной и нормали к полярной оси, то получим

$$\alpha = \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 3\varphi; \; \beta = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

откуда $\beta = 3\varphi$, т. е. угол наклона нормали к лемнискате равен утроенному значению полярного угла.

## 2.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

**1⁰.** Касательной *плоскостью* к поверхности в заданной на ней точке $M$ называется такая плоскость, которая содержит касательные ко всем кривым, проведенным по поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке касания.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F_0}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F_0}{\partial z}(z-z_0)=0, \qquad (1)$$

где $\frac{\partial F_0}{\partial x}$, $\frac{\partial F_0}{\partial y}$, $\frac{\partial F_0}{\partial z}$ - значения частных производных в точке $M_0$, $x,y,z$ - текущие координаты касательной поверхности.

Уравнение нормали к поверхности будет

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F_0}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F_0}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F_0}{\partial z}} \quad . \qquad (2)$$

Вектор $\vec{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ называется нормальным вектором к поверхности. Если на поверхности есть точка, в которой $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$, то она называется особой и в ней нет ни касательной плоскости, ни нормали к поверхности.

Если уравнение поверхности задано в явном виде $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости

$$z-z_0=\frac{\partial f_0}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f_0}{\partial y}(y-y_0), \qquad (3)$$

где $\frac{\partial f_0}{\partial x},\frac{\partial f_0}{\partial y}$ - значения частных производных в точке $M_0$.

Уравнение нормали в этом случае

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f_0}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f_0}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}\ . \qquad (4)$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности определяются выражениями

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};\ \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad (5)$$

где $p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$. Двойной знак перед корнем соответствует двум противоположным направлениям нормали.

**2⁰.** Если поверхность задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(u,v)\,,\ y=\psi(u,v)\,,\ z=\chi(u,v)\,,$$

то уравнение касательной плоскости в некоторой точке $(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

Направляющие косинусы нормали

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\nu=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad (7)$$

где

$$A=\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix};\ C=\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}.$$

**$3^0$.** Угол между двумя поверхностями в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведенными к рассматриваемым поверхностям, в данной точке.

Поверхности называются *ортогональными,* если они пересекаются под прямым углом $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ в каждой точке линии их пересечения.

***2.1.*** Для данных поверхностей ***найти*** уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках:

а) $z = arctg\dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(-1;1;-\dfrac{\pi}{4})$;

б) $x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 10 = 0$ в точке $M_0(-1;2;1)$;

в) $x = \rho\sin\varphi, y = \rho\cos\varphi, z = \rho tg\alpha$ в точке $M_0(\rho_0;\varphi_0)$;

г) $\vec{r}\left\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2 - u^2}\right\}$ в точке $\vec{r_0}\left\{x_0, y_0, z_0\right\}$.

**Решение.** а) Уравнение поверхности задано в явном виде. Воспользуемся формулами (3), (4). Для этого найдем частные производные и их значения в точке $M$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \frac{1}{2}.$$

Отсюда уравнение касательной плоскости

$$z + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(y-1) \text{ или } x + y - 2z = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x+1}{1/2} = \dfrac{y-1}{1/2} = \dfrac{z - \pi/4}{-1}$ или

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z - \pi/4}{-2}.$$

б) Уравнение поверхности задано неявно. Обозначив

$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 10$, найдем частные производные в точке $M$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - yz, \quad \frac{\partial F_0}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - xz, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y} = 13,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - xy, \quad \frac{\partial F_0}{\partial z} = 5.$$

Используя формулы (1), (2), получим уравнение касательной плоскости $x + 1 + 13(y-2) + 5(z-1) = 0$ или $x + 13y + 5z - 30 = 0$ и уравнение нормали $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{13} = \dfrac{z-1}{5}$.

в) Поверхность задана параметрически. При нахождении касательной плоскости в точке $(\rho_0, \varphi_0)$ воспользуемся уравнением (6). Вычисляя производные в точке $M_0$, будем иметь

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & tg\alpha \\ \rho_0\cos\varphi_0 & -\rho_0\sin\varphi_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда при $x_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$, $y_0 = \rho_0\cos\varphi_0$, $z_0 = \rho_0 tg\alpha$ получим

$$x\rho_0 \sin\varphi_0 tg\alpha - \rho_0^2 \sin^2\varphi_0 tg\alpha + y\rho_0\cos\varphi_0 tg\alpha -$$
$$-\rho_0^2\cos^2\varphi_0 tg\alpha - z\rho_0 + \rho_0^2 tg\alpha = 0$$

или

$$x\sin\varphi_0 + y\cos\varphi_0 - zctg\alpha = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности (2) в точке $M_0$ будет и уравнением нормали к касательной плоскости. Таким образом,

$$\frac{x - \rho_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{y - \rho_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{z - \rho_0 tg\alpha}{-ctg\alpha_0}.$$

г) По условию задачи поверхность задана параметрическими уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \sqrt{a^2 - u^2}$. Для нахождения касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z_0)$ воспользуемся формулой (6). Находя частные производные по $u, v$ в точке $(x_0, y_0, z_0)$, будем иметь

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \cos v_0 & \sin v_0 & -\dfrac{u_0}{\sqrt{a^2 - u_0}} \\ -u_0 \sin v_0 & u_0 \cos v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Откуда

$$(z - z_0)u_0 \cos^2 v_0 + (y - y_0)\frac{u_0^2 \sin v_0}{\sqrt{a^2 - u^2}} +$$

$$+(z - z_0)u_0 \sin^2 v_0 + (x - x_0)\frac{u_0^2 \cos v_0}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 0$$

или, переходя к координатам $x, y, z$

$$z - z_0 + (y - y_0)\frac{y_0}{z_0} + (x - x_0)\frac{x_0}{z_0} = 0$$

Преобразуя последнее выражение к виду $xx_0 + yy_0 + zz_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ и подставляя вместо квадратов в правую часть их значения через криволинейные координаты, окончательно получим $xx_0 + yy_0 + zz_0 = a^2$.

***2.2. Написать*** уравнения нормали к поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в точке $(4;3;5)$. В какой точке конуса нормаль не определена?

**Решение.** Уравнение поверхности задано неявно. Обозначая $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x}=8, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y}=6, \quad \frac{\partial F_0}{\partial z}=-10.$$

Уравнение нормали к поверхности конуса примет вид

$$\frac{x-4}{8}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-5}{-10} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-5}{-5}.$$

Вектор $\vec{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ - есть нормальный вектор к поверхности конуса. Поскольку в точке $(0;0;0)$ производные $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$, то эта точка является особой и в ней нормаль к поверхности конуса не определена.

***2.3. Найти*** углы с осями координат нормали к поверхности $x^2+y^2-xz-yz=0$ в точке $(0,2,2)$.

**Решение.** Уравнение поверхности задано неявно. Воспользуемся формулами (5). Найдем сначала частные производные в точке

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F_x^{'}}{\partial F_z^{'}}=\frac{2x-z}{x+y}, \quad p=-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F_y^{'}}{\partial F_z^{'}}=\frac{2y-z}{x+y}, \quad q=1.$$

Таким образом, $\cos\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\mu=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

***2.4. Определить*** плоскость, касательную к поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$ и а) параллельную плоскости $x-2y+z=0$;

б) перпендикулярную к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

**Решение.** а) Уравнение поверхности задано неявно. Обозначаем $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4$ и находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y$, $\frac{\partial F}{\partial z}=2z$.

Воспользуемся условием параллельности касательной плоскости и данной плоскости

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{A}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{B}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{C} \quad \text{или} \quad \frac{2x}{1}=\frac{4y}{-2}=\frac{2z}{1}.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$, находим координаты точек касания $M_1(1,-1,1)$ и $M(-1,1,-1)$.

Таким образом, касательные плоскости имеют уравнения:

$$2(x-1)-4(y+1)+2(z-1)=0 \quad \text{или} \quad x-2y+z-4=0;$$

$$-2(x+1)+4(y-1)-2(z+1)=0 \quad \text{или} \quad x-2y+z+4=0.$$

б) Из условия перпендикулярности касательной плоскости и прямой имеем

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{l}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{m}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{n} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1}=\frac{2y}{1}=\frac{2z}{-1}.$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение поверхности $x^2+2y^2+z^2=4$, находим координаты точек касания

$$M_1\left(-\frac{4}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \text{ и } M_2\left(\frac{4}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Следовательно, касательные плоскости будут:

$$-\frac{2\cdot 4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{4}{\sqrt{7}}\right)-\frac{4\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(y+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{2\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(z-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)=0,$$

$$\frac{2\cdot 4}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)+\frac{4\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(y-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)-\frac{2\cdot 2}{\sqrt{7}}\left(z+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)=0$$

или $\quad 2x+2y-z+\frac{14}{\sqrt{7}}=0, \quad 2x+2y-z-\frac{14}{\sqrt{7}}=0.$

***2.5.*** К поверхности $x^2-y^2-3z=0$ ***провести*** касательную плоскость, проходящую через точку $M_1(0,0,-1)$, параллельно прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

**Решение.** Обозначим $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 3z$ и найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -3$. Воспользуемся условием параллельности данной прямой и касательной плоскости $\frac{\partial F}{\partial x} l + \frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial z} n = 0$ или $2x - y - 3 = 0$. Присоединяя к этому уравнению уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $M_1$

$$2x(x_1 - x) - 2y(y_1 - y) - 3(z_1 - z) = 0 \quad \text{или}$$

$$2x\sqrt{2} - 2y^2 - 3z - 3 = 0,$$

и уравнение поверхности, получим систему

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x^2 - y^2 - 3z = 0, \\ 2x^2 - 2y^2 - 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

Из решения этой системы находим, что координаты точки касания равны $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Таким образом, искомое уравнение касательной плоскости примет вид

$$4(x - 2) - 2(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 4x - 2y - 3z = 3.$$

***2.6. Доказать***, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, равна постоянной величине $a^2$.

**Решение.** Обозначим $F(x, y, z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$ и найдем частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, \ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}}.$$

Уравнение касательной плоскости (1) в произвольной точке $(x_0, y_0, z_0)$ примет вид

$x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0$ или, если воспользоваться уравнением поверхности

$$\frac{x}{x_o^{1/3}}+\frac{y}{y_0^{1/3}}+\frac{z}{z_0^{1/3}}=a_0^{2/3}.$$

Координаты точек пересечения этой плоскости с осями координат соответственно равны

$$x=a^{2/3}x_0^{1/3},\quad y=a^{2/3}y_0^{1/3},\quad z=a^{2/3}z_0^{1/3}$$

Отсюда сумма квадратов отрезка равна

$x^2+y^2+z^2=a^{4/3}(x_0^{2/3}+y_0^{2/3}+z_0^{2/3})=a^{4/3}a^{2/3}=a^2$, что и требовалось доказать.

***2.7. Показать***, что поверхности $x^2+y^2+z^2=ax$ и $x^2+y^2+z^2=4by$ ортогональны друг другу.

**Решение.** Угол между двумя поверхностями линии их пересечения определяется углом между соответствующими касательными плоскостями в каждой точке линии пересечения. Будем определять положение касательных плоскостей их нормалями, тогда угол между поверхностями равен углу между нормалями к касательным плоскостям по линии пересечения поверхностей.

Введем обозначения $F_1(x,y,z)x^2+y^2+z^2-ax$ и $F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4by$ и найдем частные производные

$$l_1=\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x-a,\quad l_2=\frac{\partial F_2}{\partial x}=2x,\quad m_1=\frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,$$

$$m_2=\frac{\partial F_2}{\partial y}=2y-4b,\quad n_1=\frac{\partial F_1}{\partial z}=2z,\quad n_2=\frac{\partial F_2}{\partial z}=2z.$$

Воспользуемся условием ортогональности $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ нормалей по линии пересечения поверхностей $ax=4by$

$$2x(2x-a)+2y(2y-4b)+2z\cdot 2z=0,$$

$4x^2-2ax+4y^2-8by+4z^2=0$, $4ax-2ax-2ax=0$, т. е. условие ортогональности выполняется, что и требовалось доказать.

## 2.3. Кривизна плоской кривой

Кривизной кривой в точке $M$ (рис. 2.2) называется предел отношения угла поворота $\theta$ касательной к длине $s$ дуги $MN$, когда $N \to M$, т. е. $k = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{\theta}{s}$.

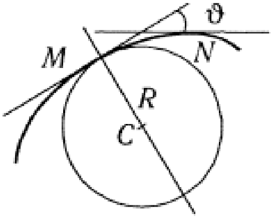



Рис. 2.2

Кривизна кривой $y = f(x)$ в некоторой точке характеризуется отклонением кривой от своей касательной в этой точке и определяется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \qquad (1)$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ее кривизна определяется выражением

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} \qquad (2)$$

Если кривая задана уравнением в неявном виде $F(x, y) = 0$, то ее кривизна

$$k = \left| \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_{x} \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_{y} \\ F'_{x} & F'_{y} & 0 \end{vmatrix}}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}} \right| \qquad (3)$$

Если кривизна задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, то ее кривизна

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* и определяется по формуле $R = \dfrac{1}{k}$. *Вершиной кривой* называется такая точка кривой, в которой кривизна имеет максимум или минимум. Для определения вершин кривой выражение кривизны $k$ исследуют на экстремум. В некоторых случаях при нахождении вершин кривой целесообразнее исследовать на экстремум радиус кривизны

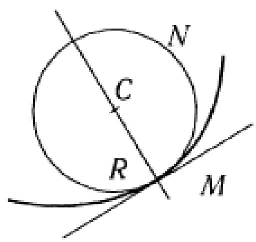



Рис. 2.3

*Кругом кривизны кривой* в некоторой точке $M$ называется окружность с радиусом $R$, равным радиусу кривизны кривой в этой точке, и центром $C$, расположенным на нормали к кривой в точке $M$ со стороны ее вогнутости (рис. 2.3). Координаты $(\xi, \eta)$ центра кривизны кривой в ее точке $M(x, y)$ определяются по формулам

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} y' = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{y};$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} y' = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{x} \qquad (5)$$

Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее *эволютой.* Обратно, данная кривая по отношению к своей эволюте называется ее *эвольвентой.* Уравнения (5) являются параметрическими уравнениями эволюты. Если исключить из них параметр $t$, то получим уравнение эволюты в неявном виде $F(\xi, \eta) = 0$.

***3.1. Найти*** кривизну кривых: а) $y = x^2 - 4x$ в точке $(2, -4)$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в вершинах; в) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ в произвольной точке; г) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ при $t = \pi$.

**Решение.** а) Находим производные: $y' = 2x - 4;$ $y'' = 2$ и вычисляем их значения в заданной точке $y'(2) = 0$, $y'' = 2$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получим

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = 2 .$$

б) Функция задана неявно. Находим производные: $F_x' = \frac{2x}{a^2}$, $F_{xx}'' = \frac{2}{a^2}$, $F_y' = \frac{2y}{b^2}$, $F_{yy}'' = \frac{2}{b^2}$, $F_{xy}'' = 0$ и их значения в вершине эллипса $(a, 0)$: $F_x' = \frac{2}{a}$, $F_{xx}'' = \frac{2}{a^2}$, $F_y' = 0$, $F_{yy}'' = \frac{2}{b^2}$, $F_{xy}'' = 0$. Подставляя найденные значения в формулу (3), получим

$$k = \left| \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ \frac{2}{a} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{8}{a^3}} \right| = \frac{a}{b^2}$$

Значения производных в вершине эллипса $(0, b)$ будут: $F_x' = 0$, $F_{xx}'' = \frac{2}{a^2}$, $F_y' = \frac{2}{b}$, $F_{yy}'' = \frac{2}{b^2}$, $F_{xy}'' = 0$. Отсюда кривизна

$$k = \left| \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & \frac{2}{a} \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{8}{a^3}} \right| = \frac{b}{a^2}$$

В силу симметрии, кривая в точке $(-a, 0)$ равна $k = \frac{a}{b^2}$, а в точке $(0,-b)$ равна $k=\dfrac{b}{a^2}$.

в) Находим производные

$$2\rho\rho'=-2a^2\sin 2\varphi,$$

$$\rho'=-\frac{a^2}{\rho}\sin 2\varphi,$$

$$\rho''=\frac{a^2\rho'}{\rho^2}\sin 2\varphi-\frac{2a^2}{\rho}\cos 2\varphi=-\frac{a^4}{\rho^3}\sin^2 2\varphi-\frac{2a^2}{\rho}\cos 2\varphi$$

и подставляем их в формулу (4), тогда

$$k=\frac{\rho^2+2\dfrac{a^2}{\rho^2}\sin^2 2\varphi+\rho\left(\dfrac{a^4}{\rho^3}\sin^2 2\varphi+2\dfrac{a^2}{\rho}\cos 2\varphi\right)}{\left(a^2\cos 2\varphi+2\dfrac{a^4}{\rho^2}\sin^2 2\varphi\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\rho^4+2a^4\sin^2 2\varphi+a^4\sin^2 2\varphi+2a^2\rho^2\cos 2\varphi}{\rho^2\left(\left(a^4\cos^2 2\varphi+a^4\sin^2 2\varphi\right)/\rho^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{a^4\cos^2 2\varphi+a^4\sin^2 2\varphi+2a^4\sin^2 2\varphi+2a^4\cos 2\varphi}{\rho^2a^6/\rho^3}=\frac{3a^4\rho}{a^6}=\frac{3\rho}{a^2}$$

г) Находим производные:

$\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=\sin t$, $\ddot{x}=a\sin t$, $\ddot{y}=a\cos t$ и их значения при $t=\pi:\dot{x}=2a,\dot{y}=0,\ddot{x}=0,\ddot{y}=-1$. Подставляя производные в формулу (2), получим $k=\dfrac{|-2a|}{(2a)^3}=\dfrac{1}{4a^2}$.

***3.2. Найти*** радиусы кривизны в любой точке данных кривых: а) $y=x^3$; б) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; в) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

г) $\rho=a\varphi$.

**Решение.** а) Находим производные $y'=3x^2$, $y''=6x$ и по формуле $R=\dfrac{1}{k}$ определяем радиус кривизны

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{|6x|}.$$

б) Функция задана неявно $F(x,y)=x^{2/3}+y^{2/3}-a^{2/3}=0$.

Находим производные: $F'_x=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$, $F'_y=\dfrac{2}{3}y^{-1/3}$, $F''_{xx}=-\dfrac{2}{9}x^{-4/3}$, $F''_{yy}=-\dfrac{2}{9}y^{-4/3}$, $F''_{xy}=0$.

Радиус кривизны находим по формуле

$$R=\left|\frac{\left(F_x'^2+F_y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}\right|=\left|\frac{\left(\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} & 0 & \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ 0 & -\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}} & \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} & 0 \end{vmatrix}}\right|=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3}\left|\frac{\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{(xy)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\right)}\right|=3a\left|\frac{(xy)^{\frac{4}{3}}}{xy\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}\right|=3a\sqrt[3]{|xy|}.$$

в) Находим производные:

$$\dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t,$$

$$\dot{y}=3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\ddot{x}=-3a(-2\cos t\sin^2 t+\cos^3 t)=3a\cos t(2\sin^2 t-\cos^2 t),$$

$$\ddot{y}=3a(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)=3a\sin t(2\cos^2 t-\sin^2 t).$$

Радиус кривизны находим по формуле

$$R=\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}=$$

$$=\frac{\left(9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(2\cos^2 t-\sin^2 t\right)-9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(2\sin^2 t-\cos^2 t\right)\right|}=$$

$$=\frac{3a\sin^3 t\cos^3 t}{\left|\sin^2 t\cos^2 t(-2+1)\right|}=\frac{3a|\sin 2t|}{2}$$

г) Находим производные: $\rho'=a$, $\rho''=0$ и по формуле $R=\frac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$ находим радиус кривизны $R=\frac{\left(\rho^2+a^2\right)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$.

***3.3. Найти*** наибольшую кривизну параболы $y=\frac{x^2}{2}$.

**Решение.** Находим производные $y'=x$, $y''=1$.

Подставляя найденные значения в формулу (1), получим $k = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. Кривизна будет наибольшей, когда знаменатель будет наименьшим, т. е. при $x = 0$. Таким образом, наибольшая кривизна равна $k = 1$.

***3.4. Найти*** вершины кривых: а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;

б) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $R_{\min} - ?$

**Решение.** а) Функция задана неявно

$$F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a} = 0.$$

Находим производные: $F'_x = \frac{1}{2} x^{-1/2}$, $F'_y = \frac{1}{2} y^{-1/2}$, $F''_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$, $F''_{yy} = -\frac{1}{4} y^{-3/2}$, $F''_{xy} = 0$, отсюда кривизна

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4} y^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{4}\left(x^{-1} + \frac{1}{4} y^{-1}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{y^{3/2}} + \frac{1}{y}\frac{1}{x^{3/2}}\right)}{\left(\frac{x+y}{xy}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

.

Из уравнения кривой находим, что $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$, тогда

$$k(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\left(x + \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$k_x' = -\frac{\sqrt{a}\,\frac{3}{2}\left(x+\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\cdot\left(x+\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\right)^3}.$$

Отсюда $x+\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2=0$, $x+a-2\sqrt{ax}+x=0$, $a^2+4x^2=0$ - корней нет; $1-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$, $\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x}=0$, $2\sqrt{x}=\sqrt{\frac{a}{x}}$, $x=\frac{a}{4}$, $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$, $\sqrt{y}=\frac{\sqrt{a}}{2}$, $y=\frac{a}{4}$.

Поскольку функция кривизны в точке $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ имеет экстремум, т. к. при переходе через точку $x=\frac{a}{4}$ производная меняет знак, то это вершина кривой.

б) Находим производные: $\rho'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, $\rho''=\frac{a}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{3}-\sin^2\frac{\varphi}{3}\right)$ и по формуле (4) кривизну

$$k=\frac{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+2a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}-\frac{a^2}{3}\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{3}-\sin^2\frac{\varphi}{3}\right)}{\left(a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{a^2\left(3\sin^4\frac{\varphi}{3}+2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}-\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\right)}{3a^2\sin^3\frac{\varphi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3a}\sin\frac{\varphi}{3}\left(4+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)$$

Рассматривая кривизну как функцию угла $\varphi$, исследуем ее на экстремум:

$$k'_{\varphi}=\frac{1}{3a}\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\left(4+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{2}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{9a}\cos\frac{\varphi}{3}\left(5-3\sin^2\frac{\varphi}{3}\right),\ 5-\sin^2\frac{\varphi}{3}\neq 0\,.$$

Т. к. $\sin\frac{\varphi}{3}<\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\cos\frac{\varphi}{3}=0$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

При переходе $\varphi$ через значение $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ производная меняет знак с плюса на минус, т. е. кривизна максимальна. Следовательно, при этом значении $\varphi$ радиус кривизны $R=\frac{1}{k}=\frac{3}{4}a$ минимален.

***3.5. Найти*** окружность кривизны гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в точке $M(1;1)$.

**Решение.** Находим производные: $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$ и их значения в точке $M$: $y' = -1$, $y'' = 2$ и радиус кривизны $R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Построим гиперболу и окружность (рис. 2.4). Очевидно, что точка $M$ и центр окружности $O'$ лежат на биссектрисе первого координатного угла. Спроектируем центр окружности на ось $Ox$, а точку $M$ на перпендикуляр $O'N$. Это возможно, если $MN = NO' = 1$

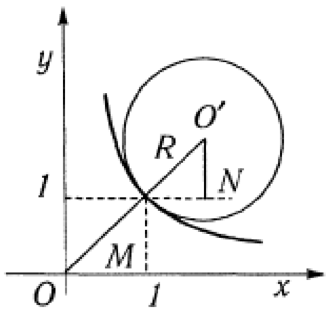



Рис. 2.4

Таким образом, координаты центра окружности будут (2;2). Отсюда, уравнение окружности примет вид $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

***3.6. Найти*** координаты центров кривизны и написать уравнения окружностей кривизны кривых: а) $y = e^{-x}$ в точке (0;1); б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке $M(\pi a, 2a)$.

**Решение.** а) Находим производные: $y' = -e^{-x}$, $y'' = e^{-x}$, их значения в точке: $y' = -1, y'' = 1$ и радиус кривизны $R = \frac{(1+1)^{3/2}}{1} = 2\sqrt{2}$.

Координаты центра кривизны кривой находим по формулам (5) $\xi = x - \dfrac{1+y'^2}{y''}y' = 2$, $\eta = y - \dfrac{1+y'^2}{y''} = 3$.

Отсюда, уравнение окружности будет $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$.

б) Находим производные: $\dot{x} = a(1-\cos t)$, $\dot{y} = a\sin t$, $\ddot{x} = a\sin t$, $\ddot{y} = a\cos t$. Определяем параметр $t$ в точке $M$: $2a = a(1-\cos t)$, $\cos t = -1$, $t = \pi$. Вычисляем при $t = -1$ значения производных: $\dot{x} = 2a$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -a$. По формулам (5) находим координаты центра кривизны кривой $\xi = \pi a$, $\eta = -2a$. Радиус кривизны вычисляем по формуле.

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} = \frac{(2a)^3}{|2a(-a)|} = 4a.$$

Зная координаты центра кривизны и радиус кривизны, запишем уравнение окружности кривизны кривой в точке *M:* $(x-\pi a)^2 + (y+6a)^2 = 16a^2$.

3.7. ***Написать*** уравнение эволюты кривой и построить кривую и её эволюту: а) $y = \dfrac{3}{2}x^2$; б) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; в) $x = \cos t$, $y = 2\sin t$; г) $\rho = ae^{k\varphi}$.

**Решение.** а) По формулам (5) находим координаты центра кривизны кривой $\xi = x - \dfrac{3x(1+9x^2)}{3} = -9x^3$, $\eta = y + \dfrac{1+9x^2}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{2}x^2$.

Исключаем из этих выражений *x*. Из первого равенства имеем $x = -\sqrt[3]{\dfrac{\xi}{9}}$. Подставляя найденное значение *x* во второе выражение, получим уравнение эволюты в явном виде $\eta = \dfrac{1}{3} + \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{\xi}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$. Таким образом, эволютой параболы является полукубическая парабола (рис. 2.5).

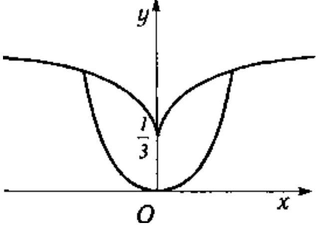



Рис. 2.5

б) Уравнение астроиды. Функция задана неявно. Находим производные: $y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2}{x^4 y}\right)^{\frac{1}{3}}$. Подставляя производные в формулы (5), получим

$$\xi = x + \frac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2}{x^4 y}\right)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

Пользуясь уравнением самой астроиды, исключаем из этих выражений *x* и *y:*

$$\xi+\eta = \left(x^{1/3}+y^{1/3}\right)^3, \xi-\eta = \left(x^{1/3}-y^{1/3}\right)^3,$$

$$(\xi+\eta)^{1/3} = x^{1/3}+y^{1/3}, \quad (\xi-\eta)^{1/3} = x^{1/3}-y^{1/3},$$

$$(\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3} = 2(x^{1/3}+y^{1/3}) = 2a(\xi+\eta)^{2/3}.$$

Если повернуть оси координат на 45° и по формулам $\xi_1 = \dfrac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$, $\eta_1 = -\dfrac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$ выразить новые координаты через старые, то уравнение эволюты в новой координатной системе примет вид $\xi_1^{2/3}+\eta_1^{2/3} = (2a)^{2/3}$. Таким образом, эволютой астроиды будет астроида вдвое больших размеров (рис. 2.6) и с осями, повёрнутыми на 45° относительно старых координат.

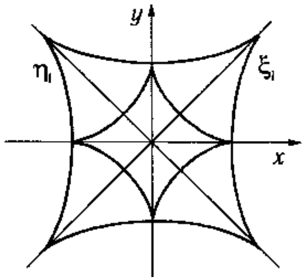



Рис. 2.6

в) Параметрические уравнения эллипса. Находим производные $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = 2\cos t$, $\ddot{x} = -\cos t$, $\ddot{y} = -2\sin t$. Подставляя в формулы (5), получим

$$\xi = \cos t - \frac{\sin^2 t + 4\cos^2 t}{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} 2\cos t =$$

$$= \cos t - (1 - \cos^2 t + 4\cos^2 t)\cos t = -3\cos^3 t,$$

$$\eta = 2\sin t - \frac{\sin^2 t + 4\cos^2 t}{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} \sin t =$$

$$= 2\sin t - \left(\frac{1}{2}\sin^2 t + 2 - 2\sin^2 t\right)\sin t = \frac{3}{2}\sin^3 t.$$

Исключая параметр $t$, получим уравнение эволюты эллипса в неявном виде $\xi^{2/3} + (2\eta)^{2/3} = 3^{2/3}$. Кривая напоминает астроиду и получается из неё путём вытягивания по горизонтальному направлению (рис. 2.7)

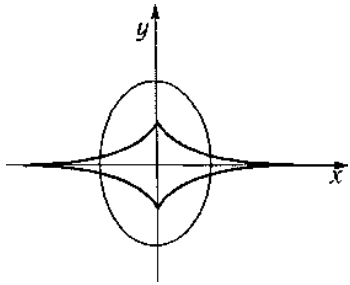



Рис. 2.7

г) Кривая, заданная данным уравнением, представляет логарифмическую спираль. Находим производные $\rho' = k\rho$, $\rho'' = k^2\rho$. Подставляя их в формулу $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$ определяем радиус кривизны $R = \rho\sqrt{1+k^2}$. Поскольку кривая задана в полярных координатах, то положение касательной определяется углом $\theta$ с продолженным радиус-вектором (рис. 2.8). Имеем $tg\theta = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1}{k} - const$, то есть угол между радиус-вектором и касательной сохраняет постоянную величину в каждой точке $M$ кривой. Поскольку $k = ctg\theta$, то радиус кривизны $R = \dfrac{\rho}{\sin\theta}$ и, как следует из $\Delta ONM$, совпадает с полярным от резком нормали $NM$. Поскольку точка $N$ является центром кривизны, то координаты центра кривизны $\rho_1$ $\varphi_1$ в полярной системе координат (см. рис. 2.8) примут вид $\rho_1 = \rho ctg\theta = k\rho$, $\varphi_1 = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$.

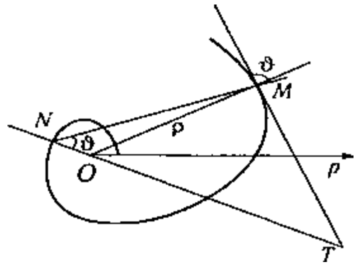



Рис. 2.8

Пользуясь уравнением логарифмической спирали, исключаем $\rho$ и $\varphi$ из этих уравнений, тогда уравнение эволюты примет вид $\rho_1 = kae^{k\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)}$. Нетрудно заметить, что уравнение эволюты также представляет уравнение логарифмической спирали, которая получается из исходной поворотом полярной оси вокруг полюса на $\dfrac{\pi}{2}$.

## 2.4. Особые точки плоских кривых

**1⁰.** Особой точкой $M(x_0, y_0)$ плоской кривой $F(x, y) = 0$ называется такая точка, координаты которой удовлетворяют трём уравнениям

$$F(x_0, y_0) = 0,\ F'_x(x_0, y_0) = 0,\ F''_y(x_0, y_0) = 0.$$

При исследовании основных типов особых точек вводят обозначения $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$ не все равные нулю и $D = AC - B^2$.

Если $D > 0$, то $M_0$ — изолированная точка (рис. 2.9).

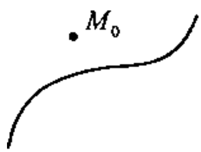



Рис. 2.9

Рис. 2.10

Если $D<0$, то $M_0$ — узел, т. е. двойная точка (рис. 2.10).

Если $D=0$, то $M_0$ — точка возврата первого рода (рис. 2.11) или второго рода (рис. 2.12) или точка самоприкосновения (рис. 2.13), или изолированная точка.

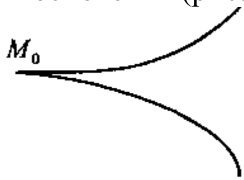



Рис. 2.11

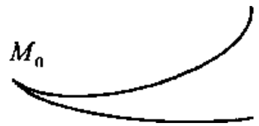



Рис. 2.12

Для решения вопроса о виде особой точки необходимо рассмотреть расположение точек кривой в окрестности особой точки. Угловой коэффициент касательной к кривой в особой точке может быть найден из выражения $Ck^2+2Bk+A=0$. В случае изолированной точки касательных нет; в узловой точке — две различные касательные; в точке возврата или самоприкосновения — одна общая касательная к обеим ветвям кривой.

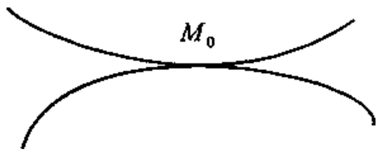



Рис. 2.13

**2⁰.** Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и при $t=t_0$ $x_0'=\varphi'(t_0)=0$ и $y_0'=\psi'(y_0)=0$ то имеет место особая точка.

Пусть хотя бы одна из производных второго порядка $x_0''$, $y_0''$ отлична от нуля, например $x_0''>0$, тогда налицо точка возврата. Если $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''+0\neq 0$, то $M_0$ — точка возврата первого рода; если $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''=0$, то $M_0$ — точка возврата второго рода.

В случае трансцендентной кривой могут встретиться и другие виды точек: угловые точки, точки прекращения и т. д.

**_4.1. Выяснить_** характер особых точек кривой $x^2 = ay^2 + y^3$.

**Решение.** Обозначим $F(x,y) = ay^2 + y^3 - x^2$ и найдём частные производные $F'_x = -2x$, $F'_y = 2ay + 3y^2$. Из решения системы уравнений

$$\begin{cases} ay^2 + y^3 - x^2 = 0, \\ -2x = 0, \\ 2ay + 3y^2 = 0, \end{cases}$$

находим координаты особой точки $O(0,0)$.

Для выяснения типа особой точки находим вторые частные производные в ней

$$F''_{xx} = -2;\ A = -2,$$

$$F''_{xy} = 0;\ B = 0,$$

$$F''_{yy} = 2a + 6y;\ C = 2a.$$

Отсюда $D = AC - B^2 = -4a$. Если $a > 0$, то $D < 0$ и точка O — узел (рис. 2.14 ).

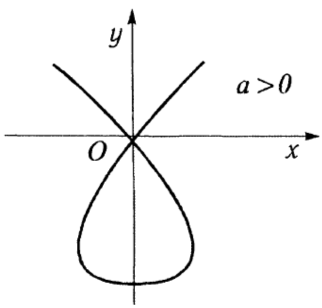



Рис. 2.14

Составим уравнение касательной в особой точке $2ak^2 - 2 = 0$ или $k^2 = \dfrac{1}{a}$, т. е. касательные имеют углы наклона $y' = k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Если a < 0, то D > 0 и точка O — изолированная точка (рис. 2.15 ) и касательной нет. Если a = 0, то D = 0. Уравнение кривой в этом случае будет $x^2 = y^3$ или $x = \pm\sqrt{y^3}$, где $y \ge 0$, т. е. кривая симметрична относительно оси Оу, которая будет касательной. Следовательно, точка О — точка возврата первого рода (рис. 2.16 ).

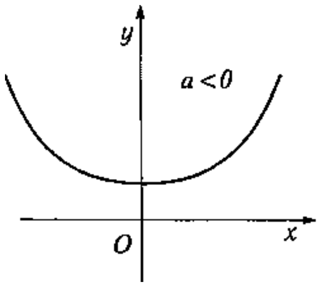



Рис. 2.15

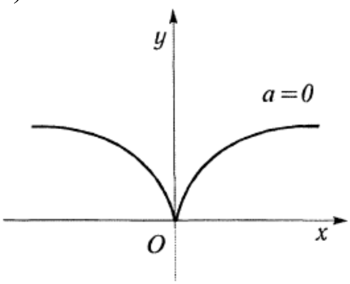



Рис. 2.16

***4.2. Показать***, что особые точки кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ есть точки возврата первого рода.

**Решение.** Найдём первые производные $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$. Приравнивая их нулю, получим четыре особые точки $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Вычислим вторые производные $x'' = 3a(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t)$, $y'' = 3a(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)$.

Поскольку в особых точках вторая производная $x''_i$ или $y''_i$ отлична от нуля, то налицо точки возврата. Найдём третьи производные $x''' = 3a(7\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t)$,

$$y''' = 3a(2\cos^4 t - 7\sin^2 t\cos t).$$

Так как в особых точках $M_i (i = 1,2,3,4)$

$$x'''_i y''_i - x''_i y'''_i = 9a^2(7\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t)(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)\Big|_{M_i} -$$

$$-9a^2(2\cos t\sin^2 t - \cos^3 t)(2\cos^3 t - 7\sin^2 t\cos t)\Big|_{M_i} \ne 0,$$

то это точки возврата первого рода. Нетрудно заметить, что заданная кривая есть астроида (рис. 2.17), декартовые координаты точек возврата которой, соответственно $(a,0),(0,a),(-a,0,(0,-a)$.

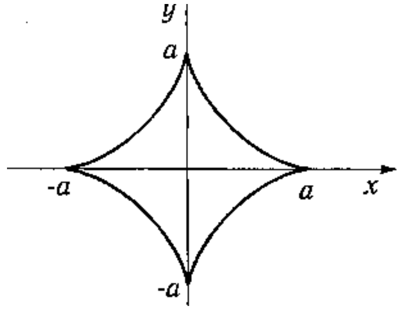



Рис. 2.17

## 2.5. Касание кривых между собой

**1⁰.** Если кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют общую точку $M_0(x_0,y_0)$ и касательные к обеим кривым в этой точке совпадают, то кривые в точке $M_0$ касаются друг друга. Условие касания двух кривых в точке $M_0$ имеет вид

$$f(x_0)=g(x_0)\,,\ f'(x_0)=g'(x_0)\,.$$

Если в точке $M_0$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно и выполняются условия $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x_0)=g'(x_0)$, $f''(x_0)=g''(x_0)$, … , $f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$ то говорят, что в точке $M_0$ кривые имеют порядок касания $n$. При $n\geq 2$ кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке $M_0$ имеют не только общую касательную, но и одинаковую кривизну.

Если кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют общую точку $M_0(x_0,y_0)$, т. е. $f(x_0)=g(x_0)$, а касательные к кривым в этой точке не совпадают $f(x_0)\neq g(x_0)$, то говорят, что кривые в точке $M_0$ пересекаются.

**2$^0$.** Огибающей семейства плоских кривых называется кривая, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и причём вся состоит из этих точек касания.

Если уравнение семейства кривых, зависящих от одного переменного параметра $\alpha$, имеет вид $F(x,y,\alpha)=0$, то параметрические уравнения огибающей определяются системой уравнений

$$F(x,y,\alpha)=0\,;\; F'_{\alpha}(x,y,\alpha)=0\,. \tag{1}$$

Исключая из уравнений (1) параметр $\alpha$, получим уравнение

$$D(x,y)=0\,, \tag{2}$$

которое называется уравнением дискриминантной кривой. Дискриминантная кривая может содержать геометрическое место особых точек данного семейства, не входящее в состав огибающей данного семейства.

**3$^0$.** Соприкасающаяся кривая. Пусть дано уравнение кривой $y=f(x)$ и семейство кривых с $n$ параметрами $G(x,y,a,b,...,l)=0$. Требуется, изменяя значения параметров, выбрать из этого семейства такую кривую, которая с данной кривой в некоторой её точке $M_0(x_0,y_0)$ имела бы наивысший возможный порядок касания, т. е. найти к данной кривой $y=f(x)$ соприкасающуюся в точке $M_0$ кривую.

Введём обозначение $\Phi(x,a,b,...,l)=G(x,f(x),a,b,...,l)$ и запишем условия касания

$$\Phi(x,a,b,...,l)=0\,,\; \Phi'_x(x_0,a,b,...,l)=0\,,\;\dots\,,$$

$$\Phi^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x_0,a,b,...,l)=0\,. \tag{3}$$

Из системы $n$ уравнений (3) с $n$ неизвестными находим систему значений параметров $a,b,...,l$. Таким образом определяется соприкасающаяся кривая, имеющая порядок касания не ниже $n$-1.

***5.1. Найти*** порядок касания цепной линии $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

с параболой $y=\frac{1}{2}x^2+1$ в точке $x_0=0$.

**Решение.** Обозначим $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ и $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ и найдём последовательные производные от этих функций

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ g'(x)=x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ g''(x)=1,$$
$$f'''(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ g'''(x)=0,\dots$$

Вычислим в точке $x_0=0$ значения данных функций и их производных

$$f(0)=1,\ g(0)=1,\ f'(0)=0,\ g'(0)=0,$$
$$f''(0)=1,\ g''(0)=1,\ f'''(0)=0,\ g'''(0)=0.$$

Поскольку $f^4(0)=1$, а $g^4(0)=1$, т. е. $f^4(0)\neq g^4(0)$, то $n=3$ и кривые имеют третий порядок касания.

***5.2. При каких*** значениях параметров $a,b$ прямая $y=2x+b$ будет иметь с кривой $y=e^{ax}$ в точке $x_0=0$ касание первого порядка?

**Решение.** Пусть $f(x)=2x+b$ и $g(x)=e^{ax}$. Условия касания этих линий в точке $x_0=0$ имеют вид: $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$. Таким образом, $2\cdot 0+b=e^a\cdot 0$; $2=ae^{a\cdot 0}$. Отсюда $a=2$, $b=1$.

***5.3. Найти*** огибающую семейства окружностей $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

**Решение.** Данное семейство окружностей зависит от параметра $a$. Дифференцируя, составим систему уравнений (1)

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=\dfrac{a^2}{2},\\ 2x=a.\end{cases}$$

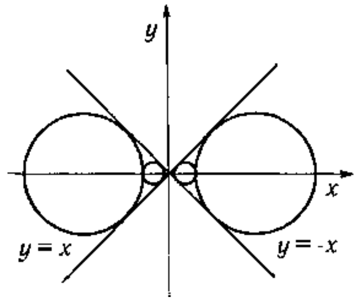



Рис. 2.18

Исключая $a$, получим $y = \pm x$ — две прямые, биссектрисы координатных углов, которые и являются огибающими данного семейства окружностей (рис. 2.18).

***5.4.*** ***Найти*** кривую, которую огибает отрезок длины l, когда его концы скользят по осям координат.

**Решение.** За параметр возьмём угол $a$, который составляет перпендикуляр к движущейся прямой с осью $x$, тогда уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha} = l .$$

Дифференцируя по $\alpha$ , получим

$$-\frac{\cos\alpha x}{\sin^2\alpha} + \frac{y\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sin^3\alpha} = \frac{y}{\cos^3\alpha} .$$

Определяя из этих уравнений $x, y,$ будем иметь

$$\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} x = l , \quad x = l\sin^3\alpha ;$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} y + \frac{y}{\cos\alpha} x = l , \quad y = l\cos^3\alpha ;$$

т. е. огибающей будет астроида (рис. 2.17).

***5.5.*** ***Исследовать*** характер дискриминантной кривой кубической параболы $y = (x - a)^3$ .

**Решение.** Дифференцируем данную кривую по параметру а и составляем систему

$$\begin{cases} y = (x-a))^3, \\ 0 = -3(x-a)^2. \end{cases}$$

Исключая отсюда параметр а, находим дискриминантную кривую $y = 0$, которая является геометрическим местом точек перегиба и огибающей данного семейства (рис. 2.19).

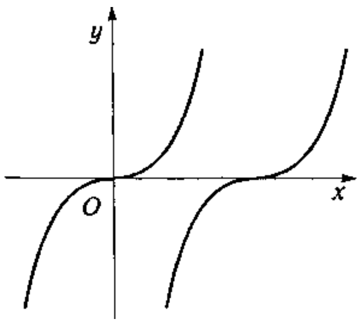



Рис. 2.19

***5.6. Найти*** соприкасающуюся кривую для семейства окружностей $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

**Решение.** Поскольку семейство окружностей содержит три параметра $a, b, R$, то наивысший порядок касания будет второй. Полагая $y = f(x)$, будем иметь

$$\Phi(x,a,b,R) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2,$$

$$\Phi'_x(x,a,b,R) = 2(x-a) + 2(y-b)y',$$

$$\Phi''_{xx}(x,a,b,R) = 2 + 2y'^2 + 2(y-b)y''.$$

Обозначим значения $y, y', y''$, отвечающие выбранному значению $x = x_0$, через $y_0, y'_0, y''_0$. Тогда для определения параметров $a, b, R$ получим систему (3)

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2,$$

$$x_0 - a + (y_0 - b)y'_0 = 0,$$

$$1 + y_0'^2 + (y_0 - b)y''_0 = 0.$$

Из двух последних уравнений этой системы находим координаты центра

$$a = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0^2}; \ b = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}.$$

Из первого уравнения находим радиус $R = \frac{(1 + y_0'^2)^{3/2}}{|\, y_0'' \,|}$.

Найденные параметры $a, b, R$ и устанавливают характер соприкасающейся кривой.

## 2.6. Производная вектор-функции

**$1^0$ .** Пусть $\overline{a}(t)$ — непрерывная вектор-функция, где $t$ — скалярный аргумент. Если откладывать значения вектора $\overline{a}(t)$ при различных значениях $t$, от общего начала O, то конец вектора опишет некоторую непрерывную кривую, которую называют годографом вектора $\overline{a}(t)$.

Предел отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента $\frac{\Delta \overline{a}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется производной вектор-функции при взятом значении $t_0$ и обозначается

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{a}(t_0 + \Delta t) - \overline{a}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{a}}{\Delta t}.$$

Если вектор $\overline{a}$ задан проекциями на оси координат $\overline{a}(t) = a_x(t)\overline{i} + a_y(t)\overline{j} + a_z(t)\overline{k}$, то производная вектор-функции имеет вид

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\overline{i} + \frac{da_y}{dt}\overline{j} + \frac{da_z}{dt}\overline{k}. \qquad (1)$$

Вектор $\overline{a}$ направлен по касательной к годографу вектора $\overline{a}$ в сторону возрастания аргумента $t$. Если вектор $\overline{a}(t)$ изменяется только по направлению, то его годограф определяет линию, расположенную на сфере радиуса $R = |\,\overline{a}\,|$ с центром в начале координат. Если вектор $\overline{a}(t)$ изменяется только по модулю, то его годограф определяет луч, исходящий из начала координат. Вектор $\overline{a}$ в этом случае направлен по лучу.

**2⁰.** Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{dt} \pm \dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

2) $\dfrac{d\vec{c}}{dt} = 0$, где $\vec{c}$ — постоянный вектор;

3) $\dfrac{d}{dt}(m\vec{a}) = m\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, где $m$ — постоянный скаляр;

4) $\dfrac{d}{dt}(\mu\vec{a}) = \mu\dfrac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\dfrac{d\mu}{dt}$, где $\mu = \mu(t)$ — скалярная функция от $t$;

5) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot \dfrac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

6) $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dfrac{d\vec{b}}{dt}$;

7) $\dfrac{d}{dt}\vec{a}(\varphi(t)) = \dfrac{d\vec{a}}{d\varphi} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция от $t$.

**3⁰.** Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ или векторным уравнением $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то производная вектор-функции определяется по формуле

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,. \tag{2}$$

Дифференциал дуги пространственной кривой вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,. \tag{3}$$

**4⁰.** Если взять за $\vec{a}(t)$ радиус-вектор $\vec{r}$ некоторой движущейся точки $M$, а за $t$ — время, то скорость движущейся точки есть производная её радиус-вектора по времени $\dot{\vec{r}}(t)$, а годограф вектора $\vec{r}$ есть траектория движения точки $M$. При этом направление вектора $\dot{\vec{r}}(t)$ указывает направление скорости (вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ направлен по касательной к траектории), а модуль $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$ — величину скорости и равен производной от пути по времени

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \frac{ds}{dt}.$$

Вектор $\ddot{\vec{r}} = \vec{w}$ — есть вектор ускорения, равный

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Если точка движется в пространстве, то её уравнение движения имеет вид

$$\bar{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}.$$

Проекции скорости суть:

$$\upsilon_x = \dot{r}_x(t),\ \upsilon_y = \dot{r}_y(t),\ \upsilon_z = \dot{r}_z(t).$$

Величина скорости находится по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}.$$

Чтобы найти траекторию движения, надо исключить параметр / из параметрических уравнений траектории

$$\begin{cases} x = r_x(t), \\ y = r_y(t), \\ z = r_z(t). \end{cases}$$

***6.1. Найти*** годограф вектор-функции

$$\bar{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + \vec{k},\ t \in R.$$

**Решение.** Запишем параметрические уравнения годографа $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$. Исключая параметр $t$, будем иметь $x^2 + y^2 = 1$; $z = 1$. Следовательно, годографом вектор-функции $\bar{r}(t)$ является окружность.

***6.2. Определить*** годограф вектор-функции

$\bar{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы, перпендикулярные друг другу.

**Решение.** Совмещая направление вектора $\vec{a}$ с осью *x*, а вектора $\vec{b}$ с осью *y*, будем иметь $x = t^2$, $y = t$. Исключая параметр $t$, получим $x = y^2$.

Таким образом, годографом вектор-функции $\bar{r}$ является парабола.

***6.3. Найти*** производную вектор-функции

$$\bar{r} = \sin^2 t \cdot \vec{i} + \sin t \cos t \cdot \vec{j} + \cos t\vec{k}, \; t \in [0,2\pi].$$

**Решение.** По формуле (1) будем иметь

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 2\sin t \cos t \cdot \vec{i} + (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot \vec{j} - \cos t\vec{k} =$$

$$= \sin^2 t \cdot \vec{i} + \cos^2 t \cdot \vec{j} - \cos t\vec{k}.$$

***6.4. Найти*** производные вектор-функций:

а) $\bar{r} = \cos t \cdot \vec{i} + e^l \cdot \vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}$ в точке M(1;1;1);

б) $\bar{r} = t^4 \cdot \vec{i} + (t^2 + 1) \cdot \vec{j} + \sqrt{t^3 - 4\vec{k}}$ при $t = 2$.

**Решение.** а) Подставляя координаты точки M в параметрические уравнения годографа $x = \cos t$, $y = e^l$, $z = t^3 + 1$, находим, что в точке M параметр $t_0 = 0$. Производная вектор-функции $\frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin t \cdot \vec{i} + e^l \cdot \vec{j} + 3t^2\vec{k}$ в точке M равна $\frac{d\bar{r}(0)}{dt} = \vec{j}$.

б) Находим производную $\frac{d\bar{r}}{dt} = 4t^3\vec{i} + 2t\vec{j} + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3 - 4}}\vec{k}$,

отсюда $\frac{d\bar{r}(2)}{dt} = 32\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

***6.5. Показать***, что векторы $\bar{r}(t) = \vec{i} + \sin t\vec{j} + \cos t\vec{k}$ и $\frac{d\bar{r}}{dt}$ — перпендикулярны.

**Решение.** Находим вектор $\frac{d\bar{r}}{dt} = \cos t\vec{j} - \sin t\vec{k}$. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения. Из выражения $1 \cdot 0 + \sin t \cos t - \cos t \sin t = 0$ следует перпендикулярность данных векторов.

***6.6.*** Даны две вектор-функции: $\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$ и $\vec{b} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

***Найти:*** а) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ; б) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$.

**Решение.** а) По формуле (5) пункта 2° имеем, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k})(\vec{j} + 2t\vec{k}) + (\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k})(\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}) =$$

$$= t^2 + t^4 + 1 + 2t^2 + 3t^4 = 1 + 3t^2 + 5t^4.$$

б) По формуле (6) пункта 2° имеем, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{j} + 2t\vec{k}) \times (t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}) + (\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}) \times (\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}) =$$

$$= t^3\vec{i} + 2t\vec{j} - t\vec{k} - 2t^3\vec{i} + 3t^3\vec{j} + 2t\vec{k} + t^2\vec{j} - t\vec{k} - 2t^3\vec{i} - 3t^3\vec{j} = 0.$$

***6.7. Найти*** $\frac{d\vec{a}}{dt}$, если $\vec{a} = u\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$, где $u$ =const.

**Решение.** По формуле (7) пункта 2° имеем:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = 3u^2(-\sin t)\vec{i} + 2u(-\sin t)\vec{j} - \sin t\vec{k} = \sin t(3u^2\vec{i} + 2u\vec{j} + \vec{k}.$$

***6.8. Найти*** вторые производные вектор-функций:

а) $\bar{r}(t) = \cos 3t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \sqrt{2}t\vec{k}$ ;

б) $\bar{r}(t) = (t^4 - 3)\vec{i} + (t^3 + 4)\vec{j} + \ln t\vec{k}$ ; $t_0 = 1$.

**Решение.** а) Находим первую производную

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -3\sin 3t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}.$$

Вторая производная равна производной от первой производной $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -9\cos 3t\vec{i} - \sin t\vec{j}$ .

б) Находим сначала первую, а затем вторую производную

$\dfrac{d\bar{r}}{dt} = 4t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \dfrac{1}{t}\vec{k}$ ; $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 12t^2\vec{i} + 6t\vec{j} - \dfrac{1}{t^2}\vec{k}$ . При $t_0 = 1$ производная равна $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 12\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ —j.

***6.9.*** Дано уравнение движения $\bar{r}(t) = 3\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$ . ***Определить*** траекторию движения, скорость и ускорение движения. Найти величины скорости и ускорения движения и их направления для моментов $t = 0$ и $t = \dfrac{\pi}{2}$ .

**Решение.** Траектория точки определяется параметрическими уравнениями $x = 3\cos t$ , $y = 3\sin t$ , $z = 2t$ и представляет винтовую линию.

Скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{w}$ движения найдём как первую и вторую производные $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = -3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 2\vec{k}$ ; $\vec{w} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -3\cos t\vec{i} - 3\sin t\vec{j}$ . Величина скорости $\upsilon = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ , ускорения при любом $w = \sqrt{(-3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = 3$ при любом $t$ . При $t = 0$ скорость равна $\vec{\upsilon}_1 = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , ускорение $\vec{w}_1 = -3\vec{i}$ ; при $t = \dfrac{\pi}{2}$ скорость $\vec{\upsilon}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ , ускорение $\vec{w}_1 = -3\vec{j}$ . Траектория точки и найденные векторы её скорости и ускорения в моменты $t = 0$ и $t = \dfrac{\pi}{2}$ показаны на рис. 2.20.

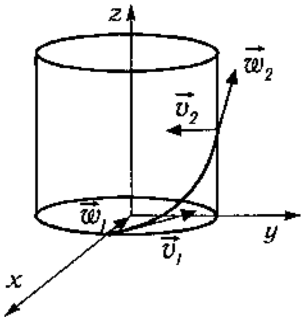



Рис. 2.20.

***6.10.*** Дано уравнение движения $\bar{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$. ***Определить*** ускорение $\vec{w}$ движения и его тангенциальную $w_\tau$ и нормальную $w_n$ составляющие в любой момент $t$ и при $t = 0$.

**Решение.** Находим вектор скорости и ускорения $\vec{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + t\vec{k}$; $\vec{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + \vec{k}$.

Величина скорости определяется модулем вектора скорости $\upsilon = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$. Тангенциальная составляющая ускорения определяется по формуле $w_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ и равна $w_\tau = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, а нормальная по формуле $w_n = \sqrt{w^2 + w_\tau^2}$, где $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$, и равна $w_n = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1 - \frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2+t^2}{1+t^2}}$. Отсюда, при $t = 0$ получим $w_\tau = 0$, $w_n = \sqrt{2}$.

***6.11.*** Если пренебречь сопротивлением воздуха, то уравнение движения снаряда, выпущенного под углом $\alpha$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $\upsilon_0$, имеет вид

$$\bar{r}(t) = (\upsilon_0 t\cos\alpha)\vec{i} + \left(\upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}\,.$$

***Определить*** скорость и траекторию движения.

**Решение.** Находим вектор скорости

$$\upsilon = \frac{d\bar{r}}{dt} = \upsilon_0\cos\alpha\vec{i} + (\upsilon_0\sin\alpha - gt)\vec{j}\,.$$

Величина скорости равна

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{(\upsilon_0\cos\alpha)^2 + (\upsilon_0\sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{\upsilon_0{}^2 - 2\upsilon_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}\,.$$

Параметрическое уравнение траектории будет

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t\cos\alpha, \\ y = \upsilon_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая отсюда время $t$, находим уравнение траектории движения

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}$$ - т. е. движение снаряда происходит по параболической траектории.

***6.12. Найти*** дифференциал дуги кривой

$$x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ z = a\ln\cos t\,.$$

**Решение.** Находим производные

$$\dot{x} = -a\sin t\,,\ \dot{y} = a\cos t\,,\ \dot{z} = -a\frac{\sin t}{\cos t}\,.$$

Отсюда по формуле (3) дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + \left(-a\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}\,dt = \frac{adt}{\cos t}\,.$$

## 2.7. Естественный трёхгранник пространственной кривой. Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой

**1⁰.** Естественный трёхгранник, составленный из трёх взаимно перпендикулярных плоскостей, можно построить в любой неособой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространственной кривой. Пусть пространственная кривая задана вектор-функцией скалярного аргумента $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тогда естественный трёхгранник (рис. 2.21) состоит из:

а) соприкасающейся плоскости $M_0M_1M_2$ — содержащей векторы $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$;

б) нормальной плоскости $M_0M_2M_3$ —перпендикулярной к вектору $\frac{d\bar{r}}{dt}$;

в) спрямляющей плоскости $M_0M_1M_3$ — перпендикулярной первым двум плоскостям.

При пересечении этих плоскостей образуются три прямые:

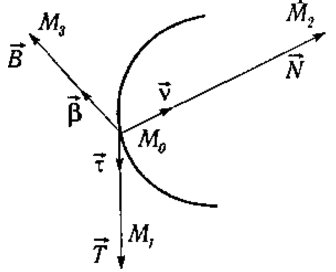



Рис. 2.21.

а) $M_0M_1$ — касательная, направляющий вектор касательной $\vec{T} = \frac{\bar{r}}{dt}$;

б) $M_0M_3$ — бинормаль, направляющий вектор бинормали $\vec{B} = \left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]$;

в) $M_0M_2$ — главная нормаль, вектор главной нормали $\vec{N} = [\vec{B}, \vec{T}]$. Соответствующие им единичные векторы: $\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$,

$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$, $\vec{v} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ вычисляются по формулам

$$\vec{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \ \vec{v} = \frac{\frac{d\bar{r}}{ds}}{\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|}, \ \vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{v}], \tag{1}$$

где $s$ — длина дуги кривой.

**2⁰.** Уравнение касательной к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}} \tag{2}$$

или

$$\frac{x - x_0}{T_x} = \frac{y - y_0}{T_y} = \frac{z - z_0}{T_z} \tag{3}$$

где $x$, $y$, $z$ — текущие координаты точки касательной; координаты $x_0, y_0, z_0$ соответствуют значению параметра $t_0$;

Уравнение нормальной плоскости в точке $M_0$ вытекает из условия перпендикулярности прямой и плоскости

$$(x - x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + (y - y_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + (z - z_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0 \tag{4}$$

или

$$(x - x_0)T_x + (y - y_0)T_y + (z - z_0)T_z = 0 \tag{5}$$

Аналогично определяются: уравнение главной нормали

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z} \tag{6}$$

уравнение спрямляющей (касательной) плоскости

$$(x - x_0)N_x + (y - y_0)N_y + (z - z_0)N_z = 0, \tag{7}$$

уравнение бинормали

$$\frac{x-x_0}{B_x}=\frac{y-y_0}{B_y}=\frac{z-z_0}{B_z} \qquad (8)$$

уравнение соприкасающейся плоскости

$$(x-x_0)B_x+(y-y_0)B_y+(z-z_0)B_z=0\,. \qquad (9)$$

**3⁰.** Если пространственная кривая задана линией пересечения двух поверхностей $F(x,y,z)=0$ и $G(x,y,z)=0$, то вместо векторов $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ можно брать векторы $d\vec{r}\{dx,dy,dz\}$ и $d^2\vec{r}\{d^2x,d^2y,d^2z\}$. В данном случае одну из переменных $x$,$y$,$z$ можно считать независимой и её второй дифференциал приравнивать нулю.

***7.1.*** Дана кривая $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. В точке $M_0(2,4,8)$ ***найти:*** а) основные единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$, $\vec{v}$;

б) уравнения касательной, главной нормали и бинормали;

в) уравнения касательной, нормальной и соприкасающейся плоскости.

**Решение.** а) Составим уравнение вектор-функции $\bar{r}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ и найдём производные

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k}\,,\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=2\vec{j}+6t\vec{k}\,.$$

Поскольку в точке $M_0$ параметр $t_0$ = 2, то вектор касательной будет

$$\vec{T}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}$$

вектор бинормали

$$\vec{B}=\left[\frac{d\bar{r}}{dt},\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & 12\\ 0 & 2 & 12\end{vmatrix}=24\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}\ ,$$

вектор нормали

$$\vec{N}=\left[\vec{B},\vec{T}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 24 & -12 & 2\\ 1 & 4 & 12\end{vmatrix}=-152\vec{i}-286\vec{j}+108\vec{k}\ .$$

Таким образом, основные единичные векторы будут

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}}{\sqrt{161}},\ \vec{\beta}=\frac{24\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{724}}=\frac{12\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{181}},$$

$$\vec{v}=\frac{-152\vec{i}-286\vec{j}+108\vec{k}}{\sqrt{116564}}=\frac{-76\vec{i}-143\vec{j}+54\vec{k}}{\sqrt{29141}}.$$

б) Поскольку в точке $M_0$ координаты $x_0=2$, $y_0=4$, $z_0=8$ и производные при $t_0=2$ равны $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=4$, $\dfrac{dz}{dt}=12$, то уравнение касательной (2) будет

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-8}{12}.$$

Уравнение главной нормали (6)

$$\frac{x-2}{-152}=\frac{y-4}{-286}=\frac{z-8}{108}\quad\text{или}\quad\frac{x-2}{-76}=\frac{y-4}{143}=\frac{z-8}{54}.$$

Уравнение бинормали (8)

$$\frac{x-2}{24}=\frac{y-4}{-12}=\frac{z-8}{2}\quad\text{или}\quad\frac{x-2}{12}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-8}{1}..$$

в) Уравнение касательной плоскости (7)

$$-152(x-2)-286(y-4)+108(z-8)=0$$

или
$$76x+143y-54z=292.$$

Уравнение нормальной плоскости (5)

$$(x-2)+4(y-4)+12(z-8)=0\ \text{или}\ x+4y+12z=114.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости (9)

$$24(x-2)-12(y-4)+2(z-8)=0\ \text{или}\ 12x-6y+z=8.$$

***7.2. Найти*** основные единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$, $\vec{v}$ кривой $y=x^2$, $z=2x$ в точке $x_0=2$.

**Решение.** Пространственная кривая задана пересечением параболического цилиндра $y = x^2$ и плоскости $z = 2x$. Дифференцируя эти уравнения, считая $x$ независимой переменной, получим $dy = 2xdx$ и $dz = 2dx$, $d^2y = 2dx^2$ и $d^2z = 0$.

Отсюда при $x_0 = 2$ получим $d\vec{r}\{dx, 4dx, 2dx\}$ и $d^2\vec{r}\{0, 2dx^2, 0\}$ или $d\vec{r}\{1,4,2\}$ и $d^2 r\{0,1,0\}$

Таким образом, единичные векторы равны:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{21}},$$

$$\vec{B} = \left[d\vec{r}, d^2\vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k},\ \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N} = \left[\vec{B}, \vec{T}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-4\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{105}}.$$

***7.3. Найти*** уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии: а) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t_0 = 1$;

б) $\vec{r}(t) = \sin^2 t\vec{i} + \sin t \cos t\vec{j} + \cos^2 t\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$, $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $M_0(1,-1,2)$.

**Решение.** а) Находим производные: $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$, $\dot{z} = 3t^2$ и вычисляем их значения при $t_0 = 1$: $\dot{x}(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 2$, $\dot{z}(1) = 3$.

Определяем координаты точки касания $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Отсюда, уравнения касательной прямой (2) и плоскости (4) примут вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}, \qquad (x-1)+(y-1)2+(z-1)3=0 \quad \text{или}$$

$x+y+z-6=0$.

б) Параметрические уравнения линии имеют вид $x=\sin^2 t$, $y=\sin t\cos t$, $z=\cos^2 t$. Подставляя $t_0=\frac{\pi}{4}$ в эти уравнения, определяем координаты точки касания $M_0$: $x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{2}$, $z_0=\frac{1}{2}$.

Находим производные: $\dot{x}=2\sin t\cos t=\sin 2t$, $\dot{y}=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$, $\dot{z}=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$ и вычисляем их значения в точке касания: $\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $\dot{z}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Подставляя координаты точки касания и значения производных в этой точке в уравнение касательной прямой (2), получим:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}.$$

Поскольку в уравнении прямой (3) $T_y=0$, то касательная лежит в плоскости, перпендикулярной оси y.

Уравнение нормальной плоскости (5), в нашем случае, примет вид $\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$ или $x-z-1=0$.

в) Если линия определена пересечением двух поверхностей: $\varphi(x,y,z)=0$ и $\psi(x,y,z)=0$, то, полагая, например, $x=x(t)$ и исключая попеременно другие переменные, находим $y=y(t)$, $z=z(t)$ (вообще говоря, бесчисленное множество различных параметрических уравнений).

Пусть x = t, тогда из решения системы:

$$\begin{cases} 2t^2+3y^2+z^2=9 \\ 3t^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$$

находим: $y=-\frac{1}{2}\sqrt{9-5t^2}$, $z=-\frac{1}{2}\sqrt{7t^2+9}$. Знак минус переменной $y$ ставит в соответствие координаты точки $M_0$ и параметр $t$, равный для этой точки единице.

Находим производные: $\dot{x}=1$, $\dot{y}=\frac{5}{2}\frac{t}{\sqrt{9-5t^2}}$, $\dot{z}=\frac{7}{2}\frac{t}{\sqrt{7t^2+9}}$ и их значения в точке $M_0$: $\dot{x}(1)=1$, $\dot{y}(1)=\frac{5}{4}$, $\dot{z}=\frac{7}{8}$. Таким образом, уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M_0$ имеют вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\frac{5}{4}}=\frac{z-2}{\frac{7}{8}},\ (x-1)+\frac{5}{4}(y+1)+\frac{7}{8}(z-2)=0$$

или

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{8},\ 8x+10y+7z-12=0\,.$$

***7.4. Написать*** уравнения касательной прямой к винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в любой точке и при $t=\pi$. Показать, что винтовая линия пересекает образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$ под одинаковым углом.

**Решение.** Находим производные: $\dot{x}=-a\sin t$, $\dot{y}=a\cos t$, $\dot{z}=b$. Отсюда уравнение касательной прямой в любой точке

$$\frac{x-a\sin t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b},\ \text{а при}\ \ t=\pi$$

$$\frac{x+a}{0}=\frac{y}{-a}=\frac{z-bt}{b},$$

т. е. при $t=\pi$ касательная лежит в плоскости, перпендикулярной оси $x$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $x=-a$.

Образующие цилиндра $x^2+y^2=a^2$ параллельны оси Oz. Находим направляющий косинус угла, образованного касательной с осью Oz:

$$\cos\gamma=\frac{\dot z}{\sqrt{\dot z^2+\dot y^2+\dot z^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку касательные к винтовой линии образуют с осью Oz один и тот же угол, то они отсекают и образующие под этим же углом.

***7.5. Найти*** уравнение соприкасающейся плоскости к кривой: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2-y^2=3$ в точке $M_0(2,1,2)$.

**Решение.** Пространственная кривая задана пересечением двух поверхностей. Дифференцируя уравнения поверхностей, считая $x$ независимой переменной, будем иметь

$$xdx+ydy+zdz=0,\ xdx-ydy=0$$

и

$$dx^2+dy^2+yd^2y+dz^2+zd^2z=0,\ dx^2-dy^2-yd^2y=0.$$

Отсюда, полагая $x_0=2$, $x_0=1$, $x_0=2$, получим

$$dy=2dx,\ dz=-2dx,\ d^2y=-3dx^2,\ d^2z=-3dx^2.$$

Таким образом, соприкасающаяся плоскость определяется векторами $\{dx,2dx,-2dx\}$ и $\{0,-3dx^2,-3dx^2\}$ или $\{1,2,-2\}$ и $\{0,-3,3\}$.

Следовательно, нормальный вектор соприкасающейся плоскости будет

$$\vec B=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & -3\end{vmatrix}=-12\vec i+3\vec j-3\vec k$$

Отсюда уравнение соприкасающейся плоскости $-12(x-2)+3(y-1)-3(z-2)=0$ или $4x-y+z-9=0$.

## 2.8. Кривизна и кручение пространственной кривой

**1⁰.** Кривизна пространственной кривой в точке M определяется аналогично кривизне плоской кривой. Если кривая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s — длина дуги, то

$$k = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|, \tag{1}$$

где R — радиус кривизны.

Если кривая задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кривизна определяется выражением

$$k = \frac{1}{R} = \frac{\left\| \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right] \right\|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3}. \tag{2}$$

**2⁰.** Под кручением или второй кривизной кривой в точке M понимается число

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s}, \tag{3}$$

где $\theta$ — угол поворота бинормали на участке кривой $\Delta s$, $\rho$ — радиус кручения или радиус второй кривизны. Если кривая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \pm \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right| = \frac{\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left( \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^2}. \tag{4}$$

Знак минус соответствует тому случаю, когда векторы $\vec{v}$ и $\frac{\vec{\beta}}{ds}$ имеют одинаковое направление; знак плюс — в противоположном случае.

Если кривая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, т. е. параметрически, то

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left|\left[\dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2} \qquad (5)$$

**3$^0$.** Формулы Френе.

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\vec{v}}{R}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{R} + \frac{\vec{\beta}}{\rho}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{s} = -\frac{\vec{v}}{\rho}$$

***8.1. Вычислить*** кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(a > 0)$ в любой точке.

**Решение.** Уравнение винтовой линии представим вектор-функцией $\bar{r} = \vec{i}\cos t + \vec{j}a\sin t + \vec{k}bt$.

Кривизну и кручение определяем по формулам (2) и (5). Для этого сначала найдём производные

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -\vec{i}a\sin t + \vec{j}a\cos t + \vec{k}b,$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t,$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = \vec{i}a\sin t - \vec{j}a\cos t.$$

Тогда

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}ab\sin t - \vec{j}ab\cos t + \vec{k}a^2.$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Окончательно получим

$$k=\frac{(a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\sigma=\frac{a^2b}{a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

***8.2. Найти*** радиус кривизны линии: $x^2-y^2+z^2=1$, $y^2-2x+z=0$ в точке (1,1,1).

**Решение.** Пространственная кривая задана пересечением двух поверхностей. Дифференцируем уравнения поверхностей, считая $x$ независимой переменной

$$xdx-ydy+zdz=0,\ 2ydy-2dx+dz=0$$

и

$$dx^2-dy^2-yd^2y+dz^2+zd^2z=0,\ 2dy^2+2yd^2y+d^2z=0.$$

Полагая $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$, получим

$$dy=dx,\ dz=0,\ d^2y=-\frac{2}{3}dx^2,\ d^2z=-\frac{2}{3}dx^2.$$

Отсюда $d\vec{r}\{dx;dx;0\}$ и $d^2\vec{r}\{0;-\frac{2}{3}dx^2;-\frac{2}{3}dx^2\}$

или $d\vec{r}\{1;1;0\}$ и $d^2\vec{r}\{0;-1;-1\}$.

Воспользуемся формулой (2). Находим векторное произведение

$$\left[d\bar{r},d^2\bar{r}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

Таким образом, $R=\frac{|d\vec{r}|^3}{\left[d\bar{r},d^2\bar{r}\right]}=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

***8.3. Найти*** кривизну и кручение линии: $x^2=2ay$, $x^2=6a^2z$ в произвольной точке M($x$,$y$,$z$).

**Решение.** Дифференцируем уравнения обеих поверхностей, считая $x$ независимой переменной

$$xdx = ady\,,\ dy = \frac{x}{a}dx\,,\ x^2dx = 2a^2dz\,,\ dz = \frac{x^2}{2a^2}dx \text{ и}$$

$$d^2y = \frac{dx^2}{a}\,,\ d^3y = 0\,,\ d^2z = \frac{x}{a^2}dx^2\,,\ d^3z = \frac{dx^3}{a^2}\,.$$

Отсюда

$$d\vec{r}\left\{dx, \frac{x}{a}dx, \frac{x^2}{2a^2}dx\right\},\ d^2\vec{r}\left\{0, \frac{dx^2}{a}, \frac{x}{a^2}dx^2\right\},\ d^3\vec{r}\left\{0, 0, \frac{dx^3}{a^2}\right\}$$

Кривизна и кручение определяются по формулам (2),(4), соответственно. Для этого находим

$$\left[d\overline{r}, d^2\overline{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{2a^2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{a} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2a^2}\vec{i} - \frac{x}{a}\vec{j} + \vec{k}\,,$$

$$d\overline{r}d^2\overline{r}d^3\overline{r} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{a} & \frac{x^2}{2a^2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Таким образом, кривизна кривой в точке M равна

$$k = \frac{\left(\frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^2}{a^2} + z\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{a}{a+y}\right)^2;$$

кручение

$$\sigma = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}} = \left(\frac{a}{a+y}\right)^2.$$

# 3. КРАТКИЙ ОБЗОР СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 3.1. Определение функции нескольких переменных

Переменная $z$ называется *функцией двух переменных* $x$ *и* $y$, если каждой паре $(x; y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин $x$ и $y$ из некоторой области $D$ соответствует определенное значение $z$.

Обозначения: $z= f(x; y)$, $z = F(x; y)$, $z= z(x; y)$ и так далее.

Переменная величина $u$ называется функцией от $n$ переменных $x; y; z; \ldots ;t$, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной $u$:

$$u= f(x; y;z; \ldots ;t).$$

Всякая функция нескольких переменных становится функцией меньшего числа переменных, если часть переменных (аргументов) зафиксировать. Например, функции $u= f(x;y;z)$, $u= f(x;y;a)$, $u= f(x;b;a)$, где $a$ и $b$— постоянные, являются функциями соответственно трех, двух и одной переменной.

В дальнейшем, в основном, будем рассматривать функции двух переменных $z= f(x; y)$ или $z= z(x; y)$. Под функцией $z= f(x; y)$ будем понимать также функцию точки $M (x; y)$ с координатами $x$ и $y$.

Множество $D$ всех точек $(x; y)$, при которых $z= f(x; y)$ имеет смысл, называется *областью определения*, а множество значений $z$, принимаемых функцией $z= f(x; y)$ при $(x;y) \in D$, называется *областью изменения* или *множеством значений* функции.

## 3.2. График функции двух переменных. Линии уровня

Множество точек пространства $R^3$ с координатами $(x; y; z) = (x; y; f(x, y))$ при всех $(x; y) \in D$ называется *графиком функции* $z= f(x;y)$. Для наглядного геометрического представления используют *линии уровня* для функции двух переменных и *поверхности уровня* для функции трех переменных. *Линей уровня* функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости $Oxy$, в которых функция $z$ принимает постоянное значение, т.е. $f(x; y) = c$, где $c$ - постоянная.

*Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, в которых функция $u$ принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y;z) = c$, где $c = const$.

### 3.3. Предел функции в точке

Под (d-*окрестностью* точки $M_0(x_0; y_0)$ будем понимать круг (открытый) радиуса $d$ с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ т. е.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < d^2.$$

Если из этого круга удалить его центр, то получим проколотую d- окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, т. е.

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < d^2.$$

Предположим, что функция двух переменных $z = f(x; y)$ определена в некоторой проколотой $d$-окрестности точки $M_0$.

Число А называется пределом функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $M(x; y)$, отличных от $M_0(x_0; y_0)$ и отстоящих от $M_0$ меньше, чем на $\delta$, выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

Обозначения

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(M) = A, \lim_{\Delta r \to 0} f(x; y) = A (\Delta r = |M_0 M|).$$

Очевидно, что процесс поиска предела функции двух переменных, а тогда и доказательство равенства

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$$

существенно сложнее случая одной переменной хотя бы потому, что условия

$$M \to M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta r \to 0$$

сложнее и разнообразнее: в них заложено произвольное приближение точки $M\,(x;y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$ .

Наряду с определением предела, приведенным выше, который также называется *двойным пределом*, имеет смысл рассматривать и так называемые *повторные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y))$ и $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y))$. При определенных условиях эти пределы могут оказаться равными и совпадающими с двойным.

*Замечание.* Данное определение двойного предела будем сохранять и в том случае, когда функция $f\,(x;\ y)$ определена только на некотором множестве $E$, имеющем предельную точку $M_0$. Точка $M_0$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества $E$, если каждая окрестность $M_0$ содержит хотя бы одну точку множества $E$. В таком случае $x \to x_0, y \to y_0$ *или* $(x;y) \to (x_0;y_0)$ означает, что точка $M(x;y)$ принадлежит только множеству $E$.

При вычислении двойных пределов можно и нужно использовать известные теоремы о пределах для функции одной переменной, для краткости, будем писать $f(M)$ вместо $f(x;\ y)$.

**Теорема 1 (о пределах)**. Пусть *f(M)* и *g(M)* — две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки $M_0$ и $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$ . Тогда

**1)** $\lim\limits_{M \to M_0} (f \pm g)(M) = A \pm B$;

**2)** $\lim\limits_{M \to M_0} (f \cdot g)(M) = A \cdot B$;

**3)** $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f}{g}(M) = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$;

**4)** $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M))^{g(M)} = A^B \, (A > 0)$.

### 3.4. Непрерывность функции в точке

Функция *z= f(M)* называется непрерывной в точке $M_0$, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) *f(M)* определена в некоторой окрестности точки $M_0$,

2) имеет предел в этой точке: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$,

3) этот предел равен значению функции в этой точке: $A=f(M_0)$.

*Замечание*. Данное определение непрерывности функции в точке $M_0$ будем сохранять и в том случае, когда *f(x; y)* определена только на некотором множестве *E*, содержащем точку $M_0$. В этом случае условие **2)** определения предела имеет вид $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in E}} f(M) = A$.

Если функция *f(x;y)* не определена в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) \neq f(x_0;y_0)$, то $M_0(x_0;\ y_0)$ называется точкой разрыва. Имеют место свойства, аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменной.

**Теорема 2 (о переходе к пределу).** Если *f(M)* непрерывна в точке $M_0$, то $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$.

**Теорема 3 (о сохранении знака).** Если *f(M)* непрерывна в точке $M_0$ и $f(M_0) > 0$ ($f(M_0) < 0$), то найдется *d*-окрестность точки $M_0$ в которой $f(M_0) > 0$ ($f(M_0) < 0$).

**Теорема 4 (о непрерывных функциях).** Пусть *f(M)* и *g(M)* — две функции, определенные в некоторой окрестности точки $M_0$ и непрерывных в этой точке. Тогда в этой точке непрерывны также функции $(f \pm g)(M)$, $(f \cdot g)(M)$, $\frac{f}{g}(M), (f(M))^{g(M)}$ при $f(M_0)>0$.

**Теорема 5 (о непрерывности сложной функции).** Пусть *f(M)* определена в некоторой окрестности точки $M_0$ и непрерывна в точке $M_0$, при этом значения *f(M)* попадают в некоторую окрестность точки $P_0$, причем $f(M_0) = P_0$. Пусть *g(P)* определена в окрестности точки $P_0$ и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция (суперпозиция) $g\left[f(M)\right] = \varphi(M)$ непрерывна в точке $M_0$.

### 3.5. Функции непрерывные на множестве

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества точек *E* называется *непрерывной на этом множестве*.

Для функций непрерывных на множестве имеют место аналоги теорем для функций одной переменной.

Множество $E$ называется *связным*, если две любые его точки можно соединить некоторой непрерывной кривой, полностью принадлежащей этому множеству.

**Теорема 6 (Коши об обращении в ноль).** Если $z = f(M)$ непрерывна на связном множестве $E$ и в двух различных его точках принимает значения разных знаков, то на $E$ найдется точка $P$ такая, что $f(P)=0$.

Множество E называется *ограниченным* если оно целиком принадлежит некоторому кругу $x^2 + y^2 \le R^2$.

Множество E называется *открытым*, если каждая точка принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью.

Открытое связное множество называется *областью*. Если к точкам области $D$ присоединить точки ее границы, то такая область называется *замкнутой* и обозначается $\bar{D}$.

Под граничной точкой области $D$ имеется в виду такая точка $P$, в каждой окрестности которой имеются как точки области D, так и точки не принадлежащие $D$. Граница области обозначается $\partial D$. Следовательно, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Для функций непрерывных в замкнутых областях имеют место теоремы Вейерштрасса, которые объединены в одну.

**Теорема 7 (Вейерштрасса).** Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то она ограничена в ней. При этом непрерывная функция достигает в замкнутой области свои наибольшее и наименьшее значения.

### 3.6. Определение частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$, определенную и непрерывную в некоторой области $D$. Считаем, что точки с координатами $(x; y)$, $(x + \Delta x; y)$, $(x; y + \Delta y)$,

$(x+\Delta x; y+\Delta y)$, где $\Delta x$, $\Delta y$ — приращения аргументов, также принадлежат области $D$.

*Частными приращениями* функции $z=f(x;y)$ по независимым переменным $x$ и $y$ называются разности

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y),\ \Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

*Полным приращением функции* $z=f(x;y)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x$ и $\Delta y$, называется разность

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

*Частной производной* функции $z=f(x;y)$ по переменным $x$ и $y$ называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x},\quad z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты обозначения: $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(x;y), \frac{\partial}{\partial x}z, \frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial x}f(x;y)$ (аналогично по другой переменной).

## 3.7. Геометрический смысл частной производной

Исходим из рис.3.1 на котором изображен график Г функции $z=f(x;y); P_0(x_0;y_0;z_0)-$ точка на графике, $M_0(x_0;y_0)$ - проекция $P_0$ на плоскость $Oxy$, $z_0 = M_0P_0$. Через прямую $M_0P_0$ проведены две плоскости $p_1$ и $p_2$: $p_1$ параллельна плоскости $Oxz$, $p_2$ параллельна плоскости $Oyz$.

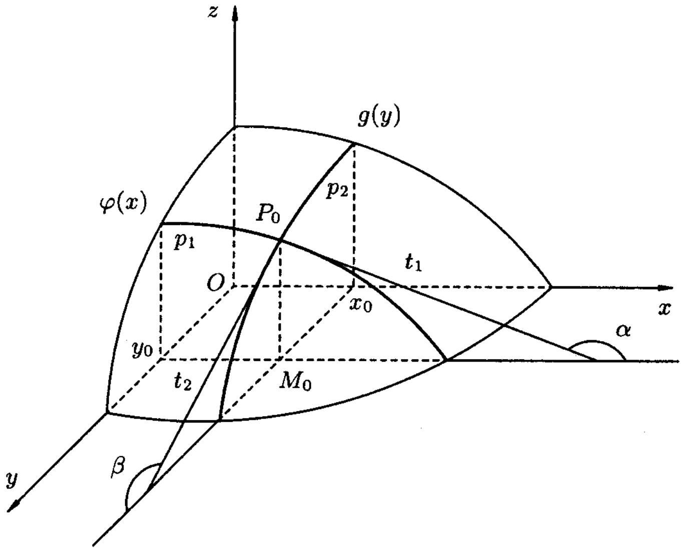



Рис. 3.1

Сечение Γ с первой плоскостью представляет собой кривую $z = f(x; y_0) = \varphi(x)$ - функцию переменной *x*, а сечение $\Gamma$ с $p_2$ представляет кривую $z = f(x_0; y) = g(y)$ - функцию переменной *y*. На чертеже изображены также касательные $t_1$ к $\varphi(x)$ в точке $P_0$ и $t_2$ - к *g(y)* в точке $P_0$. Тогда $z'_x(x_0; y_0) = \varphi'(x_0) = k_1 = tg\alpha$ - угловой коэффициент $t_1$, $\alpha$ -угол наклона $t_1$ к *Ox*, $z'_y(x_0; y_0) = g'(y_0) = k_2 = tg\beta$ - угловой коэффициент $t_2$, $\beta$ - угол наклона $t_2$ к *Oy*.

### 3.8. Дифференциал функции. Линеаризация функций

Если функция *f*(*x; y*) обладает частными производными $f'_x$ и $f'_y$, непрерывными в точке $M_0(x_0; y_0)$, то теорема Лагранжа (конечных приращений) для функции одной переменной позволяет получить следующее приближенное равенство (при $\Delta_x \sim 0$, $\Delta_y \sim 0$);

$$\Delta_z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) =$$

$$= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y)\, \Delta x + f'_y(x_0; y_0 + \theta_2 \Delta y)\, \Delta y \approx$$

$$\approx f'_x(x_0\, y_0)\, \Delta x + f'_y(x_0\, y_0)\, \Delta y$$

($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ - некоторые числа, фигурирующие в теореме Лагранжа).

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\, \Delta y$.

Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется *дифференциалом* этой функции в данной точке.

Обозначение $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ - произвольные приращения аргументов). Приняты также обозначения: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ -частные дифференциалы функции z. Тогда $dz = d_x z + d_y z$ - полный дифференциал функции $z$.

Как правило, под дифференциалом функции будем понимать полный дифференциал.

Если полное приращение $\Delta z$ функции $z = f'_x(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$, где A и B не зависят от $\Delta x$ и $\Delta y$, а $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \to (0;0)$ при $(\Delta x; \Delta y) \to (0;0)$, то функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0$.

**Теорема 8.** Для того, чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Сравнивая $\Delta z$ и $dz$ заключаем, что они являются величинами одинакового порядка малости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т.е. $\Delta z \approx dz(\Delta x \sim 0, \Delta y \sim 0)$. Это приближенное равенство (тем точнее, чем меньше $\Delta x$ и $\Delta y$), записанное в виде

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

Называется *линеаризацией* функции $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Это соотношение применяется в приближенных вычислениях: дифференцируемую функцию можно заменить линейной функцией в окрестности, рассматриваемой точки.

*Замечание.* Понятие частных производных, дифференциала, линеаризации распространяются на функции трех и более переменных.

### 3.9. Дифференцирование сложных и неявных функций. Касательная и нормаль к поверхности

*Случай одной независимой переменной.* Предположим, что $z = f(x; y)$ - дифференцируемая функция двух переменных x и y в некоторой области D, а аргументы x и y являются дифференцируемыми функциями некоторой переменной $t$, т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f[x(t); y(t)] = \varphi(t)$ - функция одной переменной t.

**Теорема 9.** Имеет место равенство

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем, t = x, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

и $\dfrac{dz}{dx}$ называется полной производной функции $z$ по $x$.

*Случай нескольких независимых переменных.* Если аргументы $x$ и $y$ функции $z = f(x;\, y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, *то*

$$z=f\left[x(u;v);y(u;v)\right]$$

также является функцией двух переменных $u$ и $v$.

**Теорема 10.** Имеют место формулы

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

### 3.10. Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$, можно получить, если в формуле дифференциала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

заменить $dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv$ и $dy=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv$.

В результате подстановки и перегруппировки членов при $du$ и $dv$ приходим к формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

показывающей, что форма (вид) дифференциала не зависит от того, являются ли $x$ и $y$ независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

### 3.11. Неявная функция одной переменной

Функция $y = y(x)$ называется неявной функцией, если она определяется уравнением $F(x;y) = 0$, неразрешенным относительно $y$.

Это значит, что при каждом значении $x_0$ при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение $y_0$ так, что $F(x_0;y_0) = 0$.

**Теорема 11.** Если $F(x;\ y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y в некоторой области D и $F'_y(x;y) \neq 0$, то уравнение $F(x;y)=0$ определяет однозначно неявную функцию y (x), также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$$

В частности,

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0;y_0)}{F'_y(x_0;y_0)}.$$

### 3.12. Неявная функция двух переменных

Функция $z = z(x;\ y)$ называется неявной функцией переменных $x$ и $y$, если она определяется уравнением $F(x;y;z) = 0$, неразрешенным относительно $z$.

**Теорема 12.** Если функция F (x; y; z) дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области D и $F'_z(x;y;z) \neq 0$; то уравнение F(x;y;z) =0 определяет однозначную неявную функцию z(x;y), также дифференцируемую и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.$$

### 3.13. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0(x_0; y_0; z_0)$ фиксированная точка на поверхности Г, заданной функцией z = *f*(x; y) или уравнением F(x; y; z) = 0.

*Касательной плоскостью* к Г в точке $P_0$ называется плоскость t, в которой расположены касательные к всевозможным кривым, проведенным на Г через $P_0$. *Нормалью* называется прямая n, проходящая через $P_0$ перпендикулярно $t$.

Из определения $t$ и $n$ следует, что нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой $n$ совпадают.

Уравнения t и n имеют вид:

а) если Г задана явно функцией $z = f(x; y)$, то:

$$(t): \; z - z_0 = z'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

$$(\mathrm{n}): \; \frac{x - x_0}{z'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1};$$

б) если Г задана уравнением F(x; y; z) = 0, то:

$$(t): \; \begin{aligned} &F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + \\ &+ F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0, \end{aligned}$$

$$(\mathrm{n}): \; \frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

## 3.14. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Определение частных производных второго порядка

Если задана функция $z = f(x;\ y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x; y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями двух независимых переменных $x$ и $y$. Приняты обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ - вторая частная производная по $x$;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$ смешанные

частные производные второго порядка;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$ - вторая частная производная по у.

**Теорема 13 (Шварца).** Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

***Дифференциал второго порядка***

Выражение

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

называется *вторым дифференциалом* или дифференциалом второго порядка для функции $z$.

### *Производные и дифференциалы высших порядков*

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно теореме Шварца, равны между собой.

Таким образом, имеем три различных производных второго порядка, четыре различных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и так далее.

Число разных частных производных порядка $n$ от функции двух переменных равно $n + 1$:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y},\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2},\ldots,\ \frac{\partial^n z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}},\frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}},\frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 .$$

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n (z),$$

напоминающем формулу бинома Ньютона.

### 3.15. Производная по направлению. Градиент.

**Определение производной по направлению**

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ представляют собой производные от функции z = $f(x; y)$ по двум частным направлениям осей $Ox$ и $Oy$.

Пусть $z = f(x; y)$ - дифференцируемая функция в некоторой области D, M($x_0; y_0) \in D$. Пусть $\vec{l}$ - некоторое направление (вектор с началом в точке $M_0$, а $\vec{e} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ - орт этого направления. Пусть $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ - точка в направлении $\vec{l}$ от $M_0$. Обозначим $\Delta p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta p} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta p} = \sin\alpha$,

Предел отношения

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta p} = \frac{\partial f}{\partial l}(x_0; y_0)$$

называется производной функции f по направлению $\vec{l}$.

Существование этого предела и выражение его через $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, вытекает из следующего соотношения:

$$\frac{\Delta_l f}{\Delta p} = \frac{f(x_0 + \Delta p\cos\alpha; y_0 + \Delta p\sin\alpha) - f(x_0; y_0 + \Delta p\sin\alpha)}{\Delta p\cos\alpha}\cos\alpha +$$

$$\frac{f(x_0; y_0 + \Delta p\sin\alpha) - f(x_0; y_0)}{\Delta p\sin\alpha}\sin\alpha \to \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,$$

$\Delta p \to 0$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha .$$

**Теорема 14.** Производная по направлению, касательному к линии уровня поверхности *z=f(x;y)* равна нулю.

***Случай нескольких переменных***

По аналогии со случаем функции двух переменных можно определить производную по направлению для функции трех переменных $u=f(x;\ y;\ z)$. Окончательная формула такова:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma ,$$

где $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ - орт направления; $\vec{l}$ или $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$ - направляющие косинусы направления $\vec{l}$ .

**Теорема 15.** Производная по направлению касательному к поверхности уровня функции $u = f(x;y;z)$, равна нулю.

***Градиент***

Градиентом функции $z=f(x;y)$ (скалярного поля) называется вектор с координатами $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Обозначение $grad\ \ z = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

**Теорема 16.** Имеет место равенство $\frac{\partial f}{\partial l} = grad z \cdot \vec{e}$ , т.е. производная по направлению $\vec{l}$ равна скалярному произведению векторов градиента и орта направления $\vec{l}$ .

*Следствие.* Вектор $\overline{\overline{grad z \cdot \vec{e}}}$ в каждой точке направлен по нормали к линии уровня, проходящей через данную точку в сторону возрастания функции.

При этом

$$\max_{\{l\}} \frac{\partial f}{\partial l} = \left| grad z \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \ .$$

**Теорема 17.** Скорость изменения функции $f$ по некоторому направлению $\vec{l}$ равна проекции вектора градиента на это направление, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = np_{l}\, grad f \ .$$

## 3.16. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, непрерывную в точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности.

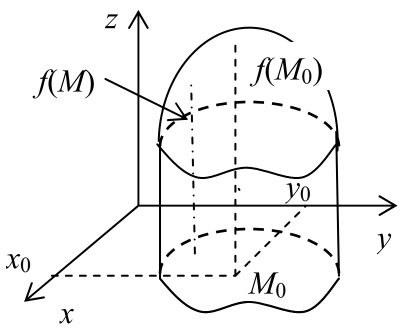



Рис. 3.2.

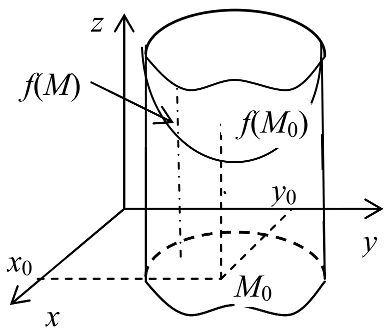



Рис. 3,3.

*Точка* $M_0(x_0,y_0)$ *называется точкой максимума функции* $z = f(M)$ (рис.3.2), *если всюду в некоторой окрестности точки* $M_0$ $(0<d(M_0M) < \delta)$ *выполняется неравенство*

$$f(M) < f(M_0) \quad \text{или} \quad \Delta z = f(M) - f(M_0) < 0$$

*Точка* $M_0(x_0,y_0)$ *называется точкой минимума функции* $z = f(M)$ (рис.3.3), *если всюду в некоторой окрестности точки* $M_0$ $(0<d(M_0M) < \delta)$ *выполняется неравенство*

$$f(M) > f(M_0) \quad \text{или} \quad \Delta z = f(M) - f(M_0) > 0.$$

Точки максимума и точки минимума – точки экстремума. Понятие экстремума носит локальный характер: в определении рассматриваются лишь точки $M_1$ достаточно близкие к точке $M_0$.

**Теорема 18.** (Необходимое условие). *Если функция* $z = f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *и имеет в этой точке экстремум, то*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z = f(x,y)$ имеет максимум, т.е.

$f(x,y) < f(x_0, y_0)$ $\forall$ $x \in \delta$-окрестности точки $M_0$ (рис.3.4). В частности, это неравенство выполнено для точек, ординаты которых равны $y=y_0$.

$f(x,y_0) < f(x_0, y_0)$ $\forall$ $x \in \delta$ (1)

для функции одной переменной $z = f(x,y_0)$.

Из неравенства (1) следует, что функция одной переменной $z = f(x,y_0)$ имеет в точке $x_0$ экстремум (максимум). Кроме того эта функция в точке $x = x_0$ имеет

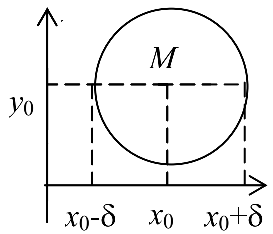



Рис.3.4.

производную: $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

На основании необходимого признака экстремума функции одной переменной заключаем, что

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Полагая, что $x = x_0$, точно так же докажем, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

*Следствие. В тех точках в которых существуют частные производные и хотя бы одна из них отлична от нуля, экстремума быть не может.*

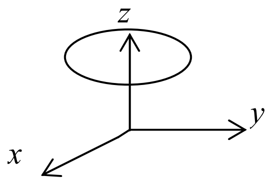
Значит экстремум следует искать только в тех точках, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.

Такие точки называются критическими (стационарными). В критической точке экстремум может быть, а может и не быть. В общем случае о наличии или отсутствии экстремума в критической точке судят с помощью достаточных признаков экстремума.

В частных случаях, когда в некоторой области имеется только одна стационарная точка, можно обойтись без достаточных признаков.

Пример. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 0 \\ &y = 0 \\ &O(0,0) \end{aligned}$$




Частные производные обращаются в ноль только в одной точке $O(0,0)$. Но в этой точке $z = f(0,0) = 0$, а в остальных точках $f(M)>0$, ясно, что в начале координат функция имеет минимум.

### *Достаточный признак экстремума*

**Теорема 19.** *Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, а в самой точке $M_0$*

$f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (*т.е. точка $M_0$ является критической). Обозначим:*

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Тогда :

1. Если число $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке $M_0$ $(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет экстремум, а именно максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$.

2. Если число $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в точке $M_0$ $(x_0, y_0)$ экстремума нет.

3. Если число $\Delta = AC - B^2 = 0$, то признак не применим.

**Пример** . Найти экстремум функции

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27 .$$

Найдем частные производные и приравняем их нулю.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 9y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 9x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{aligned}.$$

Решая систему уравнений, получим критические точки

$x_1=0$; $y_1=0$; $x_2=3$; $y_2=3$; $M_1(0,0)$; $M_2(3,3)$.

Найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точке $M_1$: $A=0$, $B=-9$, $C=0$. $AC - B^2 < 0$.
Экстремума нет .

В точке $M_2$: $A=18$, $B=-9$, $C=18$. $AC - B^2 > 0$.
Следовательно, в точке $M_2$ функция имеем минимум, так как $A>0$.

$$z_{\min} = 27 + 27 - 81 + 27 = 0$$

## 3.17. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z=f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда в области $\overline{D}$ найдётся хотя бы одна точка $A(x_0,y_0)$, в которой функция принимает своё наибольшее значение $M$: $f(x_0,y_0) = M$ и найдется хотя бы одна точка $B(x_1,y_1)$, в которой функция принимает своё наименьшее значение $m$:

$$f(x_1,y_1) = m, \text{ т.е. } f(x,y)\le M \text{ и } f(x,y)\ge m \quad \forall M\in \overline{D}. \qquad (2)$$

Возможны два случая. Точка $A$ лежит внутри области $D$ или точка $A$ лежит на границе. То же самое и относительно точки $B$. Если $A$ и $B$ лежат внутри области, то они, в силу неравенств (2), совпадают с экстремальными точками.

Таким образом для нахождения наибольшего и наименьшего значений надо:

1) найти все критические точки, попадающие внутрь области $D$ и вычислить значения функции в этих точках.

2) найти критические точки на границе области и вычислить в них значения функции.

3) затем выбирают наибольшее и наименьшее из всех полученных чисел. Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Найдем критические точки внутри области, для чего приравняем нулю частные производные

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 2x \\ z'_y &= -2y \end{aligned}\right\}$$ $M_1(0,0)$. Значение функции в критической точке $M_1$ : $z(0,0)=0$.

Запишем уравнение границы в параметрическом виде $\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$. Тогда функция $z=\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, где $t \in [0, 2\pi]$.

$z' = -2\sin 2t$, $z' = 0$ или $\sin 2t = 0$

Найдем корни уравнения : $2t = \pi k$, $t = \frac{k\pi}{2}$. Для различных значений $k$ получим:

$t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$, $t_3=\pi$, $t_4=\frac{3\pi}{2}$, $t_5=2\pi$.

Вычислим значения функции в этих точках

$z\Big|_{t=0} = 1$; $z\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1$; $z\Big|_{t=\pi} = 1$;

$z\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1$; $z\Big|_{t=2\pi} = 1$

При $t=0$ и $t=\pi$ функция имеет наибольшее значение $z_1=1$. При $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$ функция имеет наименьшее значение $z_2 = -1$.

### 3.18. Формула Тейлора для функции двух переменных

**Теорема 20.** Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ из этой окрестности справедливо равенство

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(N)}{(n+1)!},$$

где $N(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ - некоторая точка, лежащая на отрезке $M_0M$, ( $0 < \theta < 1$). Последнее слагаемое (остаточный член) можно записать в форме Пеано $o(\rho^n)$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, а символ $o(\rho^n)$ означает бесконечно малую при $\rho \to 0$ (или при $M \to M_0$) функцию более высокого порядка малости, чем $\rho^n$.

<u>Доказательство</u>. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = f(M_t)$, определенную на отрезке $[0,1]$, причем $\phi(0) = f(M_0)$, $\phi(1) = f(M)$. Найдем производные функции $\phi(t)$ до $n$-го порядка включительно:

$$\phi'(t) = f'_x(M_t)\Delta x + f'_y(M_t)\Delta y = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)|_{M_t} = df(M_t);$$

$$\phi''(t) = f''_{xx}(M_t)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_t)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_t)\Delta y^2 =$$
$$= (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)^2 f\,|_{M_t} = d^2 f(M_t);$$

…

$$\phi^{(n)}(t) = (\frac{\partial \cdot}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\Delta y)^n f\,|_{M_t} = d^n f(M_t).$$

По формуле Маклорена для функции $\phi(t)$ одной переменной имеем:

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{\phi''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{(n+1)},$$

где $0 < \theta < 1$.

Полагая $t = 1$, получим

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{2!} + ... + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

С учетом того, что $\phi(1)=f(M)$, $\phi^{(k)}(0)=d^k f(M_0)$, $\phi^{(n+1)}(\theta)=f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=f(N)$ имеем

$$f(M)=f(M_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(N)}{(n+1)!}.$$

В частности,

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2]+\frac{1}{3!}[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y}(x-x_0)^2(y-y_0)+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y^2}(x-x_0)(y-y_0)^2+$$

$$\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3]+\ldots+\frac{1}{n!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^n f\,|_{(x_0,y_0)}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^{(n+1)} f\,|_{(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y)}.$$

Остаточный член

$$\frac{1}{(n+1)!}[\frac{\partial\cdot}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\cdot}{\partial y}(y-y_0)]^{(n+1)} f\,|_{(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y)}$$ можно

записать в виде $o(\rho^n)$, где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Пример. Разложить функцию $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка включительно.

<u>Решение</u>. Найдем частные производные функции $f(x,y)$ до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y};\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2});\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^3})+e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{1}{y^2});\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^4}+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3}.$$

В точке $M_0(0,1)$ имеем

$$f(M_0)=1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=1;\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0;\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=1;$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)=-1;\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=0.$ Подставляя эти выражения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{\frac{x}{y}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+R_3=1+2x+\frac{1}{2}x^2-xy+R_3.$$

В форме Пеано $R_3=o(x^2+(y-1)^2)$.

### 3.19. Условный экстремум

Рассмотрим функцию

$$u=f(M)=f(x_1,x_2,\ldots x_m) \qquad (3)$$

при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой $k$ соотношениями $(k<m)$:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., k). \tag{4}$$

Эти соотношения называются условиями связи. Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ удовлетворяют уравнениям (4).

*Определение.* Функция (3) имеет в точке $M_0$ условный минимум (максимум) при условиях связи (4), если существует такая окрестность точки $M_0$, что для любой точки $M$ ($M \neq M_0$) этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (4), выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

Иными словами, условный максимум (минимум)- это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке $M_0$ по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки $M_0$, а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Задачу об условном экстремуме функции можно решать *методом исключения части переменных.* Этот метод состоит в том, что из $k$ уравнений условий связи $k$ переменных выражают через остальные $m-k$ переменных (если это возможно), подставляют найденные переменные в функцию $u = f(M) = f(x_1, x_2, ...x_m)$ и решают задачу об экстремуме функции $m-k$ переменных.

Пример. Методом исключения части переменных найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Решение. Из условий связи находим $z = x + 1$, $y = xz + 1$. Подставляя найденные $z, y$ в функцию, приходим к функции одной переменной $x$ : $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как $u' = 4(x+1) = 0$ при $x = -1$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Поскольку $u''(-1) = 4 > 0$, в точке $x = -1$ функция $u(x)$ имеет минимум. Из условий связи находим соответствующие значения $z, y$: $z = 0, y = 1$. Итак, функция $u(x)$ при заданных условиях связи имеет в точке (-1,1,0) минимум, причем $u(-1,1,0) = 0$.

Метод Лагранжа. Задача об условном экстремуме функции (3) при условиях связи (4) эквивалентна задаче об обычном экстремуме функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k) = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_m),$$

$\lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ - называются множителями Лагранжа.

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $m + k$ уравнений :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k) = 0, \ i = 1, 2, ..., m, \\ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \ i = 1, 2, ..., k \end{cases} \tag{5}$$

относительно $m + k$ неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m, \lambda_1, ...\lambda_k$. Если $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0$ - решение системы (5), то $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ является точкой возможного экстремума функции (3) при условиях связи (4). Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2 L(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0, dx_1, ..., dx_m) .$$

Для каждой системы значений $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0$, полученной из (5) при условии, что $dx_1, ..., dx_m$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i (x_1^0, ..., x_m^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., k) \tag{6}$$

при $dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2 \neq 0$.

Функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, ...x_m)$ имеет условный максимум в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$, если для всевозможных значений $dx_1, ..., dx_m$, удовлетворяющих условиям (6) и не равных одновременно нулю, выполняется неравенство $d^2L(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0, dx_1, ..., dx_m) < 0$ (квадратичная форма отрицательно определена) и условный минимум, если при этих условиях $d^2L(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0, dx_1, ..., dx_m) > 0$ (квадратичная форма положительно определена) то в точке $M_0$ функция (3) имеет условный минимум при условии связи (4), если $d^2L(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, \lambda_1^0, ...\lambda_k^0, dx_1, ..., dx_m)$ - знакопеременная квадратичная форма, то в точке $M_0$ функция (3) не имеет условного экстремума.

**Пример 1.** Методом Лагранжа найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

**Решение.** Составим функцию Лагранжа

$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0, \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $x = -1, y = 1, z = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1,$ то есть $M_0(-1,1,0)$ - единственная точка возможного экстремума функции при заданных условиях связи. Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа $d^2F = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz$ и подставляя $\lambda_2 = -1$ и $dz = dx$, найденное из первого уравнения связи, получаем положительно определенную квадратичную форму от переменной $dx: 4(dx)^2 > 0$ при $dx \neq 0$. Отсюда следует, что функция при заданных условиях связи имеет в точке $M_0$ условный минимум.

**Пример 2.** На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки (0,0,3).

**Решение.** Расстояние между точками $(x, y, z)$ и (0,0,3) определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ при условии связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0, \\ \varphi = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \end{cases}$$

Так как эллипсоид более всего вытянут вдоль оси $Ox$, то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, то есть $x \neq 0$. Поэтому из первого уравнения системы следует, что $\lambda = -1$. Тогда из второго и третьего уравнений системы имеем $y = 0,\ z = -1.$ Из последнего уравнения системы находим $x = \pm 2.$ Итак, функция имеет две точки возможного экстремума $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$. Из уравнения связи получим $xdx + 2ydy + 4zdz = 0$, откуда $dz = -\dfrac{x}{4z}dx - \dfrac{y}{2z}dy.$ Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2.$$

Подставим $\lambda = -1$, координаты точки $M_1$ и выражение для $dz$, получаем отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных $dx, dy$ $: d^2L = -2(dy)^2 - 3{,}5(dx)^2$.

Отсюда следует, что функция имеет в точках $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$ условный максимум при заданных условиях связи, то есть на эллипсоиде имеются две точки $M_1(2,0,-1),\ M_2(-2,0,-1)$ наиболее удаленные от точки (0,0,3).

## 3.20. Примеры решения типовых задач

***Частные производные***

Постановка задачи. *Найти частные производные до второго порядка включительно функции $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.*

План решения.

1. Чтобы найти частную производную функции $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по переменной $x_k$, фиксируем остальные переменные и дифференцируем $f$ как функцию одной переменной $x_k$.

2. Частные производные высших порядков вычисляются аналогично последовательным дифференцированием, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),\dots$$

Замечание. Частные производные можно обозначать также $z'_{x1}$, $z'_{x2}$, …, $z''_{xn}$, $z''_{x1x1}, z''_{x1x2}$ и т.д.

**Пример.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции $z = x^y$ ($x>0$).

**Решение.**

1. Для того чтобы найти частную производную по $x$, фиксируем $y$ и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной $x$. Используя формулу для производной степенной функции $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, получим

$$z'_x = yx^{y-1}.$$

Для того чтобы найти частную производную по $y$, фиксируем $x$ и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной $y$. Использую формулу для производной показательной функции $(a^u) = a^u \ln a$ ($a>0$), получим

$$z'_y = x^y \ln x.$$

2. Частную производную второго порядка $z''_{xx}$ вычисляем, дифференцируя $z'_x$ по $x$ (при фиксированном $y$), т.е.

$$z''_{xx} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}.$$

Частную производную второго порядка $z''_{xy}$ вычисляем, дифференцируя $z'_x$ по $y$ (при фиксированном $x$), т.е.

$$z''_{xy} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x.$$

Частную производную второго порядка $z''_{yx}$ вычисляем, дифференцируя $z'_y$ по $x$ (при фиксированном $y$), т.е.

$$z''_{yx} = (x^y \ln x)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x}.$$

Частную производную второго порядка $z''_{yy}$ вычисляем, дифференцируя $z'_y$ по $y$ (при фиксированном $x$), т.е.

$$z''_{yy} = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln^2 x.$$

Ответ. $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$, 32 $''_{yx} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $z''_{xx} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{yy} = x^y \ln^2 x$.

**Условия задач.** *Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций.*

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = xli(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln \sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x\cos y + y\sin x$.
10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

Ответы. **1.** $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$, $z''_{xx} = y^2e^{xy}$, $z''_{yy} = x^2e^{xy}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = e^{xy}(1+xy)$. **2.** $z'_x = \ln x - \ln y + 1$, $z'_y = -x/y$, $z''_{xx} = 1/x$, $z''_{yy} = x/y^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1/y$. **3.** $z'_x = y\cos(xy)$,

$z'_y = x\cos(xy)$, $z''_{xx} = -y^2 \sin(xy)$, $z''_{yy} = -x^2 \sin(xy)$,
$z''_{xy} = z''_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$. **4.** $z'_x = e^x \cos y$, $z'_y = -e^x \sin y$,
$z''_{xx} = e^x \cos y$, $z''_{yy} = -e^x \cos y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -e^x \sin y$.
**5.** $z'_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$, $z''_{xx} = y^2/(x^2+y^2)^{3/2}$,
$z''_{yy} = x^2(x^2+y^2)^{3/2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -xy/(x^2+y^2)^{3/2}$.
**6.** $z'_x = 2x/(x^2+y)$, $z'_y = 1/(x^2+y)$, $z''_{xx} = 2(y-x^2)/(x^2+y^2)$,
$z''_{yy} = -1/(x^2+y^2)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -2x/(x^2+y^2)$.
**7.** $z'_x = y/\sqrt{2xy+y^2}$, $z'_y = (x+y)/\sqrt{2xy+y^2}$,
$z''_{xx} = -y^2/(2xy+y^2)^{3/2}$, $z''_{yy} = -x^2/(2xy+y^2)^{3/2}$,
$z''_{xy} = z''_{yx} = xy/(2xy+y^2)^{3/2}$. **8.** $z'_x = 1/(3x)$, $z'_y = 1/(3y)$,
$z''_{xx} = -1/(3x^2)$, $z''_{yy} = -(3y^2)^{-1}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.
**9.** $z'_x = \cos y - y\cos x$, $z'_y = \sin x - x\sin y$, $z''_{xx} = -y\sin x$,
$z''_{yy} = -x\cos y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \cos x - \sin y$. **10.** $z'_x = 2(1+x)(1+y)^4$,
$z'_y = 4(1+x)^2(1+y)^3$, $z''_{xx} = 2(1+y)^4$, $z''_{yy} = 12(1+x)^2(1+y)^2$,
$z''_{xy} = z''_{yx} = 8(1+x)(1+y)^3$.

### *Градиент*

Постановка задачи. *Найти градиент функции $u=f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,,y_0,,z_0)$.*

План решения. *Градиент функции $f(x,y,z)$* – это вектор, координаты которого в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются частными производными функции $f(x,y,z)$, т.е.

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$

1. Находим частные производные функции $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

2. Вычисляем частные производные функции *f(x,y,z)* в точке $M(x_0,,y_0,,z_0)$.

3. Вычисляем градиент функции $u=f(x,y,z)$ в точке $M(x_0,,y_0,,z_0)$:

$$grad\ f\big|_M = \left\{f'_x(x_0, y_0, z_0),\ f'_y(x_0, y_0, z_0),\ f'_z(x_0, y_0, z_0)\right\}.$$

Записываем ответ.

**Пример.** Найти градиент функции $u = x^2 - arctg(y+z)$ в точке М (2,1,1).

**Решение.**

1. Находим частные производные функции

$$u = x^2 - arctg(y+z):$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1 \qquad 34}{1+(y+z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - arctg(y+z)$ в точке М (2,1,1):

$$f'_x(2,1,1) = 4, \quad f'_y(2,1,1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_z(2,1,1) = -\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u = x^2 - arctg(y+z)$ в точке М (2,1,1):

$$grad\ f\big|_{(2,1,1)} = \left\{f'_x(2,1,1),\ f'_y(2,1,1),\ f'_z(2,1,1)\right\} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $grad\ f\big|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$

**Условия задач.** *Найти градиент функции* $u = f(x,y,z)$ в точке М.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad M(2,1,1).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad M(1,5,-2).$
3. $u = \sin(x+2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad M(\pi/2, 3\pi/2, 3).$

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1, 1, 0).$

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1, 1, 0).$

6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1, 3, 2).$

7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad M(1, 1, 2).$

8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1, -1, 2).$

9. $u = xy - x / z, \quad M(-4, 3, -1).$

10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1, -3, 4).$

Ответы. **1.**{1, 1, 1}. **2.**{55/6, 5/6, 2/3}. **3.** {3, 1, π/2}. **4.** {3, 1, 0}. **5.**{1/2, 1/2, 0}. **6.**{17, 12, 9}. **7.**{4, 4, 0}. **8.**{1, -1, 0}. **9.**{4, -4, -4}. **10.** {1/6, -1/10, 2/15}.

### *Производная по направлению*

Постановка задачи. *Найти производную функции u(x,y,z) в точке* $A(x_1 , y_1 , z_1)$ *по направлению к точке* $B(x_2 , y_2 , z_2)$.

План решения.

1. Если функция *u(x,y,z)* дифференцируема в точке $A(x_1 , y_1 , z_1)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, определяемая формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_A = (grad\, u\big|_A, \vec{l}_0), \tag{7}$$

где

$$grad\, u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \quad \vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

2. находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае

$$\vec{l} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

3. Находим единичный вектор (орт) $\vec{l}_0$:

$$\vec{l}_0=\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{\left\{x_2-x_1,\,y_2-y_1,\,z_2-z_1\right\}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

4. Вычисляем частные производные и градиент функции *u(x,y,z)* в точке *A(x₁ , y₁ , z₁)*:

$$grad\ u\big|_A=\left\{u'_x(x_1,y_1,z_1),u'_y(x_1,y_1,z_1),u'_z(x_1,y_1,z_1)\right\}.$$

5. Вычисляем скалярное произведение в формуле (7), получаем ответ.

**Пример.** Найти производную функции $u=x^2-arctg(y+z)$ в точке A(2, 1, 1) по направлению к точке B(2, 4, -3).

**Решение.**

1. Так как функция $u=x^2-arctg(y+z)$ дифференцируема в точке A(2, 1, 1), то этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, которая определяется формулой (7).

2. Находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае

$$\vec{l}=\overline{AB}=\{0,3,-4\}.$$

3. Находим единичный вектор (орт) $\vec{l}_0$:

$$\vec{l}_0=\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{\{0,3,-4\}}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}}=\left\{0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right\}.$$

4. Вычисляем частные производные функции $u=x^2-arctg(y+z)$ в точке A(2, 1, 1):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(2,1,1)}=2x\big|_{(2,1,1)}=4,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(2,1,1)}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}\bigg|_{(2,1,1)}=-\frac{1}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(2,1,1)}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}\bigg|_{(2,1,1)}=-\frac{1}{5}.$$

Тогда

$$grad\ u\big|_{(2,1,1)}=\left\{4,-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right\}.$$

5. Подставляя полученные значения в формулу (7) и вычисляя скалярное произведение, получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(2,1,1)} = (grad\ u\Big|_{(2,1,1)}, \vec{l}_0) = 4\cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25}.$$

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(2,1,1)} = \frac{1}{25}$.

**Условия задач.** Найти производную функции *u(x,y,z)* в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 - y^2), \quad A(2, 1, 1), \quad B(0, 2, 0).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad A(1, 5, -2), \quad B(1, 7, -4).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right), \quad B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad A(1, 1, 0), \quad B(1, 2, -1).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad A(1, 1, 0), \quad B(3, 3, -1).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad A(1, 3, 2), \quad B(0, 5, 0).$
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad A(1, 1, 2), \quad B(6, -5, 2\sqrt{5 + 2}).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad A(1, -1, 2), \quad B(2, -2, 3).$
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad A(1, -3, 4), \quad B(-1, -4, 5).$
10. $u = xy - \frac{x}{z}, \quad A(-4, 3, -1), \quad B(1, 4, -2).$

ОТВЕТЫ. **1.** $-\sqrt{6}/3$. **2.** $\sqrt{2}/12$. **3.** 3. **4.** $\sqrt{2}/2$. **5.** 2/3. **6.** -11/3. **7.** -4/9. **8.** $2\sqrt{3}/3$. **9.** $-\sqrt{6}/60$. **10.** $20\sqrt{3}/9$.

### ***Производные сложной функции***

Постановка задачи. *Найти производные* $z'_x$ *и* $z'_y$ *функции* $z = z(u, \upsilon)$, *где* $u = u(x, y)$ *и* $\upsilon = \upsilon(x, y)$.

План решения. Поскольку $z$ является сложной функцией двух переменных $x$ и $y$, то ее производные $z'_x$ *и* $z'_y$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}. \tag{9}$$

1. Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial \upsilon},\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}.$$

2. Подставляем полученные результаты в формулы (8) и (9) и записываем ответ.

Замечание. Формулы (8) и (9) можно обобщить на функции любого числа переменных. Например, если дана функция $f(u,\upsilon,\omega)$, где $u=u(x,y,t)$, $\upsilon=\upsilon(x,y,t)$ и $\omega=\omega(x,y,t)$, то ее частные производные $f'_x, f'_y, f'_t$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

**Пример.** Найти производные $z'_x$ и $z'_y$ функции $z=u/\upsilon$, где $u=x^y$ и $\upsilon=\sqrt{xy}$.

**Решение.**

1. Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{\upsilon},\quad \frac{\partial z}{\partial \upsilon}=-\frac{u}{\upsilon^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

2. Подставляя полученные результаты в формулы (8) и (9), получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\upsilon}\cdot yx^{y-1}-\frac{u}{\upsilon^2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\upsilon}\cdot x^{y}\ln x-\frac{u}{\upsilon^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\upsilon}\cdot yx^{y-1}-\frac{u}{\upsilon^2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\upsilon}\cdot yx^{y}\ln x-\frac{u}{\upsilon^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$, где $u=x^y, \upsilon=\sqrt{xy}$.

**Условия задач.** *Найти производные* $z'_x$ *и* $z'_y$ *функции* $z=z(u,\upsilon)$*, где* $u=u(x,y)$ *и* $\upsilon=\upsilon(x,y)$.

1. $z=u^2+\upsilon^2,\quad u=x+y,\quad \upsilon=x-y.$
2. $z=\ln(u^2+\upsilon^2),\quad u=xy,\quad \upsilon=x/y.$
3. $z=u^{\upsilon},\quad u=\sin x,\quad \upsilon=\cos y.$
4. $z=u^2+2\upsilon^3,\quad u=x^2-y^2,\quad \upsilon=e^{xy}.$
5. $z=arctg(u/\upsilon),\quad u=x\sin y,\quad \upsilon=x\cos y.$
6. $z=\ln(u-\upsilon^2),\quad u=x^2+y^2,\quad \upsilon=y.$
7. $z=u^3+\upsilon^2,\quad u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad \upsilon=arctg(y/x).$
8. $z=\sqrt{u\upsilon},\quad u=\ln(x^2+y^2),\quad \upsilon=xy^2.$
9. $z=e^{u\upsilon},\quad u=\ln x,\quad \upsilon=\ln y.$
10. $z=\ln(u/\upsilon),\quad u=\sin(x/y),\quad \upsilon=\sqrt{x/y}.$

Ответы.

**1.** $z'_x=2u+2\upsilon,\quad z'_y=2u-2\upsilon.$

**2.** $z'_x=\frac{2u}{u^2+\upsilon^2}\cdot y+\frac{2\upsilon}{u^2+\upsilon^2}\cdot\frac{1}{y},\quad z'_y=\frac{2u}{u^2+\upsilon^2}\cdot x-\frac{2\upsilon}{u^2+\upsilon^2}\cdot\frac{x}{y^2}.$

**3.** $z'_x=\upsilon u^{\upsilon-1}\cdot\cos x,\quad z'_y=u^{\upsilon}\ln u\cdot(-\sin y).$

**4.** $z'_x=2u\cdot 2x+6\upsilon^2\cdot ye^{xy},\quad z'_y=2u\cdot(-2y)+6\upsilon^2\cdot xe^{xy}.$

**5.** $z'_x = \dfrac{\upsilon}{u^2+\upsilon^2}\cdot\sin y - \dfrac{u}{u^2-\upsilon^2}\cdot\cos y,$

$z'_y = \dfrac{\upsilon}{u^2+\upsilon^2}\cdot x\cos y - \dfrac{u}{u^2+\upsilon^2}\cdot x\sin y.$

**6.** $z'_x = \dfrac{1}{u-\upsilon^2}\cdot 2x,\quad z'_y = \dfrac{1}{u-\upsilon^2}\cdot 2y + \dfrac{2\upsilon}{u-\upsilon^2}.$

**7.** $z'_x = 3u^2\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2} - 2\upsilon\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2},$

$z'_y = 3u^3\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2} + 2\upsilon\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}.$

**8.** $z'_x = \dfrac{\sqrt{\upsilon}}{2\sqrt{u}}\cdot\dfrac{2x}{x^2+y^2} + \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{\upsilon}}\cdot y^2,$

$z'_y = \dfrac{\sqrt{\upsilon}}{2\sqrt{u}}\cdot\dfrac{2y}{x^2+y^2} + \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{\upsilon}}\cdot 2xy.$

**9.** $z'_x = \upsilon e^{u\upsilon}\cdot\dfrac{1}{x},\quad z'_y = ue^{u\upsilon}\cdot\dfrac{1}{y}.$

**10.** $z'_x = \dfrac{1}{u}\cdot\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\upsilon}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{xy}},$

$z'_y = \dfrac{1}{u}\cdot\cos\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + \dfrac{1}{\upsilon}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}.$

### ***Производная неявной функции***

Постановка задачи. *Найти производную функцию* $y = y(x)$*, заданной неявно уравнением*

$$F(x, y) = 0. \qquad (10)$$

План решения. Если при каждом фиксированном *x*, принадлежащем некоторой области *D*, уравнение (10) имеет единственное решение *y*, принадлежащее некоторой области *E*, то уравнение (10) задает функцию $y = y(x)$ с областью определения $D$ и областью значений $E$.

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0 = y(x_0))$ функция $F(x,y)$ дифференцируема и $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (10) определяет функцию $y=y(x)$, дифференцируемую в точке $x_0$, причем ее производная определяется формулой

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{11}$$

1. Вычисляем частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$, где $y_0$ есть корень уравнения $F(x_0, y) = 0$.

2. Находим $y'(x_0)$ по формуле (11) и записываем ответ.

Замечание. Аналогично вычисляются частные производные функций нескольких переменных, заданных неявно. Например, если уравнение $F\ (x\ ,y\ ,z) = 0$ задает функцию $z = z\ (x\ ,y)$ , то при известных условиях функции $z = z\ (x\ ,y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$ и ее частные производные определяются функциями

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

где $z_0$ есть корень уравнения $F(x_0, y_0, z) = 0$.

**Пример.** Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\frac{y}{x}. \tag{12}$$

**Решение.**

1. В данном случае $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - arctg\frac{y}{x}$.

Вычисляем ее частные производные:

$$F'_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F'_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Очевидно, что $F(x,y)$, $F'_x$ и $F'_y$ непрерывны при всех $x \neq 0$ и $F'_y \neq 0$ при $x \neq y$. Следовательно, уравнение (12) определяет функцию $y(x)$, дифференцируемую во всех точках $(x_0, y_0)$ области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

2. Находим $y'$ по формуле (11)

$$y' = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = -\frac{(x_0+y_0)/(x_0^2+y_0^2)}{(y_0-y_0)/(x_0^2+y_0^2)} = \frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}.$$

Ответ.

$y' = \dfrac{x_0+y_0}{x_0-y_0}$ при всех $x_0, y_0$, удовлетворяющих уравнению (12), в области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

**Условия задач.** *Найти производные функций* $y = y(x)$*, заданных неявно уравнениями.*

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.
6. $x - y + arctgy = 0$.
7. $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Ответы.

**1.** $y' = -\dfrac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.

**2.** $y' = \dfrac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$.

**3.** $y' = \dfrac{y}{y-1}$.

**4.** $y' = \dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$.

**5.** $y' = \dfrac{y^2 e^{2x} - xe^{2y}}{x^2 e^{2y} - ye^{2x}}$.

**6.** $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2}$.

**7.** $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

**8.** $y' = \dfrac{y(2x + e^{xy} - \cos xy)}{x(\cos xy - e^{xy} - x)}$.

**9.** $y' = -\dfrac{y}{x}$.

**10.** $y' = \dfrac{2y-2x-1}{2y-2x+1}$.

## *Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

Постановка задачи. *Найти уравнение касательной и нормали к поверхности, заданной уравнением*

$$F(x,y,z)=0,$$

*в точке* $M(x_0, y_0, z_0)$.

План решения.

Нормальный вектор к поверхности, заданной уравнением

$$F(x,y,z)=0$$

в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ определяется формулой

$$\vec{n} = grad\ F\Big|_M = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_M, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_M, \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M \right\}.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x\Big|_M (x + x_0) + F'_y\Big|_M (x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z\Big|_M (z - z_0) = 0 \qquad (13)$$

и уравнения нормали –

$$\frac{x - x_0}{F'_x\Big|_M} = \frac{y - y_0}{F'_y\Big|_M} = \frac{z - z_0}{F'_z\Big|_M}. \qquad (14)$$

1. Находим частные производные $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

2. Подставляем найденные значения в уравнения (13) и (14) и записываем ответ.

Замечание. Если заданы только значения $x_0$ и $y_0$, то координата $z_0$ точки М определяется из условия, что точка М принадлежит данной поверхности , т.е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

**Пример.** Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением

$$z = xy$$

в точке М(1, 1).

**Решение.** Запишем уравнение поверхности в виде $xy$-$z$=0, т.е. $F = xy - z$.

Координаты точки М: $x_0$=1 и $y_0$=1. Координаты $z_0$ определяем из условия, что точка М принадлежит данной поверхности, т.е. $F(1, 1, z_0) = 0$. Получаем $z_0$=1.

1. Находим частные производные $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$ в точке М(1, 1, 1):

$$F'_x\Big|_{(1,1,1)} = y\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad F'_y\Big|_{(1,1,1)} = x\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad F'_z\Big|_{(1,1,1)} = -1.$$

2. Подставляя найденные значения в уравнения (13) и (14), получаем уравнение касательной плоскости

$$1(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$$

и уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Ответ. Уравнение касательной плоскости: $x + y - z - 1 = 0$. Уравнение нормали: $x - 1 = y - 1 = 1 - z$.

**Условия задач.** *Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.*

1. $z = x^2 + y^2, \quad M(1, -2, 5)$.

2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, \quad M(4, 3, 4)$.

3. $z = \sin x \cos y, \quad M(\pi/4, \pi/4, 1/2).$

4. $z = e^{x\cos y}, \quad M(1, \pi, 1/e).$

5. $z = y\,tg\,x, \quad M(\pi/4, 1, 1).$

6. $z = arctg(x/y), \quad M(1, 1, \pi/4).$

7. $x(y+z)(z-xy) = 8, \quad M(2, 1, 3).$

8. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2, 2, 1).$

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad M(2, 2, 2\sqrt{2}).$

10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M(2, 2, 3).$

Ответы.

**1.** $2x - 2y - z - 5 = 0, \qquad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}.$

**2.** $3x + 4y - 6Z = 0, \qquad \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}.$

**3.** $x - y - 2z + 1 = 0, \qquad \dfrac{x-\pi/4}{1} = \dfrac{y-\pi/4}{-1} = \dfrac{z-1/2}{-2}.$

**4.** $x + ez - 2 = 0, \qquad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\pi}{0} = \dfrac{z-1/e}{e}.$

**5.** $2x + y - z - \dfrac{\pi}{2} = 0, \qquad \dfrac{x-\pi/4}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}.$

**6.** $x - y - 2z + \dfrac{\pi}{2} = 0, \qquad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-\pi/4}{-2}.$

**7.** $2x + 7y - 5z + 4 = 0, \qquad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}.$

**8.** $x + y - 4z = 0, \qquad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}.$

**9.** $x + y + \sqrt{2}z - 8 = 0, \qquad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

**10.** $2x + 2y - 3z + 1 = 0, \qquad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}.$

***Экстремум функции двух переменных***

Постановка задачи. *Найти стационарные точки функции* $z = z(x, y)$ *и исследовать их характер.*

План решения.

1. Стационарными точками функции нескольких переменных называются точки, в которых все ее частные производные равны нулю. Следовательно, чтобы найти стационарные точки функции $z(x, y)$, нужно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0, \\ z'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим стационарные точки функции $z(x, y)$: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.

2. Для того чтобы исследовать характер стационарных точек, воспользуемся достаточными условиями экстремума функции двух переменных.

*Пусть функция* $z = z(x, y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в стационарной точке* $M(x_0, y_0)$ (*т.е.* $z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$). *Тогда если в этой точке:*

*а)* $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$*, то M – точка экстремума, причем при* $z''_{xx} > 0$ *- точка минимума, при* $z''_{xx} < 0$ *- точка максимума*;

*б)* $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$*, то M не является точкой экстремума*;

*в)* $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$*, то требуется дополнительное исследование* (*например, по определению*).

3. Вычисляем производные второго порядка функции $z(x, y)$.

4. В каждой стационарной точке вычисляем выражение

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$$

и определяем его знак.

Анализируем полученные результаты и записываем ответ.

**Пример.** Найти стационарные точки функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

и исследовать их характер.

**Решение.**

1. Вычисляем частные производные

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x.$$

2. Для того чтобы найти стационарные точки функции, решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Получаем два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 1, y_2 = 1$. Следовательно, стационарные точки функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$.

3. Вычисляем производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -3, \quad z''_{yy} = 6y.$$

4. В каждой стационарной точке вычисляем выражение

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$$

и определяем его знак.

В точке $M_1(0, 0)$:

$z''_{xx}(0,0)=0,\ z''_{xy}(0,0)=-3,\ z''_{yy}(0,0)=0 \Rightarrow z''_{xx}\cdot z''_{yy}-(z''_{xy})^2=-6<0.$

Следовательно, точка $M_2(1, 1)$ является точкой экстремума. Так как $z''_{xx}(1,1)=6>0,$ то $M_2(1,1)$ - точка минимума.

Ответ. Функция $z=x^3+y^3-3xy$ имеет две стационарные точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. В точке $M_1(0,0)$ экстремума нет, $M_2(1,1)$ - точка минимума.

**Условия задач.**

1. $z=x^2-xy+y^2.$
2. $z=x^2-xy-y^2.$
3. $z=x^2-2xy+2y^2+2x.$
4. $z=x^3+y^3-x^2-2xy-y^2.$
5. $z=x^3-2y^3-3x+6y.$
6. $z=4x+2y-x^2-y^2.$
7. $z=x^3+y^3-15xy.$
8. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y.$
9. $z=x^2+4y^2-2xy+4.$
10. $z=x/y+1/x+y.$

Ответы.

**1.** M (0, 0) – стационарная точка. M (0, 0) – точка минимума, $z_{\min}=z(0,0)=0.$

**2.** M (0, 0) – стационарная точка. В точке M (0, 0) экстремума нет.

**3.** M (-2, -1) – стационарная точка. M (-2, -1) – точка минимума, $z_{\min}=z(-2,-1)=-2.$

**4.** $M_1$ (0, 0), $M_2$ (4/3, 4/3) – стационарные точки. M (0, 0) – точка минимума, $z_{\min} = z(0,0) = 0$. M (4/3, 4/3) – точка минимума, $z_{\min} = z(4/3, 4/3) = -67/27$.

**5.** $M_1$ (1, 1), $M_2$ (-1, -1), $M_3$ (-1, 1), $M_4$ (1, -1) – стационарные точки. В точках $M_1$ (1, 1), $M_2$ (-1, -1) экстремума нет. $M_3$ (-1, 1) – точка максимума, $z_{\min} = z(-1,1) = 6$. $M_4$ (1, -1) – точка минимума, $z_{\min} = z(1,-1) = -6$.

**6.** M (2, 1) – стационарная точка. M (2, 1) – точка максимума, $z_{\min} = z(2,1) = 5$.

**7.** $M_1$ (0, 0), $M_2$ (5, 5) – стационарные точки. В точке $M_1$ (0, 0) экстремума нет. $M_2$ (5, 5) – точка минимума, $z_{\min} = z(5,5) = -125$.

**8.** M (0, 3) – стационарная точка. M (0,3) – точка минимума, $z_{\min} = z(0,3) = -9$.

**9.** M (0,0) – стационарная точка. M (0, 0) – точка минимума, $z_{\min} = z(0,0) = 4$.

**10.** M (1, 1) – стационарная точка. M (1, 1) –точка минимума, $z_{\min} = z(1,1) = 3$.

# 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрическое место точек трехмерного пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат $(O,\, e_1,\, e_2,\, e_3)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0, \qquad (1)$$

где хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}$ не равен нулю, называется **поверхностью второго порядка**.

**Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $(\tilde{O},\, \tilde{e}_1,\, \tilde{e}_2,\, \tilde{e}_3)$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих 17 видов:**

**1) эллипсоид** $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} + \dfrac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 1$ (рис.4.1)**;**

**2) мнимый эллипсоид** $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} + \dfrac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = -1$ **;**

**3) однополостный гиперболоид** $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} - \dfrac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 1$ (рис. 4.2)**;**

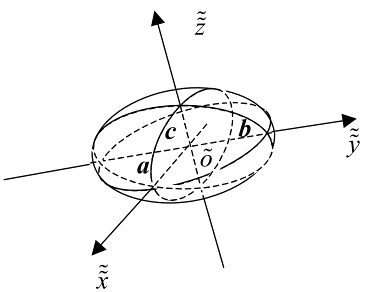


Рис.4.1

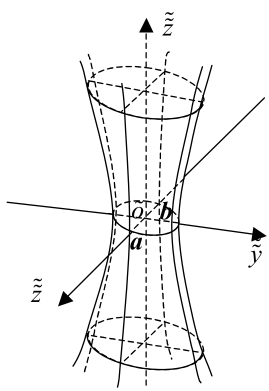


Рис. 4.2

**4)двуполостный гиперболоид** $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}-\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2}=-1$ (рис. 4.3)**;**

**5) конус** $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}-\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2}=0$ (рис. 4.4)**;**

**6) мнимый конус** $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}+\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2}=0$ **;**

**7) эллиптический параболоид** $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=2\tilde{\tilde{z}}$ (рис. 4.5)**;**

**8) гиперболический параболоид** $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=2\tilde{\tilde{z}}$ (рис. 4.6)**;**

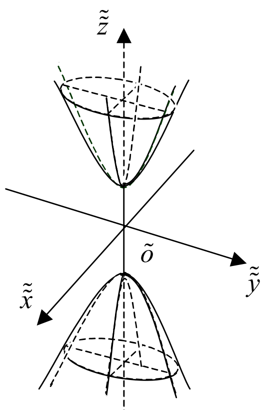


Рис. 4.3

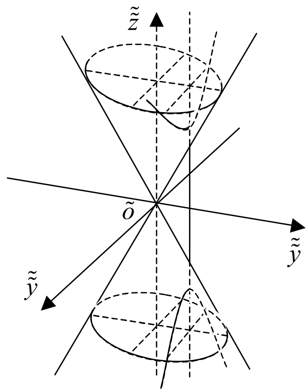


Рис. 4.4

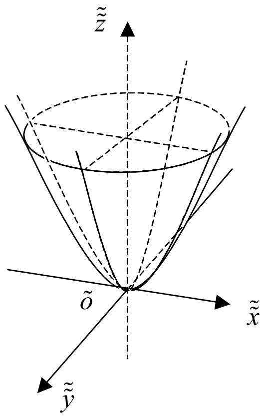


Рис. 4.5

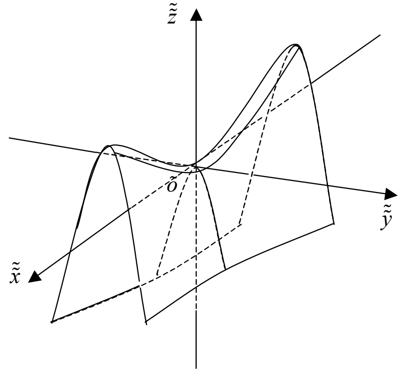


Рис. 4.6

**9) эллиптический цилиндр** $\boldsymbol{\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=1}$ (рис.4.7)**;**

**10) мнимый эллиптический цилиндр** $\boldsymbol{\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=-1}$ **;**

**11) гиперболический цилиндр** $\boldsymbol{\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=1}$ (рис.4.8)**;**

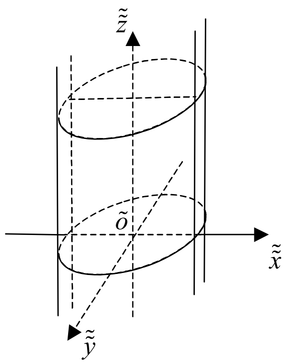


Рис.4.7

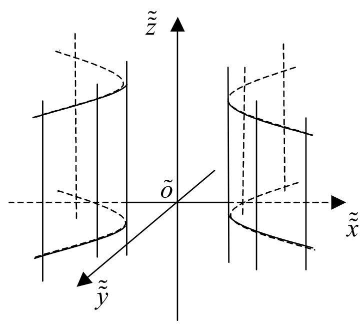


Рис. 4.8

**12) параболический цилиндр** $\boldsymbol{\tilde{\tilde{y}}^2=2p\tilde{\tilde{x}},\ p>0}$ (рис.4.9)**;**

**13) пара пересекающихся плоскостей** $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=0$**;**

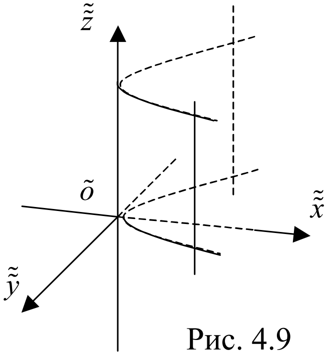


Рис. 4.9

**14) пара мнимых пересекающихся плоскостей** $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=0$**;**

**15) пара параллельных плоскостей** $\tilde{\tilde{y}}^2=a^2\ \left(a\neq 0\right)$**;**

**16) пара мнимых параллельных плоскостей** $\tilde{\tilde{y}}^2+a^2=0\ \left(a\neq 0\right)$**;**

**17) пара совпадающих плоскостей** $\tilde{\tilde{y}}^2=0$**.**

Уравнения 1)–17) называются **каноническими уравнениями поверхностей второго порядка**.

При преобразовании уравнения поверхности второго порядка (1) можно, как и в случае кривой второго порядка, использовать инварианты. **Инвариантами поверхностей второго порядка** являются

$$s_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$s_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a\end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте и параллельном переносе осей координат.

**Пример 1.** Поверхность задана уравнением в прямоугольной системе координат

$$x^2+5y^2+z^2-2xy+6xz-2yz-2x-6y+2z=0.$$

Найдите каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определите тип поверхности.

**Решение**. Найдем сначала ортогональное преобразование переменных, приводящее матрицу $A$ квадратичной формы $x^2+5y^2+z^2-2xy+6xz-2yz$ к диагональному виду.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+7\lambda^2-36=-\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-6\right).$$

Следовательно, матрица $A$ имеет собственные значения $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$.

Для нахождения собственных векторов матрицы $A$ решаем однородные системы линейных уравнений с матрицами $A+2I,\ A-3I,\ A-6I$ соответственно и выделяем по одному ненулевому решению:

$$A+2I=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_1' = \{1,\ 0,\ -1\}^{\text{т}};$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_2' = \{1,\ 1,\ 1\}^{\text{т}};$$

$$A-6I=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 8\\ 0 & -4 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_3' = \{1,\ -2,\ 1\}^{\text{т}}.$$

Векторы $\tilde{e}_1'$, $\tilde{e}_2'$, $\tilde{e}_3'$ ортогональны друг другу как собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям. Нормируя их, получаем

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1,\ 0,\ -1\}^{\text{т}},$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,\ 1,\ 1\}^{\text{т}},$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1,\ -2,\ 1\}^{\text{т}}$$

и матрицу перехода $P$ к новому ортонормированному базису

$$P = \left(\tilde{e}_1 \middle| \tilde{e}_2 \middle| \tilde{e}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы $P$:

$$P^{\text{т}} A P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot P =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}.$$

Матрица $P$ найдена верно.

Применяя к исходному уравнению ортогональное преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

получаем новое уравнение поверхности в прямоугольной системе координат со старым центром $O$ и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$:

$$-2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, \ -6, \ 2) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} =$$

$$= -2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 - 2\sqrt{2}\tilde{x} - 2\sqrt{3}\tilde{y} + 2\sqrt{6}\tilde{z} =$$

$$= -2\left(\tilde{x}^2 + \sqrt{2}\tilde{x}\right) + 3\left(\tilde{y}^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\tilde{y}\right) + 6\left(\tilde{z}^2 + 2\frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{z}\right) =$$

$$= -2\left[\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + 3\left[\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] + 6\left[\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right] =$$

$$= -2\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 1 - 1 - 1 =$$

$$= -2\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = 0 .$$

Выполняя параллельный перенос системы координат $\left(O, \ \tilde{e}_1, \ \tilde{e}_2, \ \tilde{e}_3\right)$ по формулам

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6},$$

приходим к уравнению

$$-2\tilde{\tilde{x}}^2+3\tilde{\tilde{y}}^2+6\tilde{\tilde{z}}^2=1,$$

или

$$-\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{\left(1/\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{\left(1/\sqrt{6}\right)^2}=1.$$

Это – каноническое уравнение однополостного гиперболоида в прямоугольной системе координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\right)$.

Вычислим координаты начала $\tilde{O}$ канонической системы координат в старой прямоугольной системе координат. Поскольку

$$P\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}=\frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{O}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

**Пример 2.** Исследуйте поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной системе координат уравнением

$$9y^2+16z^2+24yz+5x+10y+5z+11=0.$$

**Решение.** Начнем с приведения квадратичной формы $9y^2+16z^2+24yz$ к каноническому виду. Матрицей этой квадратичной формы является матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 9-\lambda & 12\\ 0 & 12 & 16-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2\left(\lambda-25\right)$$

имеет корни $\lambda_1=25,\ \lambda_2=\lambda_3=0$. При каждом $\lambda_i$ будем строить фундаментальную систему решений систем уравнений $\left(A-\lambda_i I\right)\xi=0$ и ортонормировать их.

При $\lambda_i=25$ эта система имеет вид

$$\begin{cases}-25\xi_1=0,\\ -16\xi_2+12\xi_3=0,\\ 12\xi_2-9\xi_3=0.\end{cases}$$

Ее общее решение $\xi=\left\{0,\ \frac{3}{4}\xi_3,\ \xi_3\right\}^{\text{т}}$ имеет одну свободную переменную. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного решения, например, из решения $\tilde{e}_1^{'}=\left\{0,\ 3,\ 4\right\}^{\text{т}}$. Нормируя его, получим $\tilde{e}_1=\frac{1}{5}\left\{0,\ 3,\ 4\right\}^{\text{т}}$.

При $\lambda_i=0$ рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases}9\xi_2+12\xi_3=0,\\ 12\xi_2+16\xi_3=0.\end{cases}$$

Ее общее решение $\xi=\left\{\xi_1,\ -\frac{4}{3}\xi_3,\ \xi_3\right\}^{\text{т}}$ имеет две свободные переменные. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух решений, например, из решений $\tilde{e}_2^{'}=\left\{1,\ 0,\ 0\right\}^{\text{т}}$ и $\tilde{e}_3^{'}=\left\{0,\ -4,\ 3\right\}^{\text{т}}$. Поскольку $\tilde{e}_2^{'}$ и $\tilde{e}_3^{'}$ выбраны ортогональными друг к другу (в противном случае требовалось применение процедуры ортогонализации Грама–Шмидта), остается их лишь нормировать. После нормировки получим $\tilde{e}_2=\left\{1,\ 0,\ 0\right\}^{\text{т}}$, $\tilde{e}_3=\frac{1}{5}\left\{0,\ -4,\ 3\right\}^{\text{т}}$.

Из столбцов координат векторов $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ составим матрицу перехода $P$ к новому ортонормированному базису

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и сделаем проверку

$$P^{\text{т}} AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} P =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 75 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Выполним преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение данной поверхности в новой прямоугольной системе координат со старым центром $O$ и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$:

$$25x^2 + \frac{1}{5}(5,\ 10,\ 5)\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + 11 =$$

$$= 25\tilde{x}^2 + 10\tilde{x} + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 =$$

$$= 25\left(\tilde{x}^2 + \frac{2}{5}\tilde{x}\right) + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 =$$

$$= 25\left[\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right] + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 =$$

$$= 25\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 10 =$$

$$= 25\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5\right) = 0.$$

Теперь совершим преобразование координат, полагая

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = \frac{-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{-\tilde{y} + \tilde{z} - 2}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{\tilde{z}} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{z}.$$

При этом коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma$ выберем так, чтобы матрица формул рассматриваемого преобразования координат была ортогональной, т.е. чтобы векторы-строки

$$a_1 = (1,\ 0,\ 0),\ a_2 = \left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ a_3 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

составляли ортонормированную систему векторов. Так как система векторов $a_1, a_2$ ортонормированная, то координаты вектора $a_3$ следует искать из условий

$$\begin{cases} (a_1,\ a_3) = \alpha = 0, \\ (a_2,\ a_3) = -\frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

Затем найденный вектор $a_3$ нужно еще нормировать. Проделав это, получим

$$\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, формулы рассматриваемого преобразования координат имеют вид

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z} - \sqrt{2},$$

$$\tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z},$$

или

$$\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}} - \frac{1}{5},$$

$$\tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} - 1,$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} + 1.$$

В новых координатах рассматриваемая поверхность имеет уравнение

$$25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} - 1\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} + 1\right) - 5\right] =$$

$$= 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{y}} + \left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{z}} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5\right)\right] = 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 5\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}} = 0,$$

или

$$25\tilde{\tilde{x}}^2 = 5\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}}\,.$$

Это – каноническое уравнение параболического цилиндра в прямоугольной системе координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{\tilde{e}}_1,\ \tilde{\tilde{e}}_2,\ \tilde{\tilde{e}}_3\right)$.

Поскольку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/\left(5\sqrt{2}\right) & -4/\left(5\sqrt{2}\right) \\ 4/5 & 3/\left(5\sqrt{2}\right) & 3/\left(5\sqrt{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -23/25 \\ 11/25 \end{pmatrix},$$

каноническая система координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{\tilde{e}}_1,\ \tilde{\tilde{e}}_2,\ \tilde{\tilde{e}}_3\right)$ имеет начало $\tilde{O} = \left(-1,\ -\dfrac{23}{25},\ \dfrac{11}{25}\right)$ и направляющие векторы $\tilde{\tilde{e}}_1 = \left\{0,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right\}^{\mathrm{т}}$, $\tilde{\tilde{e}}_2 = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{4}{5\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{т}}$, $\tilde{\tilde{e}}_3 = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{4}{5\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{т}}$.

*Задачи для самостоятельного решения*

Приведите уравнения к каноническому виду при помощи перехода к новой прямоугольной системе координат и выясните расположение относительно исходной прямоугольной системы координат следующих поверхностей второго порядка:

а) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-2x-2y-16z+53=0$;

б) $xy+xz+yz+2\sqrt{2}x+2\sqrt{6}y-2\sqrt{3}z-100=0$;

в) $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz-2x-6y+6z=0$;

г) $4x^2-6y^2+4z^2-4xz-8y-4z-3=0$;

д) $5x^2+7y^2+6z^2+4xz+4yz+10x+14y+8z-6=0$;

е) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x=0$;

ж) $-8x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz-10yz+12x+24y+24z-9=0$;

з) $-18x^2-32z^2+40xy-48xz-30yz+20x-100y-140z-250=0$;

и) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;

к) $\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2+8z^2-5xy-4xz-4yz-8x-8y-4z+36=0$;

л) $17x^2+17y^2+11z^2-16xy+8xz-8yz-2x+34y-44z+57=0$;

м) $11x^2+2y^2+5z^2+4xy-16xz+20yz+22x-68y-34z+62=0$;

н) $4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz-14x+y+8z+30=0$;

о) $-xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$;

п) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

р) $3x^2+12y^2+27z^2-12xy+18xz-36yz-3x+6y-9z-18=0$.

## 5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

### Задача 1

Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

**1.1.** $z = \sqrt{\ln(x+y)}$.

**1.2.** $z = \ln\dfrac{x^2}{x+y}$.

**1.3.** $z = \ln\dfrac{\cos x}{y}$.

**1.4.** $z = \ln\dfrac{x-3}{y-5}$.

**1.5.** $z = \ln(y - \sin x)$.

**1.6.** $z = \log_y(x^2 + y^2 - 9)$.

**1.7.** $z = \dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

**1.8.** $z = \sqrt{\ln xy}$.

**1.9.** $z = \dfrac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$.

**1.10.** $z = \ln(-x-y)$.

**1.11.** $z = \ln x + \ln\sin y$.

**1.12.** $z = \dfrac{\ln x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

**1.13.** $z = \dfrac{1}{x} + \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

**1.14.** $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

**1.15.** $z = \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

**1.16.** $z = \dfrac{1}{|x|}\sqrt{y^2-x}$.

**1.17.** $z = (x+\sqrt{y})\cdot\ln(y^2-x^2)$.

**1.18.** $z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}\cdot\ln y$.

**1.19.** $z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$.

**1.20.** $z = \dfrac{\sqrt{\cos x - y}}{\sqrt{y}}$.

**1.21.** $z = \arcsin(x+y) + \sqrt{9-x^2-y^2}$ .

**1.22.** $z = \arccos\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y^2)$.

**1.23.** $z = \sqrt{x^2+y^2-2x} - \sqrt{4-x^2-y^2}$ .

**1.24.** $z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)} + \arcsin(x-y)$.

**1.25.** $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2} + \arccos(1-x)$.

**1.26.** $z = \sqrt{\sin x\cdot\cos y}$.

**1.27.** $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin y}$.

**1.28.** $z = \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$.

**1.29.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{(y^2-1)(x+1)}}$.

**1.30.** $z = \sqrt{\ln x\cdot\ln y}$.

## Задача 2

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = z(x, y)$.

**2.1.** $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

**2.2.** $z = \ln(\sqrt{x} + y^2)$.

**2.3.** $z = \ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y^3)$.

**2.4**. $z = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}$.

**2.5.** $z = xy^2 \cdot \ln(x^2 + y)$.

**2.6**. $z = \ln(x^5 + \ln y)$.

**2.7**. $z = (1 + \log_y x)^3$.

**2.8.** $z = \ln(\sin x + \cos y)$.

**2.9**. $z = \ln\left(\sqrt[3]{y} - \sin x\right)$.

**2.10**. $z = \ln\left(x\sqrt{y} + \frac{y}{2x}\right)$.

**2.11**. $z = \frac{(x - 2y)^2}{x + 2y}$.

**2.12**. $z = e^{\frac{x^2 + y^2}{x + y}}$.

**2.13.** $z = (x \sin y + y \cos x)^2$.

**2.14.** $z = \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x^2}}$.

**2.15.** $z = \frac{\arcsin(x + y)}{\cos(xy)}$.

**2.16.** $z = \sqrt[3]{\ln(x^2 y)}$.

**2.17.** $z = \cos\dfrac{x+y}{x-y}$.

**2.18.** $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

**2.19.** $z = -\ln\left(\cos\dfrac{y}{x}\right)$.

**2.20.** $z = (\sin x)^{\cos y}$.

**2.21.** $z = x \cdot \sin(\sqrt{x} + y^2)$.

**2.22.** $z = arctg\sqrt{x^y}$ .

**2.23.** $z = \dfrac{\cos x^2}{x+y}$.

**2.24.** $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

**2.25.** $z = \cos\dfrac{x}{y} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

**2.26.** $z = arctg\dfrac{xy}{1+x^2}$.

**2.27.** $z = e^{\frac{y}{x^2 - y^2}}$.

**2.28.** $z = \arccos\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$.

**2.29.** $z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

**2.30.** $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$.

## Задача 3

Вычислить производные сложных функций.

**3.1.** $z = x\sin y + y\cos x$, где $x = \dfrac{u}{v}$, $y = u^3v^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3.2.** $z = e^{4xy}$, где $x = \cos(1-t)$, $y = \sin t^2$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.3.** $z = x^2 - y^2 + 2xy$, где $x = \sin t$, $y = \arccos(e^t)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.4.** $z = \left(x + y^3\right)\cdot e^{x^2+y^2}$, где $x = \cos(t^2)$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.5.** $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, где $x = \sin t$, $y = \cos^2\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.6.** $z = tg(x + 2x^2 - y)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.7.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где $x = v - u^2v$, $y = u + v^2u$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3.8.** $z = arctg\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $y = \sqrt{x^2+1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx} = ?$

**3.9.** $z = \dfrac{4y}{\sqrt{y^2 - x}}$, где $x = t\cdot\cos t$, $y = t\cdot\sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.10.** $z = \arcsin(x - y)$, где $x = \ln(\sqrt{t}+1)$, $y = 4t^3$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.11.** $z = arctg\dfrac{x+y}{1+xy}$, где $x = t^2 + 1$, $y = \sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.12.** $z = \ln(\sqrt{x}\cdot\ln y)$, где $x = \sin t$, $y = \arccos(t^5)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.13.** $z = \ln(e^{2x} + e^{6y})$, где $y = x\sqrt{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx} = ?$

**3.14.** $z = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$, где $x = tg^2 t$, $y = ctg^3\frac{t}{2}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.15.** $z = \ln(x^2 y)$, где $x = u^v$, $y = v^u$; $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3.16.** $z = x^3 \sin y + y^3 \cos x$, где $x = 3t^2 - \sqrt{t}$, $y = \frac{t^2}{t-1}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.17.** $z = \frac{x+2y}{xy}$, где $x = tg(t^2+1)$, $y = ctg(t^4-1)$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.18.** $z = xy^2 + \frac{x}{y}$, где $x = \ln(t^2+t)$, $y = 10^t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.19.** $z = \ln(x^2+y^2) - x\sqrt{x}$, где $x = \sin t$, $y = \frac{t}{t+1}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.20.** $z = \frac{x-2y}{x+2y}$, где $x = \frac{u-v}{u}$, $y = \frac{v}{u+v}$; $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3.21.** $z = \frac{x+y}{1-xy}$, где $x = \frac{t}{\sin t}$, $y = \frac{t}{\cos t}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.22.** $z = \sqrt{xy + \sin x}$, где $x = tg\left(3t^2 + t\right)$, $y = ctg\left(2t+1\right)$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.23.** $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$, где $x = tg(e^t+1)$, $y = ctg\frac{t}{2}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.24.** $z = x^{\ln y}$, где $x = \sin(uv)$, $y = \cos(v^2 - u)$; $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3.25.** $z = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y}$, где $x = \ln t$, $y = te^t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.26.** $z = \ln x - \frac{y^2}{x}$, где $x = \sin t^2$, $y = \cos t^2$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.27.** $z = \arccos(xy^2)$, где $x = t^2 \ln t$, $y = te^t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.28.** $z = \cos\left(y^{\sin x}\right)$, где $x = t^3$, $y = 2^t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3.29.** $z = \sin^2 x + \cos^2 y$, где $x = \pi^{\ln t}$, $y = \ln^{\pi} t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3.30.** $z = \dfrac{x^2 + 2y^3}{x + 2y}$, где $x = \dfrac{u + v^2}{u}$, $y = \dfrac{v^2}{u + v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

## Задача 4.

Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

4.1. $z = e^{x^2 - y^2}$

4.2. $z = ctg(x + y)$

4.3. $z = tg(x / y)$

4.4. $z = \cos(xy^2)$

4.5. $z = \sin(x^2 - y)$

4.6. $z = arctg(x + y)$

4.7. $z = \arcsin(x - y)$

4.8. $z = \arccos(2x + y)$

4.9. $z = arcctg(x - 3y)$

4.10. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$

4.11. $z = e^{2x^2 + y^2}$

4.12. $z = ctg(y / x)$

4.13. $z = tg\sqrt{xy}$

4.14. $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$

4.15. $z = \sin\sqrt{x^3 y}$

4.16. $z = \arcsin(x - 2y)$

4.17. $z = \arccos(4x - y)$

4.18. $z = arctg(5x + 2y)$

4.19. $z = arctg(2x - y)$

4.20. $z = \ln(4x^2 - 5y^3)$

4.21. $z = e^{\sqrt{x+y}}$

4.22. $z = \arcsin(4x + y)$

4.23. $z = \arccos(x - 5y)$

4.24. $z = \sin\sqrt{xy}$

4.25. $z = \cos(3x^2 - y^3)$

4.26. $z = arctg(3x + 2y)$

4.27. $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$

4.28. $z = arcctg(x - 4y)$

4.29. $z = \ln(3xy - 4)$

4.30. $z = tg(xy^2)$

## Задача 5

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции.

**5.1.** $\ln(z^2 + xy) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

**5.2.** $2x^3 - 5x + z^3 + y^3 - 3xyz + 8 = 0$.

**5.3.** $\frac{tg(z+1)}{tg(y-2)} = \frac{y-x}{z+1}$ .

**5.4.** $y \cdot e^{x-zy} = \cos(zx)$.

**5.5.** $x\sin y + y\sin x + z\sin x - 8 = 0$.

**5.6.** $xe^y + ye^x + ze^x = 2$.

**5.7.** $3xz - 4yz + z^2 - 9 = 0$.

**5.8.** $z^2 - z - 8xz + 2x^2 + 2y^2 + 8 = 0$.

**5.9.** $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot tg\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ .

**5.10.** $tg(x+z) = e^z y$.

**5.11.** $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = xy^2z^3$.

**5.12.** $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z + \sin(xy) - 9 = 0$.

**5.13.** $\ln(xy + z) = z^2 - y$ .

**5.14.** $e^{\frac{x}{y}} \cdot \sin\frac{z}{y} = \frac{y}{xz}$.

**5.15.** $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

**5.16.** $z = x + arctg\frac{y}{z - x}$.

**5.17.** $\ln z = yz + x^2 - 1$.

**5.18.** $e^{\frac{z}{x}} - \arcsin\frac{z}{y} = 0$.

**5.19.** $yz^2 + xz + xy = 1$.

**5.20.** $e^{\frac{z}{x}} \cdot \cos\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$.

**5.21.** $tg^2 z + \sin x + \cos y - e^x = 0$.

**5.22.** $y^2 + x^2 z - 4yz^3 - 1 = 0$.

**5.23.** $ze^z - x \cdot \ln y = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

**5.24.** $z^3 + 5xy^3 + 4yz^2 - x^3 - 6 = 0$.

**5.25.** $\frac{z}{x} - \ln\frac{z}{y+2} = 0$.

**5.26.** $z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$.

**5.27.** $e^{xz}\cos(yz) = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

**5.28.** $\frac{\sin x}{\sin z} = \frac{z}{y}$.

**5.29.** $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

**5.30.** $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 3y + 3 = 0$.

## Задача 6

Найти градиент, уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_o(X_o,Y_o,Z_o)$.

**6.1.** S: $x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0,$ $\qquad Mo(2,1,-1)$.

**6.2.** S: $x^2+z^2-4y^2=-2xy,$ $\qquad Mo(-2,1,2)$

**6.3.** S: $x^2+y^2+z^2-xy+3z=7,$ $\qquad Mo(1,2,1)$.

**6.4.** S: $x^2+y^2+\cancel{z}^2+6y+4x=8,$ $\qquad Mo(-1,1,2)$.

**6.5.** S: $2x^2-y^2+z^2-4z+y=13,$ $\qquad Mo(2,1,-1)$

**6.6.** S: $x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0,$ $\qquad Mo(2,1,-1)$.

**6.7.** S: $x^2+z^2-5yz+3y=46,$ $\qquad Mo(1,2,-3)$.

**6.8.** S: $x^2+y^2-xz-yz=0,$ $\qquad Mo(0,2,2)$.

**6.9.** S: $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2,$ $\qquad Mo(1,11)$.

**6.10.** S: $x^2+y^2-z^2-2xz+2x=z,$ $\qquad Mo(1,1,1)$.

**6.11.** S: $x^2+y^2-2xy+2x-y=z,$ $\qquad Mo(-1,-1,-1)$.

**6.12.** S: $y^2-x^2+2xy-3y=z,$ $\qquad Mo(1,-1,1)$.

**6.13.** S: $x^2-y^2-2xy-x-2y=z,$ $\qquad Mo(-1,1,1)$

**6.14.** S: $x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13,$ $\qquad Mo(3,1,2)$.

**6.15.** S: $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z + 9,$ $\qquad Mo(1,-2,1)$.

**6.16.** S: $x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2 = z,$ $\qquad Mo(2,1,0)$.

**6.17.** S: $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,$ $\qquad Mo(1,2,1)$.

**6.18.** S: $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,$ $\qquad Mo(3,1,4)$.

**6.19.** S: $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,$ $\qquad Mo(1,1,2)$.

**6.20.** S: $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,$ $\qquad Mo(-2,1,0)$

**6.21.** S: $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,$ $\qquad Mo(1,4,-1)$

**6.22.** S: $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,$ $\qquad Mo(0,2,0)$.

**6.23.** S: $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,$ $\qquad Mo(-1,-1,1)$

**6.24.** S: $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,$ $\qquad Mo(1,0,1)$.

**6.25.** S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,$ $\qquad Mo(1,-1,1)$.

**6.26.** S: $x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,$ $\qquad Mo(1,1,0)$.

**6.27.** S: $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10 = z,$ $\qquad Mo(-1,1,3)$

**6.28.** S: $x^2 + y^2 - 4x + 3x - 15 = z,$ $\qquad Mo(-1,3,4)$

**6.29.** S: $2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1 = z,$ $\qquad Mo(1,-1,2)$

**6.30.** S: $x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10 = z,$ $\qquad Mo(-7,1,8)$.

## Задание 7

Найти наибольшее и наименьшее значения функции Z=Z(X,Y) в области D, ограниченной заданными линиями

**7.1.** $z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \; y = 4, \quad x = 4, \quad x = 0.$

**7.2.** $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, y = 0.$

**7.3.** $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2.$

**7.4.** $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \; y = 0, \quad y = 1.$

**7.5.** $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \qquad D: \; x - y + 1 = 0, \qquad x = 3, \qquad y = 0.$

**7.6.** $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: \; x = 0, \quad y = 0, \; x + y - 1 = 0.$

**7.7.** $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6.$

**7.8.** $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \qquad D: \; x = 0, \qquad x = 1, \quad y = 0, \; y = 1.$

**7.9.** $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: \; x = 0, \qquad y = 0, \quad x + y - 3 = 0.$

**7.10.** $z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4.$

**7.11.** $z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4.$

**7.12.** $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: y = 8, \; y = 2x^2.$

**7.13.** $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad D: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, \quad y = 0.$

**7.14.** $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \; y = 0, \; x + y + 1 = 0.$

**7.15.** $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0.$

**7.16.** $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2.$

**7.17.** $z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 0, \; x = 4, \; y = 0, \; y = 4.$

**7.18.** $z = x^2 + xy - 2, \; D: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0.$

**7.19.** $z = x^2 y(4 - x - y), \; D: x = 0, \quad y = 0, \quad y = 6 - x.$

**7.20.** $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2.$

**7.21.** $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad D: x + 2y = 4, \; x - 2y = 4, \quad x = 0.$

**7.22.** $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \; D: x = 3, \quad y = 0, \quad y = x + 1.$

7**.23.** $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad D: y = x + 2, \quad y = 0, \quad x = 2.$

**7.24.** $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad D: y = 0, \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$

**7.25.** $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad D: x = -1, \; x = 1, \; y = -1, \quad y = 1.$

**7.26.** $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad D: x + y + 2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$

**7.27.** $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6.$

**7.28.** $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, D : $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

**7.29.** $z = x^2 + y^2 + 2x - 3y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \; x + y - 1 = 0.$

**7.30.** $z = xy - 4x - 3y, \quad D: x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4.$

## Задача 8

Найти полные дифференциалы указанных функций

**8.1.** $z = 2x^3 y - 4xy^5$;

**8.2.** $z = x^2 y \sin x - 3y$;

**8.3.** $z = arctgx + \sqrt{y}$;

**8.4.** $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$;

**8.5.** $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$;

**8.6.** $z = \cos\left(x^2 - y^2\right) + x^3$;

**8.7.** $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$;

**8.8.** $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4$;

**8.9.** $z = \arcsin(x + y)$;

**8.10.** $z = arctg(2x - y)$;

**8.11.** $z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$;

**8.12.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$;

**8.13.** $z = e^{x+y-4}$;

**8.14.** $z = \cos(3x + y) - x^2$;

**8.15.** $z = tg\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;

**8.16.** $z = ctg\left(\frac{y}{x}\right);$

**8.17.** $z = xy^4 - 3x^2y + 1;$

**8.18.** $z = \ln\left(x + xy - y^2\right);$

**8.19.** $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3;$

**8.20.** $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5};$

**8.21.** $z = \arcsin\left(\frac{x + y}{x}\right);$

**8.22.** $z = arcctg(x - y);$

**8.23.** $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x};$

**8.24.** $z = y^2 - 3xy - x^4;$

**8.25.** $z = \arccos(x + y);$

**8.26.** $z = \ln\left(y^2 - x^2 + 3\right);$

**8.27.** $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x;$

**8.28.** $z = 7x - x^3y^2 + y^4;$

**8.29.** $z = e^{y-x};$

**8.30.** $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right);$

## Задача 9

Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

**9.1.** $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

**9.2.** $u = \ln(e^e + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

**9.3.** $u = y^x$, $x = \ln(t-1)$, $y = e^{t/2}$, $t_0 = 2$.

**9.4.** $u = e^{y-2x+2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi / 2$.

**9.5.** $u = x^2 e^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi$.

**9.6.** $u = \ln(e^x + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.

**9.7.** $u = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $t_0 = 1$.

**9.8.** $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

**9.9.** $u = x^2 e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \pi / 2$.

**9.10.** $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

**9.11.** $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi/2$.

**9.12.** $u = \arcsin(x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

**9.13.** $u = \arccos(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

**9.14.** $u = x^2/(y+1)$, $x = 1-2t$, $y = arctgt$, $t_0 = 0$.

**9.15.** $u = x/y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

**9.16.** $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$.

**9.17.** $u = \sqrt{x + y^3 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

**9.18.** $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

**9.19.** $u = y^2/x$, $x = 1-2t$, $y = 1 + arctgt$, $t_0 = 0$.

**9.20.** $u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

**9.21.** $u = \arcsin\frac{x}{2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

**9.22** $u=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$, $x=\sin 2t$, $y=tg^2 t$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

**9.23.** $u=\sqrt{x+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

**9.24.** $u=y/x$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$, $t_0=0$.

**9.25.** $u=\arcsin(2x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

**9.26.** $u=\ln(e^{2x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^4$, $t_0=1$.

**9.27.** $u=arctg(x+y)$, $x=t^2+2$, $y=4-t^2$, $t_0=1$.

**9.28.** $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$, $x=\ln t$, $y=t^3$, $t_0=1$.

**9.29.** $u=arctg(xy)$, $x=t+3$, $y=e^t$, $t_0=0$.

**9.30.** $u=\sqrt{x^2+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$

## Задача 10

Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала.

**10.1.** $(1{,}001)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{0{,}98}}$.

**10.2.** $0{,}97^{2,02}$.

**10.3.** $\ln\left(0{,}01 + \sqrt{(0{,}01)^2 + (1{,}02)^2}\right)$.

**10.4.** $1{,}002 \cdot 2{,}003^2$.

**10.5.** $3{,}004^3 \cdot 0{,}001$.

**10.6.** $\sin 29° \cdot tg 46°$.

**10.7.** $\sqrt[3]{0{,}97 \cdot \sqrt[4]{(1{,}05)^3}}$.

**10.8.** $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

**10.9.** $\sqrt{(6{,}03)^2 + (8{,}04)^2}$.

**10.10.** $(3{,}001)^2 \cdot \sqrt[3]{1{,}002}$.

**10.11.**. $\ln[(0{,}09)^3 + (0{,}99)^3]$.

**10.12.** $\ln\left(\sqrt{4{,}004} + \sqrt[3]{1{,}006} - 2\right)$.

**10.13.** $(2{,}009)^3 \cdot (2{,}007)^2$.

**10.14.** $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98}}$.

**10.15.** $\sqrt{1,004} \cdot \sqrt[3]{0,097}$.

**10.16.** $(2,003)^2 \cdot (3,004)^3$.

**10.17.** $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,03)^2}$.

**10.18.** $(1,003)^{2,07}$.

**10.19.** $\sqrt{(2,03)^2 + 5 \cdot e^{0,02}}$.

**10.20.** $\sqrt{(1,04)^2 + \ln(1,02)}$.

**10.21.** $(1,02)^{2,001}$.

**10.22.** $e^{0,01} \cdot (2,01)^2$.

**10.23.** $arctg\,\dfrac{1,02}{0,95}$.

**10.24.** $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$.

**10.25.** $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

**10.26.** $\sin 32° \cdot \cos 59°$.

**10.27.** $(1,02)^{4,05}$.

**10.28.** $(0,95)^{2,01}$.

**10.29.** $1,96^2 \cdot e^{0,08}$.

**10.30.** $\sqrt{(1,02)^3 + (0,001)^2}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приступая к изучению высшей математики, необходимо знать, что математику нельзя изучать пассивно, нужно стараться глубоко вникать в смысл математических понятий и теорем, пытаться самостоятельно решать математические задачи. Результатами изучения курса высшей математики должны быть развитие аналитического мышления, овладение навыками решения математических задач, выработка умения самостоятельно ставить задачи и выбирать или разрабатывать методы их решения.

Материал практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения одного из важнейших разделов в курсе высшей математики - дифференциального исчисления. Позволяет приобрести и закрепить практические навыки решения простых типовых задач, а также познакомится с методикой построения приложений производных к задачам механики и физики. Наиболее эффективный результат может быть достигнут, если использовать пособие, как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Несколько слов о том, как работать с этой книгой. Прежде, чем приступать к изучению методов решения задач, необходимо повторить основные определения и теоремы, относящиеся к данному разделу, постараться понять и запомнить наиболее часто используемые формулы. После этого можно переходить к изучению разобранных примеров. Некоторые типовые задачи и методы рассмотрены в пособии, как в общем виде, так и на примерах. Весьма полезно изучить и то и другое. Это поможет вам не только отработать навыки решения задач, но и лучше понять и усвоить теоретический материал.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1984.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Альфа, т. 1, 1998. - 687с., т. 2, 1998. – 584с.
3. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высшая школа, 1999. - 695с.
4. Пискунов П.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / П.С. Пискунов. – М.: Наука, т. 1, 2001. — 415с., т.2, 2001. — 544с.
5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1986.
6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов / В.П. Минорский. — М.: Наука, 1987.
7. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. — М.: Высш.школа, 2003.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2008.
9. Гусак А.А. Высшая математика / А.А.Гусак. — Мн.: «ТетраСистемс», 2003. Т. 1. - 543 с.
10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, Ч. 1, 2. — М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003.
11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985.
12. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2007.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………….. 3

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ……………………………….. 4

1.1. Понятие о функции нескольких переменных. Область определения…………………………… 4
1.2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность……………………………….. 8
1.3. Частные производные первого порядка……….. 11
1.4. Дифференциал функции и его применение к приближенным вычислениям…………………… 16
1.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков………………………………… 21
1.6. Дифференцирование сложных функций……….. 27
1.7. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций……………… 31
1.8. Замена переменных в дифференциальных выражениях……………………………………….. 44
1.9. Экстремум функции……………………………… 50
1.10. Наибольшее и наименьшее значения функций............................................................ 59
1.11. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа………………………………………… 66

2. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ……………………. 72

2.1. Касательная и нормаль к плоской кривой……… 72
2.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности………………………………………. 75
2.3. Кривизна плоской кривой……………………….. 84
2.4. Особые точки плоских кривых………………….. 99
2.5. Касание кривых между собой…………………… 103
2.6. Производная вектор-функции…………………… 108





2.7. Естественный трёхгранник пространственной кривой. Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой…………………………………………… 115
2.8. Кривизна и кручение пространственной кривой…………………………………………… 124

3. КРАТКИЙ ОБЗОР СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ……………………… 128

3.1. Определение функции нескольких переменных….. 128
3.2. График функции двух переменных. Линии уровня. 128
3.3. Предел функции в точке………………………… 129
3.4. Непрерывность функции в точке……………….. 131
3.5. Функции непрерывные на множестве…………….. 132
3.6. Определение частных производных……………. 133
3.7. Геометрический смысл частной производной…… 134
3.8. Дифференциал функции. Линеаризация функций.. 135
3.9. Дифференцирование сложных и неявных функций. Касательная и нормаль к поверхности… 137
3.10. Дифференциал сложной функции………………. 138
3.11. Неявная функция одной переменной…………….. 139
3.12. Неявная функция двух переменных…………….. 139
3.13. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. 140
3.14. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Определение частных производных второго порядка…………………… 141
3.15. Производная по направлению. Градиент. Определение производной по направлению…….. 143
3.16. Экстремум функции нескольких переменных Необходимое условие экстремума………………. 145
3.17. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области…………………….. 149

3.18. Формула Тейлора для функции
двух переменных…………………………………… 150
3.19. Условный экстремум………………………………… 153
3.20. Примеры решения типовых задач…………………… 159

4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА……………… 178

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ
ТИПОВОГО РАСЧЕТА………………………………… 193

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…………………………………………… 214

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК………………… 215



Учебное издание

Пантелеев Игорь Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ:
ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор И.Н. Пантелеева

Подписано к изданию 15.12.2010.
Уч.- изд. л. 11,8.

ГОУВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14