ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

577-2015

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ № 5-6 по дисциплине
«Компьютерные технологии в науке и образовании»
для студентов направления магистерской подготовки
11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств»
очной формы обучения

Воронеж 2015

Составитель д-р техн. наук М.А. Ромащенко

УДК 621

Методические указания к выполнению лабораторных работ № 5-6 по дисциплине «Компьютерные технологии в науке и образовании» для студентов направления магистерской подготовки 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств» очной формы обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. М.А. Ромащенко. Воронеж, 2015. 16 с.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ № 5-6 по дисциплине «Компьютерные технологии в науке и образовании» магистрами направления 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств» очной формы обучения. Содержат основные требования к содержанию и оформлению отчета, а также варианты заданий.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2007 и содержатся в файле КТвНиО_ЛР5-6.pdf

Табл. 2.

Рецензент д-р техн. наук, проф. О.Ю. Макаров

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р техн. наук, проф. А.В. Муратов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: получить представление о численном решении дифференциальных уравнений в системе Mathcad с помощью различных способов.

Время работы: 4 часа.

1.1. Задания для самостоятельного изучения и методические указания по их выполнению

Задание 1 – вспомнить основные способы численного решения дифференциальных уравнений.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f\left(x, y\right) \tag{1.1}$$

Требуется найти на отрезке [a,b] решение y(x), удовлетворяющее начальному условию

$$y\left(a\right) = y_0 \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности выполнены. Для решения используем метод Эйлера (метод первого порядка точности (1.3)) и метод Рунге-Кутта (метод четвертого порядка точности (1.4)) с шагом *h* и *2h*. Отметим, что результаты могут сильно отличаться, ввиду того, что метод Эйлера, имея только первый порядок точности, используется, как правило, для оценочных расчетов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутта ε вычислить по формуле (1.5).

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right) \tag{1.3}$$

где h – шаг разбиения.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{1.4}$$

где

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right),\ \mathrm{k}_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),\ k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + k_3\right)$$

$$\varepsilon = \frac{|y_{2h} - y_h|}{15} \tag{2.5}$$

Задание 2 – ознакомиться с примерной последовательностью действий в системе Mathcad для выполнения лабораторных заданий.

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ методом Эйлера на отрезке [a,b] с шагом h с начальным условием $y(a) = y_0, f(x, y) = \frac{3x - y}{x^2 + y}$, a=2, b=3, h=0,1, y_0=1.

$a := 2 \qquad b := 3 \qquad x_0 := a$

$i := 0..10 \qquad h := 0.1 \qquad x_{i+1} := x_0 + i \cdot h \qquad y_0 := 1$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot \frac{3 \cdot x_i - y_i}{(x_i)^2 + y_i}$$

x =

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

y =

	0
0	1
1	1.1
2	1.196
3	1.287
4	1.374
5	1.457
6	1.536
7	1.613
8	1.687
9	1.758
10	1.827
11	1.895

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ методом Рунге-Кутта на отрезке [a,b] с шагом h с начальным условием $y(a) = y_0, f(x, y) = \frac{3x - y}{x^2 + y}$, a=2, b=3, h=0,1, y_0=1.

$$a := 2 \qquad b := 3 \qquad x_0 := a$$

$$i := 0..10 \qquad h := 0.1 \quad x_{i+1} := x_0 + i \cdot h \quad y_0 := 1$$

$$f(x,y) := \frac{3 \cdot x - y}{x^2 + y} \qquad y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_1 := h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_2 := h \cdot f\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right), y_i + \frac{k_1}{2}\right]$$

$$k_3 := h \cdot f\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right), y_i + \frac{k_2}{2}\right] \qquad k_4 := h \cdot f\left[\left(x_i + h\right), y_i + k_3\right]$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}$$

x =

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

y =

	0
0	1
1	1.066
2	1.132
3	1.199
4	1.265
5	1.331
6	1.397
7	1.463
8	1.529
9	1.596
10	1.662
11	1.728

1.2. Лабораторные задания

Задание 1 – Написать программу решения дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ методом Эйлера на отрезке [a,b] с шагом *h* и *2h* и начальным условием $y(a) = y_0$. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Функция	*a*	*b*	y_0	*h*
1	$\frac{3x-y}{x^2+y}$	2	3	1	0,1
2	$\frac{2x+y+4}{2y+x}$	3	4	1	0,1
3	$\frac{x^2-y}{2x+y+1}$	0	1	2	0,1
4	$\frac{x^2-y+2}{xy+3x}$	2	3	1	0,1
5	$\frac{3-x-y^2}{2-xy^2}$	1	2	1	0,1
6	$\frac{2-x-y^2x}{3x+y}$	0	1	1	0,1
7	$\frac{1+3xy}{5-x+y^2}$	0	1	2	0,1
8	$\frac{x^2y+2}{2x-y}$	0	1	1	0,1
9	$\frac{x^2+y+2}{2x-y}$	2	3	2	0,1
10	$\frac{xy+4}{2y-xy+1}$	0	1	3	0,1

Задание 2 – Написать программу решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ методом Рунге-Кутта на отрезке [a,b] с шагом *h* и *2h* и начальным условием $y(a) = y_0$. Оценить погрешность по формуле (1.5). Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 1.

1.3. Контрольные вопросы для отчета работы

1. Проверить для дифференциального уравнения условия теоремы существования и единственности.
2. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме можно получить решение дифференциального

уравнения по методу Эйлера?

4. Каков геометрический смысл решения дифференциального уравнения методом Эйлера?

5. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутта?

6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта?

7. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчета?

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: получить представление о статистической обработке опытных данных в системе Mathcad с помощью различных способов.

Время работы: 4 часов.

2.1. Домашние задания и методические указания по их выполнению

Задание 1 – вспомнить основные способы статистической обработки опытных данных.

Пусть зависимость между переменными x и y задана таблично (заданы опытные данные). Требуется найти функцию в некотором смысле наилучшим образом описывающую данные. Одним из способов подбора такой (приближающей) функции является метод наименьших квадратов. Метод состоит в том, чтобы сумма квадратов отклонений значений искомой функции $\overline{y}_i = \overline{y}(x_i)$ и заданной таблично y_i была наименьшей

$$S(c) = (y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + ... + (y_n - \overline{y}_n)^2 \to \min \qquad (2.1)$$

где c − вектор параметров искомой функции.

Задание 2 – ознакомиться с примерной последовательностью действий в системе Mathcad для выполнения лабораторных заданий.

$i := 1..10$ $\qquad y_1 := 1.8$

$x_1 := 0.5$ $\qquad y_2 := 1.1$

$x_2 := 0.1$ $\qquad y_3 := 1.8$

$x_3 := 0.4$ $\qquad y_4 := 1.4$

$x_4 := 0.2$

$x_5 := 0.6$ $y_5 := 2.1$

$x_6 := 0.3$ $y_6 := 1.8$

$y_7 := 1.6$

$x_7 := 0.4$ $y_8 := 2.2$

$x_8 := 0.7$ $y_9 := 1.5$

$x_9 := 0.3$ $y_{10} := 2.3$

$x_{10} := 0.8$

$$mx2 := 1\frac{\left[\sum_{i=1}^{10}(x_i)^2\right]}{10} \quad mx := 1\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\right)}{10} \quad mxy := 1\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot y_i\right)}{10} \quad my := 1\frac{\left(\sum_{i=1}^{10}y_i\right)}{10}$$

$mx2 = 0.229$ $mx = 0.43$ $mxy = 0.828$ $my = 1.76$

given

$mx2\cdot a + mx\cdot b = mxy$

$mx\cdot a + b = my$

$$find(a,b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6145124716553287982 \\ 1.0657596371882086168 \end{bmatrix}$$

2.2. Лабораторные задания

Задание 1 – Построить методом наименьших квадратов две эмпирические формулы: линейную и квадратичную. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 2. Выбрать из двух функций наиболее подходящую. Для этого составить таблицу для подсчета суммы квадратов уклонений по формуле (2.1).

В случае линейной функции $y = ax + b$ задача сводится нахождению параметров a и b из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases}$$

где $M_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $M_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

а в случае квадратичной зависимости $y = ax^2 + bx + c$ к нахождению параметров a, b и c из системы уравнений

$$\begin{cases} M_{x^4}a + M_{x^3}b + M_{x^2}c = M_{x^2y} \\ M_{x^3}a + M_{x^2}b + M_{x}c = M_{xy} \\ M_{x^2}a + M_{x}b + c = M_{y} \end{cases}$$

где $M_{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4$, $M_{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $M_{x^2y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$.

Таблица 2 - Варианты индивидуальных заданий

n \ i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	*x*	0.5	0.1	0.4	0.2	0.6	0.3	0.4	0.7	0.3	0.8
	y	1.8	1.1	1.8	1.4	2.1	1.8	1.6	2.2	1.5	2.3
2	*x*	1.7	1.5	3.7	1.1	6.2	0.3	6.5	3.6	3.8	5.9
	y	1.5	1.4	1.6	1.3	2.1	1.1	2.2	1.8	1.7	2.3
3	*x*	1.7	1.1	1.6	1.2	1.9	1.5	1.8	1.4	1.3	1.0
	y	6.7	5.6	6.7	6.1	7.4	6.9	7.9	5.9	5.6	5.3
4	*x*	1.3	1.2	1.5	1.4	1.9	1.1	2.0	1.6	1.7	1.8
	y	5.5	5.9	6.3	5.8	7.4	5.4	7.6	6.9	6.6	7.5
5	*x*	2.3	1.4	1.0	1.9	1.5	1.8	2.1	1.6	1.7	1.3
	y	5.3	3.9	2.9	5.0	4.0	4.9	5.1	4.5	4.1	3.7
6	*x*	1.8	2.6	2.3	1.3	2.0	2.1	1.1	1.9	1.6	1.5
	y	4.4	6.4	5.3	3.7	4.9	5.6	3.0	5.0	4.3	3.7
7	*x*	1.9	2.1	2.0	2.9	3.0	2.6	2.5	2.7	2.2	2.8
	y	6.6	7.6	6.7	9.2	9.4	7.8	8.4	8.0	7.9	8.7
8	*x*	2.0	1.4	1.0	1.7	1.3	1.6	1.9	1.5	1.2	2.1
	y	7.5	6.1	4.8	7.4	5.7	7.0	7.1	6.8	6.0	8.9
9	*x*	2.0	1.2	1.8	1.9	1.1	1.7	1.6	1.4	1.5	1.3
	y	7.5	5.9	7.0	8.0	5.0	7.4	6.4	6.6	6.3	5.7
10	*x*	1.9	1.1	1.4	2.3	1.7	2.1	1.6	1.5	1.0	1.2
	y	4.7	3.4	3.8	5.2	4.6	5.5	3.9	3.9	3.2	3.5

Задание 2 – Составить программу для нахождения приближающих функций заданного типа с выводом значений их параметров и соответствующих им сумм квадратов уклонений. Выбрать в качестве

приближающих функций следующие $y = ax + b$, $y = ax^m$, $y = ae^{mx}$. Провести линеаризацию. Определить для какого вида функции сумма квадратов уклонений является наименьшей. Варианты индивидуальных заданий приведены в таблице 2.

2.3. Контрольные вопросы для отчета работы

1. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов?
2. Чем отличается этот метод от метода интерполяции?
3. Каким образом сводится задача построения приближающих функций в виде различных элементарных функций к случаю линейной функции?
4. Может ли сумма квадратов уклонений для каких-либо приближающих функций быть равной нулю?
5. Какие элементарные функции используются в качестве приближающих функций?
6. Как найти параметры для линейной и квадратичной зависимости, используя метод наименьших квадратов?

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ № 5-6 по дисциплине
"Компьютерные технологии в науке и образовании"
для студентов направления магистерской подготовки
11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств»
очной формы обучения

Составитель
Ромащенко Михаил Александрович

В авторской редакции

Подписано к изданию 30.09.2015.
Уч.-изд. л. 0,8.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14