

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра компьютерных интеллектуальных технологий
проектирования

219-2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Оптимизация в САПР»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») очной и заочной форм обучения



Воронеж 2014

Составитель канд. техн. наук О.В. Собенина

УДК 681.3

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Оптимизация в САПР» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Системы автоматизированного проектирования в машиностроении») очной и заочной форм обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. О.В. Собенина. Воронеж, 2014. 37 с.

Методические указания содержат необходимые для выполнения практических занятий теоретические сведения, примеры выполнения заданий.

Предназначены для студентов 3 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе Word и содержатся в файле «Оптимизация в САПР Практические занятия.doc».

Табл. 2. Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.Н. Дурова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. М.И. Чижов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВПО
«Воронежский государственный
технический университет», 2014

ВВЕДЕНИЕ

В САПР процедуры параметрического синтеза выполняются либо человеком в процессе многовариантного анализа (в интерактивном режиме), либо реализуются на базе формальных методов оптимизации (в автоматическом режиме). В последнем случае находят применение несколько постановок задач оптимизации.

Наиболее распространенной является детерминированная постановка: заданы условия работоспособности на выходные параметры Y и нужно найти номинальные значения проектных параметров X , к которым относятся параметры всех или части элементов проектируемого объекта. Назовем эту задачу оптимизации базовой. В частном случае, когда требования к выходным параметрам заданы нечетко, к числу рассчитываемых величин могут быть отнесены также нормы выходных параметров, фигурирующие в их условиях работоспособности.

Если проектируются изделия для дальнейшего серийного производства, то важное значение приобретает такой показатель, как процент выпуска годных изделий в процессе производства. Очевидно, что успешное выполнение условий работоспособности в номинальном режиме не гарантирует их выполнения при учете производственных погрешностей, задаваемых допусками параметров элементов. Поэтому *целью оптимизации становится максимизация процента выхода годных*, а к результатам решения задачи оптимизации относятся не только номинальные значения проектных параметров, но и их допуски.

Базовая задача оптимизации ставится как задача математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{extr} F(X), \\ & X \in D_X \\ & D_X = \{X \mid \varphi(X) > 0, \psi(X) = 0\}, \end{aligned}$$

где $F(X)$ – целевая функция, X – вектор управляемых (проектных) параметров, $\varphi(X)$ и $\psi(X)$ – функции-ограничения, D_x – допустимая область в пространстве управляемых параметров. Рассмотренная запись интерпретируется как задача поиска экстремума целевой функции путем варьирования управляемых параметров в пределах допустимой области.

Таким образом, для выполнения расчета номинальных значений параметров необходимо, во-первых, сформулировать задачу в рассмотренном виде, во-вторых, решить задачу поиска экстремума $F(X)$.

Сложность постановки оптимизационных проектных задач обусловлена наличием у проектируемых объектов нескольких выходных параметров, которые могут быть критериями оптимальности, но в рассмотренной постановке целевая функция должна быть одна. Другими словами, проектные задачи являются многокритериальными, и возникает проблема сведения многокритериальной задачи к однокритериальной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В САПР. ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ РЕЗАНИЯ

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача, математическая модель которой имеет вид:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min); \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I, \quad I \subseteq M = \{1, 2, \dots, m\}; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in M; \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J, \quad J \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$

Система линейных уравнений (2) и неравенств (3), (4), определяющая допустимое множество решений задачи W , называется *системой ограничений задачи линейного программирования*, а линейная функция $f(X)$ называется *целевой функцией*, или *критерием оптимальности*.

В частном случае, если $I = \emptyset$, то система (2) - (3) состоит только из линейных неравенств, а если $I = M$, то — из линейных уравнений.

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примере задачи оптимизации режимов резания.

Технические ограничения, влияющие на режимы обработки металлов при фрезеровании.

Ограничение 1. Режущие возможности инструмента.

Устанавливает взаимосвязь между скоростью резания, обусловленной принятой стойкостью инструмента, материалом режущей части инструмента, его геометрией, глубиной резания, подачей, механическими свойствами обрабатываемого материала, с одной стороны и скоростью резания, определяемой кинематикой станка, с другой стороны.

Скорость резания при фрезеровании определяется по формуле:

$$v = \frac{C_v D^q}{T^m t^x S_z^y B^u z^p} K_v, \quad (5)$$

где C_v -постоянный коэффициент, характеризующий нормативные условия обработки;

K_v - общий поправочный коэффициент на скорость резания:

$$K_v = K_{mv} K_{nv} K_{uv}$$

T_n - принятая стойкость инструмента в мин;

m - показатель относительной стойкости;

S - подача в мм/об, мм/мин;

у,х,и,с,р- показатели степеней соответственно при S,t,B,D;
D- диаметр фрезы,
B – ширина фрезерования,
Z – количество зубьев,
t – глубина резания

Скорость резания, согласно кинематической схеме станка, определяется по формуле:

$$V = \frac{\pi D n}{1000} \quad (6)$$

Приравнивая правые части формул (5) и (6) и выделяя в левую часть искомые элементы режима обработки, получим выражение для первого технического ограничения:

$$n S^{y_v} \leq \frac{318 C_v D^{q-1} K_v}{T^m t^x z^p B_\phi^u} \quad (7)$$

Ограничение 2. Мощность электродвигателя главного движения станка.

Этим ограничением устанавливается взаимосвязь между эффективной мощностью, затрачиваемой на процесс резания, и мощностью электропривода главного движения станка. Эффективная мощность, затрачиваемая на процесс резания при фрезеровании:

$$N_e = \frac{P_z v}{60 \cdot 1020} \quad (8)$$

$$P_z = \frac{10 C_p t^x s_z^y B^u z}{D^q n^w} K_{mp}$$

Учитывая необходимое условие протекания процесса резания, можно получить следующее неравенство:

$$N_{эф} \leq N_n \eta \quad (9)$$

где N_n – мощность электродвигателя главного привода станка, кВт;

η - КПД механизма передачи от электродвигателя к инструменту.

Приравнивая правые части выражений (8) и (9), получаем второе техническое ограничение в виде неравенства:

$$n^{-w} S^y \leq \frac{1.9 \cdot 10^6 N_n \eta D^{q-1}}{C_p t^x k_p B^u z} \quad (10)$$

Ограничение 3, 4. Наименьшая и наибольшая скорости резания.

Эти ограничения устанавливают взаимосвязь расчётной скорости резания с кинематикой станка. Скорость резания не может быть меньше, чем возможная при наименьших оборотах станка и больше, чем наибольшая возможная. Это условие записывается в виде следующего неравенства:

$$n \geq n_{ст \min} \quad (11)$$

$$n \leq n_{ст \max} \quad (12)$$

Ограничение 5, 6. Наименьшая и наибольшая допустимые подачи.

Эти ограничения аналогично двум предыдущим устанавливают взаимосвязь расчетной подачи с подачей, допустимой кинематикой станка:

$$S \geq S_{ст \min} \quad (13)$$

$$S \leq S_{ст \max} \quad (14)$$

Ограничение 7. Прочность режущего инструмента.

Это ограничение устанавливает взаимосвязь между расчетными значениями скорости резания и подачи и допустимыми по прочности режущего инструмента. В основу построения этого ограничения закладывают условия нагружения режущего инструмента, например сверла, как консольной балки.

$$\sigma_{кр} \geq M_{кр}/W$$

где $W = \pi D^3/16$ для круглого сечения.

Отсюда

$$n^{-w} S^{y_p} \leq \frac{20\sigma D^{q-1}}{10C_p B^{q_p} k_p k_h z t^x} \quad (15)$$

Ограничение 8. Ограничение по наибольшей подаче, допускаемой прочностью механизма подачи станка.

Осевая составляющая усилия резания или усилия подачи при фрезеровании определяется по формуле:

$$P_z = \frac{10C_p t^x s_z^y B^u z}{D^q n^w} \cdot k_h \cdot K_{mp}$$

Усилие подачи, действующее при резании на инструмент, должно быть меньше усилия подачи, допускаемого прочностью механизма подачи станка, т.е.

$$P \leq P_{\text{под.ст}},$$

$$\frac{10C_p t^x s_z^y B^u z}{D^q n^w} \cdot k_h \cdot K_{mp} \leq P_{\text{под.ст}}$$

$$n^{-w} S^{y_p} \leq \frac{P_{\text{под.ст}} \cdot D^q}{10C_p B^{q_p} k_p k_h z t^x} \quad (16)$$

Для приведения полученных нами уравнений и неравенств технических ограничений и критерия оптимальности к линейным формам необходимо их логарифмировать.

Логарифмируем правые и левые части полученных уравнений и неравенств, причем для удобства будем пользоваться натуральными логарифмами.

В результате получаем:

Для ограничения 1 (формула (7)):

$$\ln n + y_v \ln(S) = \ln \left(\frac{318C_v D^{q-1} K_v}{T^m t^x z^p B_\phi^u} \right)$$

Для ограничения 2 (формула (10)):

$$-w \ln n + y \ln S \leq \ln \left(\frac{1.9 \cdot 10^6 N_n \eta D^{q-1}}{C_p t^x k_p B^u z} \right)$$

Для ограничения 3 (формула (11)):

$$\ln n \geq \ln (\text{нст min}).$$

Для ограничения 4 (формула (12)):

$$\ln n \leq \ln (\text{нст max}).$$

Для ограничения 5 (формула (13)):

$$\ln (S) \geq \ln (\text{Сст. min})$$

Для ограничения 6(формула (14)):

$$\ln (S) \leq \ln (\text{Сст. max})$$

Для ограничения 7(формула (15)):

$$-w \ln n + y \ln S \leq \ln \left(\frac{20\sigma D^{q-1}}{10C_p B^{q_p} k_p k_h z t^x} \right)$$

Для ограничения 8 (формула (16)):

$$-w \ln n + y \ln S \leq \ln \left(\frac{P_{\text{нод.см.}} D^q}{10C_p B^{q_p} k_p k_h z t^x} \right)$$

Из теории резания известно, что режимы резания являются оптимальными, если сумма величины подачи и скорости резания будет максимальной.

Для целевой функции :

$$\mathbf{f = \ln n + \ln S \rightarrow \max.}$$

Введем следующие обозначения: $\ln n = x_1$; $\ln(S) = x_2$;

$$\ln \left(\frac{318C_v D^{q-1} K_v}{T^m t^x z^p B_\phi^u} \right) = c_1$$

Получаем неравенство $x_1 + yx_2 \leq c_1$. Аналогично могут быть получены в линейном виде зависимости для других технических ограничений.

Подставляя введенные обозначения в полученные ранее уравнения и неравенства технических ограничений и критерия

оптимальности, получим систему линейных уравнений и неравенств и линейную функцию, подлежащую оптимизации.

Задание. Получить в линейном виде зависимости для всех технических ограничений задачи оптимизации режимов резания. Решить полученную задачу оптимизации режимов резания симплекс-методом.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫБОРА КОЛИЧЕСТВЕННОГО СОСТАВА ОБОРУДОВАНИЯ КАК ЗЛП

Одним из первых этапов в создании проекта участка гибкой производственной системы и, в частности, в проектировании его транспортной подсистемы, является решение задач выбора состава и размещение оборудования участка. Эти задачи являются многопараметрическими и многокритериальными оптимизационными задачами.

При выборе количественного состава оборудования исходными данными являются параметры технологического процесса, общее количество позиций обработки и типаж технологического оборудования. Задача выбора количественного состава ставится как задача определения количества единиц оборудования в группах, отвечающих позициям обработки. Предлагается эту задачу рассмотреть в двух дополняющих и последовательно расширяющих друг друга вариантах.

На первом этапе количественный состав оборудования определяется из уравнений баланса межгруппового обмена продукцией с учетом времен обработки на позициях участка, заданных потоков обрабатываемых изделий между различными группами оборудования, требуемой производительности участка, заданных рабочих площадей и обобщенных стоимостей, выделяемых на оборудование и его установку.

На втором этапе вводятся ограничения на допустимый разбаланс оборудования в группах. Эти условия соответствуют ограничениям на взаимно обусловленные простои оборудова-

ния при рассогласовании требований различных потоков обрабатываемых изделий, например, при широкой номенклатуре изделий. А также рассматривается дополнительный критерий – время, необходимое на переналадку оборудования при переходе от одной модификации к другим.

Пусть на рассматриваемом участке намечен выпуск продукции L модификаций и для каждого $l = \overline{1, L}$ задано Γ^l – количество изделий l –ой модификации, которое необходимо выпускать на данном участке в единицу времени.

Пусть для каждой из модификаций известен ее технологический маршрут (последовательность операций, необходимых для производства продукции данной модификации).

Будем рассматривать технологические маршруты двух типов: технологические маршруты типа «механообработки» и маршруты типа «механосборки».

Маршруты задаются либо в виде графов, либо с помощью матриц технологических маршрутов C^l , $l = \overline{1, L}$, размерности $N \times N$, где N – число различных групп оборудования, занятых в технологических процессах рассматриваемого участка гибкого производства.

Число различных групп оборудования N совпадает с максимальным числом вершин графов технологических маршрутов (в графах технологических маршрутов число вершин может быть меньше N , это связано с тем, что при производстве некоторых модификаций продукции данного участка, определенные группы оборудования могут быть не задействованы).

Будем считать, что все группы оборудования различного типа пронумерованы.

Элементы матриц C^l определены как элементы матриц смежности соответствующих графов технологических маршрутов.

Пусть далее заданы матрицы γ_{ij}^l ; $i = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, N}$ - количества единиц продукции i -ой группы оборудования, необходимые для производства продукции j -ой группы оборудования при выпуске изделий l -ой модификации.

Для процесса типа «механообработки» справедливо равенство

$$\gamma_{\mu i}^l = \gamma_{i \nu}^l \quad \forall \mu, i, \nu: \quad C_{\mu i}^l = 1, C_{i \nu}^l = 1. \quad (17)$$

Для процесса типа «механосборки» равенство (17) может не выполняться.

Пусть T_i^l - время обработки детали продукции l -ой модификации на станке i -ой группы.

Пусть P – обобщенная стоимость выбранного технологического оборудования. Положим, что она включает в себя обычную стоимость оборудования, стоимость его установки и наладки на рассматриваемом участке.

Пусть S – площадь, необходимая для размещения на данном участке выбранного состава оборудования.

Для выпуска продукции L модификаций, необходимо выбрать такой количественный состав технологического оборудования, который обеспечит выполнение неравенств

$$P \leq P_0, \quad S \leq S_0 \quad (18)$$

и в то же время позволит обеспечить выпуск намеченной продукции модификаций с заданными производительностями Γ^l .

В неравенствах (18) P_0 и S_0 – соответственно обобщенная стоимость, выделенная на технологическое оборудование для рассматриваемого участка, и полезная площадь этого участка.

Пусть K_i – число станков одного типа в i -ой группе рассматриваемого технологического оборудования, $i = \overline{1, N}$. Решить задачу выбора количественного состава оборудования, значит найти такой набор $\{K_i\}$, $i = \overline{1, N}$, который обеспечит выполнение неравенств (18) выпуск продукции с запланированными Γ^l .

Далее будем рассматривать только технологический процесс типа «механосборки», так как процесс типа «механообработки» можно рассматривать как его частный случай.

Пусть вершины графов технологических маршрутов пронумерованы так, что вершина с максимальным номером соответствует последней операции l -го технологического процесса. Пусть также число технологических операций во всех технологических процессах не меньше, чем N .

Запишем уравнение баланса межгруппового обмена продукцией для N -ой вершины каждого l -го графа технологического процесса (в предположении, что обмен ведется через накапливающие устройства)

$$K_N^l = \Gamma^l * T_N^l, \quad l = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Здесь K_N^l - число станков N -ой группы, необходимое для обеспечения выпуска продукции l -ой модификации с заданным Γ^l .

Общий вид уравнений баланса для технологического маршрута l -ой модификации можно записать в виде

$$K_i^l = K_j^l * \gamma_{ij}^l * T_i^l / T_j^l, \quad \forall j: C_{ij}^l = 1; \quad (20)$$

$$l = \overline{1, L}; \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, N}.$$

Величины K_j^l вычисляются ранее и теперь позволяют найти все K_i^l , для таких i , что $C_{ij}^l = 1$.

Здесь K_i^l - число станков одного типа в i -ой группе рассматриваемого технологического оборудования, $i = \overline{1, N}$.

После решения уравнений баланса, найденные K_i^l необходимо привести к целому виду

$$K_i^l = [K_i^l] + 1, \text{ где } [a] - \text{целая часть } a.$$

Может быть ситуация когда $l_1 \neq l_2$, то может получиться так, что $K_i^{l_1} \neq K_i^{l_2}$. Это означает, что при выпуске продукции различной модификации, с заданными Γ^l , одной и той же груп-

пе оборудования необходимо различное число единиц оборудования. Поэтому для обеспечения всех Γ^l , $l = \overline{1, L}$, на рассматриваемом участке, необходимо взять число станков в каждой из N групп, определенное следующим образом

$$K_i^0 = \max_{l=1, L} K_i^l, \quad i = \overline{1, N}.$$

Пусть s_i – площадь, необходимая для установки на участке одного станка i -ой группы, тогда $S_i = N_i s_i K_i^0$ – площадь, необходимая под i -ую группу оборудования. Здесь N_i – коэффициенты использования единицей оборудования рабочей площади участка.

Необходимо, чтобы $S_0 \geq \sum N_i K_i^0 s_i$. Если $S_0 < \sum S_i$, то необходимо провести пересчет по площади с учетом отношения $S_0 / \sum S_i$. Формулы пересчета:

$$K_i' = \frac{s_0 K_i^0}{\sum s_i}.$$

Аналогично производится пересчет по стоимости по следующей формуле

$$K_i'' = \frac{p_0 K_i^0}{\sum_{i=1}^N p_i K_i^0},$$

где p_i – обобщенная стоимость одного станка i -ой группы.

Пусть при пересчете по площади получено K_i' , $i = \overline{1, N}$ станков в группах, а при пересчете по стоимости K_i'' , $i = \overline{1, N}$ – станков, тогда для обеспечения неравенств (18) выберем количественный состав оборудования следующим образом

$$K_i = \min(K_i', K_i'').$$

Новые значения Γ_*^l после пересчета определяются выражением

$$\Gamma_*^l = K_N / T_N^l; \quad l = \overline{1, L}$$

и соответствуют тем производительностям, которые возможны на рассматриваемом участке при заданных S_0 и P_0 .

Теперь можно рассмотреть пример использования уравнений баланса.

Анализ приведенного выше примера показывает, что при выборе количественного состава оборудования методом уравнений баланса могут возникать ситуации, когда при выпуске продукции некоторых модификаций в определенных группах окажутся незадействованные станки.

Введем далее возможную схему коррекции постановки задачи выбора оборудования, допускающую ограничение простоев оборудования.

Рассмотрим выражение

$$C_{ij}^l * \left| \frac{\gamma_{ij}^l}{T_j^l} - \frac{1}{T_i^l} * \frac{K_i}{K_j} \right|, \quad (21)$$

которое показывает величину разбаланса между i -ой и j -ой группами оборудования в пересчете на один станок j -ой группы.

Пусть на величины (21) наложены ограничения вида

$$C_{ij}^l * \left| \frac{\gamma_{ij}^l}{T_j^l} - \frac{1}{T_i^l} * \frac{K_i}{K_j} \right| \leq \Delta_{ij} * C_{ij}^l, \quad (22)$$

где Δ_{ij} – задаваемые (управляемые) положительные константы, которые определяют верхнюю границу разбаланса оборудования в группах.

Ограничения (22) наложенные на количественный состав выбираемого технологического оборудования, можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_j (\gamma_{ij}^l / T_j^l + \Delta_{ij}) * C_{ij}^l - (1/T_i^l) * C_{ij}^l * K_i &\geq 0, \\ K_j (\gamma_{ij}^l / T_j^l - \Delta_{ij}) * C_{ij}^l - (1/T_i^l) * C_{ij}^l * K_i &\leq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем ограничения на количественный состав выбираемого технологического оборудования для обеспечения заданных Γ^l .

Если задана нижняя граница производительности для выпуска продукции l -ой модификации Γ_0^l , $l = \overline{1, L}$, то необходимо чтобы

$$K_N^l \geq \Gamma_0^l * T_N^l.$$

Общий вид ограничений на количественный состав

$$K_j^l \geq T_j^l \prod_{\{\mu \nu\} \in G_{jN}^l} (\gamma_{\mu\nu}^l),$$

где G_{jN}^l - множество вершин l -го технологического маршрута, лежащих на пути из вершины j в вершину N .

Для обеспечения Γ^l при любом l на одном и том же составе технологического оборудования, необходимо чтобы

$$K_j^l \geq \max_{\{\mu \nu\} \in G_{jN}^l} (T_j^l \prod (\gamma_{\mu\nu}^l)).$$

Далее на выбор количественного состава оборудования накладываются дополнительные ограничения с учетом времени переналадки.

Будем считать, что набор модификаций пронумерован. Пусть задана последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3$ выпуска продукции участка. Каждое α_i , $i = \overline{1, L}$ соответствует продукции одной из L модификаций.

Пусть $T_{a_j a_{j+1}}$ – время, необходимое для перевода участка с выпуска продукции α_j -ой модификации на продукцию α_{j+1} -ой модификации.

Пусть T – время, выделенное на выполнение последовательности, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$, а t^l – время, выделенное из времени T на выпуск продукции l -ой модификации.

С учетом времени переналадки, получаем

$$\sum_{l=1}^L t^l + \sum_{j=1}^{L-1} T_{a_j a_{j+1}} \leq T. \quad (24)$$

Пусть $T_{a_j a_{j+1}}^i$ – время, необходимое на переналадку одного станка i -ой группы при переходе с выпуска продукции α_j -ой модификации на выпуск продукции α_{j+1} -ой модификации.

Рассмотрим вариант последовательной перенастройки технологического оборудования. В этом случае можно записать

$$T_{a_j a_{j+1}}^i = \sum_{i=1}^N K_i * T_{a_j a_{j+1}}^i . \quad (25)$$

Тогда неравенство (24) можно переписать с учетом (25)

$$\sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^N K_i * T_{a_j a_{j+1}}^i \leq T - \sum_{l=1}^L t^l . \quad (26)$$

Поставим задачу выбора количественного состава технологического оборудования с учетом разбаланса между группами и времени переналадки оборудования:

минимизировать функцию

$$f = \alpha_1 \sum_{i=1}^N H_i s_i K_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^N p_i K_i + \alpha_3 \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{i=1}^N K_i T_{a_j a_{j+1}}^i \quad (27)$$

при условиях

$$K_j (\gamma_{ij}^l / T_j^l + \Delta_{ij}) C_{ij}^l - (1/T_i^l) C_{ij}^l K_i \geq 0,$$

$$K_j (\gamma_{ij}^l / T_j^l - \Delta_{ij}) C_{ij}^l - (1/T_i^l) C_{ij}^l K_i \leq 0,$$

$$K_j \geq \max_l (T_j^l \prod_{\{\mu \nu\} \in G_{jN}^l} (\gamma_{\mu\nu}^l)).$$

Задача (27) является задачей линейного программирования и может быть решена известными методами, например, симплекс-методом.

Задание. Определить количественный состав оборудования с помощью уравнений баланса для системы со следующими технологическими характеристиками.

Технологический участок с полезной площадью $S_0 = 100$ и стоимостью, выделенной на оборудование $P_0 = 150$. На уча-

стке намечен выпуск продукции трех модификаций ($L = 3$), и всего на участке пять различных групп оборудования ($N = 5$). Технологические маршруты заданы следующими матрицами

$$C_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 00100 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00000 \\ 00010 \end{pmatrix}, \quad C_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 00100 \\ 00000 \\ 00010 \\ 00000 \\ 00010 \end{pmatrix}, \quad C_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 00010 \\ 00010 \\ 00000 \\ 00001 \\ 00000 \end{pmatrix}$$

Пусть производительности будут равны $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 10$.

В соответствии с матрицам C_{ij}^l заданы матрицы производительности каждой группы оборудования γ_{ij}^l

$$\gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 00200 \\ 00300 \\ 00010 \\ 00000 \\ 00020 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 00200 \\ 00000 \\ 00010 \\ 00000 \\ 00030 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 00010 \\ 00020 \\ 00000 \\ 00002 \\ 00000 \end{pmatrix}$$

Время обработки для каждой группы оборудования заданы следующей таблицей

l	T_1^l	T_2^l	T_3^l	T_4^l	T_5^l
1	1,0	1,5	2,0	1,6	1,0
2	1,2	1,3	2,0	1,6	1,0
3	1,3	1,2	2,0	1,2	2,0

Площади и стоимости станков каждой группы заданы следующей таблицей.

N	1	2	3	4
S	1,0	1,0	1,5	2,0
P	1,0	1,5	2,0	1,0

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕНАЛАДОК ДЛЯ ГПС

Математическая постановка задачи оптимизации переналадок для ГПС (гибкая производственная система) ставится как задача нахождения оптимальной последовательности выпуска изделий, требующей наименьших затрат на перенастройку оборудования.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\{a_1 \dots a_L\}$ - множество всевозможных последовательностей выпуска изделия L модификаций; k_λ - количество оборудования в группе λ , где $\lambda = 1, \dots, N$; T_{ij}^λ - время, необходимое на переналадку единицы оборудования λ -ой группы при переходе с выпуска i -ой модификации на выпуск j -ой модификации.

Пусть G - ориентированный граф, вершины которого представляют изделия, а существование дуги (x_i, x_j) означает, что изделие j может следовать за изделием i без перенастройки оборудования. Тогда, если в этом графе есть гамильтонов цикл (ориентированный цикл, проходящий через каждую вершину графа), то существует последовательность выпуска изделий, не требующая перенастройки оборудования. Если не существует циклической последовательности выпуска изделий, не требующей перенастройки оборудования, то задача сводится к нахождению последовательности выпуска изделий, требующих наименьших затрат на перенастройку оборудования.

Пусть $x_{ij} = 1$, если после изделия i -ой модификации выпускается изделие j -ой модификации; $x_{ij} = 0$, если после изделия i -ой модификации изделие j -ой модификации не выпускается.

С так введенными переменными ставим задачу:

Минимизировать функцию

$$f = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{i,j=1}^L T_{ij}^\lambda \cdot k_\lambda \cdot x_{ij} \quad (28)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^L x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^L x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = \{0,1\} . \quad (29)$$

В качестве дополнительных ограничений необходимо наложить условие «петель», для устранения подконтуров в задаче

$$u_i - u_j + L \cdot x_{ij} \leq L - 1, \quad i, j = 1 \dots L \quad (30)$$

Задача (28)-(30) полностью аналогична классической задаче коммивояжера:

$$f = \sum_{i,j=1}^N d_{ij} \cdot x_{ij} \quad (31)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = \{0,1\} . \quad (32)$$

условие «петель»

$$u_i - u_j + N \cdot x_{ij} \leq N - 1, \quad i, j = 1 \dots N \quad (33)$$

В задаче коммивояжера (31)-(33) ищется оптимальная последовательность обхода «городов», а в задаче (28)-(30) оптимальная последовательность выпуска изделий. В задаче (31)-(33) матрица D с элементами d_{ij} является матрица расстояний между N «городами», этой матрице соответствует матрица B в задаче (28)-(30) с элементами b_{ij} , которая является матрицей времени переналадки оборудования

$$b_{ij} = \sum_{\lambda=1}^N \cdot k_{\lambda} \cdot T_{ij}^{\lambda}$$

Таким образом, задачу оптимизации последовательности выпуска изделий можно решить методами решения задачи коммивояжера.

Задание. Построить решение задачи оптимизации переналадок для ГПС методом ветвей и границ.

4. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ НА УЧАСТКЕ ГАП (КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ)

Задачи размещения оборудования на участке является сложной многопараметрической и многокритериальной оптимизационной задачей. Учет среди критериев условий минимизации транспортных затрат позволяет повысить быстродействие транспортной подсистемы ГАП и снизить ее загрузку.

В основе алгоритма локальной оптимизации задачи размещения оборудования лежит метод попарных перестановок. Алгоритм использует поиск на ориентированном графе взаимных перестановок, ориентация на этом графе вводится с учетом значений целевой функции в его вершинах.

Постановка задачи размещения оборудования. Рассмотрим технологический участок ГАП, который рассчитан на выпуск продукции L различных модификаций. Пусть в технологическом процессе на этом участке занято N различных технологических операций.

Считаем, что технологические маршруты для каждой из L модификаций заданы матрицами C^l и в виде графов.

Для простоты будем считать, что площади, необходимые для размещения каждой из N групп, одинаковы.

Пусть участок разбит на N равных по площади подучастков (позиций) и между всеми выделенными позициями проведены транспортные пути (рис.1). Считаем далее, что все выделенные позиции пронумерованы. Так как все транспортные пути участка известны и все позиции пронумерованы, то можно ввести матрицу расстояний D . Элементы этой матрицы d_{ij} ;

$i, j = \overline{1, N}$ определим как длину пути между i -ой и j -ой позициями при заданной сети транспортных путей. Элементы матрицы D можно вычислять как в евклидовой, таки в линейной системах исчисления.

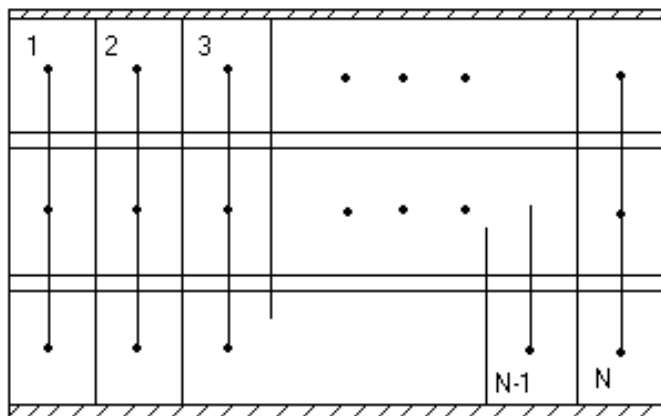


Рис. 1. Пример участка с N рабочими позициями

Матрицу D можно ввести не только как матрицу расстояний между различными позициями участка, ее можно определить и как матрицу, элементы d_{ij} которой есть веса, приписанные из i -ой позиции в j -ую. Если матрица D определена как матрица расстояний, то она симметрична и $d_{ij}=d_{ji}$.

Пусть заданы α^l , $l = \overline{1, L}$ -весовые коэффициенты выпуска продукции l -ой модификации. Считаем что они нормированы, т.е.

$$\alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^l = 1 . \quad (34)$$

В качестве критериев оптимизации в задаче размещения технологического оборудования на участке ГАП возьмем длины путей S^l пройденные изделиями каждой из l модификаций в процессе их производства.

Введем переменные X_{ij} следующим образом:

$X_{ij} = 1$, если j -ая группа станков поставлена на i -ую позицию участка

$X_{ij} = 0$, если j -ая группа станков не поставлена на i -ую позицию участка.

С помощью введенных переменных находим

$$S^l = \sum_{i,j,\mu,v=1}^N X_{i\mu} X_{jv} \alpha_{ij}^l C_{\mu v}^l.$$

В качестве основного критерия оптимизации возьмем свертку S^l , $l = \overline{1, L}$ с весовыми коэффициентами α^l определенными в (34). Получаем

$$Z = \sum_{l=1}^L \sum_{i,j,\mu,v=1}^N \alpha^l X_{i\mu} X_{jv} \alpha_{ij}^l C_{\mu v}^l$$

С так введенным критерием ставим задачу минимизировать функцию

$$Z = \sum_{i,j,\mu,v}^N A_{i\mu j v} \cdot X_{i\mu} \cdot X_{jv} \quad (35)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^N X_{j\mu} = 1, \quad \sum_{\mu=1}^N X_{i\mu} = 1, \quad X_{i\mu} = \{0;1\} \quad (36)$$

$$A_{i\mu j v} = \alpha_{ij} \cdot \sum_{l=1}^L \alpha^l \cdot C_{\mu v}^l$$

Заметим, что условия задачи (36) эквивалентны условиям классической задачи о назначениях

$$Z = \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min \quad (37)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^N X_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^N X_{ij} = 1, \quad X_{ij} = \{0;1\}$$

Отличие целевых функций (35) и (37) не позволяет решить задачу (35)-(36) методами решения задач о назначениях.

Это отличие вызвано тем, что в задаче о назначениях эффективность использования C_{ij} j -ой группы на i -ой позиции постоянна и не зависит от того, как размещены на участке другие группы, а в задаче размещения технологического оборудования (3-4) эффективность использования j -ой группы на i -ой позиции зависит от размещения всех остальных групп на участке. Данная задача – есть квадратичная задача назначений.

4.1 Обзор методов решения квадратичной задачи назначения

Рассмотрим алгоритмы, относящиеся к категории итеративного размещения с улучшением качества.

Метод релаксации. Метод релаксации применим к решению квадратичной задачи назначения. В принципе можно рассматривать размещаемые группы оборудования как бы соединенные между собой линиями аналогичными пружинам. Тогда в силу введенной аналогии можно определить силу притяжения между группами оборудования как в законе Гука $F = k \cdot s$, где s – длина расстояния между группами, k – коэффициент упругости, определенный матрицей технологических маршрутов C^l . Решение задачи размещения при таком подходе соответствует такому размещению групп оборудования, которое обладает минимальным напряжением, то есть самой низкой энергией.

Попарные перестановки. Одним из самых простых методов поиска оптимального решения задачи является метод попарных перестановок. В расположении групп оборудования меняются местами две из них и вычисляется значение целевой функции. Если произошло улучшение значения целевой функции, то новое размещение заменяет старое, в противном случае

этого не происходит. Затем выбирается новая пара групп оборудования и процесс попарных перестановок повторяется.

Существуют методы тройных перестановок, которые исследовали Герсайд и Никольсон. Они позволяют находить лучшие локально-оптимальные решения, но приводят к значительному увеличению требуемого машинного времени.

Известен **метод попарной релаксации** по направлению силы, представляющий собой синтез методов релаксации и попарной перестановки.

Стохастические методы. Поиск локального решения задачи размещения основан на применении метода Монте-Карло. Метод исходит из того, что область хороших размещений значительна в области всех вариантов размещений, т.е. вероятность случайного подбора размещения довольно высока. Но это не подтвердилось на практике. И все же метод Монте-Карло полезен тем, что представляет распределение случайных величин, с помощью которых можно оценить величину расположения групп оборудования, полученную другими методами.

Метод «ветвей и границ». В процессе последовательного ветвления множества допустимых решений исключаются из подмножеств те, о которых стало известно, что они не содержат допустимых решений лучше некоторого ранее полученного. Исключение проводится с помощью теста, основанного на вычислении оценок.

Помимо методов итеративного размещения с улучшением качества существуют конструктивные методы с первоначальным размещением. В этих методах считается, что часть групп оборудования первоначально уже размещена.

2.2 Алгоритм поиска локально – оптимального решения задачи размещения оборудования.

Построим граф G_N следующим образом. Каждому конкретному размещению различных N групп технологического оборудования по выделенным N позициям на рассматриваемом

участке поставим в соответствие одну вершину графа G_N . После проведения такого сопоставления получим ровно $N!$ вершин графа G_N .

Назовем некоторую вершину B графа G_N соседней к некоторой другой вершине A этого же графа, если размещение оборудования, соответствующее вершине B , получается из размещения оборудования, соответствующего вершине A , только одной перестановкой двух групп. Если теперь каждую вершину графа G_N соединить дугами со всеми соседними к ней вершинами, то мы однозначно зададим граф G_N для размещения N групп. Назовем построенный граф графом размещения.

Введем удобную запись для каждого конкретного размещения групп на участке. Определим матрицу размещения R на примере $N=4$ следующим образом

$$R = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Элементом матрицы R в (6) определены по правилу

$$R = j + i \cdot 10^{2[\log N]+1},$$

это означает, что на i -ую позицию поставлена j -ая группа. Для удобства переопределим элементы матрицы R следующим образом

$$R = (i - 1) \cdot N + j \quad (39)$$

Для $N=4$ получаем следующую матрицу R

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

В силу условий (37), каждое конкретное размещение групп можно задать выделением в каждом столбце и строке матрицы по одному элементу, определенному данным размещением. Например,

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & (4) \\ (5) & 6 & 7 & 8 \\ 9 & (10) & 11 & 12 \\ 13 & 14 & (15) & 16 \end{array} \right\| \quad (40)$$

В (40) выделено размещение (4,5,10,15), что соответствует в силу (39) (14,21,32,43), то есть размещению, в котором на первую позицию поставлена четвертая группа, на вторую – первая и т. д. Введенная запись для вершин графа G_N удобна при определении соседних вершин, т. е. каждая вершина графа G_N соединена ровно $C_N^2 = (N-1) \cdot \frac{N}{2}$ соседних вершин, то есть

каждая вершина графа G_N соединена ребрами ровно с C_N^2 другими вершинами этого графа. С помощью введенной записи (39) можно составить таблицу, в которой каждой вершине приписано конкретное размещение, записанное в форме (39):

Таблица 1

Размещение групп на участках

N	размещение	N	размещение	N	размещение
1	4,5,11,14	9	1,8,11,14	17	1,7,10,16
2	4,7,9,14	10	2,8,11,13	18	4,7,10,13
3	2,5,12,15	11	3,6,12,13	19	4,6,9,15
4	3,5,12,14	12	1,6,12,15	20	3,6,9,16
5	3,8,9,14	13	1,8,10,15	21	3,5,10,16
6	2,8,9,15	14	3,8,10,13	22	4,5,10,15
7	2,7,12,13	15	4,6,11,13	23	2,7,9,16
8	1,7,12,14	16	1,6,11,16	24	2,5,11,16

Граф размещения G_N можно ориентировать. Ориентацию графа проведем следующим образом: от вершины с большим значением целевой функции к вершине с меньшим значением целевой функции. На рис. 2 приведен пример ориентированного графа G_4 .

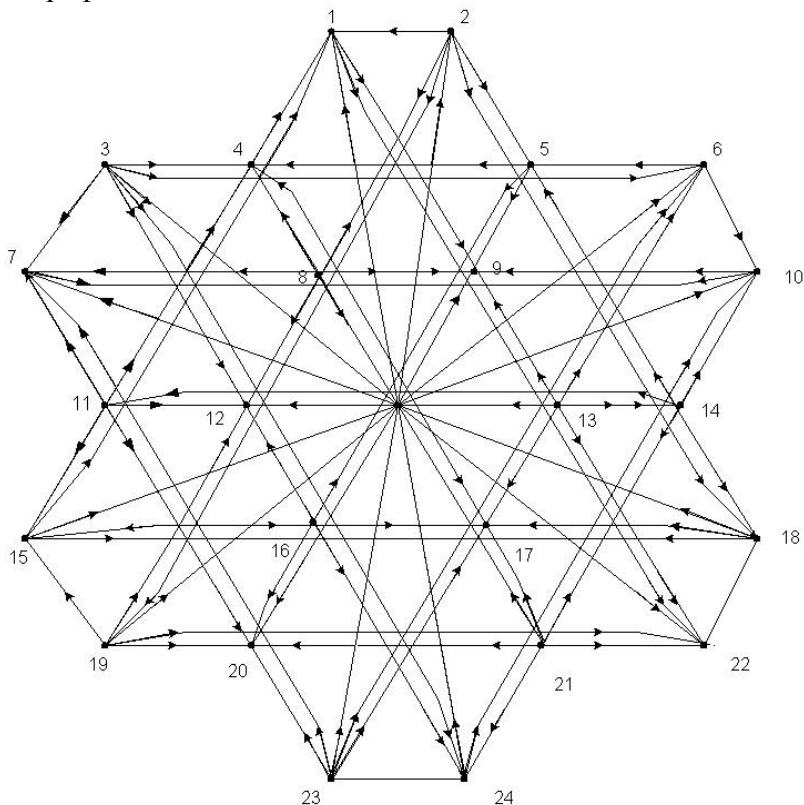


Рис. 2. Пример ориентированного графа G_4 . Локальные минимумы - в вершинах под номерами 9, 12, 17, 20, локальные максимумы - в вершинах 3, 13, 21, 23.

В таблице выписаны значения целевой функции в каждой из вершин графа.

Таблица 2

Значения целевой функции

Номер вершины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Значение целевой функции	1,3	8,3	7	3,2	4,1	5	5,1	6	0,5	1	6,1	4
Номер величины	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Значение целевой функции	8	7,6	4,8	0,3	6,5	5,4	6,4	3,1	7,8	4,8	8,9	2,7

Если в двух соседних вершинах значения целевой функции одинаковы, то для того чтобы граф G_N был ациклическим, исключим из графа ребра, соединяющие такие вершины. Таким образом, построенный граф G_N ацикличесок. Поставим на этом графе задачу оптимизации – задачу поиска на графе вершины с минимальным значением целевой функции.

Из рис. 2 видно, что на графе G_N могут быть локальные минимумы, причем, попав в локальный минимум невозможно определить, глобальный это минимум или локальный, пока не найдено множество всех локальных минимумов.

Для решения поставленной задачи предложен алгоритм локальной оптимизации, который позволяет рационально проводить поиск множества локальных минимумов на графе G_N .

В основе алгоритма локальной оптимизации лежит метод попарных перестановок. Перемещение из вершины графа G_N в одну из соседних к ней вершин соответствует одной попарной перестановке. Методом попарных перестановок из произвольной первоначальной вершины графа G_N находим локальный минимум на ориентированном графе. Это соответствует подъему в вершину с локально-максимальным значением целевой функции. Из найденного локального максимума методом по-

парных перестановок проводим поиск множества локальных минимумов по всем, выходящим из данного максимума, ребрам. На ориентированном графе G_N это соответствует спуску из вершины с локальным максимумом целевой функции в вершины с локальными минимумами.

В результате поиска локальных минимумов по всем C_N^2 ребрам, выходящим из локального максимума, получаем некоторое множество вершин, соответствующее различным локальным минимумам, выбрав из этого множества вершину, соответствующую локальному минимуму с наименьшим значением целевой функции, получим локально-оптимальное решение задачи размещения технологического оборудования.

До сих пор предполагалось, что любая группа технологического оборудования может быть поставлена на любую выделенную на участке позицию. На самом деле, площади как групп, так и выделенных под их размещение позиций могут быть различны. Чтобы учесть этот факт введем матрицу запретов M . Элементы этой матрицы определим следующим образом:

$M_{ij} = 0$, если j -ой группе оборудования разрешено стоять на i -ой позиции участка.

$M_{ij} = 1$, если j -ой группе оборудования запрещено стоять на i -ой позиции участка.

Если $M_{ij} = I$, то граф G_N исключаются все вершины, соответствующие запрещенным размещениям. Предложенный алгоритм локальной оптимизации полностью переносится на так преобразованный граф G_N .

Задача размещения технологического оборудования поставлена как задача минимизации суммарных длин технологических маршрутов. Такой подход к задаче размещения позволяет оптимизировать транспортные затраты, такие как длины конвейеров, если транспортировка осуществляется конвейерами, нагрузку транспортной подсистемы, время, необходимое

для транспортировки изделий в процессе производства транспортными роботами.

Задание. Построить алгоритм решения квадратичной задачи о назначениях методом ветвей и границ. Получить решение задачи расстановки оборудования этим методом.

5. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К методам одномерной оптимизации относятся методы дихотомического деления, золотого сечения, чисел Фибоначчи, полиномиальной аппроксимации и ряд их модификаций.

Пусть задан отрезок $[A, B]$, на котором имеется один минимум (в общем случае нечетное число минимумов). Согласно методу дихотомического деления (рис. 3,а) отрезок делят пополам и в точках, отстоящих от центра C отрезка на величину допустимой погрешности q , рассчитывают значения целевой функции $F(C+q)$ и $F(C-q)$. Если окажется, что $F(C+q) > F(C-q)$, то минимум находится на отрезке $[A, C]$, если $F(C+q) < F(C-q)$, то минимум – на $[C, B]$, если $F(C+q) = F(C-q)$ – на $[C-q, C+q]$. Таким образом, на следующем шаге вместо отрезка $[A, B]$ нужно исследовать суженный отрезок $[A, C]$, $[C, B]$ или $[C-q, C+q]$. Шаги повторяются, пока длина отрезка не уменьшится до величины погрешности q . Таким образом, требуется не более N шагов, где N – ближайшее к $\log((B-A)/q)$ целое значение, но на каждом шаге целевую функцию следует вычислять дважды.

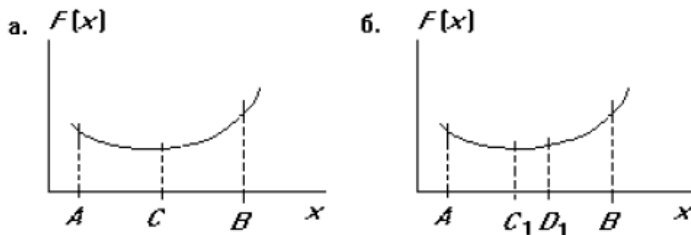


Рис. 3. Одномерная оптимизация:

а – дихотомическое деление, б – золотое сечение

По методу золотого сечения внутри отрезка $[A, B]$ выделяют две промежуточные точки C_1 и D_1 на расстоянии $s = aL$ от его конечных точек, где $L = B - A$ – длина отрезка. Затем вычисляют значения целевой функции $F(x)$ в точках C_1 и D_1 . Если $F(C_1) < F(D_1)$, то минимум находится на отрезке $[A, D_1]$, если $F(C_1) > F(D_1)$, то – на отрезке $[C_1, B]$, если $F(C_1) = F(D_1)$ – на отрезке $[C_1, D_1]$. Следовательно, вместо отрезка $[A, B]$ теперь можно рассматривать отрезок $[A, D_1]$, $[C_1, B]$ или $[C_1, D_1]$, т.е. длина отрезка уменьшилась не менее чем в $L/(L - aL) = 1/(1 - a)$ раз. Если подобрать значение a так, что в полученном отрезке меньшей длины одна из промежуточных точек совпадет с промежуточной точкой от предыдущего шага, т.е. в случае выбора отрезка $[A, D_1]$ точка D_2 совпадет с точкой C_1 , а в случае выбора отрезка $[C_1, B]$ точка C_2 – с точкой D_2 то это позволит сократить число вычислений целевой функции на всех шагах (кроме первого) в 2 раза.

Условие получения такого значения a формулируется следующим образом $(1 - 2a)L_k = aL_{k-1}$, откуда с учетом того, что $L_k/L_{k-1} = 1/(1 - a)$, имеем $a = 0,382$. Это значение и называют *золотым сечением*.

Таким образом, требуется не более N шагов и $N + 1$ вычисление целевой функции, где N можно рассчитать, используя соотношение $(B - A)/E = (1 - a)N$ заданной погрешности E определения экстремума.

Согласно методу чисел Фибоначчи, используют числа Фибоначчи R_i , последовательность которых образуется по правилу $R_{i+2} = R_{i+1} + R_i$ при $R_0 = R_1 = 1$, т.е. ряд чисел Фибоначчи имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.... Метод аналогичен методу золотого сечения с тем отличием, что коэффициент a равен отношению R_{i-2}/R_i , начальное значение i определяется из условия, что R_i должно быть наименьшим числом Фибоначчи, превышающим величину $(B - A)/E$, где E – заданная допустимая погрешность определения экстремума. Так, если $(B - A)/E = 100$, то начальное значение $i = 12$, поскольку $R_{12} = 144$, и $a = 55/144 = 0,3819$, на следующем шаге будет $a = 34/89 = 0,3820$ и т.д.

По методу полиномиальной аппроксимации при аппроксимации $F(x)$ квадратичным полиномом

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (41)$$

выбирают промежуточную точку C и в точках A, B, C вычисляют значения целевой функции. Далее решают систему из трех алгебраических уравнений, полученных подстановкой в (41) значений A, B, C вместо x и вычисленных значений функции вместо $P(x)$. В результате становятся известными значения коэффициентов a_k в (41) и, исходя из условия $dP(x)/dx=0$, определяют экстремальную точку \mathcal{E} полинома. Например, если точка C выбрана в середине отрезка $[A, B]$, то $\mathcal{E} = C + (C - A)(F(A) - F(B)) / (2(F(A) - 2F(C) + F(B)))$.

Задание. Найти экстремум функции следующими методами: методом дихотомического деления, золотого сечения, чисел Фибоначчи, методом полиномиальной аппроксимации.

- а) $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow \min$;
- б) $f(x) = 2x - x^2 - 1 \rightarrow \max$;
- в) $f(x) = 10x^2 + 7x + 1 \rightarrow \min$;
- г) $f(x) = 15x - 2x^2 + 5 \rightarrow \max$.

6. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Смысл методов нахождения безусловного экстремума функции нескольких переменных заключается в том, что по определенному правилу выбирается последовательность значений $\{x_i\}$ вектора x такая, что $Q(x_{i+1}) \leq (\geq) Q(x_i)$. Так как целевая функция предполагается ограниченной, то такая последовательность ее значений стремится к пределу. В зависимости от принятого алгоритма и выбора начальной точки этим пределом может быть локальный или глобальный экстремум функции $Q(x)$.

Метод Гаусса-Зайделя. Метод заключается в последовательном определении экстремума функции одной переменной с точностью до ϵ вдоль каждой координаты, т.е. фиксируются все координаты, кроме одной, по которой и осуществляется поиск экстремума Q . Потом та же процедура осуществляется при фиксации следующей координаты. После рассмотрения всех n координат выполняется возврат к первой и вновь производится поиск локального экстремума вдоль каждой из n координат до тех пор, пока экстремум не будет локализован с заданной точностью.

Метод градиента. В этом методе используется градиент целевой функции, шаги совершаются по направлению наибыстрейшего уменьшения целевой функции, что, естественно, ускоряет процесс поиска оптимума. Идея метода заключается в том, что находятся значения частных производных по всем независимым переменным – $\partial Q/\partial x_i$, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} i_2 + \dots + \frac{\partial Q}{\partial x_n} i_n, \text{ и осуществляется шаг в на-}$$

правлении обратном направлению градиента, т.е. в направлении наибыстрейшего убывания целевой функции (если ищется минимум). Итерационный процесс имеет вид

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla Q(x^k),$$

где параметр $\alpha_k \geq 0$ задает длину шага.

Алгоритм метода градиента включает в себя следующие шаги.

1. Задается начальное значение вектора независимых переменных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, определяющего точку, из которой начинается движение к минимуму.

2. Рассчитывается значение целевой функции в начальной точке $Q_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

3. Определяется направление градиента в начальной точке.

4. Делается шаг в направлении антиградиента при поиске минимума, в результате чего попадают в точку x^1 .

5. Процесс поиска продолжается, повторяя все этапы с п. 2, т.е. вычисляется $Q_1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, определяется направление градиента в точке x^1 , делается шаг и т.д.

Важной задачей в этом методе является выбор шага. Если размер шага слишком мал, то движение к оптимуму будет долгим из-за необходимости расчета целевой функции и ее частных производных в очень многих точках. Если же шаг будет выбран слишком большим, то в районе оптимума может возникнуть "рыскание", которое либо затухает слишком медленно, либо совсем не затухает. На практике сначала шаг выбирается произвольно. Если окажется, что направление градиента в точке x^1 существенно отличается от направления в точке x^2 , то шаг уменьшают, если отличие векторов по направлению мало, то шаг увеличивают. Изменение направления градиента можно определять по углу поворота градиента рассчитываемого на каждом шаге.

Итерационный процесс поиска прекращается, если выполняются неравенства $|x^k - x^{k-1}| \leq \varepsilon$, $|Q(x^k) - Q(x^{k-1})| / Q(x^{k-1}) \leq \delta$, $\partial Q(x^k) / \partial x \leq \gamma$, где ε , δ , γ – заданные числа.

Недостатком градиентного метода является то, что при его использовании можно обнаружить только локальный минимум целевой функции. Для нахождения других локальных минимумов поиск необходимо производить из других начальных точек.

Метод наискорейшего спуска. При применении метода градиента на каждом шаге вычисляются значения всех частных производных оптимизируемой функции Q по всем независимым переменным U , что при большом числе этих переменных приводит к весьма большому времени поиска оптимума. Со-

кратить время поиска позволяет метод наискорейшего спуска, блок-схема которого представлена на рис. 4, где ε – точность вычисления, H – величина шага, n – размерность вектора u , Q – алгоритм вычисления целевой функции $Q(u)$, L – количество шагов по конкретному направлению градиента функции Q .

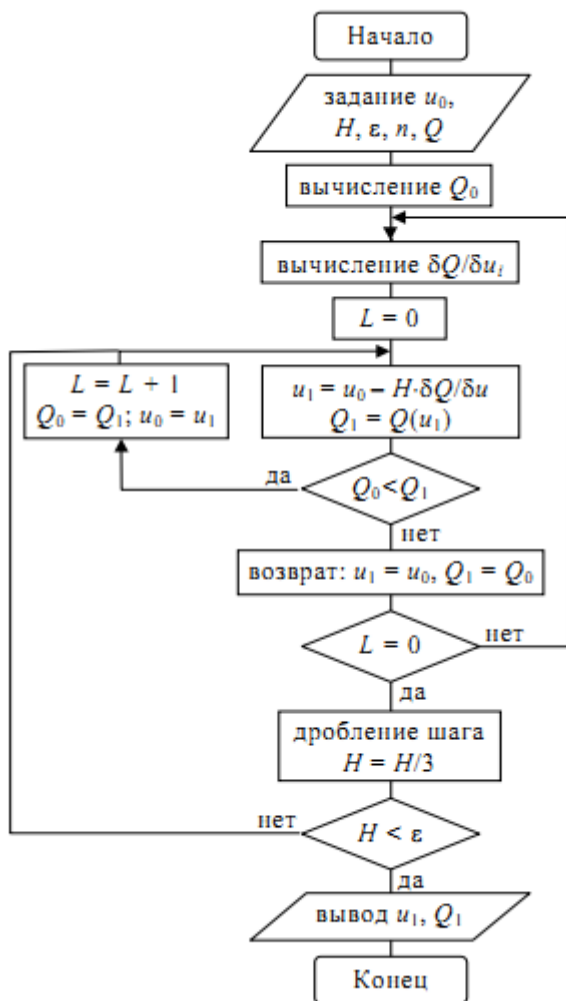


Рис. 4. Блок-схема метода наискорейшего спуска

Таким образом, в начальной точке u_0 определяется градиент целевой функции $\frac{\partial Q}{\partial u_i}$ и, следовательно, направление ее наибыстрейшего убывания; далее делается шаг спуска в этом направлении. Если значение целевой функции уменьшилось, то делается следующий шаг в этом же самом направлении. Процедура повторяется до тех пор, пока в этом направлении не будет найден минимум, после чего только вычисляется градиент и определяется новое направление наибыстрейшего убывания целевой функции.

По сравнению с методом градиента метод наискорейшего спуска оказывается более выгодным из-за сокращения объема вычислений. Чем менее резко изменяется направление градиента целевой функции, тем выгоднее использовать метод наискорейшего спуска, т.е. вдали от оптимума. Вблизи оптимума рассматриваемый метод автоматически переходит в метод градиента. Окончание поиска происходит в соответствии с теми же критериями, что и в методе градиента.

Задание. Решить задачи безусловной оптимизации следующими методами: метод Гаусса-Зейделя, метод градиента, метод наискорейшего спуска

а) $-x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \rightarrow \max;$

б) $6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 0.5x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max;$

в) $4x_1 + x_2 - 3x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max;$

г) $3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Батищев Д. И. Оптимизация в САПР: учебник / Д.И. Батищев, Я.Е. Львович, В.Н. Фролов. – Воронеж: издательство Воронежского государственного университета, 1997. – 416 с.
2. Аттетков Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – 2001.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. М.: Физматмет, 2000. – 264 с.
4. Плис А.И. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	1
1. Постановка задач линейного программирования в САПР. Оптимизация режимов резания	2
2. Постановка задачи выбора количественного состава оборудования как ЗЛП	8
3. Оптимизация переналадок для ГПС	17
4. Постановка и методы решения задачи оптимального размещения оборудования на участке ГАП (квадратичная задача о назначениях)	19
4.1. Обзор методов решения квадратичной задачи назначения	22
4.2. Алгоритм поиска локально-оптимального реше-	

ния задачи размещения оборудования	23
5. Методы одномерной оптимизации	29
6. Методы многомерной оптимизации	31
Библиографический список	37

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Оптимизация в САПР»
для студентов направления подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профиль «Системы автоматизированного проектирования
в машиностроении») очной и заочной форм обучения

Составитель
Собенина Ольга Валерьевна

В авторской редакции
Компьютерный набор О.В. Собениной

Подписано к изданию 25.09.2014.
Уч.-изд. л. 2,3. «С»

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14