ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов

Мет. 2. rar	283 К ,байт	14.10.2008	уч.-изд. 2,0 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

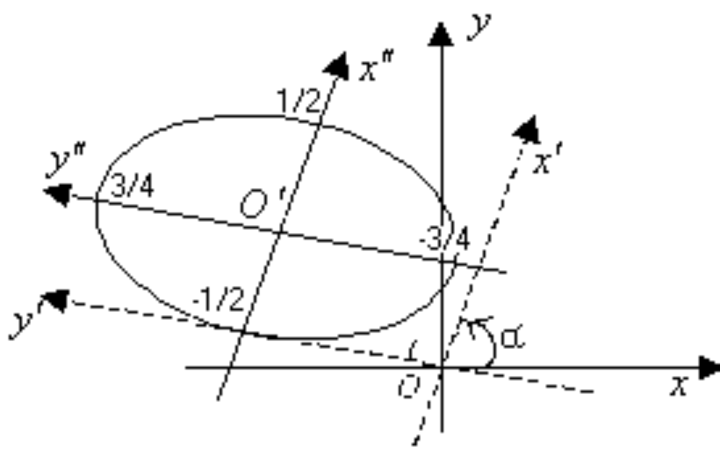
ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2



Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах»,140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»,140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 2/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 32 с.

Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 2.rar»

Ил. 14. Библиогр.: 11назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.П. Дубровская

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме: “Аналитическая геометрия”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

1. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Вектор – это направленный отрезок, т.е. имеющий длину и направление. Длина вектора называется модулем и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ - коллинеарны $(\overline{a} \parallel \overline{b})$, если параллельны одной и той же прямой или лежат на одной прямой.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарны, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной и той же плоскости.

Направление вектора определяется углами α, β, γ, образованными вектором с положительным направлением координатных осей OX, OY, OZ соответственно.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|},$$

где $|\overline{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$, если известны его координаты $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Заметим, что направляющие косинусы являются координатами любого единичного вектора, т.е.

$\overline{a^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, если $\left|\overline{a^0}\right| = \dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$

<u>Основные действия над векторами.</u>

Пусть даны $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда:

1. $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\overline{\lambda a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, где λ -действительное число.
3. <u>Скалярное произведение</u> $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ есть число, по определению равное $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$,где φ - угол между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычисляется по формуле:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z .$$

4. <u>Векторное произведение</u> $\overline{a} \times \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - есть вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем условиям:
   1) вектор $\overline{c}$ направлен так, что векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку;
   2) вектор $\overline{c}$ ортогонален вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$.
   3) модуль $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$, де φ - угол между двумя

векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Геометрически модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т.е. $S_{параллеграмма} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$.

Тогда $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

5. <u>Смешанное произведение</u> трех векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ есть число равное по определению: $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Геометрически модуль смешанного произведения равен объему параллепипеда, построенного на этих векторах, т.е. $V_{параллепипеда} = \left|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right|$.

Заметим, что объем тетраэдра, построенного на трех векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ равен $V_{тетраэдра} = (1/3)S_{осн.}h$, где $S_{осн.}$ – площадь основания тетраэдра, h –высота тетраэдра, т.к. основание тетраэдра есть треугольник, построенный на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то $S_{осн}=(1/2)\ S_{параллелограмма}$, следовательно,

$$V_{тетраэдра} = (1/6)S_{параллелограмма}h = (1/6)V_{параллепипеда}.$$

Если заданы векторы в координатах $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$ смешанное произведение.

1) Условие перпендикулярности векторов ($\overline{a}$ ^ $\overline{b}$): $\overline{a} \times \overline{b} = 0$ или $a_x \times b_x + a_y \times b_y + a_z \times b_z = 0$.

2) Условие коллинеарности векторов ($\overline{a} // \overline{b}$):

$$\overline{a} ´ \ \overline{b} = 0 \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

3)Условие компланарности векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$: $\overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c} = 0$ или

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Задание 1.

Коллинеарны ли векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ построенные по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

Дано: $\overline{a}$ =(-1,2,-1), $\overline{b}$ =*(2,-7,1)*, $\overline{c_1} = 6\overline{a} - 2\overline{b}$,

$\overline{c_2} = \overline{b} - 3\overline{a}$.

Решение: а) Найдем координаты векторов $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$:

$\overline{c_1} = 6\overline{a} - 2\overline{b} = 6\cdot(-1,2,-1) - 2\cdot(2,-7,1) =$

$= (-6,12,-6) - (4,-14,2) = (-10,26,-8)$.

$\overline{c_2} = \overline{b} - 3\overline{a} = = (2,-7,1) - 3\cdot(-1,2,-1) = (5,-13,4)$

б) Условие коллинеарности двух векторов – равенство нулю их векторного произведения: $\overline{c_1} \times \overline{c_2} = 0$ или пропорциональность их координат. Т.к.

$\overline{c_1} = (-10,26,-8)$, $\overline{c_2} = (5,-13,4)$,то видим выполнение равенств $\frac{-10}{5} = \frac{26}{13} = \frac{-8}{4}$, $\overline{c_1} \parallel \overline{c_2}$.

Ответ: Векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ коллинеарны.

Примечание. Если найти векторное произведение

$$\overline{c_1} \times \overline{c_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 26 & -8 \\ 5 & -13 & 4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 26 & -8 \\ -13 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -10 & -8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$+ k\begin{vmatrix} -10 & -8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 0\cdot i + 0\cdot j + 0\cdot k = 0$, то получим $\overline{c_1} \times \overline{c_2} = 0$, т.е. $\overline{c_1} \parallel \overline{c_2}$.

Задание 2.

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Дано: *A(7;0;2); B(7;1;3); C(8;-1;2).*

Требуется найти: $\cos\varphi$, где φ -угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB} = (7-7, 1-0, 3-2) = (0,1,1)$,

$\overline{AC} = (8-7, -1-0, 2-2) = (1, -1, 0)$

По формуле $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.

$$\cos\varphi = \frac{0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

где угол $\varphi = 120^0$ (рис.1).

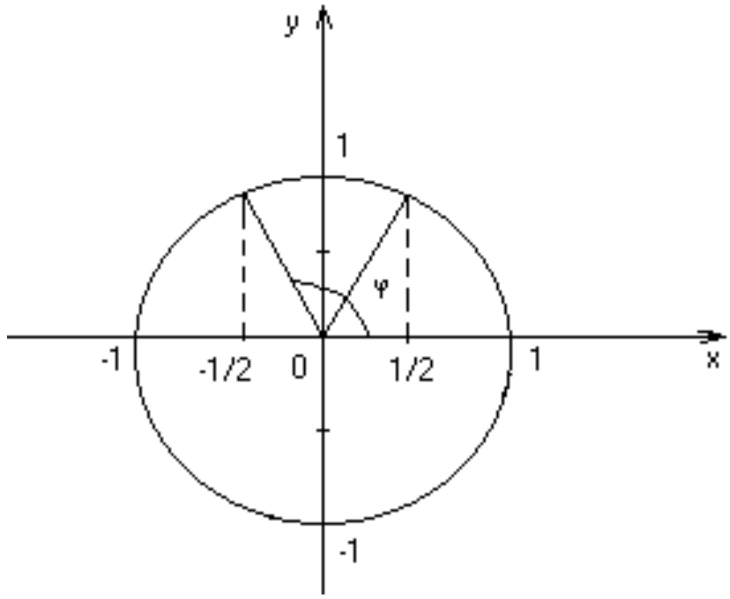


Рис. 1

Ответ: $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$.

Задание 3.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Дано: $\overline{a} = 3\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 3\overline{q}$, если $|\overline{p}| = 7$, $|\overline{q}| = 2$, $\varphi = 45^0$,

где φ -угол между векторами $\overline{p}$, $\overline{q}$.

Решение. Из определения векторного произведения следует, что $S_{параллеграмма} = |\overline{a} \times \overline{b}|$. Находим векторное произведение

$\overline{a} \times \overline{b} = (3\overline{p} + \overline{q}) \times (\overline{p} - 3\overline{q}) = 3 \cdot (\overline{p} \times \overline{p}) - 9 \cdot (\overline{p} \times \overline{q}) +$
$+ (\overline{q} \times \overline{p}) - 3 \cdot (\overline{q} \times \overline{q}) = -10 \cdot (\overline{p} \times \overline{q})$, т.к. $(\overline{p} \times \overline{p}) = (\overline{q} \times \overline{q}) = 0$,

$(\bar{p} \times \bar{q}) = -(\bar{q} \times \bar{p})$ (см. свойства векторного произведения).

Модуль векторного произведения равен: $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = S_{параллеграмма}$.

Значит, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, численно равна модулю векторного произведения этих векторов, т.е. $S_{параллеграмма} = 70\sqrt{2}$.

Ответ: $70\sqrt{2}$ (кв. ед.)

Задание 4.

Компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$?

Дано: $\bar{a}(-7;10;-5), \bar{b}(0;-2;-1), \bar{c}(-2;4;-1)$.

Решение. Условие компланарности трех векторов - равенство нулю смешанного произведения: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$.

Если известны координаты этих векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, строками которого являются координаты данных векторов. Следовательно, вычислим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 0 + 20 + 20 - 28 + 0 = -2$$

Т.к. $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = -2 \neq 0$, то данные векторы не компланарны.

Задание 5.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$(рис.2).

Дано: $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$; $A_4(3;4;5)$.

Требуется найти объем тетраэдра.

Решение. а) Объем тетраэдра равен 1/6 части объема параллелепипеда, построенного на векторах

$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Объем соответствующего параллелепипеда вычисляется через смешанное произведение векторов, совпадающих с ребрами тетраэдра, сходящимися в вершине A_1(рис.2):

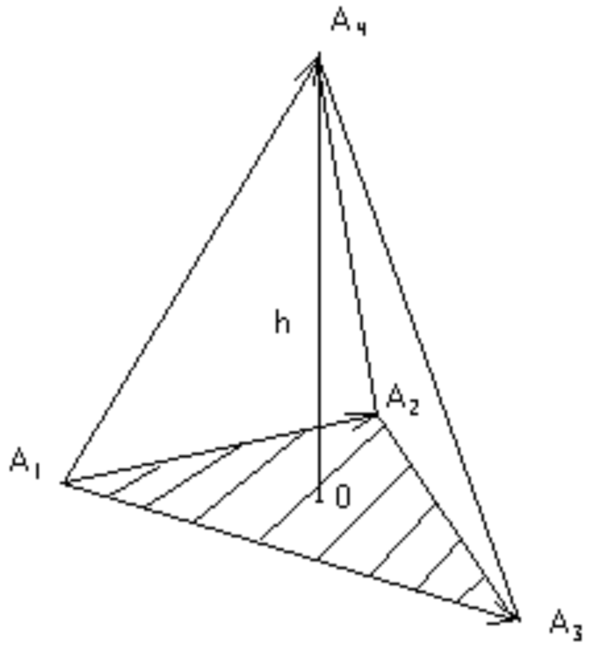


Рис. 2

$V_{тетраэдра} = (1/6)\left| \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_4} \right|$

Найдем координаты векторов и их смешанное произведение: $\overline{A_1A_2} = (5,-3,3)$, $\overline{A_1A_3} = (3,-1,1)$, $\overline{A_1A_4} = (4,2,8)$

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 30$$

Откуда $V_{тетраэдра} = (1/6) \times 30 = 5$ (куб. ед.)

б) Искомую высоту h найдем из формулы:
$V_{тетраэдра} = (1/3) S_{основания}\ h$, где $S_{основания}$ равна площади треугольника $A_1 A_2 A_3$.

Площадь треугольника $A_1 A_2 A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$

Поэтому находим векторное произведение

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot i + 4j + 4k$$

Следовательно, $S_{основания} = S_{\Delta} = (1/2)\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| =$

$= (1/2)\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$ (кв.ед.)

Таким образом

$h = 3V_{тетраэдра}/S_{основания} = 3 \cdot 5/(2\sqrt{2}) = 15\sqrt{2}/4$

Ответ: $V_{тетраэдра} = 5$ *(куб. ед.)*, $h = 15\sqrt{2}/4$ *(ед. длины)*

2. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

<u>Плоскость в пространстве.</u>

1) Уравнение плоскости – это уравнение первой степени вида:

$$Ax+By+Cz+D = 0,$$

если $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, которое называется общим уравнением.

Коэффициенты A, B, C можно рассматривать, как координаты вектора нормали $\overline{N} = (A,B,C)$, перпендикулярного плоскости.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, (условие $\overline{N} \perp \overline{MM_0}$, где $\overline{MM_0} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ лежит в плоскости).

3) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

-условие компланарности векторов
$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$, где $\overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$,
$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$,
$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, где
M(x,y,z)- текущая точка данной плоскости.

4) Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где *a,b,c* – отрезки, отсекаемые плоскостью, на координатных осях соответственно, - абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями *OX, OY*, и *OZ*.

5) Нормальное уравнение плоскости:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

где $\overline{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - вектор- нормаль к плоскости единичной длины, проведены из начала координат,
p – расстояние от начала координат до плоскости *(p>0).*

Приведем общее уравнение плоскости к нормальному уравнению плоскости. Для этого умножим обе части общего уравнения плоскости на нормирующей множитель:

$\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - полученное уравнение и будет нормальным уравнением плоскости. (Знак μ берется противоположным знаку *D)*

Расстояние от данной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости находится по формуле

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где A,B,C-коэффициенты в общем уравнении плоскости,
Угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где под углом между двумя плоскостями понимается угол между их нормалями $\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$).

Условие параллельности двух плоскостей:

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (если $\overline{N}_1 // \overline{N}_2$).

<u>Прямая в пространстве</u>

Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $\overline{S} =(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой, точка $M(x_0,{}_0y.z_0)$ лежит на прямой, т.е. прямая проходит через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}$.

Уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Прямая может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между двумя прямыми вычисляются по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где угол φ между двумя прямыми- угол между их направляющими векторами данных прямых.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$m_1 m_2+n_1 n_2+p_1p_2=0$ (если $\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2$).

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$ (если $\overline{S}_1 // \overline{S_2}$).

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть заданы прямая α и плоскость β:

β: $Ax+By+Cz+D = 0,$

$$a: \qquad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Угол между прямой и плоскостью определяются по формуле

$$\cos j = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

где j -угол между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad \text{(если } \overline{S} \,//\, \overline{N}\text{)}.$$

Условие параллельности двух прямых:

$Am+Bn+Cp=0$ (если $\overline{S}$ ^ $\overline{N}$).

Напомним, что $\overline{S} =(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой , $\overline{N} =(A,B,C)$ – нормаль к плоскости.

Задание 6.

Найти расстояние d от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1,M_2,M_3.

Дано: $M_1(1;0;2);M_2(1;2;-1);M_3(2;-2;1);M_0(-5;-9;1)$.

Требуется найти: d (см. рис.3)

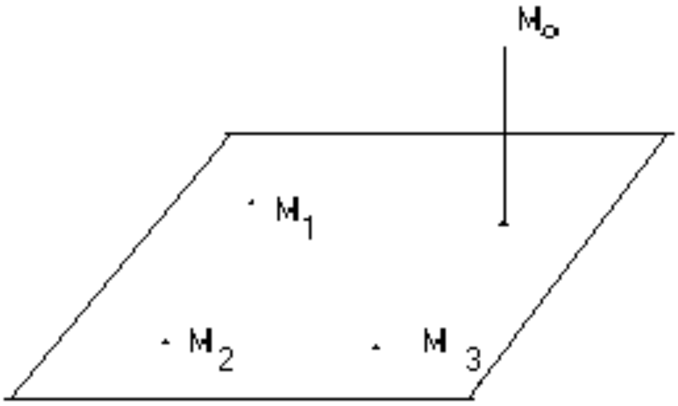


Рис.3

Решение. Находим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3, по формуле

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-1 & 2-0 & -1-2 \\ 2-1 & -2-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив определитель по первой строке и, приводя подобные члены, имеем уравнение плоскости: $8x+3y+2z-12=0$

Расстояние d от данной точки M_0 (x_0,y_0,z_0) до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|8x_0+3y_0+2z_0-12|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|8(-5)+3(-9)+2\times 1-12|}{\sqrt{(-8)^2+(-3)^2+2^2}}=\sqrt{77}\text{ (ед. длины).}$$

Ответ: $\sqrt{77}$ ед. длины.

Задание 7.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

Дано: $A(-1;2;-2)$, $B(13;14;1)$, $C(14;15;2)$.

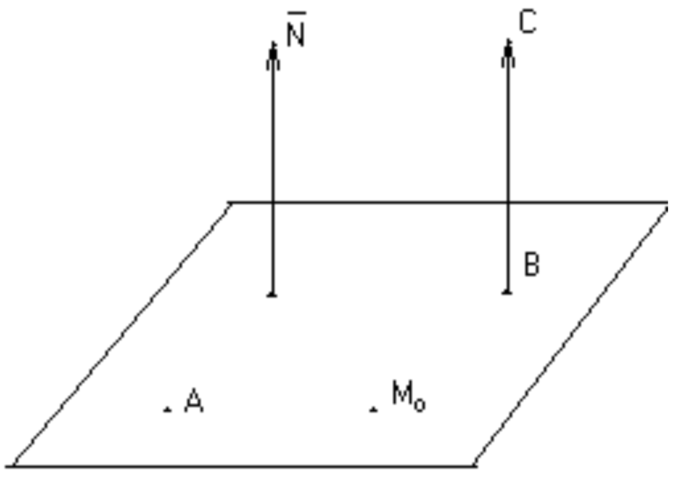


Рис. 4

Решение. Искомое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору нормали – $\overline{N}=(A,B,C)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Найдем координаты вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC}=(14-13;15-14;2-1)=(1;1;1).$$

Т.к. $\overline{BC}$ искомой плоскости(рис.4), то его можно взять в качестве вектора – нормали $\overline{N}$, точка A принадлежит плоскости по условию, то можно ее взять в качестве M_0. Поэтому уравнение искомой плоскости будет иметь вид:

$1(x-(-1))+1(y-2)+(z-(-2))=0$, или

$x+y+z+1=0$

Ответ: $x+y+z+1=0$

Задание 8.

Найти угол между плоскостями .

Дано: $x-3y-2z-8=0;\ x+y-z+3=0.$

Решение. Угол между плоскостями j находится по формуле:

$$\cos j=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где $\overline{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2,B_2,C_2)$ -вектора нормали.

Из условия задачи имеем: $\overline{N}_1(1;-3;-2)$, $\overline{N}_2\ (1;1;-1)$. Тогда

$$\cos j=\frac{1›1-3›1-2›(-1)}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=0$$

Значит, $j=p/2$.

Задание 9.

Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

Дано: $A(x;0;0),B(4;0;5,C(5;4;2)$.

Решение. По условию задачи $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AC}\right|$.

Найдем $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}$ =(4-x,0,5), $\overline{AC}$ =(5-x,4,2) и

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(4-x)^2+0^2+5^2} = \sqrt{x^2-8x+41};$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(5-x)^2+4^2+2^2} = \sqrt{x^2-10x+45}.$$

Приравняем модули этих векторов

$$\sqrt{x^2-8x+41} = \sqrt{x^2-10x+45} \quad \text{или} \quad x=2.$$

Значит, координаты токи *A(2;0;0)*.

Ответ: *A(2;0;0)*.

Задание 10.

Написать канонические уравнения прямой.

Дано: $x+5y+2z+11=0$, $x-y-z-1=0$.

Решение. Каноническое уравнение прямой (содержащую точку M_0 (x_0,y_0,z_0)) имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

где $\overline{S}$ =(m,n,p) – направляющий вектор прямой.

Прямая *l* (рис.5), задана как линия перемещения двух плоскостей.

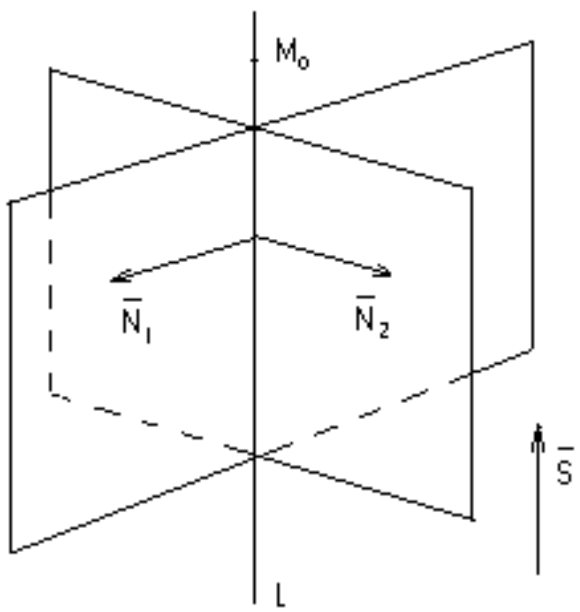


Рис. 5

<u>Способ 1</u>. Найдем вектор $\overline{S}=mi+nj+pk$, параллельный по определению искомой прямой l (рис.5), т.к. $\overline{S}\perp\overline{N}_1$ и $\overline{S}\perp\overline{N}_2$, где $\overline{N}_1=(1;5;2)$ и $\overline{N}_2=(1;-1;-1)$ – векторы нормали к данным пересекающимся плоскостям соответственно, то

$$\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3i+3j-6k.$$

Значит. $m=-3,\ n=3,\ p=-6.$

В качестве точки $M_0\ (x_0,y_0,z_0)$ можно взять точку пересечения прямой с любой из координатных плоскостей. Например, с плоскостью XOY. Так как при этом $z_0=0$, то координаты x_0 и y_0 можно найти из уравнений плоскостей (положив в них $z=0$):

$$\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_0=-1$, $y_0=-2$.

Итак нашли точку $M_0\ (-1,-2,0)$.

Таким образом, каноническое уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-6} \text{ или } \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$$

<u>Способ 2</u>. Исключим сначала x,затем y из данной системы уравнений плоскостей:

$\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе, то

получим: $6y+3z+12=0.$

$\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ Сложив первое уравнения и второе,

получим: $6x-3z+6=0.$

Находим z из этих уравнений

$z=-2y-4$ и $z=2x+2$.

Приравниваем эти равенства:

$z=-2y-4=2x+2$ или, разделив на 2, окончательно получаем:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$$

Ответ: $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$

Задание 11.

Требуется найти точку пересечения M (x,y,z), принадлежащую прямой l и плоскости p (рис. 6), если такая есть.

Решение. Сначала проверим, пересекаются ли данные прямая l и плоскость p. По условию $\overline{S}=(1;0;-1)$, $\overline{N}=(3;-2;-4)$.

(Если $l//p$, то векторы $\overline{S}$ ^ $\overline{N}$ и, значит, скалярное произведение $\overline{S}\ \overline{N}=0)$. Вычислим $\overline{S}\ \overline{N}=3+4=7$. Следовательно, векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ не перпендикулярны. Значит, прямая l и плоскость p пересекается в точке M.

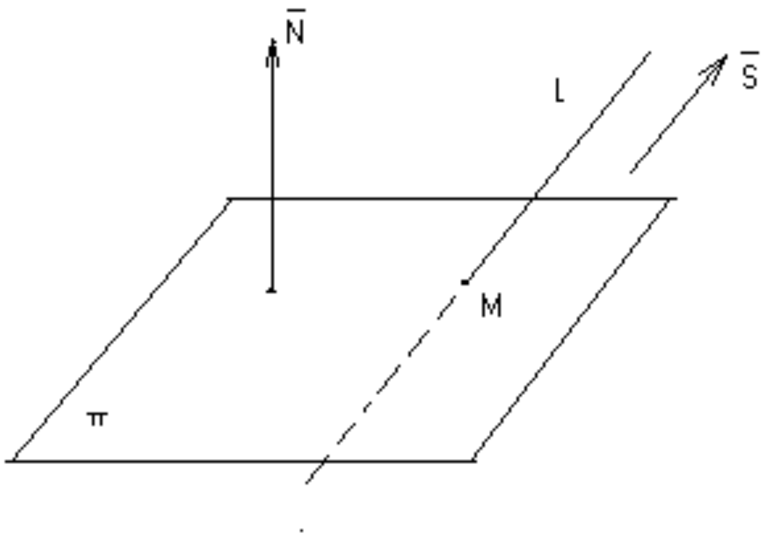


Рис. 6

Найдем теперь координаты этой точки M. Для этого запишем данное уравнение прямой l в параметрическом виде, приравняв равенства параметру t:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}=t.$$ Откуда получаем

$\frac{x-1}{1}=t$, $\frac{y+1}{0}=t$, $\frac{z-1}{-1}=t$ или

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1 \\ z=-t+1 \end{cases}$$ - параметрические уравнения прямой l.

Подставим эти выражения для x,y,z в данное уравнение плоскости и найдем значение t:

$3(t+1)-2(-1)-4(-t+1)-8=0$, или $7t-7=0$, откуда $t=1$.

Найденное значение параметра $t=1$ подставим в уравнение прямой, записанное в параметрическом виде:

$x=1+1=2;\ y=-1;\ z=-1+1=0;$ получим координаты точки $M(1;-1;0)$ пересечения прямой с плоскостью.

Ответ: $M(1;-1;0)$

Задание 12.

Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой или плоскости.

Задача 1.

Дано: $M(1;0;-1)$. Требуется найти точку $M'(x_1^1, y_1^1, z_1^1)$, симметричную точке M относительно прямой l (рис.7).

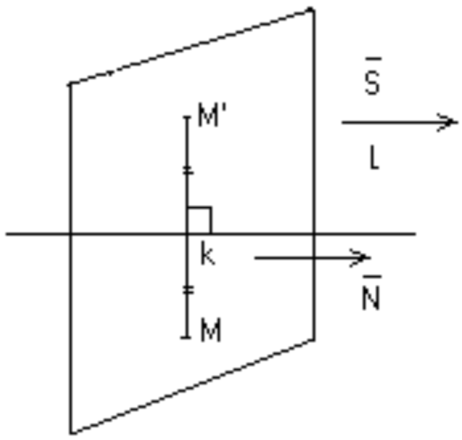


Рис. 7

Решение. Запишем уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M(1;0;-1)$ перпендикулярно заданной прямой l:

$A(x-1)+B(y-0)+C(z+1)=0,$

где $\overline{N}=(A,B,C)$ – нормали к плоскости.

Так как $\overline{N}\,//\,\overline{S}$, где $\overline{S}=(2;2;0)$ –направляющий вектор данной прямой l и, следовательно, $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{0}$, то заменим координаты A,B,C вектора $\overline{N}$ на соответствующие координаты вектора $\overline{S}$, тогда уравнение этой плоскости запишем в виде:

$2(x-1)+2(y-0)-0(z+1)=0,$ или $2x+2y-2=0.$

Найдем точку K, являющуюся проекцией точки M на данную прямую l, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} 2x+2y-2=0 \\ \dfrac{x-0{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0} \end{cases}$$

Для этого запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$\dfrac{x-0{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}=t$ или

$$\begin{cases} x=2t+0{,}5 \\ y=2t+1{,}5 \\ z=0 \end{cases}$$

И подставим эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости

$2(2t+0{,}5)+2(2t+1{,}5)-2=0$, или $8t+2=0$. Откуда $t=0{,}25$.

Тогда получим координаты точки K:

$$\begin{cases} x_k = 2(-0{,}25)+0{,}5=0 \\ y_k = 2(-0{,}25)+1{,}5=1 \\ z_k = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $K(0;1;0)$ – точка пересечения прямой l и плоскости, и она является серединой отрезка M^1M (рис.7), т.е. $M^1K=MK$ (ибо точка M^1 симметрична точке M по условию).

Координаты точки M^1 найдем из формул «деление отрезка пополам»:

$$x_k = \frac{x_{M^/} + x_M}{2},\ y_k = \frac{y_{M^/} + y_M}{2},\ z_k = \frac{z_{M^/} + z_M}{2}$$ и

$$0=(1+x_{M^/})/2,\ 1=(0+y_{M^/})/2,\ 0=(-1+z_{M^/})/2.$$

Откуда $x_{M^/} = -1,\ y_{M^/} = 2,\ z_{M^/} = 1$.

Следовательно, $M^1(-1;2;1)$.

Ответ: $M^1(-1;2;1)$.

Задача 2.

Найти точку M^1,симметричную точке M относительно плоскости π (рис.8).

Дано: $M(1;1;1)$, $x+y-2z-6=0$.

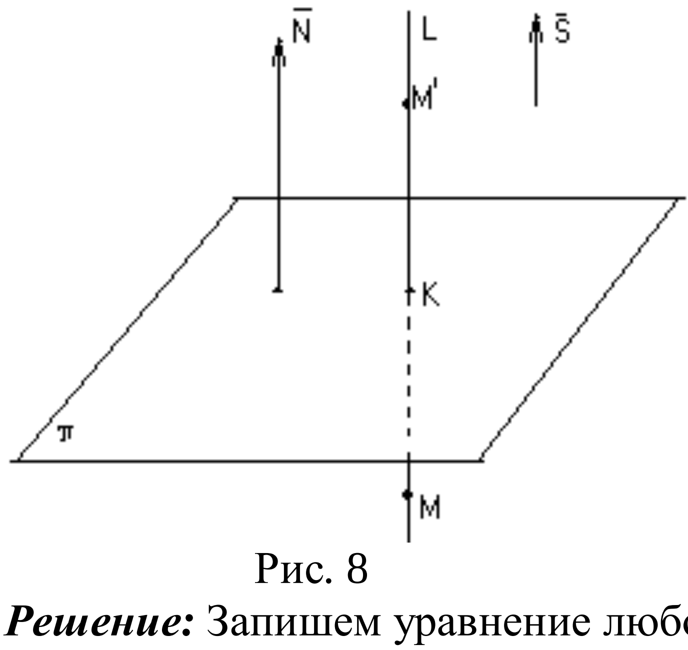


Рис. 8

Решение: Запишем уравнение любой прямой l , проходящей через точку *M(1;1;1)*:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}$$, где $\overline{S}=(m,n,p)$ -направляющий вектор прямой l.

Т.к. $\overline{N}\,//\,\overline{S}$, где $\overline{N}=(1,1,-2)$ -нормаль к данной плоскости, то заменим координаты m,n,p вектора $\overline{S}$ на соответствующие координаты вектора $\overline{N}$. Тогда уравнение этой прямой l запишется в виде: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

Найдем точку *K*, являющейся проекцией точки *M* на данную плоскость p, решив совместно

уравнения $\begin{cases} x+y-2z-6=0 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0-2} \end{cases}$.

Уравнения прямой представим в параметрической форме

$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=-2t+1 \end{cases}$, где *t*-параметр и, подставляя эти выражения для *x,y,z* в уравнение плоскости), (t*+1)+(t+1)-2(-2t+1)-6=0*,найдем *t=1*. Откуда координаты точки *K* будут: $x_k=1+1=2$, $y_k=1+1=2$, $z_k=-2+1=1$.

Итак, точка *K(2;2;-1)* является серединой отрезка M^1M (рис.7), т.к. точка M^1 симметрична точке *M* относительно плоскости по условию задачи. Используя формулы деления отрезка пополам, имеем: $x_k=\frac{x_{M/}+x_M}{2}$, $y_k=\frac{y_{M/}+y_M}{2}$, $z_k=\frac{z_{M/}+z_M}{2}$

$$2=\frac{1+x_{M/}}{2},\ 2=\frac{1+y_{M/}}{2},-1=\frac{1+z_{M/}}{2}.$$

Найдем координаты точки M^1 ,т.е. $x_{M^/} = 3$, $y_{M^/} = 3$, $z_{M^/} = -3$.
Ответ: $M^1(3;3;-3)$.

3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

1.Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если R – радиус окружности, точки M_0 (x_0,y_0) - ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 .$$

2. Эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная больше расстояния между фокусами (рис.9).

Пусть $M(x,y)$ – любая точка эллипса, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем

$$|MF_1|+|MF_2|=2a ,$$

где $MF_1 = r_1$ и $MF_2 = r_2$ называются фокальными радиусами, и, следовательно, $r_1 + r_2 = 2a$.

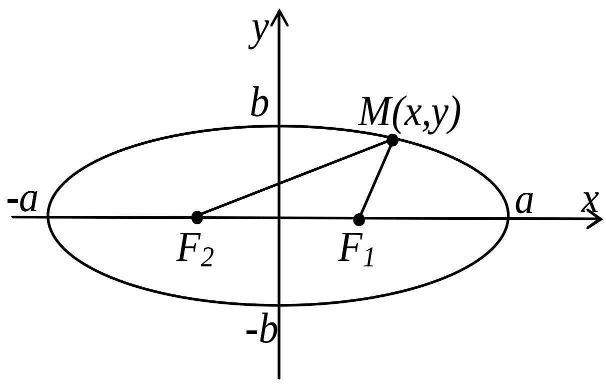


Рис. 9

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его эксцентриситетом $e = \dfrac{c}{a}$, (так как $c < a$, то $e < 1$ для эллипса).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, причем $a^2=b^2+c^2$. Здесь a – большая, b – малая полуоси эллипса.

В частности, если $a=b$ (с = 0, $e=0$, фокусы сливаются в одной точке – центре), то эллипс превращается в окружность

$$x^2+y^2=a^2.$$

Фокальные радиусы эллипса выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам:

$r_1=a-ex$ (правый фокальный радиус) и

$r_2=a+ex$ (левый фокальный радиус).

3. Гипербола – это множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами .

Пусть $M(x,y)$ – любая точка гиперболы, $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ – фокусы. Тогда по определению имеем $\left||F_1M|-|F_2M|\right|=2a,\ a>0$, где $r_1=F_1M$ и $r_2=F_2M$

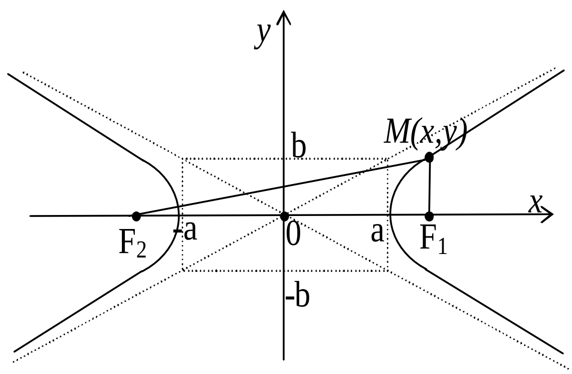


Рис. 10

называются фокальными радиусами, причем для правой ветви гиперболы, $r_1=ex-a$ – правый фокальный радиус; $r_2=ex+a$ – левый фокальный радиус, где число $e=\frac{c}{a}>1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 + в^2 = c^2$. Здесь a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы; из уравнения видно, что гипербола не пересекает ось OY, т.е. $x \neq 0$.

Для построения гиперболы строят прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, с центром в начале координат. Проводят диагонали в прямоугольнике, которые являются асимптотами $y = \pm \frac{b}{a} x$. Вершины гиперболы находятся в точках $(a; 0)$ и $(-a; 0)$.

<u>Замечание.</u> Если каноническое уравнение гиперболы имеет вид :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

то вершины гиперболы находятся на оси OY в точках $(b; 0)$ и $(-b; 0)$.

Гиперболы называются сопряженными (у них действительная ось одной гиперболы служит мнимой осью другой, и наоборот; они имеют общие асимптоты).

Если $a = b$, то уравнение (3) принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$..

Такая гипербола называется равнобочной. Ее асимптоты перпендикулярны друг к другу. Поэтому, если за координатные оси принять асимптоты равнобочной гиперболы, то ее уравнение примет вид

$x \cdot y = m$, $\left(m = \pm \frac{1}{2} a^2\right)$ (рис. 11 (а) и рис. 11 (б)), или $y = \frac{m}{x}$.

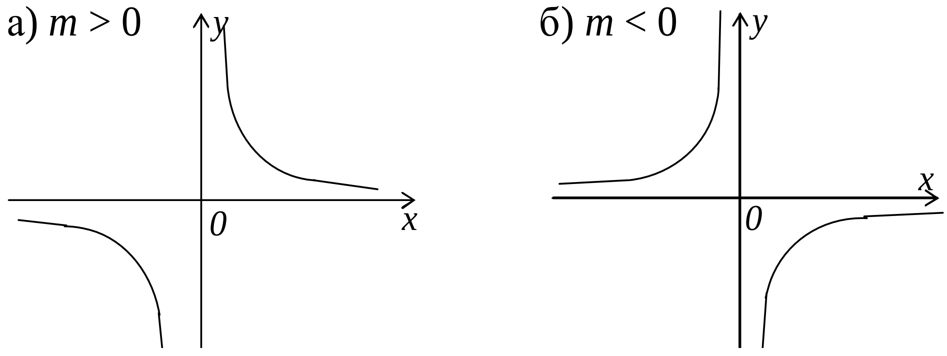


Рис. 11

4. <u>Парабола</u> – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой. Пусть прямая *l: x=-p/2* является директрисой параболы, точка *F(p/2,0)* – фокус. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$,
где p – фокальный параметр.

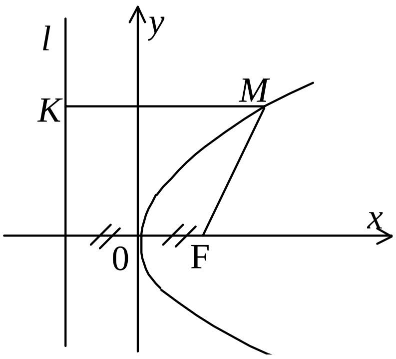


Рис. 12

Эта парабола расположена симметрично относительно оси *OX* ($p > 0$), $FM = r$ – фокальный радиус параболы, который определяется по формуле $r = x + \dfrac{p}{2}$, так как $|FM| = |KM|$.

Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат *OУ*.

При $p > 0$ ветви параболы направлены в положительную сторону соответствующей координатной оси, а при р < 0 – в отрицательную сторону.

4. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Если общее уравнение кривой второго порядка вида:

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$, т.е. не содержит члены с произведением xy (коэффициент $a_{12}=0$), то следует выделить полные квадраты по x и по y :

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$$

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11})+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22})+a_0=0,$$

$$a_{11}(x^2+2a_1x/a_{11}+(a_1/a_{11})^2)+a_{22}(y^2+2a_2y/a_{22}+(a_2/a_{22})^2)-$$
$$-(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2+a_0=0$$

или

$$a_{11}(x+a_1/a_{11})^2+a_{22}(y+a_2/a_{22})^2=(a_2/a_{22})^2)+$$
$$+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0,$$

и сделать замену переменных (параллельный перенос)

$$x' = x+\frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y+\frac{a_2}{a_{22}}$$

В результате получим

$$a_{11}(x')^2+a_{22}(y')^2=k\,,$$

где $k=(a_2/a_{22})^2)+(a_1/a_{11})^2-(a_2/a_{22})^2-a_0$

или $\dfrac{(x')^2}{k/a_{11}}+\dfrac{(y')^2}{k/a_{22}}=1$ – канонический вид кривой второго порядка.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ

Пусть общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

приведем к каноническому виду

$$\frac{(x')^2}{k/\lambda_1}+\frac{(y')^2}{k/\lambda_2}=1\ ,$$

где λ_1, λ_2 - собственные значения матрицы S .

Вычисляем $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

1. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 >0$, то кривая эллиптического типа;
2. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 <0$, то кривая гиперболического типа;

3. если $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ =0, то кривая параболического типа.

Задание 13. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

Пример 1.

Дано: $K(x,y)= 2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

Решение. Имеем $a_{11}=2, a_{22}=2, a_{12}=a_{21}=-1; a_1=-1, a_2=-1, a_0=1$.

Тогда матрица старших членов $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ – собственные значения матрицы S.

Так как $\lambda_1 = 1$, и $\lambda_2 = 3$ то данная кривая эллиптического типа.

Находим соответствующие им собственные векторы $\overline{h}_1 = (\xi_1, \xi_{2)}$ и $\overline{h}_2 = (\eta_1, \eta_{2)}$.

Для $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

или $\begin{cases} \zeta_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$, $\xi_1 = \xi_2 = c_1, c_1 - \forall\ const$.

Пусть $c_1=1$. Тогда $\overline{h}_1 = (1,1)$. Нормируем $\overline{h}_1$,

$\overline{h_1^0} = \overline{h}_1 / \left|\overline{h}_1\right|$, где $\left|\overline{h}_1\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$;

получаем $\overline{h_1^0} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Для $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} -\eta_1 - \eta_2 = 0 \\ -\eta_1 - \eta_2 = 0 \end{cases}$,

$\eta_1 = -\eta_2 = c_2, c_2 - \forall\ const.$,

Пусть $c_2 = 1$. Тогда $\overline{h}_2 = (1,-1)$. Нормируем $\overline{h}_2$, $\overline{h_2^0} = \overline{h}_2 / \left|\overline{h}_2\right|$, где $\left|\overline{h}_2\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2$;

получаем $\overline{h_2^0} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, причем $\overline{h_1^0} \perp \overline{h_2^0}$.

Орты собственных векторов $\overline{h_1^0}$ и $\overline{h_2^0}$ образуют базис в новой системе координат x', y'.

Имеем матрицу T линейного преобразования координат

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат

$$x = (1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{2})y'$$

$$y = (1/\sqrt{2})x' - (1/\sqrt{2})y' \text{ , или}$$

$$x = 1/\sqrt{2}(x' + y')$$

$$y = 1/\sqrt{2}(x' - y') \text{ .}$$

Подставляем в уравнения кривой найденные выражения для x и y: После раскрытия скобок и приведения подобных получаем

$(x')^2 + 3(y')^2 - 2\sqrt{2}\,x' + 1 = 0$, или

$(x')^2 - 2\sqrt{2}\,x' + 3(y')^2 + 1 = 0.$

Выделив, полный квадрат имеем:

$(x' - \sqrt{2}\,)^2 + 3y' + 1 = 0.$

Пусть $x'' = x' - \sqrt{2}$, $y'' = y'$ - параллельный перенос координатных осей. Тогда $(x'')^2 + 3(\,y'')^2 = 1$, или $(x'')^2 + (\,y'')^2/3 = 1$- каноническое уравнение эллипса в координатах x'', y'' , где a

$=1$ – большая, $b=1/\sqrt{3}$ = 0,577 – малая полуоси эллипса (рис.13) .

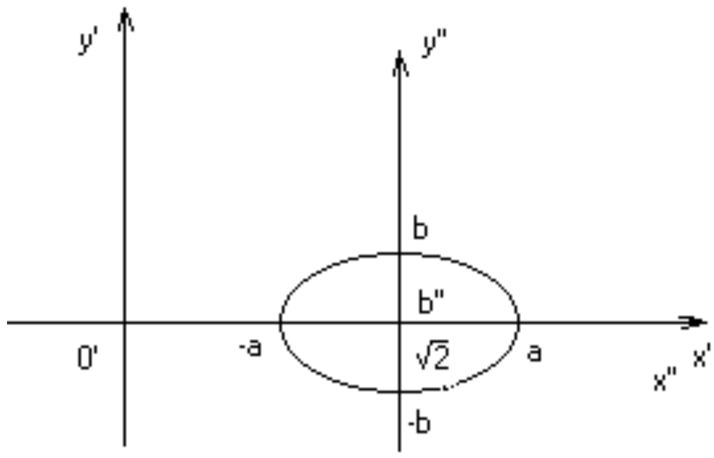


Рис. 13

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

(Методом поворота и параллельного переноса осей координат)

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

Решение. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\; y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Получаем

$$5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$

$$+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+$$

$$+8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0.$$

Раскрывая скобки и приравнивая нулю коэффициент при x', y', получаем условие для определения α

$$4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+6\sin\alpha\cos\alpha=0 \text{ или}$$

$$2\mathrm{tg}^2\alpha-3\mathrm{tg}\alpha-2=0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\alpha_1 = 2; \mathrm{tg}\alpha_2 = -0.5$. Следует отметить, то значения $\mathrm{tg}\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Пусть $\mathrm{tg}\alpha = 2$, тогда $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Возьмем положительные значения синуса и косинуса, тогда уравнение кривой принимает вид

$$9\left((x')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left((y')^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5.$$

Выражение в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Приняв за новое начало координат $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$, получаем окончательно $\frac{(x'')^2}{1/4} + \frac{(y'')^2}{9/16} = 1$ (уравнение эллипса).

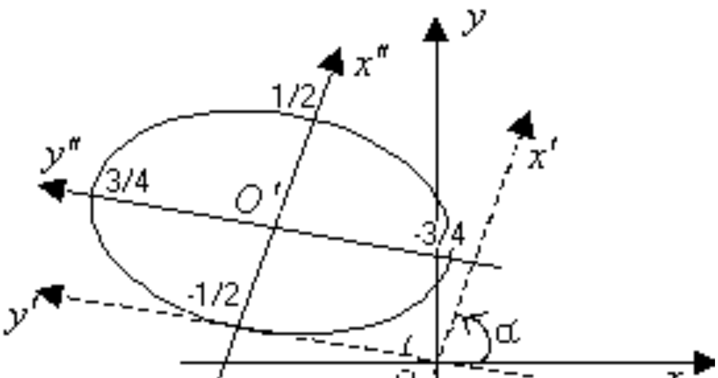


Рис. 14

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, и предоставляют студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С. Элементы алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. М.: Наука, 1980. 176 с.

2. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. М.: Наука, 2005. 320 с.

3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. М.: Наука, 1979. 390 с.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. М.: Наука, 2007. 333 с.

5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.

6. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986. 462 с.

8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.

9. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов / В.С. Шипачев. М., 2002.

10. Элементы линейной алгебры: учеб. пособие / Е. Г. Глушко, А. П. Дубровская, Л.Д. Кретова, Н.Б. Ускова. Воронеж, 1998. 120 с.

11. Федотенко Г.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие. / Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова. Воронеж, 2008. 161с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 2

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. 2,0 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14