МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра кадастра недвижимости, землеустройства и геодезии

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

к выполнению курсовой работы
для студентов направления 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
(профиль «Инженерная геодезия») всех форм обучения

Воронеж 2022

Введение

Применение различных систем координат при решении практических задач геодезии, топографии, землеустройства и кадастра объектов недвижимости неизбежно. Это вызвано наличием у каждой системы координат целого набора положительных и отрицательных свойств, которые делают удобным или неудобным использование той или иной системы. С другой стороны, применение разных систем координат вынуждает геодезистов выполнять преобразование координат своих точек из одной системы в другую. Преобразование координат в геодезии осуществляется по специальным формулам, зачастую весьма громоздким. Поэтому во всех промышленных программных продуктах предусмотрена возможность выполнять такие преобразования. Однако специалистам геодезического профиля, на наш взгляд, необходимо иметь теоретические знания и приобрести практические навыки самостоятельного решения задач по преобразованию координат в различных системах.

Для получения, закрепления и систематизации теоретических знаний и приобретения вышеназванных практических навыков предназначены данные методические материалы для выполнения курсовой работы.

Выполнение курсовой работы преследует достижение следующих целей:

- расширение, закрепление и систематизацию теоретических знаний, приобретение навыков практического применения этих знаний для решения конкретных научно-технических и производственных задач по преобразованию координат в различных системах;
- приобретение опыта математической обработки, анализа и систематизации результатов инженерных расчетов;
- приобретение опыта представления и защиты результатов своей работы.

В ходе выполнения работы обучающимися должны быть решены следующие задачи:

- систематизация и анализ теоретического материала по указанной теме;
- выполнение инженерных расчетов;
- анализ полученных результатов и формирование выводов;
- разработка оптимальных технологических схем решения поставленных задач.

Вычисление геоцентрических экваториальных координат ИСЗ по данным его топоцентрических координат

В некоторый момент времени UTC с пункта земной поверхности *P*, геодезические координаты (*B, L, H*) которого заданы относительно референц-эллипсоида Красовского с параметрами a и l , определены истинные экваториальные топоцентрические координаты ИСЗ α_T^C, δ_T^C и топоцентрическая дальность r_T^C до ИСЗ. Предполагается, что при определении истинных топоцентрических координат ИСЗ учтены редукционные поправки (прецессия, нутация) за переход от системы координат стандартной эпохи (эпохи каталога J2000.0) к истинной системе координат на эпоху наблюдения (момент наблюдения UTC - всемирное координированное время).

Предполагается, что синхронным методом решена задача по определению ориентировки (углов Эйлера, *ψ, θ, ω)* референцной (геодезической) системы относительно геодезической, а орбитальным методом определены координаты ΔX, ΔY, ΔZ центра референц-эллипсоида Красовского относительно центра масс Земли.

Необходимо вычислить геоцентрические экваториальные координаты ИСЗ α_T^C, δ_T^C и геоцентрическую дальность r_T^C до ИСЗ.

Исходные данные

Координаты пункта наблюдения *P*:

геодезическая широта $B = 45.427657^0$

геодезическая долгота $L = 30.176232^0$

геодезическая высота $H = 231.5 м$

Параметры референц-эллипсоида Красовского

большая полуось $a = 6378245\ м$

эксцентриситет $e = 0.08181333$

Координаты центра референц-эллипсоида Красовского относительно центра масс Земли:

$\Delta X = -90\, м$

$\Delta Y = -129\, м$

$\Delta Z = -142\, м$

Углы Эйлера:

прецессии $\psi = -1.2^s$

нутации $\vartheta = -2.2^s$

чистого вращения $\omega = +1.5^s$

Координаты мгновенного полюса:

$X_{П} = +0.152^{s}$

$Y_{П} = -0.371^{s}$

Истинные экваториальные топоцентрические координаты ИСЗ и топоцентрическая дальность на эпоху наблюдения:

дальность $r_{T}^{C} = 1212000 + N м = 1212000 + 964 = 1212964 \ м$

прямое восхождение $\alpha_{T}^{C} = 229.746207^{0}$

склонение $\delta_{T}^{C} = 41.016432^{0}$

момент наблюдения $UTC = 20^{h}39^{m}58.732''$

Поправка за переход от UTC к $UT1_{1}$

$DTU1 = +0.3^{8}$

$dTU1 = -0.4^{8}$

Гринвичское звездное время в полночь на дату наблюдения:

$S_{0} = 16^{h}37^{m}00.307^{s} + N^{m} = 16^{h}37^{m}00.307^{s} + 16^{h}04^{m} = 32^{h}41^{m}00.307^{s}$

Решение

1. Вычисляем геодезические прямоугольные координаты ($X_{Г}^{P} \quad Y_{Г}^{P} \quad Z_{Г}^{P}$) пункта P в системе референц-эллипсоида Красовского.

Начало этой системы лежит в центре референц-эллипсоида (рис. 1.1) ось $Z_{Г}$ совпадает с осью вращения эллипсоида, ось $X_{Г}$ направлена в точку пересечения геодезического меридиана Гринвича с плоскостью экватора эллипсоида, ось $Y_{Г}$ лежит в плоскости экватора и положительна к востоку.

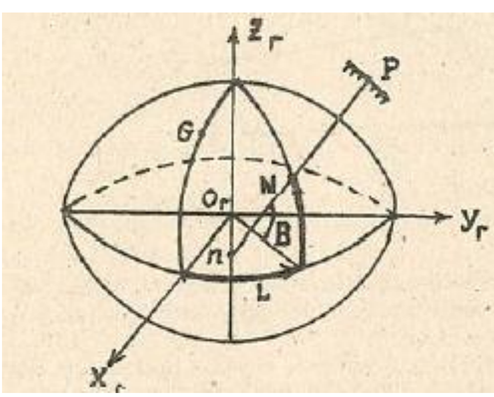

Рисунок 1.1

Прямоугольные геодезические координаты пункта P вычисляются по формулам:

$$X_Г^P = (N+H)\cos B \cdot \cos L$$
$$Y_Г^P = (N+H)\cos B \cdot \sin L$$
$$Z_Г^P = (N \cdot (1-e^2) + H) \cdot \sin B$$

Где N - длина внутренней нормали к поверхности эллипсоида, вычисляется по формуле:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$$

a - большая полуось референц-эллипсоида Красовского.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} = \frac{6378245}{\sqrt{1-0.08181333^2 \cdot \sin^2(45.427657^0)}} = 6389105.066\,м$$

$$X_Г^P = (N+H)\cos B \cdot \cos L = (6389105.066 + 231.5) \cdot \cos(45.427657) \cdot \cos(30.176232) =$$
$$= 3876426.228\,м$$

$$Y_Г^P = (N+H)\cos B \cdot \sin L == (6389105.066 + 231.5) \cdot \cos(45.427657) \cdot \sin(30.176232) =$$
$$= 2253981.689\,м$$

$$Z_Г^P = (N \cdot (1-e^2) + H) \cdot \sin B = (6389105.066 \cdot (1-0.08181333^2) + 231.5) \cdot \sin(45.427657) =$$
$$= 4521074.817\,м$$

. Вычисляем прямоугольные координаты пункта P в гринвичской системе координат.

Начало гринвичской системы координат O_G совпадает с центром масс Земли (рис. 1.2).

Ось Z_G направлена в средний северный полис Земли эпохи 1900-1905гг. (Международное условное начало МУН), ось X_G направлена в точку пересечения геоцентрического меридиана Гринвича с плоскостью экватора эпохи 1900-1905 гг. Ось Y_G лежит в плоскости экватора и дополняет систему до правой.

Из рисунка 1.2 видно, что начало геодезической и гринвичской систем не совпадают, а их оси развернуты на небольшие углы (углы Эйлера, ψ, θ, ω).

Таким образом, чтобы перейти от прямоугольных геодезических координат $X_Г^P$ $Y_Г^P$ $Z_Г^P$ пункта P с началом $O_Г$ в центре референц-эллипсоида к прямоугольным гринвичским координатам с началом в O_G в центре масс Земли, необходимо осуществить перенос и разворот осей геодезической системы координат относительно гринвичской системы.

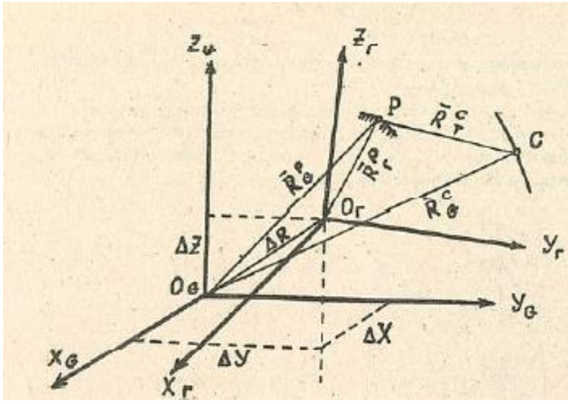

Рисунок 1.2

Учитывая, что углы Эйлера, *ψ, θ, ω* малы, порядка нескольких секунд, переход от прямоугольных геодезических координат пункта *P* к гринвичским координатам осуществляется на основании следующего выражения в координатной форме:

$$X_G^P = \Delta X + X_\Gamma^P + \psi \cdot Y_\Gamma^P - \omega \cdot Z_\Gamma^P$$
$$Y_G^P = \Delta Y + Z_\Gamma^P - \psi \cdot X_\Gamma^P + \vartheta \cdot Z_\Gamma^P$$
$$Z_G^P = \Delta Z + Z_\Gamma^P + \omega \cdot X_\Gamma^P - \vartheta \cdot Y_\Gamma^P$$

Выразим углы Эйлера в радианах:

$$\psi = -1.2 \cdot 0.0000048 = -0.0000058$$
$$\vartheta = -2.2 \cdot 0.0000048 = -0.000011$$
$$\omega = 1.5 \cdot 0.0000048 = 0.0000073$$
$$X_G^P = \Delta X + X_\Gamma^P + \psi \cdot Y_\Gamma^P - \omega \cdot Z_\Gamma^P = -90 + 3876426.228 - 0.0000058 \cdot 2253981.689 -$$
$$- 0.0000073 \cdot 4521074.817 = 3876290.151\,\text{м}$$
$$Y_G^P = \Delta Y + Z_\Gamma^P - \psi \cdot X_\Gamma^P + \vartheta \cdot Z_\Gamma^P = -129 + 4521074.817 + 0.0000058 \cdot 3876426.228 -$$
$$- 0.000011 \cdot 4521074.817 = 4520918.568\,\text{м}$$
$$Z_G^P = \Delta Z + Z_\Gamma^P + \omega \cdot X_\Gamma^P - \vartheta \cdot Y_\Gamma^P = -142 + 4521074.817 + 0.0000073 \cdot 3876426.228 +$$
$$+ 0.000011 \cdot 2253981.689 = 4521010.703\,\text{м}$$

. Вычисление гринвичских координат пункта *P* в инерционной системе координат.

Осуществляем переход от гринвичских координат $X_G^P \quad Y_G^P \quad Z_G^P$ инерциальным координатам $X^P \quad Y^P \quad Z^P$ пункта.

Для этого, на первом этапе, вычисляем гринвичские координаты пункта относительно полюса по формулам, записываемым в координатной форме:

$$X_{MG}^P = X_G^P - X_П \cdot Z_G^P$$
$$Y_{MG}^P = Y_G^P - Y_П \cdot Z_G^P$$
$$Z_{MG}^P = Z_G^P + X_П \cdot X_G^P - Y_П$$

Переведем углы в радианы

$$X_П = \frac{0.152}{206265} = 0.000000737$$
$$Y_П = \frac{-0.371}{206265} = 0.0000018$$
$$X_{MG}^P = X_G^P - X_П \cdot Z_G^P = 3876290.151 - 0.000000737 \cdot 4521010.703 = 3876286.819 м$$
$$Y_{MG}^P = Y_G^P - Y_П \cdot Z_G^P = 4520918.568 - 0.0000018 \cdot 4521010.703 = 4520910.43 м$$
$$Z_{MG}^P = Z_G^P + X_П \cdot X_G^P - Y_П = 4521010.703 + 0.000000737 \cdot 3876290.151 - 0.0000018 =$$
$$= 4521013.56 м$$

На втором этапе, учитывая истинное гринвичское звездное время, осуществляем переход к инерциальным геоцентрическим прямоугольным координатам пункта по формулам:

$$X^P = X_{MG}^P \cdot \cos S - Y_{MG}^P \cdot \sin S$$
$$Y^P = X_{MG}^P \cdot \sin S + Y_{MG}^P \cdot \cos S$$
$$Z^P = Z_{MG}^P$$

Где S - истинное гринвичское звездное время, соответствующее моменту наблюдения UT1:

$$S = S_0 + UT1 + 9.856^{s/h} \cdot (UT1)^h$$
$$UT1 = UTC + DUT1 + dUT1 = 20^h 39^m 58.732^s + 0.3^s - 0.4^s = 20^h 39^m 58.632^s$$
$$S = S_0 + UT1 + 9.856^{s/h} \cdot (UT1)^h = 32^h 41^m 00.307^s + 20^h 39^m 58.632^s +$$
$$+ 9.856^{s/h} \cdot 20^h = 53^h 24^m 16.059^s = 274752016.059^s = 76320^0 = 0^0$$
$$X^P = X_{MG}^P \cdot \cos S - Y_{MG}^P \cdot \sin S = 3876286.819 \cdot \cos 0 - 4520910.43 \cdot \sin 0 = 3876286.819 м$$
$$Y^P = X_{MG}^P \cdot \sin S + Y_{MG}^P \cdot \cos S = 3876286.819 \cdot \sin 0 + 4520910.43 \cdot \cos 0 = 4520910.43 м$$
$$Z^P = Z_{MG}^P = 4521013.56 м$$

. Находим истинные прямоугольные топоцентрические координаты ИСЗ на момент наблюдения UT1.

Начало топоцентрической системы координат совпадает с пунктом наблюдения P, а соответствующие оси X_T Y_T Z_T параллельны осям экваториальной геоцентрической (инерционной) системы координат.

Напомним, что начало экваториальной системы совпадает с центром масс Земли, ось X направлена в точку истинного весеннего равноденствия на эпоху наблюдения, ось Z направлена по мгновенной оси вращения, ось Y пополняет систему до правой.

Истинные топоцентрические прямоугольные координаты ИСЗ вычислим по формулам:

$$X_T^C = r_T^C \cdot \cos\alpha_T^C \cdot \cos\delta_T^C = 1212964 \cdot \cos(229.746207^0) \cdot \cos(41.016432^0) = -591383.6178 м$$
$$Y_T^C = r_T^C \cdot \sin\alpha_T^C \cdot \cos\delta_T^C = 1212964 \cdot \sin(229.746207^0) \cdot \cos(41.016432^0) = -698476.7728 м$$
$$Z_T^C = r_T^C \cdot \sin\delta_T^C = 1212964 \cdot \cos(41.016432^0) = 796038.4914 м$$

. Находим геоцентрические инерциальные координаты ИСЗ:

$$X^C = X^P + X_T^C = 3876286.819 - 591383.6178 = 3284903.201 м$$
$$Y^C = Y^P + Y_T^C = 4520910.43 - 698476.7728 = 3822433.657 м$$
$$Z^C = Z^P + Z_T^C = 4521013.56 + 796038.4914 = 5317052.051 м$$

Формулы для вычисления экваториальных координат и дальности:

$$\alpha_\Gamma^C = arctg\frac{Y^C}{X^C} = arctg\frac{3822433.657}{3284903.201} = 49.325067^0$$

$$\delta_\Gamma^C = arctg\frac{Z^C}{\sqrt{(X^C)^2 + (Y^C)^2} + +(Z^C)^2} =$$

$$= arctg\frac{5317052.051}{\sqrt{(3284903.201)^2 + (3822433.657)^2 + (5317052.051)^2}} = 35.970734^0$$

$$r_\Gamma^C = \sqrt{(X^C)^2 + (Y^C)^2 + (Z^C)^2} = \sqrt{(3284903.201)^2 + (3822433.657)^2 + (5317052.051)^2} =$$
$$= 7326160.701 м$$

Задача 2
Вычисление элементов невозмущенной орбиты ИСЗ

Предполагается, что для двух моментов UT1, из обработки фотографических наблюдений ИСЗ получены топоцентрические направления α_T^C, δ_T^C на спутник, а при помощи лазерного дальномера измерены расстояния r_T^C до ИСЗ.

После вычисления геоцентрических координат ИСЗ (см. задание 1) приступаем к определению предварительной орбиты.

Такая орбита и положение движущегося по ней ИСЗ определяется шестью элементами. Два из них - большая полуось орбиты a и эксцентриситет e определяют размеры и форму орбиты, три элемента определяют ориентацию плоскости орбиты относительно осей инерциальной системы координат, шестой элемент совместно с моментом времени определяет положение ИСЗ до орбиты.

На рис. 2.1 изображена плоскость эллиптической орбиты ИСЗ.

Точка *П* является перицентром орбиты и максимально приближена к центру масс Земли, точка *А* является апоцентром орбиты и максимально удалена от центра масс Земли. Линия, соединяющая апоцентр и перицентр орбиты, называется линией апсид.

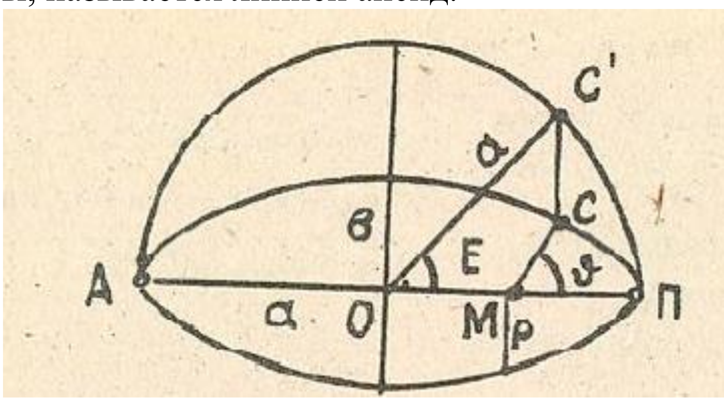

Рисунок 2.1

Уравнение эллипса в полярных координатах (уравнение орбиты) имеет вид:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos V} = \frac{P}{1 + e \cdot \cos V}$$

Где r - радиус-вектор ИСЗ; V - истинная аномалия - угол между направлением на перицентр орбиты и направлением на ИСЗ; P - фокальный параметр; a - большая полуось орбиты; e - эксцентриситет орбиты.

Если вокруг орбитального эллипса описать окружность радиусом равным большой полуоси a и восстановить в точке *С* перпендикуляр к линии апсид и продолжить его до пересечения с окружностью, получим точку *С'*. Соединим *С'* с геометрическим центром *О* орбитального эллипса. Угол между направлением на точку *П* и направлением на точку *С'* из геометрического центра *О* называется эксцентрической аномалией *Е*, причем:

$$r = (1 - e \cdot \cos E).$$

Шестым элементом, чаще всего, является время τ прохождения ИСЗ через перицентр.

Ориентация плоскости орбиты в инерциальном пространстве определяется при помощи двух углов i и Ω (рис. 2.2).

Наклонение i - угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты ИСЗ.

Долгота восходящего узла Ω - угол между положительным направлением оси *X* и направлением в точку Ω.

Аргумент перицентра ω - угол между направлением на точку восходящего узла Ω и на перицентр *П* - задает ориентацию орбиты в плоскости орбиты.

Аргумент широты *U*- угол между направлением на Ω и на ИСЗ.

Таким образом, нам необходимо определить шесть элементов предварительной орбиты *a,e,* Ω, ω, *i,* τ .

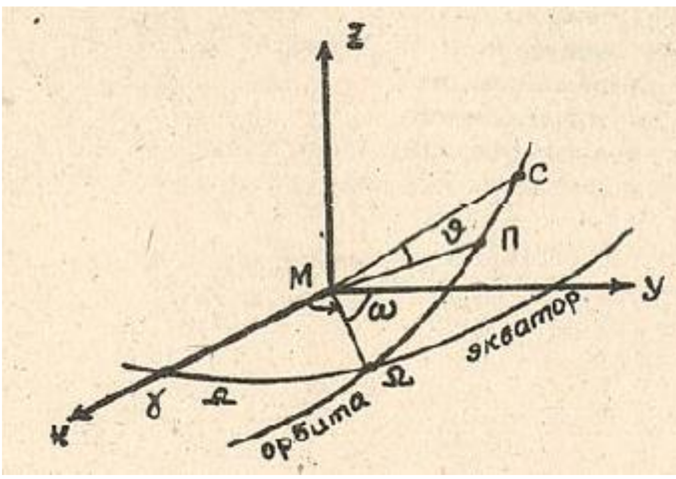

Рисунок 2.2

Исходные данные

Геоцентрическая гравитационная постоянная:

$$\mu = 398600.5 км^2 / c^2$$

Геоцентрические координаты r_1, α_1, δ_1 и $UT1_1$ берутся из задания 1

$$\alpha_1 = 49.325067^0$$

$$\delta_1 = 35.970734^0$$

$$r_1 = 7326160.701 м$$

$$UT1_1 = 20^h 39^m 58.632^s$$

На второй момент вычисляются по формулам:

$$r_2 = r_1 + 200000 + 56000 = 7582160.701 м$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 30 + 0.56 = 79.885067^0$$

$$\delta_2 = \delta_1 + 10 + 0.56 = 46.530734^0$$

$$UT1_2 = UT1_1 + 6^m 30^s + 0.4^s \cdot 56 = 20^h 46^m 51.032^s$$

Решение:

Формулы для вычисления предварительной орбиты можно получить из решения прямоугольных сферических треугольников (рис 2.3), используя формулы сферической тригонометрии.

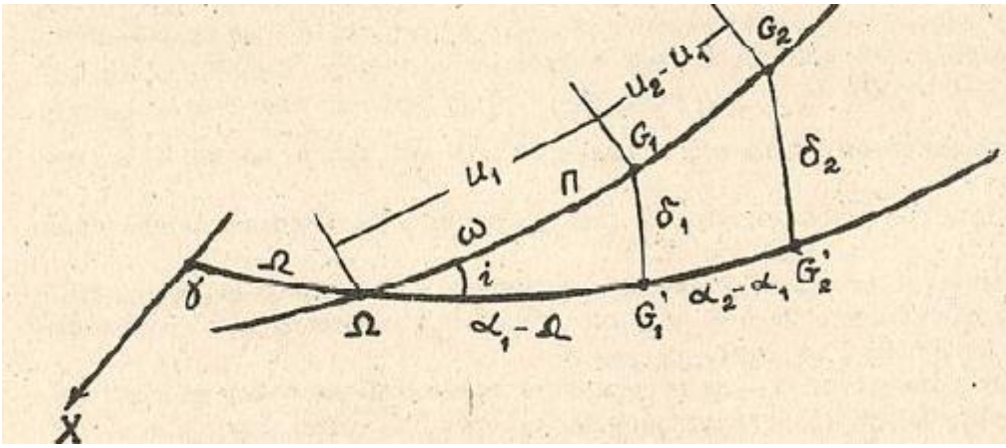

Рисунок 2.3

. Из решения прямоугольных сферических треугольников ϒC₁C₁' и ϒC₂C₂' получим формулы для вычисления долготы восходящего узла Ω, наклонения *i,* и аргумента широты U:

$$\Omega = \alpha_1 - arctg\left[\frac{tg\delta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{tg\delta_2 - tg\delta_1 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\right] = 49.325067 -$$

$$- arctg\left[\frac{tg(35.970734) \cdot \sin(79.885067 - 49.325067)}{tg(46.530734 - tg(35.970734) \cdot \cos(79.885067 - 49.325067)}\right] = 8.687761^0$$

$$i_1 = arctg(\delta_1 \cdot \operatorname{cos}ec(\alpha_1 - \Omega)) = arctg(35.970734 \cdot \operatorname{cos}ec(49.325067 - 8.687761)) = 88.492964$$

$$i_2 = arctg(\delta_2 \cdot \operatorname{cos}ec(\alpha_2 - \Omega)) = arctg(46.530734 \cdot \operatorname{cos}ec(79.885067 - 8.687761)) = 88.834873$$

$$U_1 = \arccos[\cos(\delta_1) \cdot \cos(\alpha_1 - \Omega)]$$

$$= \arccos[\cos(35.970734) \cdot \cos(49.325067 - 8.687761)] = 52.109946$$

$$U_2 = \arccos[\cos(\delta_2) \cdot \cos(\alpha_2 - \Omega)]$$

$$= \arccos[\cos(46.530734) \cdot \cos(79.885067 - 8.687761)] = 77.188849$$

. По упрощенной формуле Гаусса находим фокальный параметр:

$$P = \frac{\left[r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(U_2 - U_1)\right]^2}{\mu \cdot (UT1_2 - UT1_1)^2} = \frac{\left[7326.16 \cdot 7582.16 \cdot \sin(77.188849 - 52.109946)\right]^2}{398600.5 \cdot (74811.032 - 74398.632)^2} =$$
$$= 8153.757883\,км$$

. Вычисление *a, e,* ω среднего движения *n*.

Из уравнения орбиты получим формулу для вычисления истинной аномалии:

$$tgV_1 = \frac{\frac{P - r_1}{r_1} \cdot \cos(U_2 - U_1) - \frac{P - r_2}{r_2}}{\frac{P - r_1}{r_1} \cdot \sin(U_2 - U_1)} =$$
$$= \frac{\frac{8153.76 - 7326.16}{7326.16} \cdot \cos(77.188849 - 52.109946) - \frac{8153.76 - 7582.16}{7582.16}}{\frac{8153.76 - 7326.16}{7326.16} \cdot \sin(77.188849 - 52.109946)} = 0.562878$$
$$V_1 = 29.374208^0$$
$$V_2 = V_1 + (U_2 - U_1) = 29.374208 + (77.188849 - 52.109946) = 54.453111^0$$

После чего вычисляем эксцентриситет, аргумент перицентра, большую полуось орбиты и среднее движение:

$$e_1 = \frac{P - r_1}{r_1 \cos V_1} = \frac{8153.76 - 7326.16}{7326.16 \cdot \cos(29.374207)} = 0.12963\,км$$
$$e_2 = \frac{P - r_2}{r_2 \cos V_2} = \frac{8153.76 - 7582.16}{7582.16 \cdot \cos(54.453111)} = 0.12967\,км$$
$$\omega_1 = U_1 - V_1 = 52.109946 - 29.374208 = 22.735738^0$$
$$\omega_2 = U_2 - V_2 = 77.188849 - 54.453111 = 22.735738^0$$
$$a = \frac{P}{1 - e^2} = \frac{8153.76}{1 - 0.12963^2} = 8293.12\,км$$
$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = \frac{\sqrt{398600.5}}{8293.12^{3/2}} = 0.000835\,км/с$$

. Вычисление момента прохождения через перицентр.

Исходные данные подобраны так, что в задании будет иметь место эллиптическое движение (e<1).

А) Вычисляем эксцентрическую аномалию *E* по формуле:

$$tg\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\frac{V_1}{2}=\sqrt{\frac{1-0.12963}{1+0.12963}}\cdot tg\frac{29.374208}{2}=0.230069$$

$$E_1=25.913003^{\,0}$$

$$tg\frac{E_2}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\frac{V_2}{2}=\sqrt{\frac{1-0.12963}{1+0.12963}}\cdot tg\frac{54.453111}{2}=0.451629$$

$$E_2=48.610721^{\,0}$$

Б) Из уравнения Кеплера находим момент τ прохождения ИСЗ через перицентр:

$$\tau_1^{h,m,s}=UT1_1^{h,m,s}-\frac{1}{n^{рад/s}}(E_1^{рад}-e\cdot\sin E_1)=$$

$$=20^h39^m58.632^s-\frac{1}{0.000835}(0.45-0{,}12963\cdot\sin(25.913003))=20^h39^m58.632^s-7^m51.079^s=$$

$$=20^h47^m49.711^s$$

$$\tau_2^{h,m,s}=UT1_2^{h,m,s}-\frac{1}{n^{рад/s}}(E_2^{рад}-e\cdot\sin E_2)=$$

$$=20^h46^m51.032^s-\frac{1}{0.000835}(0.85-0{,}12963\cdot\sin(48.610721))=20^h46^m51.032^s-15^m01.495^s=$$

$$=21^h01^m52.527^s$$

Задание 3

Определение полярного сжатия Земли по вековым возмущениям оскулирующих элементов орбиты ИСЗ

Необходимо по вековым возмущениям первого порядка в долготе восходящего узла Ω, аргумента перицентра ω и начальном значении средней аномалии M_0, полученным из наблюдений, найти полярное сжатие Земли α.

Вековые возмущения в элементах орбиты ИСЗ от второй зональной гармоники $C_{2,0}$, характеризующей полярное сжатие Земли, имеют вид:

$$\delta\Omega_{2,0} = \frac{3}{2} C_{2,0} \cdot \left(\frac{r_0}{P}\right)^2 \cdot \cos i \cdot N \cdot 360^0,$$

$$\delta\omega_{2,0} = \frac{3}{4} C_{2,0} \cdot \left(\frac{r_0}{P}\right)^2 \cdot (1 - 5\cos^2 i) \cdot N \cdot 360^0,$$

$$\delta M_{2,0} = \frac{3}{4} C_{2,0} \cdot \left(\frac{r_0}{P}\right)^2 \cdot \frac{(1 - 3\cos^2 i)}{(1 - e^2)^{-1/2}} \cdot N \cdot 360^0,$$

Где фокальный параметр $P = a(1 - e^2)$, $C_{2,0}$ - коэффициент второй зональной гармоники, r_0 - средний экваториальный радиус Земли, e - эксцентриситет орбиты, i - наклонение орбиты, N - число оборотов ИСЗ.

В формулах параметр $C_{2,0}$ связан с полярным сжатием (с точностью до квадрата сжатия) формулой:

$$C_{2,0} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{\omega}^2 r_0^3}{\mu}\right)$$

$\hat{\omega}$ - угловая скорость Земли, μ - геоцентрическая гравитационная постоянная.

Исходные данные:

Оскулирующие элементы некоторого ИСЗ:

№	Эпоха оскуляции 1993 г. 6/7.X. UTO	Ω	ω	M_0
6.X				
1	$18^h22^m20.000^s$	64°.126	228°.586	125°.623
2	$19^h26^m54.000^s$	63°.864	229°.001	125°.812
3	$20^h31^m28.000^s$	63°.604	229°.416	126°.000
4	$21^h01^m08.000^s$	63°.481	229°.606	126°.087
5	$22^h40^m36.000^s$	63°.079	230°.246	126°.377
7.X				
6	$0^h22^m20.000^s$	62°.537	231°.106	126°.768
7	$4^h26^m54.000^s$	61°.751	232°.354	127°.334
8	$4^h31^m28.000^s$	61°.549	232°.671	127°.480
9	$7^h01^m08.000^s$	60°.824	233°.820	128°.002
10	$9^h40^m36.000^s$	60°.342	234°.586	128°.350

Средний экваториальный радиус Земли $r_0 = 6378.140\,км$

Угловая скорость Земли $\hat{\omega} = 0.7292115 \cdot 10^{-4}\ рад/c$

Геоцентрическая гравитационная постоянная $\mu = 398600.5\,км^3/c^2$

Осредненные элементы орбиты:

большая полуось $a = 7128.1\,км$

наклонение $i = 30.081^0$

эксцентриситет $e = 0.0103$.

Решение:

1. Вычисляем период обращения T ИСЗ по формуле:

$$T^C = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\cdot 3.14\cdot\sqrt{7128.1^3}}{\sqrt{398600.5}} = 5986.202\,c$$

2. Вычисляем разность $UT0^k - UT0^s$ в долях периода, где $k = 9,\quad s = 6$:

$$N^{об} = \frac{UT0_k^h - UT0_s^h}{T^h} = \frac{7.019 - 0.372}{1.163} = 5.715$$

3. Находим все разности:

$$\delta\Omega_{ks} = \Omega_k - \Omega_s = 60.824 - 62.537 = -1.713^0 = -0.03\,рад$$
$$\delta\omega_{ks} = \omega_k - \omega_s = 233.820 - 231.106 = 2.714^0 = 0.047\,рад$$
$$\delta M_{0,ks} = M_{0,k} - M_{0,s} = 128.002 - 126.768 = 1.234^0 = 0.022\,рад$$

Данные выражения - суть вековые возмущения за промежутки времени, найденные в п.2 в долях оборота.

4. Произведем следующие вычисления:

$$\alpha_\Omega = \frac{\hat{\omega}^2 \cdot r_0^3}{2\mu} - \frac{\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 \cdot \delta\Omega_{ks}}{\cos i \cdot N_{ks} \cdot 360^0}$$
$$\alpha_\omega = \frac{\hat{\omega}^2 \cdot r_0^3}{2\mu} - \frac{\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 \cdot \delta\omega_{ks}}{(1 - 5\cdot\cos^2 i)\cdot N_{ks} \cdot 360^0}$$
$$\alpha_{M0} = \frac{\hat{\omega}^2 \cdot r_0^3}{2\mu} - \frac{\left(\frac{r_0}{p}\right)^2 \cdot 2 \cdot \delta M_{0,ks} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}}{(1 - 3\cdot\cos^2 i)\cdot N_{ks} \cdot 360^0}$$
$$P = a(1-e^2) = 7128.1\cdot(1 - 0.0103^2) = 7127.344\,км$$
$$\alpha_\Omega = \frac{(0.7292115\cdot10^{-4})^2 \cdot 6378.140^3}{2\cdot 398500.5} - \frac{\left(\frac{6378.140}{7127.344}\right)^2 \cdot(-1.713)}{\cos(30.081)\cdot 5.715\cdot 360^0} = 0.002501673\,рад^2$$
$$\alpha_\omega = \frac{(0.7292115\cdot10^{-4})^2 \cdot 6378.140^3}{2\cdot 398500.5} - \frac{\left(\frac{6378.140}{7127.344}\right)^2 \cdot 2.714}{(1 - 5\cdot\cos^2 30.081)\cdot 5.715\cdot 360^0} = 0.002116131\,рад^2$$
$$\alpha_{M0} = \frac{(0.7292115\cdot10^{-4})^2 \cdot 6378.140^3}{2\cdot 398500.5} - \frac{\left(\frac{6378.140}{7127.344}\right)^2 \cdot 2\cdot 1.234 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-0.0103^2)}}}{(1 - 3\cdot\cos^2 30.081)\cdot 5.715\cdot 360^0} =$$
$$= 0.002501948\,рад^2$$

. Окончательное значение находим, как среднее из трех значений:

$$\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_\Omega + \alpha_\omega + \alpha_{M0}) = \frac{1}{3}(0.002501673 + 0.002116131 + 0.002501948) =$$
$$= 0.002373251\ рад^2$$