

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

А.В. Турецкий

В.А. Шуваев

МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ: ПРАКТИКУМ

Утверждено Редакционно- издательским
советом университета в качестве
учебного пособия

Воронеж 2013

УДК 628.33

Турецкий А.В. / «Методы обеспечения надежности: практи-
кум» учеб. пособие / А.В. Турецкий, В.А. Шуваев. Воронеж:
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический
университет», 2013. 116 с.

В учебном пособии рассмотрены практические задачи по
теории надежности в области радиоэлектронных средств.

Издание соответствует требованиям Федерального госу-
дарственного образовательного стандарта высшего профес-
сионального образования по направлению 211000.68 «Конст-
руирование и технология электронных средств» (программа
подготовки магистров «Автоматизированное проектирование
и технология радиоэлектронных средств специального назна-
чения») дисциплине «Методы обеспечения надежности».

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в
текстовом редакторе MS Word 2003, содержится в файле
MONPR.pdf

Табл. 10. Ил. 39. Библиогр.: 5 назв.

Рецензенты: кафедра инфокоммуникационных техноло-
гий Воронежского института МВД России
(зам. начальника кафедры О.В. Пьянков,
д.т.н., проф. Н.С. Хохлов);
д-р техн. наук, проф. В.М. Питолин

© Турецкий А.В., Шуваев В.А., 2013
© Оформление. ФГБОУ ВПО «Воро-
нежский государственный техниче-
ский университет», 2013

ВВЕДЕНИЕ

Проблема надежности является одной из важнейших в радиоэлектронике. Особенно велика ее роль в связи с широким распространением сложных, высокотехнологичных узлов. Последние требуют тщательной проработки вопросов надежности, начиная от проектирования и производства и кончая их испытаниями и эксплуатацией. Показатели надежности аппаратуры складываются из надежности отдельных элементов. Для этого необходимо знать показатели надежности элементов и структурную схему расчета надежности. Одним из основных методов анализа надежности сложных систем является логико-вероятностный, который основан на математическом аппарате алгебры логики и предполагает определенные связи между отказами системы и событиями, от которых они зависят - отказами элементов системы. Цель проведения анализа надежности заключается в значительном повышении эффективности управления и контроля технологическими системами.

В пособие представлены различные задачи по теории надежности в области радиоэлектронных средств.

1. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Определение статистических вероятностей безотказной работы устройства

В табл. 1.1 приведены значения наработок до отказа в находившейся под контролем партии радиоэлектронных модулей.

Таблица 1.1

Значения наработки устройства до отказа и заданные значения t_0 и T_0

Вариант	Массив значений наработки до отказа $T \cdot 10^3, \text{ч}$	Заданное значение $t \cdot 10^3, \text{ч}$	Значение $T_0 \cdot 10^3, \text{ч}$
1	2	3	4
1	11, 9, 12, 16, 7, 8, 10, 11, 15, 8, 12, 14, 6, 10, 9, 10, 16, 11, 10, 13, 15, 11, 13, 12, 9, 11, 13, 12, 13, 11, 12, 8, 10, 15, 16, 8, 10, 7, 12, 14, 5, 16, 13, 13, 9, 6, 11, 9, 12, 14	12,5	4,5
2	12, 17, 9, 11, 8, 13, 15, 6, 17, 14, 14, 10, 7, 16, 10, 13, 15, 10, 12, 13, 17, 8, 9, 11, 12, 16, 9, 13, 15, 7, 11, 10, 11, 17, 12, 11, 14, 16, 12, 14, 13, 10, 12, 14, 13, 14, 12, 13, 9, 11	13,5	5,5
3	13, 12, 15, 17, 13, 15, 14, 11, 13, 15, 14, 15, 13, 14, 10, 12, 17, 18, 10, 12, 9, 14, 16, 7, 18, 15, 15, 11, 8, 13, 11, 14, 16, 11, 13, 14, 18, 9, 10, 12, 13, 17, 10, 14, 16, 8, 12, 11, 12, 18	14,5	6,5
4	14, 13, 16, 18, 14, 16, 15, 12, 14, 16, 15, 16, 14, 15, 11, 13, 18, 19, 11, 13, 10, 15, 17, 8, 19, 16, 16, 12, 9, 14, 12, 15, 17, 12, 14, 15, 19, 10, 11, 13, 14, 18, 11, 15, 17, 9, 13, 12, 13, 19	15,5	7,5
5	5, 10, 6, 7, 2, 5, 5, 9, 12, 4, 1, 6, 8, 7, 4, 3, 11, 4, 6, 5, 7, 8, 3, 4, 6, 8, 7, 11, 6, 1, 5, 2, 7, 6, 9, 2, 5, 9, 4, 6, 8, 10, 5, 1, 7, 9, 3, 8, 1, 4	6,5	0,5
6	6, 9, 7, 2, 5, 13, 10, 6, 6, 3, 8, 7, 11, 8, 5, 4, 12, 5, 7, 6, 8, 9, 4, 5, 7, 9, 8, 12, 7, 2, 6, 3, 8, 7, 10, 3, 6, 10, 5, 7, 9, 11, 6, 2, 8, 10, 4, 9, 2, 5	7,5	1,5
7	7, 7, 11, 14, 6, 3, 8, 10, 7, 12, 8, 9, 4, 9, 6, 5, 13, 6, 8, 7, 9, 10, 5, 6, 8, 10, 9, 13, 8, 3, 7, 4, 9, 8, 11, 4, 7, 11, 6, 8, 10, 12, 7, 3, 9, 11, 5, 10, 3, 6	8,5	2,5

Продолжение табл. 1.1

8	8, 4, 10, 12, 6, 11, 4, 7, 9, 11, 13, 10, 14, 9, 4, 8, 5, 10, 9, 12, 5, 8, 12, 7, 13, 9, 10, 5, 8, 8, 12, 15, 7, 4, 9, 11, 8, 10, 7, 6, 14, 7, 9, 8, 10, 11, 6, 7, 9, 11	9,5	3,5
9	9, 11, 12, 7, 8, 10, 12, 14, 12, 11, 6, 9, 9, 13, 16, 8, 5, 10, 12, 9, 11, 8, 7, 15, 8, 10, 11, 15, 10, 5, 9, 6, 11, 10, 13, 6, 9, 13, 8, 10, 12, 14, 9, 5, 11, 13, 7, 10, 5, 8	10,5	4,5

Задание 1.1. Требуется определить статистические вероятности безотказной работы $P(t)$ и отказа $Q(t)$ устройства для заданного значения t , указанного в табл.1.1. Далее необходимо рассчитать значение вероятности безотказной работы $P(t)$ по первым 20 значениям наработки до отказа, указанным для соответствующего варианта в табл. 1.1. Затем для заданной наработки t требуется рассчитать математическое ожидание числа работоспособных устройств $N_p(t)$ при общем числе находившихся в эксплуатации модулей, указанном в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Объем партии устройств и заданное значение k

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объем партии	1000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Значение k	2	6	3	5	4	2	6	3	5	4

Методические указания к заданию 1.1. Нарботка исследуемых радиоэлектронных модулей до отказа есть непрерывная случайная величина T . По результатам испытания (наблюдения и эксплуатации) партии из N устройств получена дискретная совокупность из N значений $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$, указанных в табл. 1.1. Статистически вероятность безотказной работы устройства для наработки t определяется как

$$P(t) = \frac{N_p(t)}{N}, \quad (1.1)$$

где $N_p(t)$ - число объектов, работоспособных на момент времени t . Для определения $N_p(t)$ из табл. 1.1 следует выбрать значения T , превышающие t .

При выполнении расчетов необходимо быть очень внимательным, поскольку полученные результаты используются в последующем, и ошибка на первом шаге приводит к неверным результатам всех последующих вычислений.

Вероятность отказа устройства за наработку t статистически определяется как

$$Q(t) = N_{np}(t)/N,$$

где $N_{np}(t)$ - число объектов, неработоспособных к наработке t . Для определения $N_{np}(t)$ из табл. 1.1 следует выбрать значения T , меньшие t .

Поскольку $N_p(t) + N_{np}(t) = N$, нетрудно видеть, чему равна сумма вероятностей: $P(t) + Q(t)$. Подсчет этой суммы используйте для проверки правильности своих вычислений.

Оценку вероятности безотказной работы устройства по первым 20-ти значениям наработки до отказа обозначим как $P^*(t)$. Ее значение определяется также по формуле (1.1), но при этом $N = 20$, и число работоспособных объектов $N_p(t)$ выбирается из этой совокупности.

Будем считать, что условия опыта, включающего 50 наблюдений, позволили однозначно определить вероятность безотказной работы устройства, т.е. $P(t) = 1 - F(t)$. Здесь $F(t)$ - функция распределения случайной величины «наработка до отказа», определяющая вероятность события $T \leq t$ при $N \rightarrow \infty$.

Тогда с учетом формулы (1.1) математическое ожидание числа объектов $\bar{N}_p(t)$, работоспособных к наработке t , определяется как

$$\bar{N}_p(t) = P(t)N, \quad (1.2)$$

где N - объем партии устройств, определяемый по табл. 1.2.

Контрольный вопрос. Чем объясняется возможное различие значений $P(t)$ и $P^*(t)$?

Задание 1.2. Требуется рассчитать среднюю наработку до отказа T рассматриваемых модулей. Первоначально вычисления произвести непосредственно по выборочным значениям T , указанным в табл. 1.1, а затем с использованием статистического ряда.

Методические указания к заданию 1.2. Для вычислений среднего значения T случайной величины T непосредственно по ее выборочным значениям $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$ используют формулу

$$T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \quad (1.3)$$

Уточним, что здесь N равно числу значений T_o в табл. 1.1 для заданного вам варианта. Ошибки, которые можно сделать при расчетах, разделяют на технические и методические. Техническая ошибка является следствием неправильных действий вычислителя (ошибка при введении числа в калькулятор, повторное введение одного и того же числа, пропуск одного или нескольких чисел и т.п.). Методическая ошибка определяется используемым методом и формулами расчета.

Формула (1.3) не несет в себе методической ошибки, однако расчеты с ее помощью обычно трудоемки и часто приводят к неверным результатам в силу технических ошибок.

Чтобы избежать ошибки, расчеты полезно выполнить, как минимум, дважды, вводя в калькулятор значения t_i первоначально с 1-го значения до N-го, а затем с N-го до 1-го.

Значительно упростить и ускорить вычисления можно путем использования преобразования результатов наблюдений (совокупности значений t_i) в статистический ряд. С этой целью весь диапазон наблюдаемых значений T делят на m интервалов или «разрядов» и подсчитывают число значений n_i , приходящихся на каждый i -й разряд. Результаты такого подсчета удобно записывать в форме, соответствующей табл. 1.3.

Таблица 1.3

Преобразование значений наработки до отказа в статистический ряд

Интервал		Число попаданий на интервал	n_i	Статистическая вероятность
№ пп	Нижняя и верхняя границы, 10^3 ч			
1	8,5-11,5	//// //	$n_1=15$	$q_1=0,15$
2	11,5-14,5	//// //	$n_2=35$	$q_2=0,35$
3	14,5-17,5	//// //	$n_3=30$	$q_3=0,30$
4	17,5-20,5	//// //	$n_4=20$	$q_4=0,20$

Длины Δt всех разрядов чаще всего принимают одинаковыми, а число разрядов m обычно устанавливают порядка 10. Для выполнения данного задания примите $\Delta t = 3 \cdot 10^3$ ч, а $m = 4$.

Для примера в табл. 1.3 указаны результаты систематизации в виде статистического ряда 100 значений

случайной величины, распределенной на интервале ($8,5 \cdot 10^3$ ч; $20,5 \cdot 10^3$ ч) для тех же условий, т.е. $\Delta t = 3 \cdot 10^3$ ч, $m = 4$.

Заполнять таблицу несложно. Последовательно просматривая массив значений $\{t_{ij}\}$, оценивают, к какому разряду относится каждое число. Факт принадлежности числа к определенному разряду отмечают чертой в соответствующей строке таблицы. Затем подсчитывают $n_1, \dots, n_i, \dots, n_m$ - число попаданий значений случайной величины (число черточек) соответственно в 1-й, ..., i -й, ..., m -й разряд. Правильность подсчетов определяют, используя следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^m n_i = N$$

Нижнюю границу интервала T_0 установите, пользуясь табл.

1.1. Статистический ряд можно отразить графически, как показано на рис.1.1.

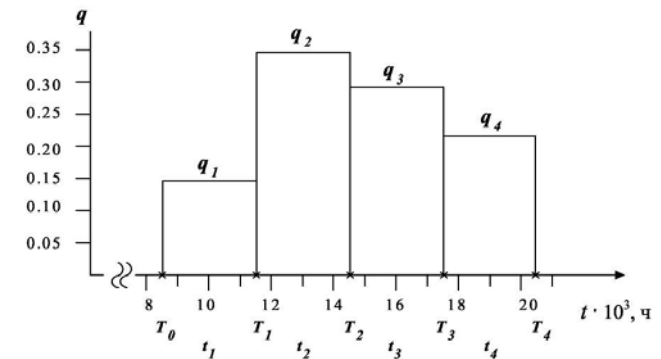


Рис. 1.1. Статистический ряд

С этой целью по оси абсцисс отложите разряды, и на каждом разряде постройте прямоугольник, высота которого равна статистической вероятности попадания случайной величины на данный интервал. Здесь $T_1, \dots, T_i, \dots, T_m$

соответственно верхние границы 1-го, ..., i -го, ..., m -го интервалов, определяемые принятыми значениями T_0 и Δt .

Статистическая вероятность q_i попадания случайной величины на i -й интервал рассчитывается как

$$q_i = \frac{n_i}{N}$$

Подсчитайте значения q_i для всех разрядов и проверьте правильность расчетов, используя выражение

$$\sum_{i=1}^m q_i = 1$$

Для расчета среднего значения случайной величины в качестве «представителя» всех ее значений, принадлежащих i -му интервалу, принимают его середину \bar{t}_i . Тогда средняя наработка до отказа определяется как

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^m \bar{t}_i q_i \quad (1.4)$$

Расчет с использованием формулы (1.4) вносит некоторую методическую ошибку. Однако ее значение обычно пренебрежимо мало. Эту ошибку в ваших расчетах оцените по формуле

$$\delta = \frac{\bar{T}(II) - \bar{T}(I)}{\bar{T}(I)} \cdot 100\%$$

где $T(I)$ и $T(II)$ - средние значения, вычисленные соответственно с использованием формул (1.3) и (1.4).

Контрольный вопрос. Каким образом можно уменьшить ошибки в расчетах с использованием второго метода?

Задание 1.3. Требуется рассчитать интенсивность отказов $\lambda(t)$ для заданных значений t и Δt .

Затем в предположении, что безотказность некоторого блока в электронной системе управления радиостанцией характеризуется интенсивностью отказов, численно равной рассчитанной, причем эта интенсивность не меняется в течение всего срока его службы, необходимо определить среднюю наработку до отказа T_B такого блока.

Подсистема управления включает в себя k последовательно соединенных электронных блоков (рис.1.2).

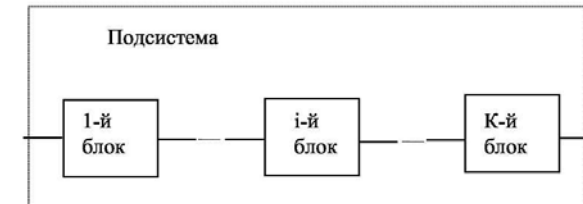


Рис. 1.2. Подсистема управления с последовательно включенными блоками

Эти блоки имеют одинаковую интенсивность отказов, численно равную рассчитанной. Требуется определить интенсивность отказов подсистемы λ_{II} и среднюю наработку ее до отказа \bar{T}_{II} , построить зависимости вероятности безотказной работы одного блока $P_B(t)$ и подсистемы $P_{II}(t)$ от наработки и определить вероятности безотказной работы блока $P_B(t)$ и подсистемы $P_{II}(t)$ к наработке $t=T_{II}$. Значение k указано в табл. 1.2.

Методические указания к заданию 1.3. Интенсивность отказов $\lambda(t)$ рассчитывается по формуле

$$\lambda(t) = \frac{q(t, \Delta t)}{P(t)(t, \Delta t)}, \quad (1.5)$$

где $q(t, \Delta t)$ - статистическая вероятность отказа устройства на интервале $(t, \Delta t)$ или иначе - статистическая вероятность попадания на указанный интервал случайной величины T ;

$P(t)$ - рассчитанная на шаге 1 вероятность безотказной работы устройства. Напомним, что значение t определяется из табл. 1.1, а принятое в работе значение $\Delta t = 3 \cdot 10^3$ ч.

Если интенсивность отказов не меняется в течение всего срока службы объекта, т.е. $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то наработка до отказа распределена по экспоненциальному (показательному) закону.

В этом случае вероятность безотказной работы блока

$$P_B(t) = e^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t) \quad (1.6)$$

а средняя наработка блока до отказа находится как

$$\bar{T}_B = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.7)$$

При последовательном соединении k блоков интенсивность отказов образуемой ими подсистемы:

$$\lambda_{II} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad (1.8)$$

Если интенсивности отказов всех блоков одинаковы, то интенсивность отказов подсистемы

$$\lambda_{II} = k\lambda, \quad (1.9)$$

а вероятность безотказной работы подсистемы

$$P_{II}(t) = e^{-\lambda_{II} t} = \exp(-k\lambda t) \quad (1.10)$$

С учетом (1.7) и (1.8) средняя наработка подсистемы до отказа находится как

$$\bar{T}_{II} = \frac{1}{\lambda_{II}} = \frac{1}{k\lambda} \quad (1.11)$$

Для построения зависимостей $P_B(t)$ и $P_{II}(t)$ можно пользоваться калькулятором или данными табл. 1.4. Для расчета значений $P_B(t)$ и $P_{II}(t)$ интервал наработки t примите равным 400ч.

График постройте на миллиметровой бумаге, установив максимальное значение $t = 5200$ ч, но при этом при вычислении $P_{II}(t)$ расчеты можно прекратить, достигнув значения 0,05.

Пояснения к табл. 1.4

В таблице приведены значения функции $\exp(-x)$ от 0,00 до 3,09 через 0,01. С целью сокращения объема таблицы приведены только цифры дробной части после нуля целых или нуля целых и нуля десятых.

Таблица 1.4

Значения функции $\exp(-x)$

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0	-	9900	9802	9704	9608	9512	9418	9324	9231	9139
0.1	0.0	9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0.2	0.0	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7711	7634	7558	7483
0.3	0.0	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0.4	0.0	6703	6637	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0.5	0.0	6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	5543
0.6	0.0	5488	5434	5379	5326	5273	5220	5169	5117	5066	5016
0.7	0.0	4966	4916	4868	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0.8	0.0	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4190	4148	4107
0.9	0.0	4066	4025	3985	3946	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1.0	0.0	3679	3642	3606	3570	3535	3499	3465	3430	3396	3362
1.1	0.0	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1.2	0.0	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2837	2808	2780	2753
1.3	0.0	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1.4	0.0	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254
1.5	0.0	2231	2209	2187	2165	2144	2122	2101	2080	2060	2039
1.6	0.0	2019	1999	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1.7	0.0	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1.8	0.0	1653	1637	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1.9	0.0	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2.0	0.0	1353	1340	1327	1313	1300	1287	1275	1262	1249	1237
2.1	0.0	1225	1212	1200	1188	1177	1165	1153	1142	ИЗО	1119
2.2	0.0	1108	1097	1086	1075	1065	1054	1044	1033	1023	1013
2.3	0.0	1003	0993	0983	0973	0963	0954	0944	0935	0926	0916
2.4	0.0	9072	8982	8892	8804	8716	8629	8543	8458	8374	8291
2.5	0.0	8208	8127	8046	7966	7887	7808	7730	7654	7577	7502
2.6	0.0	7427	7353	7280	7208	7136	7065	6995	6925	6856	6788
2.7	0.0	6721	6654	6587	6522	6457	6393	6329	6266	6204	6142
2.8	0.0	6081	6020	5961	5901	5843	5784	5727	5670	5613	5558
2.9	0.0	5502	5448	5393	5340	5287	5234	5182	5130	5079	5029
3.0	0.0	4979	4929	4880	4832	4783	4736	4689	4642	4596	4550

Например,

$$\exp(-0,05)=0,9512;$$

$$\exp(-2,53)=0,07966.$$

Соотношения (1.8) и (1.9) справедливы для экспоненциального распределения. Для любого распределения наработки до отказа вероятность безотказной работы подсистемы, состоящей из k последовательно соединенных блоков, связана с вероятностями безотказной работы этих блоков следующим соотношением:

$$P_{II}(t) = \prod_{i=1}^k P_i(t) \quad (1.12)$$

Если блоки равнонадежны, как принято в задании, то

$$P_{II}(t) = P_B^k(t) \quad (1.13)$$

Рассчитав значение $P_{II}(t)$ по формуле (1.13) для $t = \bar{T}_{II}$, сравните его со значением, рассчитанным по формуле (1.10).

Контрольный вопрос. В какой период эксплуатации - начальный или по мере приближения к предельному состоянию - интенсивность отказов объектов обычно резко и неуклонно возрастает и почему?

Задание 1.4. Для наработки $t = \bar{T}_{II}$ требуется рассчитать вероятность безотказной работы $P_C(\bar{T}_{II})$ системы (рис. 1.3), состоящей из двух подсистем, одна из которых является резервной.

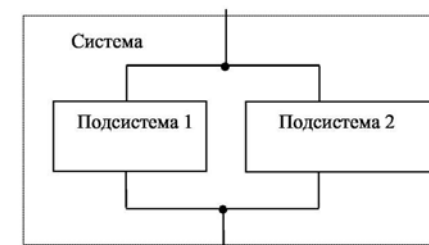


Рис. 1.3. Схема системы с резервированием

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Определение количественных характеристик надёжности изделия

Методические указания к заданию 1.4. Расчет ведется в предположении, что отказы каждой из двух подсистем независимы, т.е. отказ первой системы не нарушает работоспособность второй, и наоборот.

Вероятности безотказной работы каждой системы одинаковы и равны $P_n(\bar{T}_n)$. Тогда вероятность отказа одной подсистемы

$$Q_n(\bar{T}_n) = 1 - P_n(\bar{T}_n) \quad (1.14)$$

Вероятность отказа всей системы $Q_c(\bar{T}_n)$ определяется из условия, что отказала и первая, и вторая подсистемы, т.е.

$$Q_c(\bar{T}_n) = Q_n(\bar{T}_n) \cdot Q_n(\bar{T}_n) = Q_n^2(\bar{T}_n) \quad (1.15)$$

Отсюда вероятность безотказной работы системы

$$P_c(\bar{T}_n) = 1 - Q_c(\bar{T}_n)$$

или иначе

$$P_c(\bar{T}_n) = 1 - (1 - P_n(\bar{T}_n))^2$$

Контрольный вопрос. Какие недостатки вы видите в принятой схеме резервирования?

Задание 2.1. По данным табл. 2.1 требуется определить зависимости от наработки электронного блока привода антенны математического ожидания (среднего значения) износа механизма привода антенны, входящего в блок $\bar{y}(t)$ и дисперсии износа $D(y(t))$, полученные уравнения необходимо записать. Параметры искомых зависимостей следует рассчитать с использованием правила определения уравнения прямой, проходящей через две точки с известными координатами.

Методические указания к заданию 2.1. Данное задание выполняется в предположении, что математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия износа механизма привода антенны представляют собой линейные функции наработки блока. Это подтверждается исследованиями, проведенными при эксплуатации оборудования.

Обозначим износ как некоторую переменную величину Y . Зависимость Y от наработки блока представляет собой случайную функцию, реализации которой являются монотонными неубывающими функциями. Для описания такой случайной функции часто вполне достаточно знать, как меняются в зависимости от наработки ее математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия: $\bar{y}(t)$ $D(y(t))$.

Исследования, проведенные в различных организациях, эксплуатирующих оборудование, показывают, что для описания зависимости износа от времени наработки могут быть использованы линейные функции

$$y(t) = \bar{y}_0 + at, \quad (2.1)$$

$$D(y(t)) = D(y_0) + bt, \quad (2.2)$$

где $\overline{y(t)}$ $D(y(t))$ и $D(y(t))$ соответственно - среднее значение, мм и дисперсия износа вала механизма привода антенны, мм² при $t=0$, при этом началом отсчета является последний ремонтный размер;

- a - средняя скорость увеличения износа, мм/тыс. ч;
- b - скорость увеличения дисперсии износа, мм /тыс. ч;
- t - наработка, тыс. ч.

Таблица 2.1

Результаты обработки измерения износа валов механизма привода антенны

Расчетная величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Наработка t_1 , тыс.ч	Первое измерение									
	2,5	2,0	4,0	5,0	3,0	4,5	7,0	3,5	5,5	1,8
Средний износ $\overline{y(t)}$, мм	0,050	0,045	0,087	0,090	0,060	0,085	0,105	0,072	0,089	0,045
Дисперсия износа $D(y(t))$, мм ²	0,098 *10 ⁻³	0,050 *10 ⁻³	0,147 *10 ⁻³	0,157 *10 ⁻³	0,079 *10 ⁻³	0,118 *10 ⁻³	0,176 *10 ⁻³	0,060 *10 ⁻³	0,128 *10 ⁻³	0,040 *10 ⁻³
Наработка t_2 , тыс.ч	Второе измерение									
	7,5	10,0	9,5	11,5	10,5	13,5	14,5	15,0	12,0	13,0
Средний износ $\overline{y(t)}$, мм	0,135	0,182	0,165	0,174	0,183	0,192	0,198	0,210	0,186	0,190
Дисперсия износа $D(y(t))$, мм ²	0,192 *10 ⁻³	0,144 *10 ⁻³	0,241 *10 ⁻³	0,251 *10 ⁻³	0,173 *10 ⁻³	0,212 *10 ⁻³	0,270 *10 ⁻³	0,154 *10 ⁻³	0,222 *10 ⁻³	0,134 *10 ⁻³

Искомыми параметрами функций (2.1) и (2.2) являются $\overline{y_0}$ $D(y(t))$ и b . На практике для их нахождения необходимо область возможных значений наработки (нижняя граница которой $t=0$, а верхняя находится из условия достижения

предельного значения износа) разбить на несколько (обычно 10-20) интервалов.

При каждом из разделяемых этими интервалами наработки оборудования $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ производят измерения износа большого количества валов и вычисляют соответствующие наработкам средние значения $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_i}$, а затем дисперсии $D(y_1), D(y_2), \dots, D(y_i), \dots$. Располагая такими наборами значений t_i и y_i или t_i и $D(y_i)$, можно, используя метод наименьших квадратов, определить искомые зависимости $\overline{y(t)}$ и $D(y(t))$.

В контрольной работе задача существенно упрощена. Предполагается, что массивы данных об износе валов для каждого t_i уже обработаны. Считается также возможным определить искомые линейные зависимости, располагая координатами только двух точек.

В таком случае параметры a и b зависимостей (2.1) и (2.2) могут быть определены соответственно

$$a = \frac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{t_2 - t_1} \quad (2.3)$$

$$b = \frac{D(y_2) - D(y_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.4)$$

После этого, используя координаты любой из известных двух точек, например второй ($t_2, \overline{y_2}$) или ($t_2, D(y_2)$), можно найти два других параметра:

$$\overline{y_0} = \overline{y_2} - \frac{\overline{y_2} - \overline{y_1}}{t_2 - t_1} t_2 \quad (2.5)$$

$$D(y_0) = D(y_2) - \frac{D(y_2) - D(y_1)}{t_2 - t_1} t_2, \quad (2.6)$$

Подставив значения (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) в уравнения (2.1) и (2.2), получите выражения, определяющие зависимости от наработки среднего износа валов и дисперсии износа:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_2 - \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{t_2 - t_1} t_2 + \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{t_2 - t_1} t \quad (2.7)$$

и

$$D(y(t)) = D(y_2) - \frac{D(y_2) - D(y_1)}{t_2 - t_1} t_2 + \frac{D(y_2) - D(y_1)}{t_2 - t_1} t \quad (2.8)$$

Произведите необходимые вычисления и запишите полученные выражения (2.1) и (2.2) с числовыми значениями параметров.

Контрольный вопрос. Могут ли исходные значения среднего износа валов \bar{y}_0 и дисперсии износа $D(y_0)$, соответствующие $t=0$, быть равными 0? Отрицательными числами?

Задание 2.2. Требуется рассчитать средние значения $\{y(t_i)\}$, дисперсии $\{D(y(t_i))\}$ и средние квадратические отклонения $\{\sigma(y(t_i))\}$ износа при нескольких значениях наработки, пользуясь зависимостями, полученными на предыдущем шаге. Затем требуется для тех же значений наработки определить нижнюю $y(t_i)_{\min}$ и верхнюю $y(t_i)_{\max}$ границы практически возможных значений износа. Результаты расчетов следует занести в таблицу, выполненную по форме 2.1, и построить по ним линии, представляющие собой зависимость среднего износа валов от наработки, нижнюю и верхнюю границы практически возможных значений износа.

Таблица 2.2

Результаты расчета средних значений, дисперсий и средних квадратических отклонений износа валов

Величина		Наработка, тыс. ч					
		0	1	2	...	9	10
1	Средний износ $\bar{y}(t)$, мм						
2	Дисперсия износа $D(y(t))$, мм ²						
3	Среднее квадратическое отклонение износа $\sigma(y(t))$, мм						
4	Утроенное значение $3\sigma(y(t))$,						
5	Нижняя граница $y(t_i)_{\min}$						
6	Верхняя граница $y(t_i)_{\max}$						

Предельное значение $u_{\text{пр}}$ износа валов установлено равным 1,7мм. На практике обточку валов стремятся производить при прокате 1,5 мм, поэтому при выполнении контрольной работы примите $u_{\text{пр}}$ равным 1,5мм. Заданная наработка указана в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Заданная серия и наработка $T_{\text{зад}}$

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Заданная наработка $T_{\text{зад}}$, тыс. ч	15	24	17	23	19	28	18	26	16	25

Методические указания к заданию 2.2. Заполните таблицу, последовательно производя вычисления по формулам, полученным при выполнении задания 1.1, для различных значений наработки. Расчет среднеквадратических отклонений произведите по формуле

$$\sigma(y_i) = \sqrt{D(y_i)}.$$

где i - номер интервала в таблице по форме 2.1.

Принятой модели процесса износа валов, определяемой выражениями (2.1) и (2.2), соответствует такое постепенное увеличение износа, при котором среднее значение и дисперсия приращения износа за некоторый интервал наработки Δt пропорциональны длине этого интервала и не зависят от достигнутого значения y . В таком случае вполне допустимо, основываясь на основных теоремах теории вероятностей, считать, что для любого t_i (пока $y < y_{ПР}$) значения износа распределены по нормальному закону с плотностью распределения

$$f(y_i) = \frac{1}{y(y_i)\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{(y - \bar{y}_i)^2}{2s^2(y_i)}\right)$$

Сужение области определения функции $f(y_i)$ до интервала $[0, y_{ПР}]$ практически не оказывает влияния на результаты расчетов.

Для нахождения области практически возможных значений случайной величины Y_i , распределенной по нормальному закону, пользуются "правилом трех сигм". В соответствии с этим правилом для каждой наработки оборудования t_i верхняя и нижняя границы практически возможных значений износа валов находятся как

$$y(t_i)_{\max, \min} = \bar{y}_i \pm 3\sigma(y_i). \quad (2.9)$$

Кривые, показывающие верхнюю и нижнюю границы практически возможных значений износа, определяются выражениями

$$y(t)_{\max} = \bar{y}_0 + at + 3\sqrt{D(y_0) + bt} \quad (2.10)$$

$$y(t)_{\min} = \bar{y}_0 + at - 3\sqrt{D(y_0) + bt}. \quad (2.11)$$

Полученные зависимости иллюстрирует рис. 2.1.

Изображая на таких графиках кривую распределения, подразумевают, что оси $f(y_i)$ и $f(y)$ направлены перпендикулярно плоскости t_0y .

По результатам расчетов, сведенным в таблице по форму 2.1, постройте график зависимости среднего износа валов от наработки (рис. 2.1). Проведите на графике прямую $y = y_{ПР}$. Пользуясь данными табл. 2.1, постройте на этом же графике кривые, показывающие верхнюю и нижнюю границы практически возможных значений износа валов. Покажите на графике обе исходные точки (t_1, y_1) , (t_2, y_2) отметьте их координаты.

При построении графика рекомендуется использовать следующий масштаб: пробег - в 1мм 1 тыс. км, износ - в 1мм 0,01мм износа.

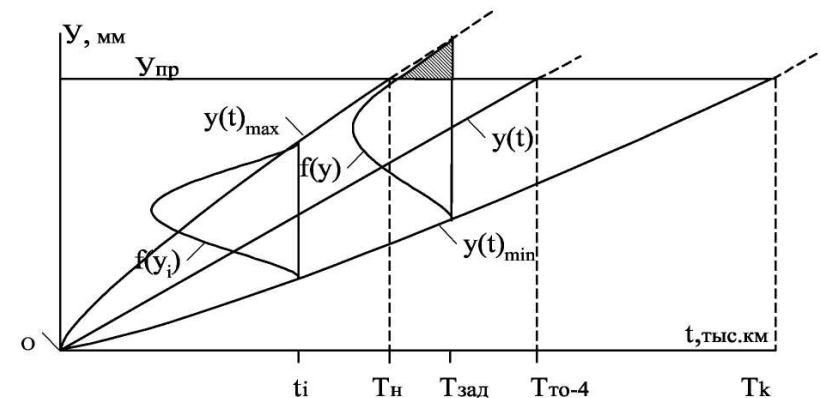


Рис.2.1. Зависимость среднего износа валов от наработки.

Контрольный вопрос. Имеет ли смысл при заданных условиях вычислять значения среднего износа и дисперсии износа для наработки $t=36$ тыс. ч и более?

Задание 2.3. Требуется рассчитать \bar{T} - среднюю наработку до текущего ремонта, а также наименьший T_H и наибольший T_K - практически возможные наработки до обточки валов по износу.

Далее необходимо рассчитать Ψ - вероятность того, что к заданной наработке $T_{зад}$ будет произведена обточка валов по износу.

При расчете вероятности воспользуйтесь графиком, приведенным на рис.2.2, или таблицами значений нормальной функции распределения

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Методические указания к заданию 2.3. Текущий ремонт представляет собой обточку валов с разборкой механизма привода антенны. Факторами, определяющими необходимость производства обточки валов, могут быть увеличение износа до предельного значения, проявление дефектов на поверхности скольжения, необходимость уравнивать диаметры валов для постановки вкладышей ремонтных градаций и др. В данной работе будем считать, что основной причиной постановки устройства на ремонт является увеличение износа валов.

При таком условии средняя наработка до текущего ремонта можно рассчитать, подставив в выражение (2.1) значение $y(t) = y_{np}$:

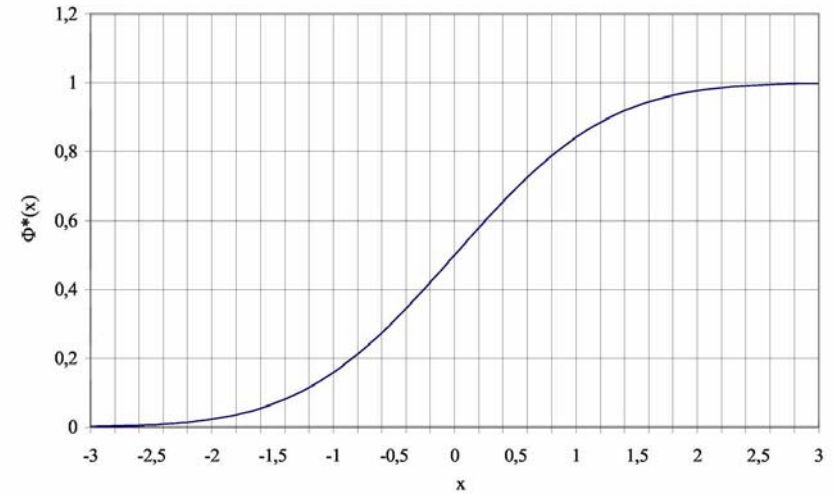


Рис. 2.2. График функции $\Phi(x)$

$$\bar{T}_{TP} = \frac{y_{PP} - \bar{y}_0}{a} \quad (2.12)$$

Чтобы найти практически наименьший T_H тыс.ч и наиболее поздний T_K тыс. ч сроки производства текущего ремонта, необходимо подставить $y(t)_{max} = y_{np}$ и $y(t)_{min} = y_{np}$ соответственно в выражения (2.10) и (2.11).

Произведя необходимые преобразования, находим

$$T_H = \frac{9b + 2(y_{np} - \bar{y}_0)a - \sqrt{[9b + 2(y_{np} - \bar{y}_0)a]^2 - 4a^2(y_{np} - \bar{y}_0)^2 - 9D(y_0)}}{2a^2}$$

$$T_K = \frac{9b + 2(y_{np} - \bar{y}_0)a + \sqrt{[9b + 2(y_{np} - \bar{y}_0)a]^2 - 4a^2(y_{np} - \bar{y}_0)^2 - 9D(y_0)}}{2a^2}$$

На рис. 2.1 плотность распределения износа при наработке, соответствующей заданному пробегу $T_{зад}$, обозначена как $f(y)$. Часть, лежащая выше Упр, является

мнимой, поскольку превышение предельного значения износа недопустимо. Заштрихованная площадь соответствует вероятности того, что к наработке $T_{зад}$ уже будет произведена обточка валов. Эта вероятность находится как

$$\Psi = 1 - F(y_{np}),$$

где

$$F(y_{np}) = \frac{1}{\sigma(y)\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_{np}} \exp\left(-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2(y)}\right) dy \quad (2.13)$$

В формуле (2.13) \bar{y} - среднее значение износа, находимое путем подстановки $t = T_{зад}$ в выражение (2.1). Среднее квадратическое отклонение $\sigma(y)$ рассчитайте путем подстановки $t = T_{зад}$ в выражение (2.2):

$$\delta(y_i) = \sqrt{D(y_0) + bT_{зад}}.$$

Интеграл (2.13) не выражается через элементарные функции, поэтому для его вычисления пользуются таблицами нормальной функции распределения $\Phi^*(x)$. Эта функция характеризует распределение случайной величины X , у которой математическое ожидание равно 0 и $\sigma(x) = 1$.

Выразить функцию распределения (2.13) через нормальную функцию распределения можно с помощью выражения

$$F(y_{np}) = \Phi(x),$$

где x находится в результате замены переменной как

$$x = \frac{y_{np} - \bar{y}}{\sigma(y)}$$

По рассчитанному значению x найдите по таблицам или с помощью графика, приводимого на рис. 2.2, значение $\Phi(x)$ и далее Ψ . Убедитесь, что в силу симметрии нормального распределения с математическим ожиданием, равным 0, относительно начала координат

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Контрольный вопрос. Чему равна вероятность производства обточки валов к моменту $t = T_{тр}$?

Задание 2.4.

На испытании находилось $N_0 = 1000$ образцов электроламп радиооборудования, которые относятся к классу неремонтируемой аппаратуры. Число отказов $n(\Delta t)$ фиксировалось через каждые 100 ч работы ($\Delta t = 100$ ч).

Данные об отказах по вариантам шифра приведены в табл. 2.4.

Требуется вычислить количественные характеристики надежности и построить зависимости характеристик от времени.

Решение: лампы относятся к классу невосстанавливаемых изделий. Поэтому критериями надежности будут $P(t)$; $a(t)$, $\lambda(t)$, $T_{ср}$.

Вычислим $P(t)$.

$$\bar{P}(100) = \frac{N_0 - n(100)}{N_0}.$$

Таблица 2.4

Данные об отказах

Δt_i	$n(\Delta t_i)$ по варианту									
	r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0...100	50	51	52	53	54	55	50	49	48	47
100...200	40	41	42	43	44	45	40	39	38	37
200...300	32	33	34	35	36	37	32	31	30	29
300...400	25	26	27	28	29	30	24	23	22	21
400...500	20	21	22	23	24	25	19	18	17	16
500...600	17	18	19	20	21	22	16	15	16	14
600...700	16	17	18	19	20	21	15	14	13	12
700...800	16	17	18	19	20	21	15	14	13	12
800...900	15	16	17	18	19	20	14	13	12	11
900...1000	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
1000...1100	15	16	17	18	19	20	14	13	12	11
1100...1200	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
1200...1300	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
1300...1400	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
1400...1500	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
1500...1600	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
1600...1700	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
1700...1800	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
1800...1900	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
1900...2000	12	13	14	15	16	17	11	10	9	8
2000...2100	12	13	14	15	16	17	11	10	9	8
2100...2200	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
2200...2300	12	13	14	15	16	17	11	10	9	8
2300...2400	13	14	15	16	17	18	12	11	10	9
2400...2500	14	15	16	17	18	19	13	12	11	10
2500...2600	16	17	18	19	20	21	15	14	13	12
2600...2700	20	21	22	23	24	25	19	18	17	16
2700...2800	25	26	27	28	29	30	24	23	22	21
2800...2900	30	31	32	33	34	35	29	28	27	26
2900...3000	40	41	42	43	44	45	39	38	37	36

$$\bar{P}(200) = \frac{N_0 - n(100 + 200)}{N_0}$$

$$\bar{P}(3000) = \frac{1000 - \left[n(\Delta t) = \sum_0^{3000} n_0 \cdot \text{варианту} \right]}{1000}$$

Для расчета характеристик $a(t)$ и $\lambda(t)$ применяются формулы:

$$\bar{a}(50) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \Delta t}$$

$$\bar{\lambda}(50) = \frac{n(\Delta t)}{N_{CP} \Delta t}$$

Значения $P(t)$; $\bar{a}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$, вычисленные для всех Δt_i сводим в таблицу по табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вычисленные значения $P(t)$; $\bar{a}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$

Δt_i , ч	$P(t)$	$\bar{a}(t) \cdot 10^{-3}$ 1/ч	$\bar{\lambda}(t) \cdot 10^{-3}$ 1/ч
от 100			
100...200			
-			
2800...2900			
2900...3000			

По данным таблицы по форме 2.2 строятся на зависимости P , a и λ , от t .

Следует иметь в виду, что в таблице данные $P(t)$ приведены для концов интервалов Δt_i , а данные для $\bar{a}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$ - для середины интервалов Δt_i . Поэтому определение $P(t)$ по формуле

$$\lambda(t) = a(t) / P(t)$$

не дает значений $P(t)$, указанных в таблице по форме 2.2. Вычислим среднее время безотказной работы, предположив,

что на испытании находились только те образцы, которые отказали.

$$T_{CP} \approx \frac{\sum_{i=1}^m n_i t_{CPi}}{N}.$$

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Последовательное соединение элементов в систему.

Теоретические сведения

Соединение элементов называется последовательным, если отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы. Система последовательно соединенных элементов работоспособна тогда, когда работоспособны все ее элементы.

Вероятность безотказной работы системы за время t определяется формулой

$$P_c(t) = P_1(t) * P_2(t) \dots P_n(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t), \quad (3.1)$$

где $P_i(t)$ - вероятность безотказной работы i -го элемента за время t .

Если $P_i(t) = P(t)$ то,

$$P_c(t) = P^n(t). \quad (3.2)$$

Выразим $P_c(t)$ через интенсивность отказов $\lambda_i(t)$ элементов системы.

Имеем:

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt\right) \quad (3.3)$$

или

$$P_c(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(t) dt\right), \quad (3.4)$$

где

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (3.5)$$

Здесь $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов i -го элемента; $\lambda_c(t)$ – интенсивность отказов системы.

Вероятность отказа системы на интервале времени $(0, t)$ равна

$$q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (3.6)$$

Частота отказов системы $f_c(t)$ определяется соотношением

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt}. \quad (3.7)$$

Интенсивность отказов системы

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)}. \quad (3.8)$$

Среднее время безотказной работы системы:

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt. \quad (3.9)$$

В случае экспоненциального закона надежности всех элементов системы имеем

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = const. \quad (3.10)$$

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_c; \quad (3.11)$$

$$P_i(t) = \exp(-\lambda t); \quad (3.12)$$

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}; \quad (3.13)$$

$$f_c(t) = \lambda_c * e^{-\lambda_c t}; \quad (3.14)$$

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c t}; \quad (3.15)$$

$$m_{ic} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}; \quad (3.16)$$

$$m_{ic} = \frac{1}{\lambda_i}, \quad (3.17)$$

где m_{ii} - среднее время безотказной работы i -го элемента.

При расчете надежности систем часто приходится перемножать вероятности безотказной работы отдельных элементов расчета, возводить их в степень и извлекать корни. При значениях $P(t)$, близких к единице, эти вычисления можно с достаточной для практики точностью выполнять по следующим приближенным формулам:

$$\left. \begin{aligned} P_1(t)P_2(t)\dots P_n(t) &\approx 1 - \sum_{i=1}^n q_i(t), \\ P_i^n(t) &= 1 - Nq_i(t), \\ \sqrt[n]{P_i(t)} &= 1 - q_i(t)/n, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где $q_i(t)$ -- вероятность отказа i -го элемента.

Решение типовых задач.

Задача 3.1. Система состоит из трех устройств. Интенсивность отказов электронного устройства равна $\lambda_1 = 0,16 \cdot 10^{-3}$ 1/час = const. Интенсивности отказов двух электромеханических устройств линейно зависят от времени и определяются следующими формулами

$$\lambda_2 = 0,23 \cdot 10^{-4} t \text{ 1/час}, \quad \lambda_3 = 0,06 \cdot 10^{-6} t^{2,6} \text{ 1/час}.$$

Необходимо рассчитать вероятность безотказной работы изделия в течение 100 час.

Решение. На основании формулы (3.3) имеем

$$\begin{aligned} P_c(t) &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt\right) = \exp\left\{-\left[\int_0^t \lambda_1 dt + \int_0^t \lambda_2 dt + \int_0^t \lambda_3 dt\right]\right\} = \\ &= \exp\left[-\left(\lambda_1 t + 0,23 \cdot 10^{-4} \frac{t^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t^{3,6}}{3,6}\right)\right]. \end{aligned}$$

Для $t=100$ час

$$P_c(100) = \exp\left[-\left(0,16 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + 0,23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100^{3,6}}{3,6}\right)\right] \approx 0,33.$$

Задача 3.2. Система состоит из трех блоков, среднее время безотказной работы которых равно: $m_{t1}=160$ час; $m_{t2}=320$ час; $m_{t3}=600$ час.

Для блоков справедлив экспоненциальный закон надежности. Требуется определить среднее время безотказной работы системы.

Решение. Воспользовавшись формулой (3.17) получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{m_{t1}} = \frac{1}{160}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{m_{t2}} = \frac{1}{320}; \quad \lambda_3 = \frac{1}{m_{t3}} = \frac{1}{600}.$$

Здесь λ_i - интенсивность отказов i -го блока. На основании формулы (3.11) имеем

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{600} \approx 0,011 \text{ 1/час}.$$

Здесь λ_c - интенсивность отказов системы.

На основании формулы (3.16) получим:

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0,011} \approx 91 \text{ час}.$$

Задача 3.3. Система состоит из 12600 элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda_{cp} = 0,32 \cdot 10^{-6}$ 1/час. Требуется определить $P_c(t)$, $q_c(t)$, $f_c(t)$, m_{tc} , для $t=50$ час.

Здесь $P_c(t)$ - вероятность безотказной работы системы в течение времени t ;

$q_c(t)$ – вероятность отказа системы в течение времени t ;

$f_c(t)$ – частота отказов или плотность вероятности времени T безотказной работы системы;

m_{tc} – среднее время безотказной работы системы.

Решение. Интенсивность отказов системы по формуле (3.11) будет

$$\lambda_c = \lambda_{cp} \cdot n = 0,32 \cdot 10^{-6} \cdot 12600 = 4,032 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}.$$

Из (3.13) имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}; \quad P_c(50) = e^{-4,032 \cdot 10^{-3} \cdot 50} \approx 0,82.$$

Из (3.15) получим

$$q_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = \lambda_c P_c(t); \quad q_c(50) = 1 - P_c(50) \approx 0,18.$$

Из (3.14) имеем

$$f_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = \lambda_c P_c(t); \quad f_c(50) = 4,032 * 10^{-3} * 0,82 = 3,28 * 10^{-3}$$

1/час.

Из (3.16) получим

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/4,032 * 10^{-3} \approx 250 \text{ час.}$$

Задача 3.4. Система состоит из двух устройств.

Вероятности безотказной работы каждого из них в течение времени $t = 100$ час равны: $P_1(100) = 0,95$; $P_2(100) = 0,97$. Справедлив экспоненциальный закон надежности. Необходимо найти среднее время безотказной работы системы.

Решение. Найдем вероятность безотказной работы изделия:

$$P_c(100) = P_1(100) * P_2(100) = 0,95 * 0,97 = 0,92.$$

Найдем интенсивность отказов изделия, воспользовавшись формулой

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$$

или

$$P_c(100) = 0,92 = e^{-\lambda_c * 100}.$$

По таблице П.7.14[1] имеем

$$\lambda_c * 100 \approx 0,083 \text{ или } \lambda_c = 0,83 * 10^{-3} \text{ 1/час.}$$

Тогда

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/(0,83 * 10^{-3}) = 1200 \text{ час.}$$

Задача 3.5. Вероятность безотказной работы одного элемента в течение времени $t = 100$ час равна $P(t) = 0,9997$. Требуется определить вероятность безотказной работы системы, состоящей из $n = 100$ таких же элементов.

Решение. Вероятность безотказной работы системы равна $P_c(t) = P^n(t) = (0,9997)^{100}$.

Вероятность $P_c(t)$ близка к единице, поэтому для ее вычисления воспользуемся формулой (3.18). В нашем случае $q(t) = 1 - P(t) = 1 - 0,9997 = 0,0003$.

$$\text{Тогда } P_c(t) \approx 1 - nq(t) = 1 - 100 * 0,0003 = 0,97.$$

Задача 3.6. Вероятность безотказной работы системы в течение времени t равна $P_c(t) = 0,95$. Система состоит из $n = 120$ равнонадежных элементов. Необходимо найти вероятность безотказной работы элемента.

Решение. Очевидно, что вероятность безотказной работы элемента будет $P_i(t) = \sqrt[n]{P_c(t)}$.

Так как $P(t)$ близка к единице, то вычисления $P(t)$ удобно выполнить по формуле (3.18).

$$\text{В нашем случае } q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Тогда

$$P_i(t) = \sqrt[n]{P_c(t)} \approx 1 - \frac{q_c(t)}{n} = 1 - \frac{0,05}{120} \approx 0,9996.$$

Задача 3.7. Система состоит из 12600 элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda_{cp} = 0,32 * 10^{-6}$ 1/час.

Необходимо определить вероятность безотказной работы в течение $t = 50$ час.

Решение. Интенсивность отказов системы по формуле (3.11) будет

$$\lambda_c = \lambda_{cp} * n = 0,32 * 10^{-6} * 12600 = 4,032 * 10^{-3} \text{ 1/час.}$$

Тогда на основании (3.13)

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$$

или

$$P_c(50) = e^{-4,032 * 0,001 * 50} \approx 0,82.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.8. Аппаратура связи состоит из 2000 элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda_{cp} = 0,33 * 10^{-5}$ 1/час.

Необходимо определить вероятность безотказной работы аппаратуры в течении $t = 200$ час и среднее время безотказной работы аппаратуры.

Задача 3.9. Невосстанавливаемая в процессе работы электронная машина состоит из 200000 элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda=0,2 * 10^{-6}$ 1/час. Требуется определить вероятность безотказной работы электронной машины в течении $t = 24$ часа и среднее время безотказной работы электронной машины.

Задача 3.10. Система управления состоит из 6000 элементов, средняя интенсивность отказов которых $\lambda_{cp.} = 0,16*10^{-6}$ 1/час. Необходимо определить вероятность безотказной работы в течении $t = 50$ час и среднее время безотказной работы.

Задача 3.11. Прибор состоит из $n = 5$ узлов. Надежность узлов характеризуется вероятностью безотказной работы в течение времени t , которая равна: $P_1(t)=0,98$; $P_2(t)=0,99$; $P_3(t)=0,998$; $P_4(t)=0,975$; $P_5(t)=0,985$. Необходимо определить вероятность безотказной работы прибора.

Задача 3.12. Система состоит из пяти приборов, среднее время безотказной работы которых равно: $m_{t1}=83$ час; $m_{t2}=220$ час; $m_{t3}=280$ час; $m_{t4}=400$ час; $m_{t5}=700$ час. Для приборов справедлив экспоненциальный закон надежности. Требуется найти среднее время безотказной работы системы.

Задача 3.13. Прибор состоит из пяти блоков. Вероятность безотказной работы каждого блока в течение времени $t = 50$ час равна: $P_1(50)=0,98$; $P_2(50)=0,99$; $P_3(50)=0,998$; $P_4(50)=0,975$; $P_5(50)=0,985$. Справедлив экспоненциальный закон надежности. Требуется найти среднее время безотказной работы прибора.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Расчет надежности системы с постоянным резервированием.

Теоретические сведения

При постоянном резервировании резервные элементы 1,2 соединены параллельно с основным (рабочим) элементом в течение всего периода работы системы. Все элементы соединены постоянно, перестройка схемы при отказах не происходит, отказавший элемент не отключается (рис.4.1.).

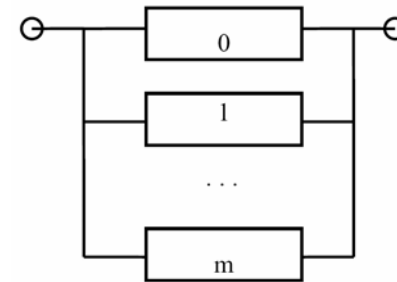


Рис. 4.1. Схема постоянного резервирования

Вероятность отказа системы $q_c(t)$ определяется формулой

$$q_c(t) = \prod_{j=0}^m q_j(t), \quad (4.1)$$

где $q_j(t)$ - вероятность отказа j - го элемента.
Вероятность безотказной работы системы

$$P_c(t) = 1 - \prod_{j=0}^m [1 - P_j(t)] \quad (4.2)$$

где $P_j(t)$ - вероятность безотказной работы j - го элемента

Если $P_j(t) = P(t), j = 0, 1, \dots, m$, то

$$\left. \begin{aligned} q_c(t) &= q^{m+1}(t); \\ P_c(t) &= 1 - [1 - P(t)]^{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

При экспоненциальном законе надежности отдельных элементов имеем

$$\left. \begin{aligned} P_j(t) &= P(t) = e^{-\lambda t}; \\ q_c(t) &= (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}; \\ P_c(t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}; \\ m_{tc} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1+i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Резервирование называется общим, если резервируется вся система, состоящая из последовательного соединения n элементов. Схема общего резервирования показана на рис.4.2. Основная цепь содержит n элементов. Число резервных цепей равно m , т. е. кратность резервирования равна m .

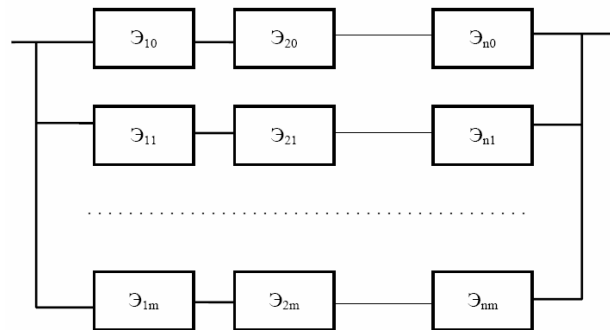


Рис. 4.2. Схема общего резервирования

Определим количественные характеристики надежности системы с общим резервированием (резервные цепи включены постоянно).

Запишем вероятность безотказной работы j - ой цепи

$$P_j(t) = \prod_{i=1}^n P_{ij}(t); j = 0, 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

где $P_{ij}(t), j=0, 1, 2, \dots, m; i=1, 2, 3, \dots, n$ - вероятность безотказной работы элемента \mathcal{E}_{ij} .

Вероятность отказа j - ой цепи

$$q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^m P_{ij}(t). \quad (4.6)$$

Вероятность отказа системы с общим резервированием

$$q_c(t) = \prod_{j=0}^m \left[1 - \prod_{i=1}^n P_{ij}(t) \right]. \quad (4.7)$$

Вероятность безотказной работы системы с общим резервированием

$$P_c(t) = 1 - \prod_{j=0}^m \left[1 - \prod_{i=1}^n P_{ij}(t) \right]. \quad (4.8)$$

Частный случай: основная и резервные цепи имеют одинаковую надежность, т.е.

$$P_{ij}(t) = P_i(t). \quad (4.9)$$

Тогда

$$q_c(t) = \left[1 - \prod_{i=1}^n P_i(t) \right]^{m+1}; \quad (4.10)$$

$$p_c(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^n p_i(t) \right]^{m+1}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим экспоненциальный закон надежности, т. е.

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}. \quad (4.12)$$

В этом случае формулы (4.10), (4.11) примут вид

$$q_c(t) = (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}, \quad (4.13)$$

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}, \quad (4.14)$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (4.15)$$

где λ_0 – интенсивность отказов цепи, состоящей из n элементов.

Частота отказов системы с общим резервированием

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = \lambda_0 \cdot (m+1) e^{-\lambda_0 t} \cdot (1 - e^{-\lambda_0 t})^m. \quad (4.16)$$

Интенсивность отказов системы с общим резервированием

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0 (m+1) e^{-\lambda_0 t} \cdot (1 - e^{-\lambda_0 t})^m}{1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}}. \quad (4.17)$$

Среднее время безотказной работы резервированной системы

$$m_{tc} = T_0 \sum_{j=0}^m \frac{1}{1+j}, \quad (4.18)$$

где $T_0 = 1/\lambda_0$, - среднее время безотказной работы нерезервированной системы.

Решение типовых задач.

Задача 4.1. Система состоит из 10 равнонадежных элементов, среднее время безотказной работы элемента $m_t = 1000$ час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы и основная и резервная системы равнонадежны. Необходимо найти среднее время безотказной работы системы m_{tc} , а также частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ в момент времени $t = 50$ час в следующих случаях:

- нерезервированной системы,
- дублированной системы при постоянно включенном резерве.

Решение.

$$a) \lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

где λ_c – интенсивность отказов системы; λ_i – интенсивность отказов i -го элемента; $n = 10$.

$$\lambda_i = 1/m_{ti} = 1/1000 = 0,001; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda = \lambda_i;$$

$$\lambda_c = \lambda n = 0,001 * 10 = 0,01 \text{ 1/час};$$

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 100 \text{ час};$$

$$f_c(t) = \lambda_c(t) P_c(t);$$

$$\lambda_c(50) = \lambda_c; \quad P_c(t) = e^{-\lambda_c t};$$

$$f_c(50) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = 0,01 * e^{-0,01 * 50} \approx 6 * 10^{-3} \text{ 1/час};$$

$\lambda_c(50)=0,01$ 1/час.

$$б) m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} \sum_{j=0}^m \frac{1}{1+j}; m=1; m_{tc} = \frac{1}{0,01} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 150 \text{ час};$$

$$p_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}; \lambda_0 = \lambda_c = 0,01 \text{ 1/час};$$

$$p_c = 1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^2 = 2e^{-\lambda_0 t} - e^{-2\lambda_0 t};$$

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 2\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \cdot (1 - e^{-\lambda_0 t});$$

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{2\lambda_0(1 - e^{-\lambda_0 t})}{2 - e^{-\lambda_0 t}};$$

$$f_c(50) \approx 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}; \lambda_c(50) \approx 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}.$$

Задача 4.2. В системе телеуправления применено дублирование канала управления. Интенсивность отказов канала $\lambda=10^{-2}$ 1/час. Рассчитать вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$ при $t=10$ час, среднее время безотказной работы m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы.

Решение. В данном случае $n=1; \lambda_i=\lambda; \lambda_0=n\lambda=\lambda; m=1$. По формуле (4.14) имеем

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2;$$

$$P_c(10) = 1 - (1 - e^{-0,1})^2.$$

Из приложения П.7.14 [1] получим $e^{-0,1} = 0,9048$.

Тогда

$$P_c(10) = 1 - (1 - 0,9048)^2 = 1 - 0,0952^2 \approx 1 - 0,01 = 0,99.$$

Определим m_{tc} . Из формулы (4.4) имеем

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^1 \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 150 \text{ час}.$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$. Получим

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 2\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Имеем

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{2\lambda e^{-\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t} (2 - e^{-\lambda t})} = \frac{2\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t})}{2 - e^{-\lambda t}}.$$

Задача 4.3. Нерезервированная система управления состоит из $n = 5000$ элементов. Для повышения надежности системы предполагается провести общее дублирование элементов. Чтобы приближенно оценить возможность достижения заданной вероятности безотказной работы системы $P_c(t) = 0,9$ при $t = 10$ час., необходимо рассчитать среднюю интенсивность отказов одного элемента при предположении отсутствия последствия отказов.

Решение. Вероятность безотказной работы системы при общем дублировании и равнонадежных элементах равна

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda n t})^2$$

или

$$P_c(t) = 1 - [1 - P^n(t)]^2,$$

где

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Здесь $P(t)$ – вероятность безотказной работы одного элемента.

Так как должно быть

$$1 - [1 - P^n(t)]^2 \geq 0,9,$$

то

$$p(t) \geq (1 - \sqrt{0,1})^{1/n}.$$

Разложив $(1 - \sqrt{0,1})^{1/n}$ по степени $1/n$ в ряд и пренебрегая членами ряда высшего порядка малости, получим

$$(1 - \sqrt{0,1})^{1/5000} \approx 1 - \frac{1}{5000} \sqrt{0,1} = 1 - 6,32 \cdot 10^{-5}.$$

Учитывая, что $P(t) = \exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t$, получим
 $1 - \lambda t \geq 1 - 6,32 \cdot 10^{-5}$
 или
 $\lambda \leq (6,32 \cdot 10^{-5}) / t = (6,32 \cdot 10^{-5}) / 10 = 6,32 \cdot 10^{-6} \text{ 1/час.}$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 4.4. Приемник состоит из трех блоков: УВЧ, УПЧ и УНЧ. Интенсивности отказов этих блоков соответственно равны: $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час}$; $\lambda_2 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час}$; $\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час}$. Требуется рассчитать вероятность безотказной работы приемника при $t = 100 \text{ час}$ для следующих случаев:

а) резерв отсутствует; б) имеется общее дублирование приемника в целом.

Задача 4.5. Для изображенной на рис.4.3. логической схемы системы определить $P_c(t)$, m_{tc} , $f_c(t)$, $\lambda_c(t)$. Здесь резерв нагруженный, отказы независимы.

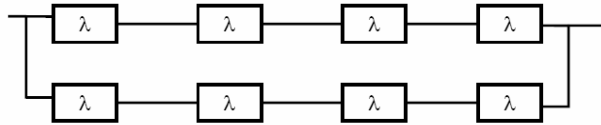


Рис. 4.3. Схема резервирования

Задача 4.6. В радиопередатчике, состоящем из трех равнонадежных каскадов ($n = 3$) применено общее постоянное дублирование всего радиопередатчика. Интенсивность отказов каскада равна $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час}$. Определить $P_c(t)$, m_{tc} , $f_c(t)$, $\lambda_c(t)$ радиопередатчика с дублированием.

Задача 4.7. Для изображенной на рис.4.4. логической схемы системы определить интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Здесь резерв нагруженный, отказы независимы.

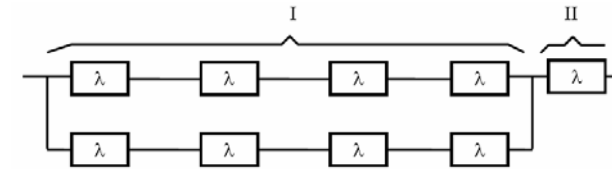


Рис. 4.4. Схема резервирования

Задача 4.8. Радиоэлектронная аппаратура состоит из трех блоков I, II, III. Интенсивности отказов этих трех блоков соответственно равны: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Требуется определить вероятность безотказной работы аппаратуры $P_c(t)$ для следующих случаев:

а) резерв отсутствует;
 б) имеется дублирование радиоэлектронной аппаратуры в целом.

Задача 4.9. Схема расчета надежности изделия показана на рис.4.5. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов изделия. Интенсивности отказов элементов имеют значения: $\lambda_1 = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$; $\lambda_2 = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$. Требуется найти вероятность безотказной работы изделия в течении времени $t = 100 \text{ час}$, среднее время безотказной работы изделия, частоту отказов и интенсивность отказов в момент времени $t = 100 \text{ час}$.

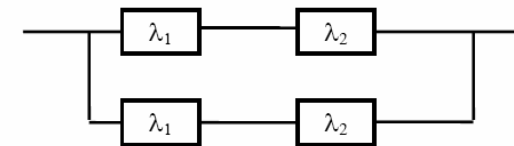


Рис. 4.5. Схема резервирования

Задача 4.10. В телевизионном канале связи, состоящем из приемника и передатчика, применено общее дублирование. Передатчик и приемник имеют интенсивности отказов $\lambda_{п} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$, $\lambda_{пр} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}$, соответственно. Схема канала

представлена на рис.4.6. Требуется определить вероятность безотказной работы канала $P_c(t)$, среднее время безотказной работы $m_{тс}$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

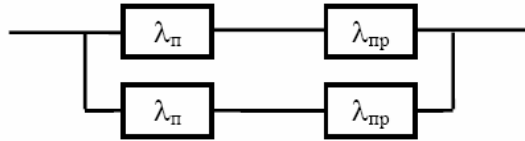


Рис. 4.6. Схема резервирования

Задача 4.11. Схема расчета надежности изделия приведена на рис.4.7. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов изделия. Требуется определить интенсивность отказов изделия, если интенсивности отказов элементов имеют значения λ_1, λ_2 .

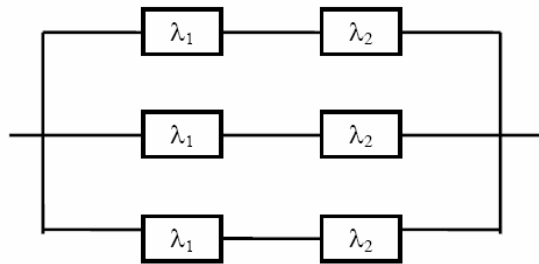


Рис. 4.7. Схема резервирования

Задача 4.12. Нерезервированная система управления состоит из $n = 4000$ элементов. Известна требуемая вероятность безотказной работы системы $P_c(t) = 0,9$ при $t = 100$ час. Необходимо рассчитать допустимую среднюю интенсивность отказов одного элемента, считая элементы равнонадежными, для того чтобы приближенно оценить достижение заданной вероятности безотказной работы при

отсутствии профилактических осмотров в следующих случаях: а) резервирование отсутствует; б) применено общее дублирование.

Задача 4.13. Устройство обработки состоит из трех одинаковых блоков. Вероятность безотказной работы устройства $P_y(t_i)$ в течение $(0, t_i)$ должна быть не менее 0,9. Определить, какова должна быть вероятность безотказной работы каждого блока в течение $(0, t_i)$ для случаев: а) резерв отсутствует; б) имеется пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всего устройства в целом; в) имеется пассивное раздельное резервирование с неизменной нагрузкой по блокам.

Задача 4.14. Вычислитель состоит из двух блоков, соединенных последовательно и характеризующихся соответственно интенсивностями отказов $\lambda_1 = 120,54 \cdot 10^{-6}$ 1/час и $\lambda_2 = 185,66 \cdot 10^{-6}$ 1/час. Выполнено пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всей системы (блока 1 и 2) (см.рис.4.8). Требуется определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ вычислителя, среднее время безотказной работы $m_{тс}$, частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ вычислителя. Определить $P_c(t)$ при $t = 20$ час.

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Резервирование замещением в режиме облегченного (теплого) резерва и в режиме ненагруженного (холодного) резерва.

Теоретические сведения.

В этом случае резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения в работу. Надежность резервного элемента в этом случае выше надежности основного элемента, так как резервные элементы находятся в режиме недогрузки до момента их включения в работу.

Вероятность отказа резервированной системы с облегченным резервированием определяется соотношением

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right], \quad (5.1)$$

где

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right). \quad (5.2)$$

Здесь λ_1 - интенсивность отказа резервного элемента в режиме недогрузки до момента включения его в работу; λ_0 - интенсивность отказа резервного элемента в состоянии работы; m - кратность резервирования или количество резервных элементов. Вероятность безотказной работы системы с облегченным резервированием определяется формулой

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right]. \quad (5.3)$$

Определим среднее время безотказной работы системы с облегченным резервированием. Имеем

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1 + ik}, \quad (5.4)$$

где

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (5.5)$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ системы с облегченным резервированием.

Имеем

$$f_c(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(i-1)!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^{i-1} \right]. \quad (5.6)$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы с облегченным резервированием.

Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \lambda_0 \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \frac{\sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(i-1)!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^{i-1}}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i} \right]. \quad (5.7)$$

При $\lambda_1 = 0$ имеем режим ненагруженного (холодного) резерва. Вероятность отказа резервированной системы с ненагруженным резервированием определяется соотношением

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \quad (5.8)$$

Вероятность безотказной работы системы с ненагруженным резервом определяется формулой

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \quad (5.9)$$

Определим среднее время безотказной работы системы с ненагруженным резервом. Имеем

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt = \frac{m+1}{\lambda_0}. \quad (5.10)$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ системы с ненагруженным резервом.

Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = \frac{\lambda_0^{m+1}}{m!} t^m e^{-\lambda_0 t}. \quad (5.11)$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы с ненагруженным резервом.

Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0^{m+1} t^m}{m! \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \quad (5.12)$$

Решение типовых задач.

Задача 5.1. Система состоит из 10 равнонадежных элементов, среднее время безотказной работы элемента $m_t = 1000$ час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы и основная и резервная системы равнонадежны. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы системы m_{tc} , а также частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ в момент времени $t = 50$ час в следующих случаях:

- нерезервированной системы,
- дублированной системы при включении резерва по способу замещения (ненагруженный резерв).

Решение:

$$a) \lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

где λ_c – интенсивность отказов системы, λ_i – интенсивность отказов i -го элемента; $n = 10$,

$$\lambda_i = \frac{1}{m_{ti}} = \frac{1}{1000} = 0.001; i = \overline{1, n}; \lambda = \lambda_i,$$

$$\lambda_c = \lambda n = 0.001 \cdot 10 = 0.01 \text{ 1/час},$$

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = 100 \text{ час}; p_c(t) = e^{-\lambda_c t};$$

$$f_c(t) = \lambda_c(t) \cdot p_c(t); \lambda_c(50) = \lambda_c;$$

$$f_c(50) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = 0.01 \cdot e^{-0.01 \cdot 50} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час};$$

$$\lambda_c(50) = 0.01 \text{ 1/час}.$$

$$a) m_{tc} = \frac{m+1}{\lambda_c}; m=1;$$

$$m_{tc} = \frac{2}{0.01} = 200 \text{ час.}$$

Определяем $P_c(t)$ по формуле

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t).$$

Так как $\lambda_0 = \lambda_c$, то

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t).$$

Определяем $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = -\left[-\lambda_c e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t) + \lambda_c e^{-\lambda_c t}\right] = \lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}.$$

Определяем $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}}{e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t)} = \frac{\lambda_c^2 t}{1 + \lambda_c t}.$$

Определяем $P_c(50)$, $f_c(50)$, $\lambda_c(50)$. Имеем

$$p_c(50) = e^{-0.01 \cdot 50} (1 + 0.01 \cdot 50) = e^{-0.5} \cdot 1.5 = 0.6065 \cdot 1.5 \approx 0.91,$$

$$f_c(50) = 0.01^2 \cdot 50 \cdot e^{-0.01 \cdot 50} = 0.01 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час,}$$

$$\lambda_c(50) = \frac{f_c(50)}{p_c(50)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0.91} \approx 3.3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час.}$$

Задача 5.2. Радиопередатчик имеет интенсивность отказов $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного передатчика в режиме ожидания (в режиме облегченного резерва). В этом режиме интенсивность отказов передатчика $\lambda_1 = 0,06 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Требуется вычислить вероятность безотказной работы передающей системы в течение времени $t = 100$ час., а также среднее время безотказной работы m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования $m = 1$. Используя формулу (5.3), получим

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^1 \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right] = e^{-\lambda_0 t} \left[1 + a_1 (1 - e^{-\lambda_1 t}) \right];$$

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right); a_1 = \prod_{j=0}^0 \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Тогда

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right). \quad (5.13)$$

Из (5.13) имеем

$$p_c(100) = e^{-0.4 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \left(1 + \frac{0.4 \cdot 10^{-3}}{0.06 \cdot 10^{-3}} - \frac{0.4 \cdot 10^{-3}}{0.06 \cdot 10^{-3}} e^{-0.06 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \right) =$$

$$= e^{-0.04} \left(1 + \frac{40}{6} - \frac{40}{6} e^{-0.006} \right) \approx 0.96 [1 + 6.67 - 6.67(1 -$$

0.006)] ≈ 0.998 .

Определим m_{tc} по формуле (5.4). Получим

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^1 \frac{1}{1 + i \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right) = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} \right) =$$

$$= \frac{1}{0.4 \cdot 10^{-3}} \left(1 + \frac{0.4 \cdot 10^{-3}}{0.46 \cdot 10^{-3}} \right) = 4668 \text{ час.}$$

Определим $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = -\left[-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) + e^{-\lambda_0 t} \lambda_0 e^{-\lambda_1 t} \right] =$$

$$= \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t} \right] = \lambda_0 \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t} (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

Перепишем (5.13) в виде

$$p_c(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \right)$$

Определим $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0 (1 - e^{-\lambda_1 t})}{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} e^{-\lambda_1 t}}$$

Задача 5.3. Вероятность безотказной работы преобразователя постоянного тока в переменный в течении времени $t=1000$ час. равна 0,95, т. е. $P(1000) = 0,95$. Для повышения надежности системы электроснабжения на объекте имеется такой же преобразователь, который включается в работу при отказе первого (режим ненагруженного резерва). Требуется рассчитать вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы системы, состоящей из двух преобразователей, а также определить частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы.

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования $m = 1$. Используя формулу (5.9), получим

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t) \quad (5.14)$$

Так как для отдельного преобразователя имеет место экспоненциальный закон надежности, то

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad (5.15)$$

где $P(t)$ - вероятность безотказной работы преобразователя; λ_0 - интенсивность отказов преобразователя в состоянии работы.

Из (5.15) имеем

$$P(1000) = e^{-\lambda_0 * 1000} = 0,95.$$

Из приложения П.7.14 [1] получим

$$\lambda_0 * 1000 = 0,051,$$

откуда

$$\lambda_0 = 0,051 / 1000 \approx 0,5 * 10^{-4} \text{ 1/час.}$$

Тогда из (5.14) имеем

$$P_c(1000) = 0,95(1 + 0,05) = 0,9975.$$

Определим $m_{тс}$ по формуле (5.10). Получим

$$m_{тс} = (m+1)/\lambda_0 = 2/\lambda_0 = 2/(0,5 * 10^{-4}) = 40000 \text{ час.}$$

Отметим, что среднее время безотказной работы нерезервированного преобразователя равно

$$m_{тс} = 1/\lambda_0 = 20000 \text{ час.}$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ по формуле (5.11).

Имеем

$$f_c(t) = \frac{\lambda_0^2}{1!} t e^{-\lambda_0 t} = \lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}.$$

Определим $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0^2 t \cdot e^{-\lambda_0 t}}{e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t)} = \frac{\lambda_0^2 t}{1 + \lambda_0 t}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 5.4. Система состоит из двух одинаковых элементов. Для повышения ее надежности конструктор предложил дублирование системы по способу замещения с ненагруженным состоянием резерва (рис.5.1). Интенсивность отказов элемента равна λ . Требуется определить вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы $m_{тс}$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

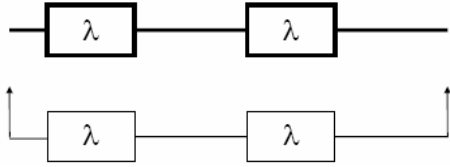


Рис. 5.1. Схема резервирования

Задача 5.5. Схема расчета надежности изделия приведена на рис.5.2. Необходимо определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ изделия. Найти $\lambda_c(t)$ при $t = 0$.

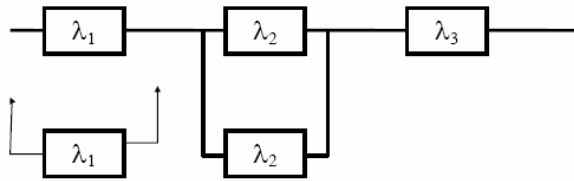


Рис. 5.2. Схема резервирования

Задача 5.6. Схема расчета надежности системы приведена на рис.5.3, где А, Б, В, Г - блоки системы. Определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ системы.

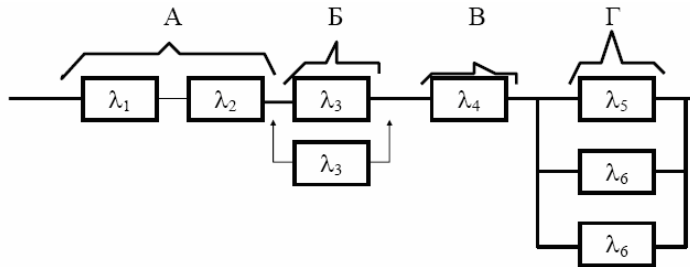


Рис. 5.3. Схема резервирования

Задача 5.7. Схема расчета надежности системы приведена на рис.5.4. Определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ системы.

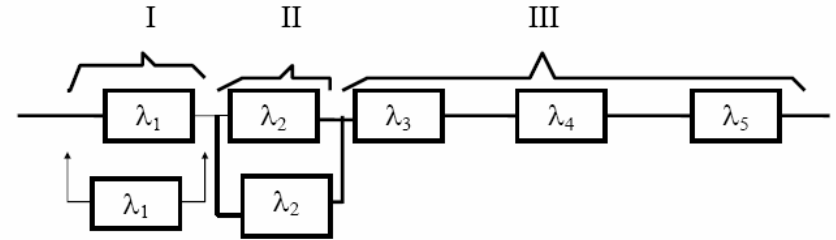


Рис. 5.4. Схема резервирования

Задача 5.8. Передающее устройство состоит из одного работающего передатчика ($\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час) и одного передатчика в облегченном резерве ($\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ 1/час). Требуется определить вероятность безотказной работы устройства $P_c(t)$, среднее время безотказной работы устройства m_{tc} . Определить $P_c(t)$ при $t = 20$ час.

Задача 5.9. В радиопередающем канале связи системы используется основной передатчик Π_1 , два передатчика Π_2 и Π_3 , находящиеся в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов основного работающего передатчика равна $\lambda_0 = 10^{-3}$ 1/час. С момента отказа передатчика Π_1 в работу включается Π_2 , после отказа передатчика Π_2 включается Π_3 . При включении резервного передатчика в работу его интенсивность отказов становится равной λ_0 . Считая переключатель абсолютно надежным, определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ радиопередающего канала, среднее время безотказной работы m_{tc} канала. Определить также $P_c(t)$ при $t = 100$ час.

Задача 5.10. Устройство автоматического поиска неисправностей состоит из двух логических блоков. Среднее

время безотказной работы этих блоков одинаково и для каждого из них равно $m_i = 200$ час. Требуется определить среднее время безотказной работы устройства $m_{тс}$ для двух случаев: а) имеется ненагруженный резерв всего устройства; б) имеется ненагруженный резерв каждого блока.

6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Расчет надежности системы с поэлементным резервированием.

Теоретические сведения

При поэлементном резервировании резервируются отдельно элементы системы (рис.6.1.).

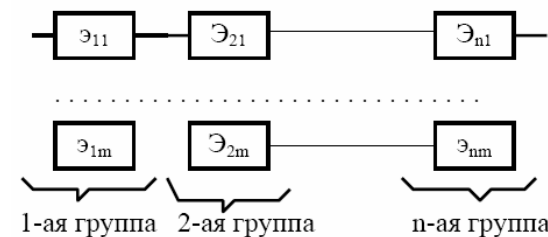


Рис. 6.1. Схема резервирования

Определим количественные характеристики надежности системы.

Запишем вероятность отказа i - ой группы. Имеем

$$q_i(t) = \prod_{j=1}^{m_i} q_{ij}(t); i = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

где $q_{ij}(t)$ - вероятность отказа элемента Э_{ij} на интервале времени (0, t).

Запишем вероятность безотказной работы j-ой группы. Получим

$$p_i(t) = 1 - q_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m_i} [1 - p_{ij}(t)]; i = \overline{1, n}, \quad (6.2)$$

где $P_{ij}(t)$ - вероятность безотказной работы элемента \mathcal{E}_{ij} на интервале времени $(0,t)$; m_i - кратность резервирования элемента j -ой группы.

Запишем вероятность безотказной работы системы с поэлементным резервированием

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t)$$

или

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=0}^{m_i} [1 - p_{ij}(t)] \right\}. \quad (6.3)$$

Для равнонадежных элементов системы и $m_i=m=\text{const}$ имеем

$$P_{ij}(t)=P(t); \quad (6.4)$$

$$P_c(t)=[1-[1-P(t)]^{m+1}]^n. \quad (6.5)$$

Если

$$P_{ij}(t)=P_i(t), \quad (6.6)$$

то формула (6.3) примет вид

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - [1 - p_i(t)]^{m_i+1} \right\}. \quad (6.7)$$

При экспоненциальном законе надежности, когда $P_i(t)=e^{-\lambda_i t}$,

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - [1 - e^{-\lambda_i t}]^{m_i+1} \right\} \quad (6.8)$$

В этом случае формула (6.5) примет вид

$$p_c(t) = \left\{ 1 - [1 - e^{-\lambda t}]^{m+1} \right\}^n, \quad (6.9)$$

а среднее время безотказной работы системы определяется соотношением

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt. \quad (6.10)$$

Подставляя (6.9) в (6.10), получим

$$m_{ic} = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{j=0}^m \frac{1}{v_j(v_j+1)\dots(v_j+n-1)}, \quad (6.11)$$

где $v_j=(j+1)/(m+1)$.

Решение типовых задач

Задача 6.1. Для повышения надежности усилителя все его элементы дублированы. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы. Необходимо найти вероятность безотказной работы усилителя в течение $t=5000$ час. Состав элементов нерезервированного усилителя и данные по интенсивности отказов элементов приведены в табл.6.1.

Таблица 6.1.

Элементы	Количество элементов	Интенсивность отказов элемента $\lambda, 10^{-5}$ 1/час
Транзисторы	1	2,16
Резисторы	5	0,23
Конденсаторы	3	0,32
Диоды	1	0,78
Катушки индуктивности	1	0,09

Решение. В рассматриваемом случае имеет место раздельное резервирование с кратностью $m_i = m = 1$, число элементов нерезервированного усилителя $n = 11$. Тогда, используя данные табл.6.1., на основании формулы (6.8) получим

$$p_c(5000) = \prod_{i=1}^{11} \left\{ 1 - [e^{-\lambda_i \cdot 5000}]^2 \right\}$$

Так как $\lambda_i \ll 1$, то для приближенного вычисления показательную функцию можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами разложения: $1 - \exp(-5000\lambda_i) \approx 5000\lambda_i$.

Тогда

$$p_c(5000) \approx \prod_{i=1}^{11} [1 - (5000\lambda_i)^2] \approx 1 - \sum_{i=1}^{11} (5000\lambda_i)^2 = 1 - 5000^2 \cdot \sum_{i=1}^{11} \lambda_i^2 =$$

$$= 1 - 25 \cdot 10^{-6} [2.16^2 + 5 \cdot 0.23^2 + 3 \cdot 0.32^2 + 0.78^2 + 0.09^2] \cdot 10^{10} \approx$$

$$\approx 0.985.$$

Задача 6.2. Схема расчета надежности резервированного устройства приведена на рис.6.2.

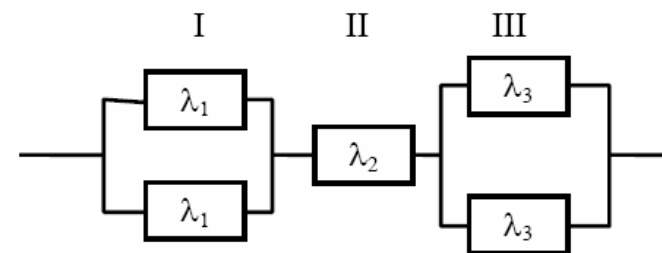


Рис. 6.2. Схема резервирования

Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения: $\lambda_1 = 0,23 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\lambda_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ 1/час; $\lambda_3 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы. Необходимо найти среднее время безотказной работы устройства, вероятность безотказной работы устройства, интенсивность отказов устройства.

Решение.

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt. \quad (6.12)$$

где $P_c(t)$ - вероятность безотказной работы устройства. Очевидно

$$P_c(t) = P_I(t) * P_{II}(t) * P_{III}(t) \quad (6.13)$$

Здесь $P_I(t)$, $P_{II}(t)$, $P_{III}(t)$ - вероятность безотказной работы I, II и III группы элементов. Имеем

$$P_I(t) = 1 - q_I(t); \quad q_I(t) = [1 - P_I(t)]^2;$$

$$P_I(t) = 1 - [1 - P_I(t)]^2 = 2P_I(t) - P_I^2(t);$$

$$P_{II}(t) = P_2(t);$$

$$P_{III}(t) = 1 - q_{III}(t); \quad q_{III}(t) = [1 - P_3(t)]^2;$$

$$P_{III}(t) = 1 - [1 - P_3(t)]^2 = 2P_3(t) - P_3^2(t).$$

Из (6.13) имеем

$$P_c(t) = [2P_1(t) - P_1^2(t)]P_2(t) [2P_3(t) - P_3^2(t)] = \\ = 4P_1(t)P_2(t)P_3(t) - 2P_1^2(t)P_2(t)P_3(t) - 2P_1(t)P_2(t)P_3^2(t) + P_1^2(t)P_2(t)P_3^2(t).$$

Так как $P_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$; $P_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$; $P_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$, то

$$P_c(t) = 4e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - 2e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t} + e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t}$$

или

$$P_c(t) = 4e^{-0,68*0,001*t} - 2e^{-0,91*0,001*t} - 2e^{-1,08*0,001*t} + e^{-1,31*0,001*t}. \quad (6.14)$$

Подставляя (6.14) в (6.12), получим

$$m_{tc} = \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3} + \frac{1}{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}$$

или

$$m_{tc} = \frac{4}{10^{-3}(0,23 + 0,05 + 0,4)} - \frac{2}{10^{-3}(0,46 + 0,05 + 0,4)} - \frac{2}{10^{-3}(0,23 + 0,05 + 0,8)} + \frac{1}{10^{-3}(0,46 + 0,05 + 0,8)} \approx 2590$$

час.

Известно, что

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p(t)}. \quad (6.15)$$

Определим $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - \\ - 2(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - \\ - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t} + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t}$$

или

$$f_c(t) = 10^{-3}(2,72e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 1,82e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2,16e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + \\ + 1,31e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t}).$$

Из (6.15) получим

$$\lambda_c(t) = \frac{10^{-3}(2,72e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 1,82e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2,16e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + 1,31e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t})}{4e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 2e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t}}$$

Задача 6.3. Схема расчета надежности устройства приведена на рис. 6.3. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности, для элементов устройства и все элементы устройства равнонадежны. Интенсивность отказов элемента $\lambda = 1,33 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Требуется определить $f_c(t)$, m_{tc} , $P_c(t)$, $\lambda_c(t)$ резервированного устройства.

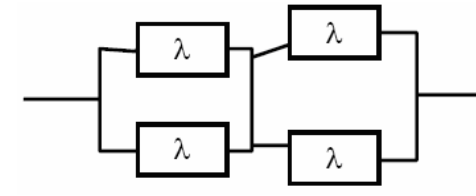


Рис. 6.3. Схема резервирования

Решение

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt; \quad (6.17)$$

$$P_c(t) = P_I(t) * P_{II}(t) = P_I^2(t), \quad \text{т.к. } P_I(t) = P_{II}(t);$$

$$P_I(t) = 1 - q_I(t); \quad q_I(t) = q^2(t); \quad q(t) = 1 - P(t); \quad P(t) = e^{-\lambda t};$$

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad q_I(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2; \quad P_I(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2;$$

$$P_c(t) = [1 - (1 - e^{-\lambda t})^2]^2$$

или

$$P_c(t) = (1 - 1 + 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})^2 = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.18) в (6.17), получим

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} (4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}) dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = \frac{11}{12\lambda};$$

$$m_{ic} = \frac{11}{12 \cdot 1.33 \cdot 10^{-3}} = 690 \text{ час.}$$

Определим $f_c(t)$, Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 8\lambda e^{-2\lambda t} - 12\lambda e^{-3\lambda t} + 4\lambda e^{-4\lambda t} = 4\lambda e^{-2\lambda t} (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}).$$

Определим $\lambda_c(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_c(t) &= \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{4\lambda \cdot e^{-2\lambda t} (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})}{e^{-2\lambda t} (4 - 4e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})} = \\ &= \frac{4\lambda \cdot (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})}{(2 - e^{-\lambda t})^2} = \frac{4\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \cdot (2 - e^{-\lambda t})}{(2 - e^{-\lambda t})^2} = \\ &= \frac{4\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t})}{2 - e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Задача 6.4. Нерезервированная система управления состоит из $n=5000$ элементов. Для повышения надежности системы предполагается провести раздельное дублирование элементов. Чтобы приблизительно оценить возможность достижения заданной вероятности безотказной работы системы $P_c(t) = 0,9$ при $t = 10$ час, необходимо рассчитать среднюю интенсивность отказов одного элемента при предположении отсутствия последствия отказов.

Решение. Вероятность безотказной работы системы при раздельном дублировании и равнонадежных элементах равна:

$$p_c(t) = \{1 - [1 - p(t)]^2\}^n,$$

где $P(t)$ - вероятность безотказной работы одного элемента.

Так как должно быть

$$\{1 - [1 - p(t)]^2\}^n \geq 0.9,$$

то

$$p(t) \geq 1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{0.9}}.$$

Разложив $\sqrt[n]{0.9} = (1 - 0.1)^{1/n}$ по степени $1/n$ в ряд и пренебрегая членами ряда высшего порядка малости, получим

$$(1 - 0.1)^{1/5000} \approx 1 - \frac{1}{5000} \cdot 0.1 = 1 - 2 \cdot 10^{-5}.$$

Учитывая, что $P(t) = \exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t$, интенсивность отказов элемента должна быть

$$\lambda \leq \frac{1}{t} \sqrt{1 - \sqrt[n]{0.9}} = \frac{1}{10} \sqrt{1 - 1 + 2 \cdot 10^{-5}} \approx 4.4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.5. Схема расчета надежности устройства показана на рис.6.4. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов устройства. Интенсивности отказов элементов имеет следующие значения $\lambda_1 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ 1/час, $\lambda_2 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ 1/час.

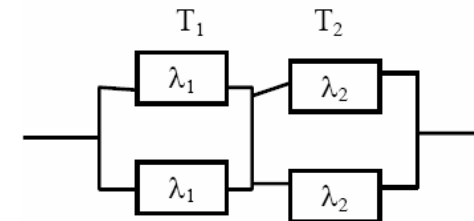


Рис. 6.4. Схема резервирования

Необходимо определить вероятность безотказной работы устройства в течении времени $t = 100$ час.

Задача 6.7. В телевизионном канале связи, состоящем из приемника и передатчика, применено раздельное дублирование передатчика и приемника. Передатчик и приемник имеют интенсивности отказов $\lambda_{\text{п}}=2 \cdot 10^{-3}$ 1/час и $\lambda_{\text{пр}}=1 \cdot 10^{-3}$ 1/час соответственно. Схема канала представлена на рис.6.5. Требуется определить вероятность безотказной работы канала $P_c(t)$, среднее время безотказной работы $m_{\text{тс}}$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

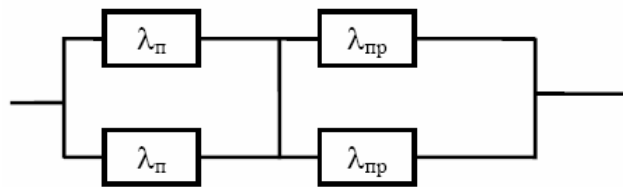


Рис. 6.5. Схема резервирования

Задача 6.8. Схема расчета надежности системы приведена на рис.6.6., где также приведены интенсивности отказов элементов. Требуется определить вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$ и частоту отказов $f_c(t)$.

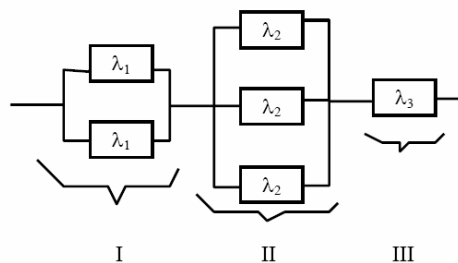


Рис. 6.6. Схема резервирования

Задача 6.9. Радиоэлектронная аппаратура состоит из трех блоков: I, II и III. Интенсивности отказов для этих трех блоков соответственно равны: λ_1 , λ_2 , λ_3 . Требуется определить

вероятность безотказной работы аппаратуры $P_c(t)$ для следующих случаев:

- а) резерв отсутствует
- б) имеется дублирование каждого блока.

Задача 6.10. Нерезервированная система управления состоит из $n=4000$ элементов. Известна требуемая вероятность безотказной работы системы $P_c(t)=0,9$ при $t=100$ час. Необходимо рассчитать допустимую среднюю интенсивность отказов одного элемента, считая элементы равнонадежными, для того чтобы приблизительно оценить достижение заданной вероятности безотказной работы при отсутствии профилактических осмотров в следующих случаях. а) резервирование отсутствует; б) применено раздельное (поэлементное) дублирование.

Задача 6.11. В радиопередатчике, состоящем из трех равнонадежных каскадов ($n=3$) применено раздельное дублирование каждого каскада. Интенсивность отказов каскадов равна $\lambda=5 \cdot 10^{-4}$ 1/час. Рассчитать вероятность безотказной работы $P_c(t)$ в течение времени $t=100$ час и среднее время безотказной работы $m_{\text{тс}}$ радиопередатчика.

Задача 6.12. Вычислитель состоит из двух блоков, соединенных последовательно и характеризуется соответственно интенсивностями отказов $\lambda_1=120,54 \cdot 10^{-6}$ 1/час и $\lambda_2=185,66 \cdot 10^{-6}$ 1/час.

Выполнено пассивное поэлементное резервирование с неизменной нагрузкой блока 2 (см. рис. 6.8). Требуется определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ вычислителя, среднее время безотказной работы $m_{\text{тс}}$, частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ вычислителя. Определить $P_c(t)$ при $t=20$ час.

Задача 6.13. Вычислительное устройство состоит из $n=3$ одинаковых блоков, к каждому из которых подключен блок в нагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого блока равна $\lambda=10^{-4}$ 1/час. Требуется определить вероятность

безотказной работы $P_c(t)$ устройства и среднее время безотказной работы устройства $m_{тс}$.

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Резервирование с дробной кратностью и постоянно включенным резервом.

Теоретические сведения.

Резервированная система состоит из l отдельных систем (рис. 7.1). Для ее нормальной работы необходимо, чтобы исправными были не менее чем h систем. Кратность резервирования такой системы равна

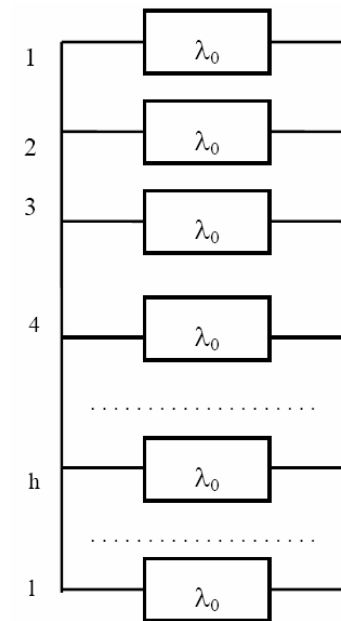


Рис. 7.1. Схема резервирования

$$m = \frac{l - h}{h} . \quad (7.1)$$

Предполагается, что основные и все резервные системы равнонадежны. Вероятность безотказной работы резервированной системы:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{l-h} C_l^i P_0^{l-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j P_0^j(t),$$

где

$$C_l^i = \frac{l!}{i!(l-i)!}. \quad (7.2)$$

Здесь $P_0(t)$ - вероятность безотказной работы основной системы или любой резервной системы; l - общее число основных и резервных систем; h - число систем, необходимых для нормальной работы.

На рис. 7.1 λ_0 есть интенсивность отказов любой одной из систем. Будем предполагать, что для любой отдельно взятой системы справедлив экспоненциальный закон надежности, т.е.

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}. \quad (7.3)$$

Определим среднее время безотказной работы системы. Имеем

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{l-h} \frac{1}{h+i}. \quad (7.4)$$

Решение типовых задач.

Задача 7.1. Система электроснабжения радиостанции состоит из четырех генераторов, номинальная мощность

каждого из которых 18 кВт. Безаварийная работа блока еще возможна, если система электроснабжения может обеспечивать потребителя мощностью 30 кВт. Необходимо определить вероятность безотказной работы системы энергоснабжения в течение времени $t = 600$ час, среднее время безотказной работы m_{ic} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы энергоснабжения, если интенсивность отказов каждого из генераторов $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ 1/час.

Решение. Мощности двух генераторов достаточно для питания радиостанции, так как их суммарная мощность составляет 36 кВт. Это означает, что отказ системы электроснабжения еще не наступит, если откажут один или два любых генератора, т.е. имеет место случай резервирования с дробной кратностью $m = 2/2$ при общем числе устройств, равном 4. На основании формулы (7.2) имеем

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^2 C_4^i P_0^{4-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j P_0^j(t) = \\ = C_4^0 P_0^4(t) C_0^0 P_0^0(t) + C_4^1 P_0^3(t) \cdot [C_1^0 P_0^0(t) - C_1^1 P_0^1(t)] + \\ + C_4^2 P_0^2(t) \cdot [C_2^0 P_0^0(t) - C_2^1 P_0^1(t) + C_2^2 P_0^2(t)]$$

Так как

$$C_4^0=1; C_0^0=1; C_4^1=4; C_1^0=1; C_1^1=1; C_4^2=6; C_2^0=1; C_2^1=2; C_2^2=1,$$

то

$$P_c(t) = 6P_0^2(t) - 8P_0^3(t) + 3P_0^4(t).$$

Так как $P_0(t) = \exp(-\lambda_0 t)$, то

$$P_c(t) = 6e^{-2\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 3e^{-4\lambda t}.$$

Для данных нашей задачи $\lambda t = 0,09$. Тогда

$$P_c(600) = 0,997.$$

Среднее время безотказной работы на основании формулы (7.4) будет

$$m_{ic} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{2+i} = \frac{13}{12\lambda} \approx 7220 \text{ час.}$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 12\lambda e^{-2\lambda t} - 24\lambda \cdot e^{-3\lambda t} + 12\lambda \cdot e^{-4\lambda t}.$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{12\lambda \cdot (1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})}{6 - 8e^{-\lambda t} + 3e^{-2\lambda t}}$$

Задача 7.2. Для повышения точности измерения некоторой величины применена схема группирования приборов из пяти по три, т.е. результат измерения считается верным по показанию среднего (третьего) прибора. Требуется найти вероятность безотказной работы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы m_{tc} такой системы, а также частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы, если интенсивность отказов каждого прибора $\lambda = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/час.

Решение. В данном случае измерительная система отказывает в том случае, если откажут из пяти приборов три и более, т.е. имеет место общее резервирование дробной кратности, когда общее число приборов $l = 5$, число приборов, необходимых для нормальной работы, $h = 3$, а кратность резервирования $m = 2/3$.

Используя формулу (7.2), получаем

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{l-h} C_l^i P_0^{l-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j P_0^j(t) = \sum_{i=0}^2 C_5^i P_0^{5-i}(t) \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j P_0^j(t) = C_5^0 P_0^5(t) \cdot C_0^0 P_0^0(t) + C_5^1 P_0^4(t) [C_1^0 P_0^0(t) - C_1^1 P_0^1(t)] + C_5^2 P_0^3(t) [C_2^0 P_0^0(t) - C_2^1 P_0^1(t) + C_2^2 P_0^2(t)]$$

Так как $C_5^0=1; C_0^0=1; C_5^1=5; C_1^0=1; C_1^1=1; C_5^2=10; C_2^0=1; C_2^1=2; C_2^2=1,$

то $P_c(t) = P_0^5(t) + 5P_0^4(t)[1 - P_0(t)] + 10P_0^3(t)[1 - 2P_0(t) + P_0^2(t)] = 6P_0^5(t) - 15P_0^4(t) + 10P_0^3(t)$.
Так как $P_0(t) = \exp(-\lambda t)$, то $P_c(t) = 6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}$.
Среднее время безотказной работы на основании формулы (7.4) будет $m_{tc} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{3+i} = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{47}{60\lambda} = 1958$ час.

Определим частоту отказов $f_c(t)$. Имеем $f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -30\lambda \cdot e^{-5\lambda t} - 60\lambda \cdot e^{-4\lambda t} + 30\lambda \cdot e^{-3\lambda t} = 30\lambda e^{-3\lambda t} (e^{-2\lambda t} - 2e^{-\lambda t} + 1) = 30\lambda e^{-3\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2$.
Определим $\lambda_c(t)$. Получим $\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{30\lambda (1 - e^{-\lambda t})^2}{6e^{-2\lambda t} - 15e^{-\lambda t} + 10}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.3. Интенсивность отказов измерительного прибора $\lambda = 0,83 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Для повышения точности измерения применена схема группирования из трех по два ($m=1/2$). Необходимо определить вероятность безотказной работы схемы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы схемы m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ схемы.

Задача 7.4. Интенсивность отказов измерительного прибора $\lambda = 0,83 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Для повышения точности измерения применена схема группирования из пяти по три ($m=2/3$). Необходимо определить вероятность безотказной работы схемы $P_c(t)$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ схемы.

Задача 7.5. Автомобильный двигатель имеет $l=4$ свечи зажигания по одной на каждый цилиндр. Интенсивность отказов свечи $\lambda=10^{-3}$ 1/час, а длительность работы двигателя в течение всего путешествия $t=20$ час. Предполагается, что автомобиль может ехать также при одном неработающем цилиндре. Необходимо определить вероятность безотказной работы двигателя $P_c(t)$, среднее время безотказной работы двигателя m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ двигателя. Какова вероятность того, что автомобиль доставит туристов в пункт назначения без замены свечей?

Задача 7.6. В вычислительном устройстве применено резервирование с дробной кратностью “один из трех”. Интенсивность отказов одного нерезервированного блока равна: $\lambda_0=4 \cdot 10^{-3}$ 1/час.

Требуется рассчитать вероятность безотказной работы устройства $P_c(t)$ и среднее время безотказной работы m_{tc} резервированного вычислительного устройства.

8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Скольльзящее резервирование при экспоненциальном законе надежности.

Теоретические сведения.

Вероятность безотказной работы резервированной системы определяется соотношением

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \cdot \sum_{i=0}^{m_0} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}, \quad (8.1)$$

где $\lambda_0 = \lambda n$ - интенсивность отказов нерезервированной системы;

λ - интенсивность отказа элемента, n - число элементов основной системы; m_0 - число резервных элементов, находящихся в ненагруженном резерве.

В этом случае кратность резервирования

$$m = m_0 / n. \quad (8.2)$$

Среднее время безотказной работы резервированной системы определяется формулой

$$m_{tc} = T_0 (m_0 + 1), \quad (8.3)$$

где T_0 - среднее время безотказной работы нерезервированной системы.

Решение типовых задач.

Задача 8.1. Система состоит из двух одинаковых элементов. Для повышения ее надежности конструктор предложил скольльзящее резервирование при одном резервном

элементе, находящемся в ненагруженном состоянии (рис. 8.1). Интенсивность отказов элемента равна λ . Требуется найти вероятность безотказной работы $P_c(t)$ резервированной системы, среднее время безотказной работы m_{tc} системы, а также частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ резервированной системы.

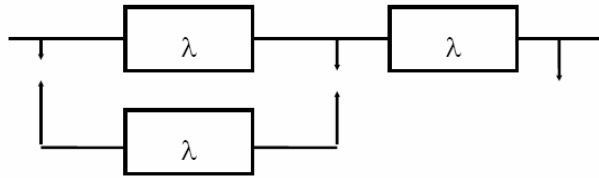


Рис. 8.1. Схема резервирования

Решение. В рассматриваемом случае $n = 2$; $m_0 = 1$; $\lambda_0 = n\lambda = 2\lambda$.

На основании формулы (8.1) имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \cdot \sum_{i=0}^1 \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t)$$

или

$$P_c(t) = e^{-2\lambda t} (1 + 2\lambda t).$$

Определим m_{tc} . Получим

$$m_{tc} = T_0 (m_0 + 1); T_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

или

$$m_{tc} = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot 2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -\left[-2 \cdot \lambda \cdot e^{-2\lambda t} (1 + 2 \cdot \lambda \cdot t) + \right. \\ \left. + 2 \cdot \lambda \cdot e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \right]$$

или

$$f_c(t) = 4 \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-2 \lambda \cdot t}.$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{4 \cdot \lambda^2 \cdot t}{1 + 2 \cdot \lambda \cdot t}.$$

Задача 8.2. Цифровая вычислительная машина состоит из 1024 однотипных ячеек и сконструирована так, что есть возможность заменить любую из отказавших ячеек. В составе ЗИП имеется 3 ячейки, каждая из которых может заменить любую отказавшую. Требуется определить вероятность безотказной работы ЦВМ $P_c(t)$, среднее время безотказной работы m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Также требуется определить $P_c(t)$ при $t=10000$ час. Известно, что интенсивность отказов ячейки $\lambda=0.12 \cdot 10^{-6}$ 1/час. Под отказом будем понимать событие, когда ЦВМ не может работать из-за отсутствия ЗИПа, т.е. когда весь ЗИП израсходован и отказала еще одна ячейка памяти ЦВМ.

Решение. Так как любая ячейка из состава ЗИПа может заменить любую отказавшую ячейку ЦВМ, то имеет место “скользящее” резервирование. В нашем случае число элементов основной системы $n=1024$, интенсивность отказов нерезервированной системы $\lambda_0=n\lambda=1024 \cdot 0.12 \cdot 10^{-6} \approx 1.23 \cdot 10^{-4}$ 1/час, число резервных элементов $m_0=3$. На основании формулы (8.1) имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^3 \frac{(\lambda_0 \cdot t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} \cdot \left(1 + \lambda_0 \cdot t + \frac{\lambda_0^2 \cdot t^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0^3 \cdot t^3}{6} \right).$$

Определим m_{tc} . Получим

$$m_{ic} = T_0 \cdot (m_0 + 1); T_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

или

$$m_{ic} = \frac{1}{1,23 \cdot 10^{-4}} (3 + 1) \approx 32500 \text{ час.}$$

определим частоту отказов $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = \frac{1}{6} \cdot \lambda_0^4 \cdot t^3 \cdot e^{-\lambda_0 \cdot t}.$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda_0^4 \cdot t^3}{1 + \lambda_0 \cdot t + \frac{\lambda_0^2 \cdot t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 \cdot t^3}{6}}.$$

Определим $P_c(t)$ при $t=10000$ час. Имеем

$$P_c(t) = e^{-1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{1 + 1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 + \frac{(1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4)^2}{2} + \frac{(1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4)^3}{6}}{1 + 1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 + \frac{(1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4)^2}{2} + \frac{(1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4)^3}{6}} \right] \approx 0,96.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.3. Машина состоит из 1024 стандартных ячеек и множества других элементов. В ЗИПе имеется еще две однотипные ячейки, которые могут заменить любую из отказавших. Все элементы, кроме указанных ячеек, идеальные в смысле надежности. Известно, что интенсивность отказов ячеек есть величина постоянная, а среднее время безотказной работы машины с учетом двух запасных ячеек $m_{ic}=60$ час. Предполагается, что машина допускает короткий перерыв в работе на время отказавших ячеек. Требуется определить среднее время безотказной работы одной ячейки $m_i=m_{ib}$, $i=1,1024$. Определить вероятность безотказной работы резервированной системы $P_c(t)$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ резервированной системы.

Задача 8.4. Система состоит из n однотипных элементов, каждый из которых имеет среднее время безотказной работы $m_{ii}=m_i=1/\lambda$, $i=1, n$. Для повышения надежности применено скользящее резервирование, при котором m_0 резервных элементов находятся в ненагруженном режиме. Необходимо найти среднее время безотказной работы резервированной системы m_{ic} . Определить вероятность безотказной работы резервированной системы $P_c(t)$, если $m_0=2$, а также частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ резервированной системы.

Задача 8.5. Бортовая аппаратура спутника включает в себя аппаратуру связи, командную и телеметрическую системы, систему питания и систему ориентации. Аппаратура связи состоит из двух работающих ретрансляторов и одного ретранслятора в ненагруженном резерве. Переключающее устройство предполагается абсолютно надежным. Командная система имеет постоянное резервирование. Системы питания, ориентации и телеметрии резерва не имеют. Заданы интенсивности отказа: каждого комплекта ретранслятора - λ_1 , командной системы - λ_2 , системы телеметрии - λ_3 , системы питания - λ_4 и системы ориентации - λ_5 . Требуется определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ бортовой аппаратуры спутника. Логическая схема для расчета надежности бортовой аппаратуры спутника представлена на рис. 8.2. Здесь I - аппаратура ретранслятора, II - командная система, III - остальные системы.

Задача 8.6. Блок усилителей промышленной частоты включает в себя $n=4$ последовательно соединенных усилителя и один усилитель в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого работающего усилителя $\lambda=6 \cdot 10^{-4}$ 1/час.

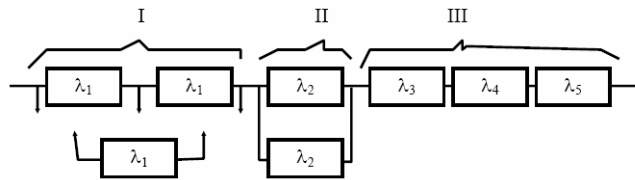


Рис. 8.2. Схема бортовой аппаратуры спутника

Определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ резервированной системы, среднее время безотказной работы m_{tc} системы, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Определить также $P_c(t)$ при $t = 100$ час.

Задача 8.7. Блок телеметрии включает в себя два одинаковых приемника. Интенсивность отказов каждого приемника составляет $\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$ 1/час. Имеется один приемник в ненагруженном скользящем резерве. Определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ резервированной системы, среднее время безотказной работы m_{tc} системы, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$. Определить $P_c(t)$ при $t = 250$ час. Определить $P_c(t)$, когда резерв отсутствует.

9. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Расчет показателей надежности резервированных устройств с учетом восстановления.

Теоретические сведения.

Резервирование, при котором возможно восстановление отказавших элементов, является эффективным средством повышения надежности. Отказ резервированной группы с восстановлением произойдет, если все элементы, составляющие группу, ремонтируются.

При резервировании с восстановлением резерв как бы все время пополняется восстанавливаемыми блоками.

Показатели надежности, как правило, определяются при условии, что в момент включения все элементы работоспособны.

Наиболее часто используются два метода расчета надежности восстанавливаемых систем, которые условно называются: метод интегральных уравнений и метод дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать в дальнейшем 2-ой метод. В методе дифференциальных уравнений использовано допущение о показательных распределениях времени между отказами и времени восстановления.

Вначале перечисляются возможные состояния системы и составляется ее математическая (логическая) модель в виде схемы состояний, на которой прямоугольниками или кружками изображаются возможные состояния и стрелками - возможные направления переходов из одного состояния в другое. По схеме состояний составляют систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний.

Для этого целесообразно использовать следующие правила:

- левые части уравнений содержат производные по времени вероятностей соответствующих состояний $\dot{P}_j(t)$, а каждый член правой части уравнения получается путем умножения интенсивности перехода, стоящей над стрелкой, связанной с данным состоянием, на соответствующую вероятность состояния;

- знак зависит от направления стрелки (плюс, если стрелка направлена острием к состоянию, и минус в противном случае);

- число уравнений равно числу состояний; система дифференциальных уравнений должна быть дополнена нормировочным условием, состоящем в том, что сумма вероятностей всех состояний равна единице.

Решение системы дифференциальных уравнений с помощью преобразований Лапласа или каким-либо другим методом позволяет определить требуемые показатели надежности.

Когда перерывы в работе системы допустимы, в качестве показателей надежности используют функцию готовности $K_c(t)$ и функцию простоя $K_n(t)$ или коэффициенты готовности K_c и простоя K_n определяемые в виде

$$K_{\Gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Gamma}(t), \quad (9.1)$$

$$K_{\Pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\Pi}(t).$$

Функция готовности $K_{\Gamma}(t)$ равна по определению вероятности того, что в момент времени t система исправна. Функция простоя $K_{\Pi}(t)$ равна вероятности того, что в момент времени t система неисправна.

Имеют место соотношения

$$K_c(t) + K_n(t) = 1; \quad (9.2)$$

$$K_c + K_n = 1.$$

Часто рассматривают установившийся режим эксплуатации при $t \rightarrow \infty$. Тогда $\dot{P}_j(t) = 0$ и система дифференциальных уравнений переходит в систему алгебраических уравнений.

Когда перерывы в работе системы недопустимы, в качестве показателей надежности используются условные вероятности непрерывной безотказной работы в течение заданного времени выполнения задачи $\tilde{P}(t_i)$ при условии, что в начальный момент времени все элементы системы работоспособны. В рассматриваемом случае имеются "поглощающие" состояния и необходимо решить полную систему дифференциальных уравнений при соответствующих начальных условиях.

При нескольких работоспособных состояниях

$$K_{\Gamma}(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t), \quad (9.3)$$

где n – число работоспособных состояний; $P_j(t)$ – вероятность j -го работоспособного состояния.

Часто число неработоспособных состояний значительно меньше числа работоспособных. При этом удобнее вычислять коэффициент простоя

$$K_{\Pi}(t) = \sum_{l=1}^{m+1-n} P_l(t), \quad (9.4)$$

где $P_l(t)$ – вероятность l -го неработоспособного состояния; $m+1$ – общее число состояний.

Особенности расчета резервированных систем

Система, состоящая из равнодежных одного основного и k резервных элементов, может находиться в любом из $(k+2)$ состояний:

0 - все элементы работоспособны; 1 - один элемент в неработоспособном состоянии; j - когда j элементов в неработоспособном состоянии; $k+1$ - когда $(k+1)$ элементы в неработоспособном состоянии.

Предполагается, что при замене работающего элемента на резервный перерыва в работе системы не происходит, поэтому отказ системы наступает при одновременной неработоспособности основного и всех резервных элементов (состояние $k+1$).

Рассмотрим случай ненагруженного резерва с абсолютно надежным переключателем и с одной ремонтной бригадой, обслуживающей систему (ограниченное восстановление). По предположению, элементы в ненагруженном резерве имеют интенсивность отказов $\lambda=0$. Если число неработоспособных элементов оказывается больше одного, то существует очередь на ремонт.

Схема состояний системы представлена на рис. 9.1. Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

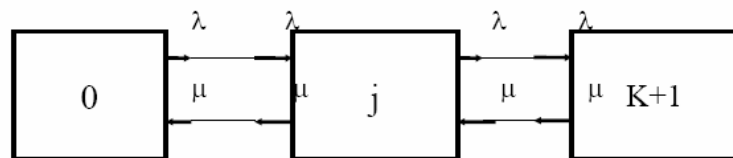


Рис. 9.1. Схема резервирования с восстановлением

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_j(t) = \lambda P_{j-1}(t) - (\lambda + \mu) P_j(t) + \mu P_{j+1}(t); \quad j = \overline{1, k}; \quad (9.5)$$

$$\dot{P}_{k+1}(t) = \lambda P_k(t) - \mu P_{k+1}(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ система (9.5) переходит в систему алгебраических уравнений:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$

$$\lambda P_{j-1} - (\lambda + \mu) P_j + \mu P_{j+1} = 0; \quad j = \overline{1, k}; \quad (9.6)$$

$$\lambda P_k - \mu P_{k+1} = 0.$$

Для решения системы (9.6) необходимо добавить уравнение

$$\sum_{j=0}^{k+1} P_j = 1. \quad (9.7)$$

В результате решения системы (9.6) совместно с уравнением (9.7) получим установившиеся значения коэффициентов простоя и готовности

$$K_{\Pi} = P_{k+1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}; \quad (9.8)$$

$$K_{\Gamma} = 1 - P_{k+1} = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}.$$

Если та же система, состоящая из $k+1$ элементов, обслуживается $(k+1)$ ремонтными бригадами (неограниченное

восстановление), то очередь на ремонт отсутствует. Схема состояний для ненагруженного резерва и неограниченного восстановления представлена на рис. 9.2. В результате решения системы уравнений при $P_j(t)=0$ получим:

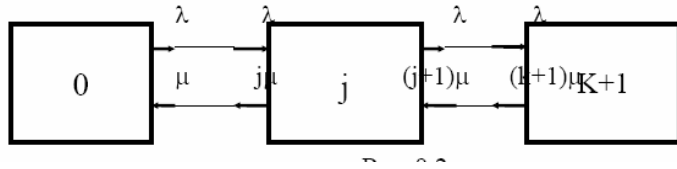


Рис. 9.2. Схема резервирования с восстановлением

$$K_{\Pi} = P_{k+1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{j!} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1-j}}; \quad (9.9)$$

$$K_z = I - P_{k+1}$$

Схемы состояний для системы, состоящей из одного основного и k элементов в нагруженном резерве представлены на рис.9.3. для ограниченного восстановления и на рис.9.4. - для неограниченного.

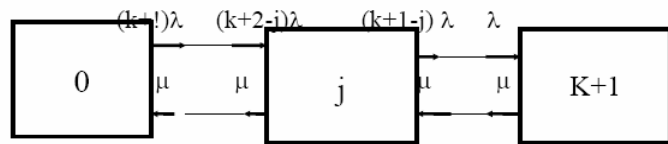


Рис. 9.3. Схема резервирования с восстановлением

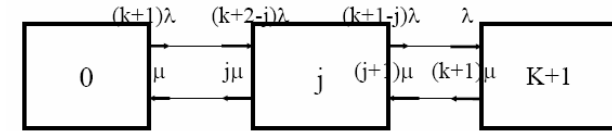


Рис. 9.4. Схема резервирования с ограниченным восстановлением

Рассуждая аналогично, получим: для ограниченного восстановления

$$K_{\Pi} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}; \quad K_z = I - K_{\Pi}; \quad (9.10)$$

для неограниченного восстановления

$$K_{\Pi} = \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^{k+1}; \quad (9.10^a)$$

$$K_{\Gamma} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^{k+1} = \sum_{j=0}^k C_{k+1}^{k+1-j} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)^{k+1-j} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^j.$$

Рассмотрим резервированные системы, для которых отказы недопустимы, но ремонт отказавшего элемента производится во время выполнения задачи. Если система состоит из основного элемента и k элементов в нагруженном резерве, то для случая ограниченного восстановления схема состояний представлена на рис.9.5. При попадании системы в

состояние $(k+1)$ происходит отказ системы, который недопустим и приводит к невыполнению поставленной задачи.

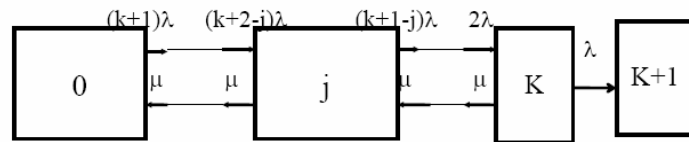


Рис. 9.5. Схема резервирования с ограниченным восстановлением

Вероятность безотказной системы работы

$$\tilde{P}(t_i) = \sum_{j=0}^k P_j(t_i) \quad (9.11)$$

найдена в предположении, что при $t=0$ в системе нет неиспользованных элементов, т.е.

$$P_0(0)=1; P_1(0)=\dots=P_{k+1}(0)=0.$$

Вероятность отказа системы в течении времени выполнения задачи также является условной вероятностью и равна

$$\tilde{q}(t_i) = P_{k+1}(t_i). \quad (9.12)$$

Важным показателем является среднее время безотказной работы

$$m_t = \int_0^{\infty} \tilde{P}(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k P_j(t) dt. \quad (9.13)$$

При решении системы уравнений, составленных по схеме состояний рис. 9.5. с помощью преобразований Лапласа, целесообразно использовать правило, облегчающее расчет.

Для определения среднего времени безотказной работы достаточно найти преобразование Лапласа вероятности безотказной работы $P(s)$ и подставить в него $s=0$.

Решение типовых задач

Задача 9.1. Для питания радиостанции используется электроагрегат с двумя генераторами, каждый из которых обладает производительностью, достаточной для нормальной работы: эти генераторы работают поочередно. При отказе работающего генератора в работу включается резервный генератор, а отказавший отключается и ремонтируется. Отказ электроагрегата состоит в прекращении питания радиостанции.

Конструкция электроагрегата допускает одновременный ремонт обоих генераторов, имеется нужное число ремонтников. Интенсивность отказов одного генератора равна λ , а интенсивность восстановления одного генератора равна μ .

Вычислить коэффициент готовности электроагрегата, если $\mu=5\lambda$. Предполагается показательное распределение времени безотказной работы и времени восстановления.

Решение. Электроагрегат может находиться в одном из трех состояний, которые обозначены цифрами:

0 - электроагрегат работоспособен, оба генератора работоспособны.

1 - электроагрегат работоспособен, но один из генераторов отказал и находится в ремонте.

2 - электроагрегат неработоспособен, оба генератора ремонтируются.

Обозначим вероятности указанных состояний в момент времени t через $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$. Эти вероятности при $t \rightarrow \infty$ имеют пределы P_0, P_1, P_2 .

Поскольку для рассматриваемого электроагрегата переход из состояния 0 в состояние 1 не нарушает его работоспособности, то

$$K_T = P_0 + P_1.$$

Составим схему состояний (рис.9.6.) и соответствующую этой схеме систему уравнений

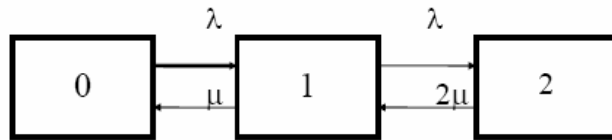


Рис. 9.6. Схема состояний

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t) + 2\mu P_2(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t).$$

Для определения установившихся значений P_0 и P_1 положим все производные равными нулю. Учитывая, что $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$, получаем:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0;$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

Для получения величин P_0, P_1, P_2 используем правило Крамера:

$$P_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ – определитель, элементами которого являются коэффициенты при P_0, P_1, P_2 ; Δ_i – определитель, который образуется из Δ путем замены i -го столбца коэффициентами правой части системы уравнений. Определим $\Delta, \Delta_0, \Delta_1$. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & 2\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \mu) + 2\mu^2 + 2\mu\lambda - \mu\lambda = \lambda^2 + 2\mu(\mu + \lambda).$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu) & 2\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mu^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 2\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda\mu.$$

Определим P_0, P_1 . Получим

$$P_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{2\mu^2}{\lambda^2 + 2\mu(\mu + \lambda)};$$

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + 2\mu(\mu + \lambda)}.$$

Обозначив

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

получим в результате

$$P_0 = \frac{2}{1 + (1 + \rho)^2}; P_1 = \frac{2\rho}{1 + (1 + \rho)^2}.$$

Соответственно

$$K_{\Gamma} = P_0 + P_1 = \frac{2(1 + \rho)}{1 + (1 + \rho)^2}.$$

При $\rho=0,2$ получим $K_{\Gamma}=0,98$.

Задача 9.2. Связная радиостанция включает в себя приемный и передающий блоки, интенсивности отказов которых одинаковы и равны $\lambda=10^{-2}$ 1/час. Интенсивность восстановления $\mu=2$ 1/час. Станцию обслуживает одна ремонтная бригада. При неработоспособности любого из блоков радиостанция неработоспособна. При этом работоспособный блок не выключается и в нем могут происходить отказы.

Требуется определить значения коэффициентов готовности и простоя радиостанции.

Решение. Связная радиостанция в любой момент времени может находиться в одной из трех состояний:

- 0 - оба блока работоспособны;
- 1 - один блок работоспособен;
- 2 - оба блока неработоспособны.

Радиостанция работоспособна только в состоянии 0 и неработоспособна в состояниях 1 и 2. Схема состояний с соответствующими интенсивностями переходов представлена на рис.9.7. Этой схеме соответствует система дифференциальных уравнений:

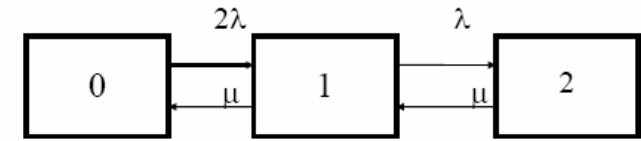


Рис. 9.7. Схема состояний

$$\dot{P}_0(t) = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = 2\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + \mu P_2(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ $\dot{P}_i(t) = 0$ и переходим к системе алгебраических уравнений

$$-2\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$

$$2\lambda P_0 - (\lambda + \mu)P_1 + \mu P_2 = 0;$$

$$\lambda P_1 - \mu P_2 = 0.$$

При решении этой системы используем нормировочное условие

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1,$$

которое может заменить любое из уравнений системы.

В результате решения системы уравнений либо подстановкой, либо по правилу Крамера получим

$$P_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 2\lambda^2}; P_1 = \frac{2\mu\lambda}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 2\lambda^2};$$

$$P_2 = \frac{2\lambda^2}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 2\lambda^2}.$$

Коэффициент готовности радиостанции равен

$$K_{\Gamma} = P_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 2\lambda^2}.$$

Коэффициент простоя

$$K_{\Pi} = P_1 + P_2 = \frac{2 \mu \lambda + 2 \lambda^2}{\mu^2 + 2 \mu \lambda + 2 \lambda^2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем:
 $K_{\Pi} \approx 10^{-2}$; $K_{Г} = 1 - K_{\Pi} \approx 0,99$.

Задача 9.3. Специализированная бортовая ЭВА состоит из трех блоков (1, 2 и 3), два из которых (1 и 2) включены последовательно в основную цепь, а блок 3 находится в состоянии ненагруженного резерва (рис.9.8.). Известно также, что интенсивность отказов λ_2 блока 2 пренебрежимо мала по сравнению с интенсивностями отказов λ_1 и λ_3 блоков 1 и 3 (т.е. $\lambda_1 = \lambda_3 \gg \lambda_2$) и устройство эксплуатируется в условиях ограниченного восстановления. Требуется определить коэффициенты готовности $K_{Г}$ и простоя K_{Π} . Интенсивность отказов и восстановлений устройства равны соответственно λ и μ , причем $\lambda = \mu$.

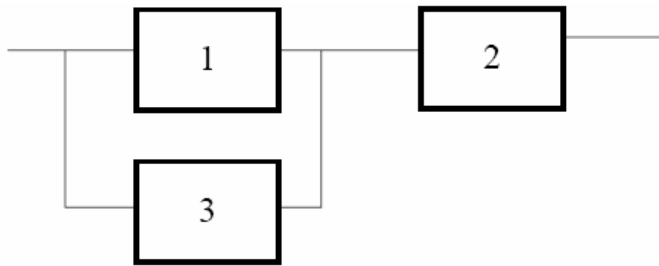


Рис. 9.8. Схема бортовой ЭВА

Решение. Если предположить, что наличие в системе блока 2 не ухудшает ее надежность, то можно выделить следующие три состояния, в которых может пребывать устройство:

0 - блоки 1 и 3 исправны и ЭВА работоспособна;

1 - один из блоков (1 или 3) поврежден и ремонтируется, а система по-прежнему сохраняет работоспособность;

2 - оба блока (1 и 3), а следовательно, и система в целом неработоспособна.

Схема перечисленных состояний приведена на рис.9.9.

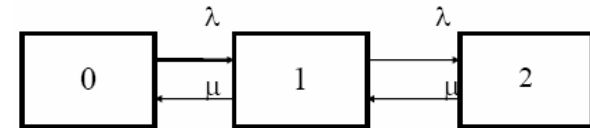


Рис. 9.9. Схема состояний

Обозначим вероятности указанных состояний в некоторый момент времени t соответственно $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$.

Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = P_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = P_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = P_2$.

Ясно, что $K_{Г} = P_0 + P_1$, поскольку переход системы из состояния 0 в состояние 1 ($0 \rightarrow 1$) не отражается на ее работоспособности, а $K_{\Pi} = P_2$ или $K_{\Pi} = 1 - K_{Г}$, так как $P_0 + P_1 + P_2 = 1$.

Запишем уравнения, соответствующие схеме состояний устройства. В соответствии с (9.5) и рис.9.9. получим

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\dot{P}_1(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t) + \mu P_2(t),$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t).$$

Дополнив систему уравнений нормировочным условием (9.7),

при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0,$$

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + \mu P_2 = 0,$$

$$\lambda P_1 - \mu P_2 = 0,$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

Совместное решение 1-го, 2-го и 4-го уравнений системы дает следующий результат

$$P_0 = \frac{\rho^2}{\rho(1+\rho)+1}; P_1 = \frac{\rho}{\rho(1+\rho)+1};$$

$$P_2 = \frac{1}{\rho(1+\rho)+1},$$

где $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$.

Поскольку $\rho = \mu / \lambda = 1$ по условиям задачи, то, подставив это значение в формулы вероятностей состояний системы, получим $P_0 = P_1 = P_2 = 0,3333$, поэтому $K_{\Gamma} = P_0 + P_1 = 0,6666$, $K_{\Pi} = P_2 = 1 - K_{\Gamma} = 0,3333$

Задача 9.4. Преобразователь “параметр-код” состоит из рабочего блока и блока в ненагруженном резерве. Распределения времен между отказами и восстановления показателные с параметрами $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час, $\mu = 0,8$ 1/час. Требуется определить значения коэффициентов простоя и во сколько раз уменьшается величина коэффициента простоя преобразователя при применении неограниченного восстановления по сравнению с ограниченным.

Решение. Для определения значений коэффициентов простоя для случаев ограниченного и неограниченного восстановления воспользуемся соответственно выражениями (9.8) и (9.9). Число возможных состояний равно трем.

Для ограниченного восстановления

$$K_{\Pi.O} = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}.$$

Для неограниченного восстановления

$$K_{\Pi.H} = \frac{1}{2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + 1} = \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2}.$$

Для рассматриваемой задачи справедливо соотношение $\mu \gg \lambda$, и полученные выражения могут быть с достаточной для практики точностью определены приближенно:

$$K_{\Pi.O} \approx \frac{\lambda^2}{\mu^2}; K_{\Pi.H} \approx \frac{\lambda^2}{2\mu^2}.$$

Таким образом, при применении неограниченного восстановления по сравнению с ограниченным величина коэффициента простоя уменьшилась в два раза. Значения этих коэффициентов равны:

$$K_{\Pi.O} \approx 10^{-4}; K_{\Pi.H} \approx 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 9.5. Радиоприемное устройство, состоящее из рабочего блока и блока в нагруженном резерве, рассчитано на непрерывную круглосуточную работу. Через три часа после включения это устройство может получить команду на перестройку режима работы. Интенсивность отказов и восстановления каждого блока равны $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\mu = 0,2$ 1/час. Имеются две дежурные ремонтные бригады. Определить вероятность застать радиоприемное устройство в неработоспособном состоянии через три часа после включения (значение функции простоя) и значение коэффициента простоя.

Решение. Радиоприемное устройство в любой момент времени может находиться в одном из следующих состояний:

- 0 - оба блока работоспособны;
- 1 - один блок неработоспособен;
- 2 - оба блока неработоспособны;

При нахождении в состояниях 0 и 1 устройство работоспособно, в состоянии 2 - устройство неработоспособно.

Схема состояний устройства с соответствующими интенсивностями переходов представлена на рис.9.10. Система дифференциальных уравнений, составленная по этой схеме, имеет вид

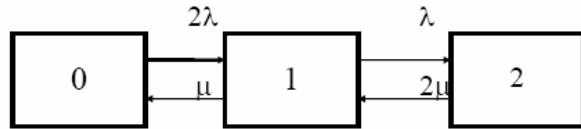


Рис. 9.10. Схема состояний

$$\dot{P}_0(t) = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = 2\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t).$$

Для определения функции простоя решим эту систему при начальных условиях $P_0(0) = 1; P_1(0) = P_2(0) = 0$. Переходя к изображениям, получаем систему алгебраических уравнений:

$$(s + 2\lambda)P_0(s) - \mu P_1(s) = 1;$$

$$-2\lambda P_0(s) + (s + \lambda + \mu)P_1(s) - 2\mu P_2(s) = 0;$$

$$-\lambda P_1(s) + (s + 2\mu)P_2(s) = 0.$$

Для получения величин $P_i(s)$ используем правило Крамера

$$P_i(s) = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ – определитель, элементами которого являются коэффициенты при $P_0(s), P_1(s), P_2(s)$; Δ_i – определитель, который образуется из Δ путем замены i -го столбца коэффициентами правой части системы.

В рассматриваемом случае требуется определить функцию простоя, равную $P_2(t)$. Для этого запишем определители Δ и Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (s + 2\lambda) & -\mu & 0 \\ -2\lambda & (s + \lambda + \mu) & -2\mu \\ 0 & -\lambda & (s + 2\mu) \end{vmatrix}; \Delta_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} (s + 2\lambda) & -\mu & 1 \\ -2\lambda & (s + \lambda + \mu) & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

Следовательно

$$P_2(s) = \frac{2\lambda^2}{s \cdot [s^2 + 3(\lambda + \mu)s + 4\lambda\mu + 2\mu^2 + 2\lambda^2]}.$$

Найдем корни уравнения

$$s^2 + 3(\lambda + \mu)s + 2(\mu + \lambda)^2 = 0.$$

Имеем

$$s_{1,2} = 0,5 \left[-3(\mu + \lambda) \pm \sqrt{9(\mu + \lambda)^2 - 8(\mu + \lambda)^2} \right] = 0,5[-3(\mu + \lambda) \pm (\mu + \lambda)].$$

Следовательно, $s_1 = -2(\mu + \lambda); s_2 = -(\mu + \lambda)$.

Запишем $P_2(s)$ в виде

$$P_2(s) = \frac{2\lambda^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}.$$

Определим A, B, C . Имеем

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sP_2(s) = \frac{2\lambda^2}{s_1 s_2};$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)P_2(s) = \frac{2\lambda^2 s_2}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)};$$

$$C = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) P_2(s) = \frac{-2\lambda^2 s_1}{s_1 s_2 (s_1 - s_2)}.$$

Производя обратное преобразование Лапласа $P_2(t) = L^{-1}\{P_2(s)\}$,

получим

$$P_2(t) = A \cdot I(t) + B e^{s_1 t} + C e^{s_2 t} = \frac{2\lambda^2}{s_1 s_2} \left(1 + \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \right).$$

Так как

$$\frac{2\lambda^2}{s_1 s_2} = \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2}; \quad s_1 - s_2 = -(\mu + \lambda),$$

то

$$K_{\Pi}(t) = P_2(t) = \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} \times [1 + e^{-2(\mu + \lambda)t} - 2e^{-(\mu + \lambda)t}]$$

Используя это выражение, определяем коэффициент простоя при

$t \rightarrow \infty$

$$K_{\Pi} = \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$K_{\Pi}(3) = 2 \cdot 10^{-4}; \quad K_{\Pi} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

Задача 9.6. Вычислительное устройство состоит из рабочего блока и блока в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов и восстановлений каждого блока равны $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$ 1/час; $\mu = 2$ 1/час.

При одновременной неисправности обоих блоков устройство неработоспособно. Определить среднее время безотказной работы устройства m_t .

Решение. Вычислительное устройство в любой момент времени может находиться в одном из следующих состояний:

- 0 - оба блока работоспособны;
- 1 - один блок неработоспособен;
- 2 - оба блока неработоспособны.

Схема состояний устройства представлена на рис.9.11.

Для определения m_t сначала необходимо определить вероятность непрерывной безотказной работы в течении времени t . Система дифференциальных уравнений, полученная по схеме состояний, имеет следующий вид:

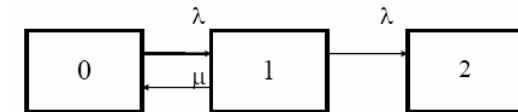


Рис. 9.11. Схема состояний

$$\dot{P}_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t).$$

Начальные условия:

$$P_0(0) = 1; \quad P_1(0) = P_2(0) = 0.$$

При помощи преобразования Лапласа получаем систему алгебраических уравнений относительно изображений:

$$(s + \lambda) P_0(s) - \mu P_1(s) = 1;$$

$$-\lambda P_0(s) + (s + \lambda + \mu) P_1(s) = 0;$$

$$-\lambda P_1(s) + s P_2(s) = 0.$$

Путем решения этой системы либо подстановкой, либо по правилу Крамера получим

$$P_2(s) = \frac{\lambda^2}{s(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Раскладывая $P_2(s)$ на элементарные дроби и производя обратное преобразование Лапласа, определяем вероятность $P_2(t)$ попадания за время $(0, t)$ в состояние 2

$$P_2(t) = 1 - \frac{s_1 \cdot \exp[s_2 t] - s_2 \cdot \exp[s_1 t]}{s_1 - s_2},$$

где обозначено

$$s_{1,2} = 0,5 \left[- (2\lambda + \mu) \pm \sqrt{(2\lambda + \mu)^2 - 4\lambda^2} \right]$$

Следовательно, вероятность непрерывной безотказной работы вычислительного устройства за время $(0, t)$ равна

$$\tilde{P}(t) = 1 - P_2(t) = \frac{s_1 \exp[s_2 t] - s_2 \exp[s_1 t]}{s_1 - s_2}.$$

Среднее время безотказной работы m_t равно

$$m_t = \int_0^{\infty} \tilde{P}(t) dt = - \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} = \frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{\mu}{\lambda} \right).$$

Задача 9.7. Радиолокационная станция сопровождения содержит рабочий блок и блок в нагруженном резерве. Интенсивность отказов и восстановлений каждого блока равны соответственно λ и μ . Время сопровождения в среднем составляет величину t_c . При одновременной неработоспособности обоих блоков сопровождаемая цель теряется и происходит отказ станции. При переходе на резервный блок потери цели не происходит.

Требуется определить вероятность непрерывной безотказной работы в течение времени $(0, t_c)$, или, иначе, вероятность непопадания в состоянии 2 на этом интервале и среднее время безотказной работы станции m_t .

Решение. Радиолокационная станция сопровождения в любой момент времени может находиться в одном из следующих состояний:

0 - оба блока работоспособны;

1 - один блок неработоспособен;

2 - оба блока неработоспособны.

Схема состояний представлена на рис.9.12. Работоспособными являются состояния 0 и 1, неработоспособным - 2. Следовательно, вероятность непопадания в состояние 2 за время t_c определяется как

$$\tilde{P}(t_c) = P_0(t_c) + P_1(t_c) = 1 - P_2(t_c).$$

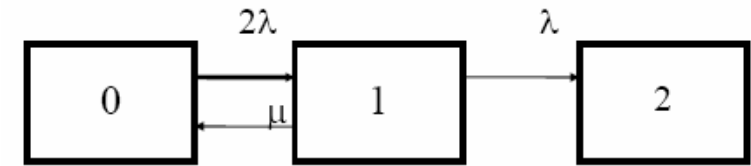


Рис. 9.12. Схема состояний

Для определения вероятности $\tilde{P}(t_c)$ по схеме состояний составим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{P}_0(t) = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = 2\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = \lambda P_1(t).$$

При помощи преобразования Лапласа получаем систему алгебраических уравнений относительно изображений при $P_0(0) = 1; P_1(0) = P_2(0) = 0$:

$$(s + 2\lambda)P_0(s) - \mu P_1(s) = 1;$$

$$-2\lambda P_0(s) + (s + \lambda + \mu)P_1(s) = 0;$$

$$-\lambda P_1(s) + sP_2(s) = 0.$$

Путем решения этой системы либо подстановкой, либо по правилу Крамера, получим:

$$P_2(s) = \frac{2\lambda^2}{s(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Раскладывая $P_2(s)$ на элементарные дроби и производя обратное преобразование Лапласа, определяем вероятность попадания в состояние 2 за время $(0, t_c)$:

$$P_2(t_c) = 1 - \frac{s_1 \exp[s_2 t_c] - s_2 \exp[s_1 t_c]}{s_1 - s_2},$$

где обозначено

$$s_{1,2} = 0,5 \left[-3\lambda - \mu \pm \sqrt{(\mu + 3\lambda)^2 - 8\lambda^2} \right]$$

Следовательно, вероятность непрерывной безотказной работы радиолокационной станции за время $(0, t_c)$ равна:

$$\tilde{P}(t_c) = \frac{s_1 \exp[s_2 t_c] - s_2 \exp[s_1 t_c]}{s_1 - s_2}.$$

Для определения среднего времени безотказной работы станции m_t запишем преобразование Лапласа для вероятности безотказной работы $P(s)$ и подставим в него $s = 0$:

$$P(s) = P_0(s) + P_1(s) = \frac{s + 3\lambda + \mu}{s^2 + (3\lambda + \mu)s + 2\lambda^2};$$

$$m_t = P(s)|_{s=0} = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}.$$

Задача 9.8. Станция радиорелейной связи включает два работающих приемопередающих блока и один блок в ненагруженном резерве. Нарботка на отказ каждого работающего блока $m_t=200$ час; среднее время восстановления одного блока $m_{\tau}=2$ час. Станцию обслуживает одна ремонтная бригада. При неработоспособности двух блоков станции третий блок выключается и в нем не могут происходить отказы. Требуется определить коэффициент простоя станции.

Решение. Возможны следующие состояния радиорелейной связи:

- 0 - все блоки работоспособны;
- 1 - неработоспособен один блок;

2 - неработоспособны два блока.

При неработоспособности одного блока блок из ненагруженного резерва переводится в рабочее состояние. Работоспособными являются состояния 0 и 1, неработоспособным - состояние 2.

Обозначим вероятности указанных состояний в момент времени t через $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$. Эти вероятности при $t \rightarrow \infty$ имеют пределы P_0, P_1, P_2 . В рассматриваемом случае $K_{\Pi} = P_2$, т.к. состояние 2 является неработоспособным.

Составим схему состояний (рис.9.13.) и соответствующую этой схеме систему уравнений

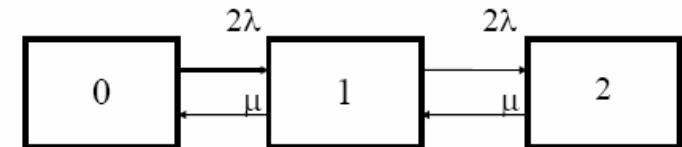


Рис. 9.13. Схема состояний

$$\dot{P}_0(t) = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\dot{P}_1(t) = -(\mu + 2\lambda)P_1(t) + 2\lambda P_0(t) + \mu P_2(t);$$

$$\dot{P}_2(t) = 2\lambda P_1(t) - \mu P_2(t).$$

Для определения установившегося значения P_2 положим все производные равными нулю. Учитывая, что $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$,

получаем

$$-2\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$

$$2\lambda P_0 - (\mu + 2\lambda)P_1 + \mu P_2 = 0;$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

Для получения величины P_2 используем правило Крамера:

$$P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(\mu + 2\lambda) & \mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu^2 + 2\mu\lambda + 4\lambda^2;$$

$$|\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(\mu + 2\lambda) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\lambda^2.$$

Следовательно

$$K_{\Pi} = P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4\lambda^2}{\mu^2 + 2\mu\lambda + 4\lambda^2}.$$

при $\mu \gg \lambda$

$$K_{\Pi} \approx \frac{4\lambda^2}{\mu^2}.$$

Так как при показательном распределении времени безотказной работы и времени восстановления

$$\lambda = \frac{1}{m_t} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час}; \mu = \frac{1}{m_r} = 0,5 \text{ 1/час},$$

то

$$K_{\Pi} \approx \frac{4 \cdot 0,5^2}{0,5^2} \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.9. Радиорелейная станция содержит два приемопередатчика, один из которых используется по назначению, а второй находится в ненагруженном резерве. Определить среднее время безотказной работы станции m_t при

условии, что для каждого приемопередатчика $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\mu = 0,2$ 1/час.

Задача 9.10. Регистрирующее устройство содержит рабочий блок и блок в нагруженном резерве. Вероятность отказа блока в течение 25 часов $q(t_i) = 0,1$. Ремонт производится одной бригадой с интенсивностью $\mu = 0,2$ 1/час. Определить коэффициент простоя регистрирующего устройства.

Задача 9.11. Система связи содержит одно устройство, предназначенное для выполнения задачи и одно устройство в нагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого устройства равна λ 1/час, восстановления – μ 1/час. Ремонт устройств производится независимо друг от друга. Определить функцию готовности.

Задача 9.12. Система сопровождения состоит из рабочего блока и блока в нагруженном резерве. Для каждого блока заданы: $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/час, $\mu = 0,2$ 1/час. Определить время безотказной работы системы.

Задача 9.13. Преобразователь “параметр-код” состоит из рабочего блока и блока в нагруженном резерве. Распределения времен между отказами и восстановления показательные с параметрами $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час, $\mu = 0,8$ 1/час.

Требуется определить значения коэффициентов простоя и во сколько раз уменьшается величина коэффициента простоя преобразователя при применении неограниченного восстановления по сравнению с ограниченным.

Задача 9.14. Устройство состоит из двух одинаковых блоков, один из которых используется по прямому назначению, а второй находится в нагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого блока $\lambda = 6 \cdot 10^{-3}$ 1/час, интенсивность восстановления $\mu = 2$ 1/час. Ремонт производится одной ремонтной бригадой. Требуется определить коэффициент простоя устройства.

Задача 9.15. Усилитель состоит из двух равнонадежных блоков, для каждого из которых $\lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Имеется усилитель в ненагруженном резерве. Ремонт производит одна бригада, среднее время ремонта $m_{\tau} = 0,5$ час. Определить коэффициент простоя усилителя с резервом.

Задача 9.16. Усилитель состоит из двух равнонадежных блоков, для каждого из которых $\lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ 1/час. Применено поблочное резервирование усилителя в ненагруженном режиме. Ремонт производит одна бригада, среднее время ремонта $m_{\tau} = 0,5$ час. Определить коэффициент простоя усилителя с поблочным резервированием.

Задача 9.17. Вычислитель состоит из двух одинаково рабочих блоков и одного блока в нагруженном скользящем резерве. Для каждого блока $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\mu = 1$ 1/час, ремонтных бригад две. Определить коэффициент простоя вычислителя.

Задача 9.18. Вычислитель состоит из двух одинаковых рабочих блоков и одного резервного блока в ненагруженном резерве. Для каждого блока $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\mu = 1$ 1/час, ремонтных бригад две. Определить коэффициент простоя вычислителя.

Задача 9.19. Генератор импульсов содержит один рабочий блок, один блок в нагруженном резерве и один блок в ненагруженном резерве. При неработоспособности рабочего блока или блока в нагруженном резерве блок из ненагруженного резерва переводится в нагруженный. Задано для каждого блока $\lambda = 10^{-2}$ 1/час, $\mu = 0,5$ 1/час, ремонтная бригада одна. Определить коэффициент простоя генератора.

Задача 9.20. Передатчик содержит рабочий блок ($\lambda = 9 \cdot 10^{-3}$ 1/час) и блок в облегченном резерве ($\nu = 10^{-3}$ 1/час). Определить коэффициент простоя передатчика при условии, что ремонт производится одной бригадой с интенсивностью $\mu = 0,3$ 1/час.

Задача 9.21. Преобразователь частоты содержит один рабочий блок и один блок в нагруженном резерве. Ремонт производится одной бригадой, обеспечивающей среднее время восстановления $0,5$ час. Определить предельно допустимую интенсивность отказов преобразователя, чтобы удовлетворялось условие $K_{\Pi} \leq 2 \cdot 10^{-4}$.

Задача 9.22. Преобразователь частоты содержит один рабочий блок и один блок в ненагруженном резерве. Ремонт производится одной бригадой, обеспечивающей среднее время восстановления $0,5$ час. Определить предельно допустимую интенсивность отказов преобразователя, чтобы удовлетворялось условие $K_{\Pi} \leq 2 \cdot 10^{-4}$.

Задача 9.23. Для нерезервированного изделия, имеющего интенсивность отказов $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$ 1/час, может быть применен либо нагруженный, либо ненагруженный резерв. Ремонт производится одной ремонтной бригадой с интенсивностью $\mu = 2$ 1/час. Определить, во сколько раз уменьшится значение коэффициента простоя при применении ненагруженного резерва вместо нагруженного.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие представляет собой практикум по теории надежности. Рассмотрены типовые задачи, характерные для электронной промышленности.

Материал собран из различных источников и рассчитан на девять практических занятий.

Данное пособие необходимо магистрам направления 211000.68 «Конструирование и технология электронных средств», программа подготовки «Автоматизированное проектирование и технология радиоэлектронных средств специального назначения» при изучении дисциплины «Методы обеспечения надежности».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по теории надежности / под редакцией А.М. Половко и И.М. Маликова. – М.: – Советское радио, 1972.
2. Липатов, И. Н. Решение задач по курсу «Прикладная теория надежности»: учеб. пособие/ И.Н. Липатов. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1996. – 55 с.
3. Половко, А. М. Основы теории надёжности / А. М. Половко, С. В. Гуров. –СПб.: Изд-во: БХВ-Петербург, 2006.- 702 с.
4. Половко, А.М. Основы теории надежности. практикум / А. М. Половко, С. В. Гуров. –СПб.: Изд-во: БХВ-Петербург, 2006.- 560 с.
5. Голинкевич, Т. А. Прикладная теория надежности: учебник для вузов/ Т. А. Голинкевич - М.: Высшая школа, 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Практическое занятие №1.....	4
2. Практическое занятие №2.....	17
3. Практическое занятие №3.....	31
4. Практическое занятие №4.....	39
5. Практическое занятие №5.....	50
6. Практическое занятие №6.....	61
7. Практическое занятие №7.....	73
8. Практическое занятие №8.....	79
9. Практическое занятие №9.....	85
Заключение.....	114
Библиографический список.....	115

Учебное издание

Турецкий Андрей Владимирович
Шуваев Владимир Андреевич

МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ:
ПРАКТИКУМ

В авторской редакции

Компьютерный набор А.В. Турецкого

Подписано к изданию 15.11.2013
Объем файла 792 КБ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14