МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

И.Н. Пантелеев

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2017

УДК 517.64(075.8)
ББК 22.1я7
П 166

Пантелеев И.Н. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: учеб. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1,9 Мб) / И.Н. Пантелеев. - Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв.– Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

Учебное пособие включает материал, необходимый для подготовки к практическим занятиям по курсу высшей математики в первом семестре. Содержит краткий теоретический материал по методам решения задач по векторной алгебре и аналитической геометрии с приложениями к задачам геометрии, механики и физики, а также большое количество примеров, иллюстрирующих основные алгоритмы решения.

Издание соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению 20.01.03 «Техносферная безопасность» (направленности «Защита в чрезвычайных ситуациях», «Безопасность жизнедеятельности в техносфере», «Защита окружающей среды»), дисциплине «Высшая математика».

Ил. 106. Библиогр.: 11 назв.

Рецензенты: кафедра физики, теплотехники и теплоэнергетики Воронежского государственного университета инженерных технологий (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, доц. А.В. Буданов); канд. физ.-мат. наук, проф. Г.Е. Шунин

© Пантелеев И.Н., 2017
© ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2017

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математики развивает логическое мышление, приучает человека к точности, к умению выделять главное, сообщает необходимые сведения для понимания сложнейших задач, возникающих в различных областях деятельности. Цель пособия - помочь студентам научиться самостоятельно решать задачи по курсу высшей математики, при условии, что изучение теории должно выполняться по рекомендованному в программе учебнику и конспекту лекций.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, теоремы без доказательств, главнейшие формулы, методы и способы решения задач. Решение типовых примеров и задач в параграфе, как правило, расположено по возрастающей трудности.

Характерной особенностью является включение решений задач вычислительного характера, что позволяет развивать необходимые навыки и умение для студентов инженерных специальностей. Кроме того, значительное внимание уделено методам решения прикладных задач с физическим смыслом.

Часть задач была заимствована из сборников: Погорелов А.В. Аналитическая геометрия, 1978; Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 1976; Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, 1967; Ильин В.А., Позняк З.Г. Аналитическая геометрия, 1981.

Пособие включает задания для типового расчета по аналитической геометрии и векторной алгебре, изучаемым в курсе высшей математики в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 20.03.01 «Техносферная безопасность»

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Определители. Способы вычисления

1°. *Определителем 2-го порядка* называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — элементы определителя.

Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \quad (2)$$

Определителем n-го порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

где a_{ij} — элемент определителя, находящийся на пересечении i -й строки j-го столбца.

2°. *Свойства определителей.*

1. Величина определителя не изменится, если заменить строки столбцами, а столбцы — строками, не меняя их порядка.

2. Если поменять местами две строки (столбца) определителя, то определитель изменит знак.

3. Чтобы умножить определитель на число, достаточно умножить на это число все элементы какой-нибудь строки (столбца), т. е. общий множитель, содержащийся во всех элементах строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

4. Определитель равен нулю, если все элементы какой-нибудь строки (столбца) равны нулю.

5. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.

6. Если элементы некоторого ряда определителя представляют сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_1 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

7. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

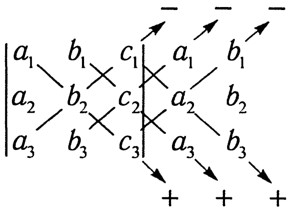
3°. *Вычисление определителей.*

1. Значение определителя второго порядка находится по формуле (1).

2. *Правило Саррюса.* а) Для вычисления определителя 3-го порядка приписывают к нему снизу две первые строки и берут сумму произведений трех элементов расположенных на главной диагонали и «прямых», параллельных главной диагонали, со знаком минус берут сумму произведений элементов, расположенных на побочной диагонали, и «прямых», параллельных ей

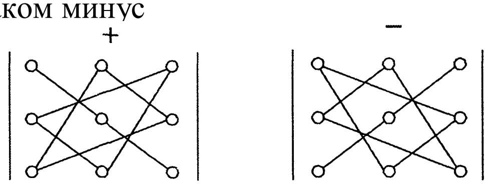
$$\begin{array}{ccc|l} & & & - \\ a_1 & b_1 & c_1 & - \\ a_2 & b_2 & c_2 & - \\ a_3 & b_3 & c_3 & \\ a_1 & b_1 & c_1 & + \\ a_2 & b_2 & c_2 & + \\ & & & + \end{array} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

б) Правило Саррюса имеет еще и другой вид. К определителю приписывают справа два первых столбца и вычисляют сумму произведений элементов, расположенных на главной диагонали, и «прямых», параллельных ей и со знаком минус вычисляют сумму произведений элементов, расположенных на побочной диагонали, и «прямых», параллельных ей



3. *Правило треугольников.*

Определитель равен алгебраической сумме произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях и в вершинах треугольников с основаниями параллельными диагоналям. Произведения элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями параллельными ей, берутся со знаком минус



4. Разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца.

а) *Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых этот элемент находится. Так для элемента a_{ij} минор обозначается M_{ij} .

б) *Алгебраическим дополнением* некоторого элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент—число четное и со знаком минус, если эта сумма — число нечетное. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будет $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

в) Всякий определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на алгебраические дополнения этих элементов

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij}\ . \qquad (6)$$

Данное свойство справедливо для определителей любого порядка и может быть использовано для их вычисления. Так определитель 4-го порядка может быть, к примеру, разложен по элементам 2-й строки в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)}\, a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+2)}\, b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{(3+2)}\, c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + (-1)^{(4+2)}\, d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

При вычислении определителей высших порядков целесообразно, используя 7-е свойство определителей (2°), добиться того, чтобы все элементы какого-либо ряда, кроме одного, стали нулями. В этом случае определитель будет равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение, т. е. на определитель, на один порядок меньший исходного.

5. *Метод приведения к треугольному виду*. Суть метода заключается в таком преобразовании определителя с помощью его свойств, когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, равны нулю. В этом случае определитель равен произведению элементов, расположенных на этой диагонали.

4°. *Теорема аннулирования*. Сумма произведений элементов какой-либо строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равна нулю

$$a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \ldots + a_{in} A_{jn} = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Отсюда следует фундаментальное тождество теории определителей

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \Delta & при\ i = j, \\ 0 & при\ i \neq j. \end{cases}$$

Аналогичные тождества справедливы и в отношении столбцов $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} \Delta & при\ i = j, \\ 0 & при\ i \neq j. \end{cases}$

5°. *Произведение определителей*. Произведение двух определителей одинакового порядка равно определителю того же порядка с элементами равными сумме произведений *i*-й строки на соответствующие элементы *j*-го столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj}$.

6°. Определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$,

образованный элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называется *определителем Вандермонда* или *степенным*. Определитель равен нулю, если какие-либо два элемента a_i и a_j равны между собой.

Вычислить определитель Вандермонда позволяет *метод рекуррентных соотношений*, который выражает данный определитель, разлагая его по элементам столбца или строки, через определители более низкого порядка

$$\Delta_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\ldots(a_2 - a_1)\Delta_{n-1}.$$

1.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Решение. а) По формуле (1) имеем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot5-(-4)\cdot2=23.$$

б) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = l.$

1.2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -a \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

по правилам Саррюса и треугольников.

Решение. а) Используем первую схему Саррюса, т. е. припишем первые две строки снизу

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot3+3\cdot5\cdot1+1(-4)(-2)-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot5(-2)-3\cdot(-4)\cdot3 = 84.$$

$$\begin{matrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix}$$

б) Используем вторую схему Саррюса, т. е. припишем первые два столбца справа

$$\begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ -a & 1 \end{matrix} = a\cdot a\cdot(-a)+1\cdot1(-a)+(-a)\cdot1\cdot1-(-a)a(-a)-1\cdot1\cdot a-$$

$$-(-a)\cdot1\cdot1= 2a(a^2+1).$$

в) Используем правило треугольников

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 1\cdot x\cdot x + 0\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot x - 0\cdot x\cdot x - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot x =$$

$$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

1.3. Упростить и вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Проще всего получить три нуля в третьем столбце.

Для этого прибавим элементы второй строки к элементам четвертой $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

Теперь умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами третьей строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы второй строки на (-2) и складывая с элементами первой строки, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & -7 & 0 & 10 \\ -8 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{(3+2)}\cdot \begin{vmatrix} 20 & -7 & 10 \\ -1 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Складывая второй столбец с первым, будем иметь

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}13 & -7 & 10\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}.$$

Умножим второй столбец на 3 и сложим с третьим

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}13 & -7 & 10\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}13 & -11\\ -1 & 8\end{vmatrix}=-93.$$

1.4. Вычислить определитель *n-го* порядка

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0\end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся свойством 7 и прибавим элементы первой строки, взятые со знаком минус, к элементам всех других строк, тогда, разлагая по элементам 1-го столбца, получим

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

1.5. Перемножить определители

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 5\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 3\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 4+1\cdot(-2) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot 4+(-3)\cdot 5+1\cdot 3 \\ 4\cdot 1+0\cdot 1+5\cdot(-2) & 4\cdot 3+0\cdot 1+5\cdot 4 & 4\cdot 4+0\cdot 5+5\cdot 3 \\ 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+3\cdot(-2) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1+3\cdot 4 & 1\cdot 4+(-2)\cdot 5+3\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -12 & 7 & -4 \\ -6 & 32 & 31 \\ -13 & 13 & 3 \end{vmatrix} = -363.$$

Если вычислить непосредственно данные определители, то получим тот же результат

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 33, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -11; \quad 33\cdot(-11) = -363.$$

1.6. Найти x из уравнения $\begin{vmatrix} 3 & x^2 & 2 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0.$

Решение. Раскроем определитель:

$$\Delta = 3ax + x^2 - 2x + ax^2 = x(3a + x - 2 + ax) = 0.$$

Откуда $x = (2-3a)/(a+1), \quad x = 0.$

1.7. Вычислить определитель Вандермонда

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем первую строку из остальных строк, тогда получим

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}.$$

Снова вычтем первую строку из остальных

$$\Delta_4 = (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c+a-b-a & c^2+ac-b^2-ab-ab \\ 0 & d+a-b-a & d^2+ad-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} c-b & (c-b)(c+b)+a(c-b) \\ d-b & (d-b)(d+b)+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{vmatrix}.$$

Вычитая из второй строки первую, получим

$$\Delta_4 = (d-a)(c-a)(b-a)\ (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & d-c \end{vmatrix} =$$

$$= (\,d-a)(c-a)(b-a)\ (c-b)(d-b)\,(\,d-c\,).$$

1.2. Системы Линейных уравнений. Правило Крамера

1°. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

по формулам Крамера имеет вид

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\quad,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\,, \qquad (2)$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ основной и дополнительные определители системы.

При решении системы могут встретиться три следующих случая:

а) $\Delta\neq 0$ — система совместна, имеет единственное решение;

б) $\Delta=0$, но $\Delta_x\neq 0$, или $\Delta_y\neq 0$ — система несовместна, не имеет решения;

в) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ — система неопределена, т. е. имеет бесчисленное множество решений (система сводится к одному уравнению).

2°. Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет ненулевые решения, определяемые формулами

$$x=k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\; y=-k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\; z=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

где k— произвольное число.

Если все определители (4) окажутся нулями, то система сводится к одному уравнению.

3°. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

При решении системы возможны три случая:

а) Основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Система имеет только нулевое решение.

б) $\Delta = 0$, но, по крайней мере, найдется один элемент, минор которого отличен от нуля. В этом случае уравнение, в котором данный элемент является коэффициентом при неизвестной, является следствием двух других уравнений и задача сводится к решению этих уравнений.

Таким образом, задача сводится к решению системы (3) и имеет бесчисленное множество решений.

в) $\Delta = 0$, и все его миноры равны нулю. В этом случае два уравнения являются следствием одного, т. е. система сводится к одному уравнению с тремя неизвестными, совместна и имеет бесчисленное множество решений.

4°. Система трех линейных неоднородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

При решении возможны три случая:

а) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера аналогично решению (2)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

б) $\Delta = 0$, но найдется, по крайней мере, один элемент, минор которого не равен нулю. Если в главном определителе заменить столбец, где находится этот элемент, столбцом из свободных членов и дополнительный определитель не будет равен нулю, то система несовместна. Если же дополнительный определитель будет равен нулю, то уравнение в котором данный элемент является коэффициентом при неизвестной, будет следствием двух других уравнений и система имеет бесчисленное множество решений.

в) $\Delta = 0$, и все его миноры равны нулю. Если хотя бы один минор дополнительных определителей отличен от нуля, то система несовместна. Если же все миноры дополнительных определителей равны нулю, то система сводится к одному уравнению, совместна и имеет бесчисленное множество решений.

2.1. Пользуясь определителями 2-го порядка **решить** системы:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 9; \end{cases}$

Решение. а) Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -33.$$

Отсюда по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3.$$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Система несовместна.

в) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

Второе уравнение системы есть следствие первого; система имеет бесчисленное множество решений.

2.2. Найти решения системы

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0, \\ 3x - 4y - 7z = 0. \end{cases}$$

Решение. Ненулевые решения находим по формулам (4)

$$x = k\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = 27k \text{ , } y = -k\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 29k \text{ , } z = k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5k,$$

где k — произвольное число.

Задаваясь различными значениями k, получим бесчисленное множество решений.

2.3. Решить системы:

а) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0, \\ 5x + y - 8z = 0, \\ 4x + 2y + 3z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ 3x + 5y - 3z = 0. \end{cases}$

Решение. а) Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 40 + 6 + 36 - 5 + 12 = 0.$

Минор первого элемента первой строки не равен нулю, следовательно, система сводится к двум уравнениям (третье уравнение есть сумма первых двух). Решая первые два уравнения по формулам (4), получим

$$x = k\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14k \text{ , } y = -k\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9k \text{ , } z = k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -k.$$

2.4. Решить системы:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 14, \\ 5x + y - 3z = 7, \\ 4x + 3y + 2z = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 2, \\ 3x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + 7 = 1, \\ x + 2y + 7 = 1, \\ x + 2y + 7 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 2, \\ 2x + y + z = 3. \end{cases}$

Решение. а) Находим главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 36 - 4 + 30 + 18 = 99$$

и дополнительные

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 297, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \end{vmatrix} = -198,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 198.$$

По формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{297}{99} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-198}{99} = -2, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{198}{99} = 2.$$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Третье уравнение есть сумма первых двух и система сводится к решению первых двух уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 2 - z, \\ x + y = 2 - 2z. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 - z & 1 \\ 2 - 2z & 1 \end{vmatrix} = z; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 - z \\ 1 & 2 - 2z \end{vmatrix} = 2 - 3z;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = z; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2 - 3z,$$

где z — произвольно, т. е. система имеет множество решений.

в) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

и все миноры равны нулю.

Поскольку все миноры дополнительных определителей равны нулю, то система сводится к одному уравнению

$x = 1 - 2y - z$, где y, z — произвольны.

г) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

и все миноры равны нулю.

Поскольку миноры дополнительных определителей отличны от нулей, то система несовместна.

2.5. **Определить** значение коэффициента α, при котором система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение

$$\begin{cases} \alpha x + 4y - 5z = 0, \\ 9x + 8y - 7z = 0, \\ 3x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку система однородная, то она ненулевое решение имеет только в том случае, когда определитель системы Δ равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & -5 \\ 9 & 8 & -7 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку определитель системы Δ=0, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля, к примеру,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

то одно из уравнений является следствием двух других, и система равносильна системе двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 9x + 8y - 7z = 0, \\ 3x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

Решение находим по формулам (4)

$$x = k\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 4k\ ,\ y = -k\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6k\ ,\ z = k\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12k$$

или $x=2k$, $y=3k$, $z=6k$, где k— произвольное число.

Задаваясь различными значениями k, получаем бесчисленное множество решений.

2.6. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4y + 3z = 17, \\ 5z + 2u = 19, \\ u + 7v = 9, \\ 6u + 5x = 11. \end{cases}$$

Решение. Найдем главный определитель системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 450.$$

Для нахождения неизвестной x найдем вспомогательный определитель Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 19 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 17 & 3 & 0 & 0 \\ 19 & 5 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 - 17 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 19 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 7 \\ 11 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 450.$$

Отсюда по формуле Крамера $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1.$ Остальные неизвестные находятся подстановкой $x = 1$ в систему уравнений $y=2$, $z=3$, $u=2$, $v=1$.

Последнее уравнение может служить проверкой найденного решения.

1.3. Основные определения теории матриц. Сложение и умножение матриц

1°. *Матрицей* называют таблицу, состоящую из элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах, и обозначают

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной*; если $m = 1$, то получим *матрицу – строку*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},$$

если $n = 1$, то получим *матрицу — столбец*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической*.

Единичной матрицей порядка n называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что определитель единичной матрицы любого порядка равен единице $\det E_n = 1$.

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковую размерность и все соответствующие элементы матриц равны между собой, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$.

2°. Суммой двух матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C такой же размерности, получаемая из этих матриц сложением соответствующих элементов

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$C = A+B.$$

Например, сумма матриц третьего порядка имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Свойства суммы матриц:

1. Сочетательный закон

$$(A+B) + C = A + (B+C).$$

2. Переместительный закон

$$A+B = -B+A.$$

3°. Разность матриц есть действие обратное сложению, т. е. чтобы найти разность двух матриц одинаковой размерности, следует произвести вычитание соответствующих элементов $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

4°. Умножение матрицы на число. Под произведением матрицы A на число k понимается матрица B получаемая из матрицы A умножением всех ее элементов на это число $b_{ij}=ka_{ij}$

$$B = kA.$$

Свойства: 1. Распределительность относительно суммы чисел

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A.$$

2. Распределительность относительно суммы матриц

$$k(A+B)=kA + kB.$$

5°. Умножение матрицы на матрицу. Под произведением матрицы A размерности $(m \times n)$ на матрицу B размерности $(n \times k)$ понимается матрица C размерности $(m \times k)$ получаемая перемножением элементов матрицы A на элементы матрицы B по правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_r a_{ir}b_{rj},$$

т. е. по правилу «строки на столбец».

Таким образом, произведение матриц $A \cdot B$ имеет смысл только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В итоге получается матрица C, у которой число строк совпадает с числом строк матрицы A, а число столбцов с числом столбцов матрицы B:

$$\mathbf{A \cdot B = C\ [(m \times n)(n \times k) = (m \times k)].}$$

Например, произведение двух матриц третьего порядка имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i2} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i3} \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC;}$

2. $\boldsymbol{(B+C)A=BA+CA;}$

3. $\boldsymbol{(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD;}$

4. $\boldsymbol{(AB)C=A(BC).}$

Здесь предполагается, что матрицы *A, B,* C, *D* допускают перемножение.

6°. Если размерность матрицы *A* равна $(m \times n)$, то

$$E_m A = A \quad \text{и} \quad AE_n = A,$$

т. е. умножение матрицы *A* на единичную матрицу есть та же самая матрица *A*, если порядок единичной матрицы позволяет перемножение.

3.1. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.2. Найти разность матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.3. Найти произведение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ на число } k = 3.$$

Решение.

$$B = kA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 21 & 3 \\ 6 & 9 & 15 & 6 \\ 12 & 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.4. Доказать равенство

$$5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним указанные действия

$$5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix};$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.5. Перемножить следующие матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 3\cdot 5 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + (-2)\cdot 5 & 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2(-1) + (-4)(-2) & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-4)\cdot 4 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 = (-4)\cdot 5 \\ 3\cdot 4 + (-1)(-1) + 5(-2) & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 5\cdot 4 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 5\cdot 5 \\ 2\cdot 4 + 3(-1) + 2(-2) & 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 4 & 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -9 & -13 \\ 3 & 27 & 25 \\ 1 & 20 & 21 \end{pmatrix};$$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 3\cdot 2 & 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 5 \\ 1\cdot 3 + 6\cdot 4 + 5\cdot 2 & 1\cdot 1 + 6\cdot 2 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 35 \\ 37 & 38 \end{pmatrix};$$

г) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 7\cdot 2 & 7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 6 + 2(-1) + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = 31.$

3.6. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2&6\\-1&2\\5&3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) *A* (*B*+*C*); б) *AB*+*AC*.

Решение.

а) ***A* (*B*+*C*)=** $\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&6\\-1&2\\5&3\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&10\\-2&7\\10&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3+1(-2)+3\cdot10 & 2\cdot10+1\cdot7+3\cdot5\\5\cdot3+4(-2)+2\cdot10 & 5\cdot10+4\cdot7+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&42\\27&88\end{pmatrix}.$$

б) ***AB*+*AC*=**$\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\-1&3\\5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6\\-1&2\\5&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1(-1)+3\cdot5 & 2\cdot4+1\cdot3+3\cdot3\\5\cdot1+4(-1)+2\cdot5 & 5\cdot6+4\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}2\cdot2+1(-1)+3\cdot5 & 2\cdot6+1\cdot4+3\cdot3\\5\cdot2+4(-1)+2\cdot5 & 5\cdot6+4\cdot4+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&17\\11&36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}18&25\\16&52\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}34&42\\27&88\end{pmatrix}.$$

3.7. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&5\\2&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&4\\5&3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) (*AB*)*C;* б) *A* (*BC*).

Решение. а) $(AB)C=\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 4+(-1)2 & 3\cdot 5+(-1)6 \\ 2\cdot 4+4\cdot 2 & 2\cdot 5+4\cdot 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10(-1)+9\cdot 5 & 10\cdot 4+9\cdot 3 \\ 16(-1)+34\cdot 5 & 16\cdot 4+34\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 35 & 67 \\ 154 & 166 \end{pmatrix}.$$

б) $A\,(BC)=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4(-1)+5\cdot 5 & 4\cdot 4+5\cdot 3 \\ 2(-1)+6\cdot 5 & 2\cdot 4+6\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 21 & 31 \\ 28 & 26 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 21+(-1)28 & 3\cdot 31+(-1)26 \\ 2\cdot 21+4\cdot 28 & 2\cdot 31+4\cdot 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & 67 \\ 154 & 166 \end{pmatrix}.$$

3.8. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

на единичные матрицы $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$E_2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}=A.$$

$$A\cdot E_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}=A.$$

3.9. Доказать, что для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}$$

справедливо равенство $AE_4 = E_4A$.

Решение. Находим, что

$$AE_4=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=A,$$

Произведение

$$E_4A.=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\3&3&5&7\\-1&8&6&8\\5&4&1&6\end{pmatrix}=A.$$

Отсюда следует, что $AE_4 = E_4A$.

3.10. Найти A^3, $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$.

Решение. Находим $A^2=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1+12&4+8\\3+6&12+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&12\\9&16\end{pmatrix}.$$

$$A^3=\begin{pmatrix}13&12\\9&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13+36&52+24\\9+48&36+32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}49&76\\57&68\end{pmatrix}.$$

3.11. Найти значение матричного многочлена

$2A^2+4A+3E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, E- единичная матрица.

Решение. Находим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 9 & 6 & 7 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$2\,A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 4 \\ 18 & 12 & 14 \\ 2 & -12 & 8 \end{pmatrix};\ 4A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix};\ 3E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2A^2+4A+3E = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 0 \\ 24 & 27 & 18 \\ 6 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

1 .4. Транспонирование матрицы

Транспонировать матрицу A — значит все ее строки i сделать столбцами j с теми же порядковыми номерами

$$a_{ij} = a_{ji}^{\,m}.$$

Свойства: 1. Если матрица A имеет размерность ($m \times n$), то матрица A^m, будет иметь размерность ($n \times m$);

2. $(A^m)^m = A;$

3. $(A+B)^m = A^m + B^m$ — сумма ($A+B$) предполагает, что матрицы A и B имеют одинаковую размерность;

4. $(AB)^m = B^m A^m$ — из возможности перемножения матриц A и B, следует возможность перемножения матрицы B^m на A^m.

5. $E^m = E$ — операция транспонирования не изменяет единичную матрицу.

4.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. **Найти A^m и $(A^m)^m$.**

Решение. Меняя строки на столбцы, получим

$$A^m = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Если еще раз поменять строки на столбцы, то получим

$$\left(A^m\right)^m = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

т. е. исходную матрицу A.

4.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти $(A+B)^m$ и $A^m + B^m$

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ (A + B)^m = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ B^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$A^m + B^m = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Доказать, что $(AB)^m = B^m A^m$.

Решение. Находим, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 14 & 11 \end{pmatrix}$.

Отсюда $(AB)^m = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 14 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Находим $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B^m = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, отсюда

$B^m A^m = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 14 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Что и требовалось доказать.

1.5. Обратная матрица

Обратной матрицей по отношению к заданной квадратной матрице A называется такая квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, которая удовлетворяет равенствам

$$AA^{-1} = E \quad \text{и} \quad A^{-1}A = E.$$

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1} , необходимо и достаточно чтобы матрица A была неособенной ($\det A \neq 0$), тогда обратная матрица определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^m$$

или

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для получения обратной матрицы A^{-1} следует все элементы матрицы A заменить их алгебраическими дополнениями, полученную матрицу транспонировать и разделить на $\det A$.

Свойства: 1. Не существует двух различных обратных матриц для данной матрицы A.

2. Определители прямой и обратной матрицы взаимно-обратны

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3. Обращение обратной матрицы дает исходную матрицу $(A^{-1})^{-1}$.

4. Обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратной последовательности

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, $\det A \neq 0$; $\det B \neq 0$.

5. Операция обращения не изменяет единичной матрицы $E^{-1} = E$.

6. Транспонирование и обращение матрицы не зависит от последовательности этих операций $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

5.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **Найти A^{-1}.**

Решение. Находим определитель

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$ и алгебраические дополнения

$A_{11}=(-1)^2\cdot 1=1$; $A_{12}=(-1)^3\cdot 2=-2$; $A_{21}=(-1)^3\cdot 5=5$; $A_{22}=(-1)^4\cdot 4=4$.

Отсюда $A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{m} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение. Находим $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Поскольку $\det A \neq 0$, то A^{-1} существует

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения

$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$; $A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11$; $A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$; $A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26$; $A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -20$; $A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18$.

Отсюда $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -1 & -11 & 26 \\ 5 & 11 & -20 \\ -1 & 11 & -18 \end{pmatrix}$.

5.3. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Доказать, что: а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; б) $(A^{m})^{-1} = (A^{-1})^{m}$.

Решение. а) Находим произведение матриц $AB=\begin{pmatrix}14 & -9\\ 3 & -3\end{pmatrix}$; det (AB) = -l5; $(AB)^{-1}= -\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -3 & 14\end{pmatrix}$; detA=5; detB=-3.

Находим обратные матрицы

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix},$$

отсюда $B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -3 & 14\end{pmatrix}.$

Что и требовалось доказать,

б) Транспонируем матрицу А;

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix};\quad \det A=5;\ (A^T)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

отсюда $(A^{-1})^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$

Что и требовалось доказать.

1.6. Матричный метод решения системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \quad\vdots\qquad\qquad\ddots\qquad\quad\ddots\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Если ввести матричные обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему можно записать матричным уравнением

$$AX = B.$$

Решение системы матричным методом определяется соотношением

$$X = A^{-1}B; \; \det A \neq 0.$$

6.1. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17; \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдём $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 99 \neq 0.$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} 8 & 11 & 17 \\ 11 & -22 & 11 \\ 9 & 0 & -18 \end{pmatrix}^{m} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ -1 & 9 & 8 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 3$; $y = -2$; $z = 5$.

1.7. Решение системы линейных уравнений методом исключения (метод Гаусса)

Решение системы линейных уравнений с помощью формул Крамера целесообразно для систем двух и трех уравнений. Для определителей четвертого и высших порядков было бы много повторяющихся вычислений, поэтому гораздо удобнее пользоваться методом Гаусса.

Суть метода исключения неизвестных заключается в следующем.

Пусть дана система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \vdots \qquad \ddots \qquad & \ddots \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Сначала делим первое уравнение на a_{11}. Затем умножаем его на a_{21} и вычитаем из второго. Далее умножаем уравнение на a_{31} и вычитаем из третьего. Продолжая процесс, приходим к системе, где только первое уравнение содержит x_1. Первое уравнение оставляем в покое.

Аналогично исключаем из оставшихся уравнений x_2 и, продолжая вычисления, преобразуем систему к ступенчатому виду

$$
\begin{aligned}
x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n &= a_1;\\
x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= a_2;\\
\vdots \qquad\qquad \ddots \quad &\vdots\\
x_n &= a_n.
\end{aligned}
$$

Из полученной системы видно, что все неизвестные находятся последовательно из последнего выражения.

7.1. Дана система уравнений

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 = 4,\\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11,\\
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.
\end{cases}
$$

Доказать ее совместность и решить: а) методом Гаусса;
б) методом матричного исчисления.

Решение. Составим и вычислим определитель

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60,
$$

следовательно, система совместна.

а) Решение методом Гаусса. За ведущее уравнение примем первое уравнение. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму и третьему уравнению ведущее, умноженное на $-\frac{3}{2}$. Получим

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - x_3 = 4,\\
\quad \frac{11}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5,\\
\quad -\frac{1}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 = 5.
\end{cases}
$$

Второе и третье уравнения образуют первую подсистему. За второе ведущее уравнение примем второе уравнение. Исключая x_2 из третьего уравнения, получим

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ \dfrac{11}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 5, \\ \dfrac{60}{11}x_3 = \dfrac{60}{11}. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

б) Матричный метод. Запишем исходные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 \\ 6 & 11 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 180 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

7.2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ 4x + 5z + 2t = 3, \\ 2x - y + z + t = 1, \\ 2x + y + 4z = 1. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе, затем умножим первое на 2 и вычтем из него третье и четвертое уравнение. Приходим к системе, где только первое уравнение содержит *x*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ 4y - z + 2t = -3, \\ 3y + z + t = -1, \\ y - 2z + 2t = -1. \end{cases}$$

Далее умножаем последнее уравнение на 4 и на 3 и вычитаем его из второго и третьего уравнения

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ y - 2z + 2t = -1, \\ 7z - 6t = 1, \\ 7z - 5t = 2. \end{cases}$$

Наконец, вычитаем из последнего третье уравнение

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ y - 2z + 2t = -1, \\ 7z - 6t = 1, \\ t = 1. \end{cases}$$

Отсюда $t = 1$, $z = 1$, $y = -1$, $x = -1$.

1.8. Ранг матрицы

Если в матрице взять какие-либо k строк и столбцов и составить определитель из элементов, которые окажутся на их пересечении, то этот определитель называется минором k-го порядка данной матрицы.

Из строк и столбцов матрицы можно составить определители различных порядков, не превышающих наименьшего из чисел m или n.

Рангом r матрицы называют наибольший из порядков определителей этой матрицы, отличных от нуля.

Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются *эквивалентными. Эквивалентность* матриц обозначается знаком ~ между ними. Элементарными преобразованиями называются такие преобразования, при которых миноры матрицы либо не меняют своей величины, либо, меняя величину, не обращаются в нуль.

Элементарные преобразования матриц позволяют:

1. Переставлять местами между собой строки (столбцы).

2. Прибавлять к какой-либо строке (столбцу) другую строку (столбец), умноженную на любое число.

3. Умножать строку (столбец) на число, отличное от нуля.

4. Вычеркивать строки (столбцы), состоящие из одних нулей.

Элементарные преобразования позволяют получить матрицу, эквивалентную исходной, для которой легко установить ранг.

Для этого необходимо с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = 0$ при $i > j$; $a_{ij} \neq 0$ при $i = j$.

Ранг этой матрицы равен k, так как она имеет отличный от нуля определитель k-го порядка.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором этой матрицы.

Теорема о базисном миноре. Если матрица имеет отличный от нуля минор порядка k, а все миноры порядка k+1, содержащие данный минор (окаймляющие миноры), равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Метод окаймляющих миноров. Находим минор второго порядка отличный от нуля, если такой существует, и вычисляем окаймляющие его миноры третьего порядка, пока не найдем среди них отличного от нуля и т. д.

Если найден отличный от нуля минор порядка k, то вычисляем окаймляющие миноры k+1 порядка. Если все они равны нулю или таких миноров вообще нет (в случае, когда матрица содержит k столбцов или k строк), то ранг матрицы равен k, иначе этот процесс продолжаем.

8.1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

а оба окаймляющие его миноры третьего порядка равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то ранг матрицы A равен двум, а базисным минором является, например, M_2.

8.2. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Переставим первый и второй столбец местами

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Чтобы иметь дело с меньшими числами, умножим первый столбец на $\frac{1}{2}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Первую строку прибавляем ко второй и третьей, умножая при этом ее на (-2) и (-1), соответственно

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, получим

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 8 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2\end{pmatrix}\sim$$

Умножим вторую строку на (-2) и прибавим ее к третьей строке

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 8 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}\sim$$

Отсюда видно, что ранг матрицы равен $r = 2$.

б) Поменяем местами первую и вторую строку

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & 5\\ 1 & 7 & 5 & -1\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 7 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 1 & 5\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ 7 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}\sim$$

Умножим первую строку на 3 и вычтем из второй, затем прибавим ее к третьей, а к четвертой прибавим первую строку, умноженную на (-7)

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 0 & -22 & -14 & 8\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & -48 & -28 & 16\end{pmatrix}\sim$$

Умножим вторую строку на (- $\frac{1}{2}$), а четвертую на $\frac{1}{4}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & 11 & 7 & -4\\ 0 & -12 & -7 & 4\end{pmatrix}\sim$$

Поменяем местами второй и четвертый столбец

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 7\\ 0 & -4 & 7 & 11\\ 0 & -4 & 7 & 11\\ 0 & 4 & -7 & -12\end{pmatrix}\sim$$

Умножим второй столбец на $(-\frac{1}{4})$ и вычтем вторую строку из третьей, а к четвертой ее прибавим

$$\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & 5 & 7\\ 0 & 1 & 7 & 11\\ 0 & 1 & 7 & 11\\ 0 & -1 & -7 & -22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & 5 & 7\\ 0 & 1 & 7 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim$$

Вычеркнем третью строку и поменяем местами третий и четвертый столбец

$$\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & 5 & 7\\ 0 & 1 & 7 & 11\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & 7 & 5\\ 0 & 1 & 11 & 7\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim$$

Отсюда следует, что ранг матрицы r = 3.

1.9. Решение системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\ \quad\vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \ddots\vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n.\end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A системы равнялся рангу расширенной матрицы B, т. е. $r(A) = r(B)$.

Система называется *несовместной,* если она не имеет ни одного решения. В этом случае ранг матрицы A меньше ранга матрицы B.

Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если решений более одного. Совместная система будет определенной, если ранг системы равен числу неизвестных, т. е. $r(A)= n$ неопределенной, если ранг системы меньше числа неизвестных, т. е. $r(A) < n$.

Если все свободные члены равны нулю $b_1, b_2, \ldots, b_n = 0$, то система линейных уравнений называется *однородной* и всегда совместна.

Пусть, в общем случае, ранг совместной системы меньше числа неизвестных или числа уравнений $r <$ (n, v, m), причем базисный минор располагается в r строках и столбцах матрицы A . Эти r неизвестных $x_1, \ldots ,x_r$ назовем *базисными неизвестными*, а, $x_{r+1},\ldots ,x_n$ назовем *свободными неизвестными* и перенесем их в правую часть системы уравнений. Решая полученную систему уравнений (по формулам Крамера), определяем базисные неизвестные через свободные.

Придавая свободным неизвестным произвольные значения, находим, что решений у этой системы бесконечно много.

Если ранг матрицы A равен рангу матрицы B и $r < m$, то выбираем из системы какие-нибудь r уравнений, матрица коэффициентов которых имеет ранг r.

Решение этих r уравнений будет являться решением и остальных $m - r$ уравнений системы.

Если же в этом случае r < n, то система имеет бесчисленное множество решений.

9.1. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \end{pmatrix}.$$

Прибавим вторую строку к пятой, а третью к четвертой

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \\ 4 & 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Разделим четвертую строку на 3, а последнюю строку на 4

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычтем первую строку из четвертой и последней

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем четвертую и пятую строки

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица системы

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r\,(A) = 3$.

Ранг расширенной матрицы также равен $r(B) = 3$, поскольку только что рассмотренный определитель является минором расширенной матрицы. Следовательно, система совместна.

Для решения системы выберем, например, уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим, что $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Нетрудно убедится, что третье и пятое уравнения при этих значениях неизвестных тождественно удовлетворяются.

9.2. **Исследовать** систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы. Для этого запишем расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов первого столбца элементы второго столбца

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A системы будет $\mathrm{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Разделим все элементы последнего столбца на 3

$$\mathrm{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим третий столбец к четвертому

$$\mathrm{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отнимаем из последней строки третью

$$\mathrm{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$M_{33} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг системы $r(A)=1$. Вернемся к расширенной матрице, сократив на 3 предпоследний столбец

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из первого столбца вычтем последний столбец, а из последней строки вычтем предпоследнюю

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После простейших преобразований получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$M_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, ранг расширенной системы равен $r(B) = 3$.

Поскольку ранг матрицы A меньше ранга расширенной матрицы B, то система несовместна.

9.3. **Исследовать** систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделим второй столбец на 3, а третий столбец на 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

К второй строке прибавляем первую и сокращаем на 2. Далее, из последней строки вычитаем вторую

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг расширенной матрицы равен $r(B) = 2$. Рассмотрим теперь матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы тоже равен 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r\,(A)=2.$$

Поскольку ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то примем за свободную неизвестную x_3 и перенесем ее в правую часть

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -1 - 2x_3, \\ x_1 + 9x_2 = 3 - 6x_3. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений по формулам Крамера, определяем базисные неизвестные x_1, x_2 через свободную x_3

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1-2x_3 & -3 \\ 3-6x_3 & 9 \end{vmatrix}}{12} = -3x_3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-2x_3 \\ 1 & 3-6x_3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1-x_3}{3}.$$

Придавая свободной неизвестной произвольные значения, находим, что решений у этой системы бесконечно много.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторные и скалярные величины. Линейные операции над векторами

1°. Основные определения. Величина называется *скалярной,* если она определяется заданием ее числового значения, и *векторной,* если для ее определения задается еще и ее направление.

Два вектора считаются *равными,* если они имеют одинаковую длину, параллельны друг другу и одинаково направлены.

Два вектора называются *противоположными,* если они имеют одинаковую длину, параллельны и противоположно направлены.

Два вектора называются *коллинеарными,* если они расположены на параллельных прямых (или на одной прямой), независимо от того направлены ли они одинаково или их направления противоположны. Если векторы лежат в одной плоскости или в плоскостях, параллельных между собой, то они называются *компланарными.*

Вектор, модуль которого равен нулю, называется *нуль-вектором.*

Нуль-вектор не имеет направления.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным* вектором.

Единичный вектор, одинаково направленный с вектором $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$.

2°. *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, построенный следующим образом: перенесем начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{c}$ и построим вектор $\vec{c}$ так, чтобы его начало совпадало с началом вектора $\vec{c}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$ (рис. 2.1).

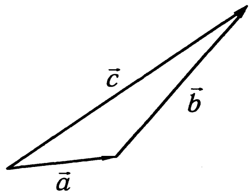


Рис. 2.1

Сумма векторов обладает свойствами сочетательности и переместительности

а) $(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$, б) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Вектор $\vec{c}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна вектору $\vec{a}$, т. е. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Если два вектора приведены к общему началу, то их разность есть вектор, соединяющий их концы и направленный от вычитаемого к уменьшаемому (рис. 2.2).

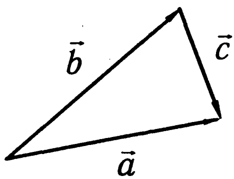


Рис. 2.2

Свойства

а) $\vec{a}+(-\vec{b}) = \vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-(-\vec{b}) = \vec{a}+\vec{b}$.

3°. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ коллинеарный вектору $\vec{a}$, модуль которого равен $|\lambda||\vec{a}|$.

Если $\lambda > 0$, направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают; если $\lambda < 0$ — направления векторов противоположны.

Свойства

а) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$; б) $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$; *в)* $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

4°. Отношение вектора к его длине или модулю называется *единичным* вектором. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить с помощью единичного вектора $\vec{a}^0$, того же направления, что и вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, откуда $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

1.1. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.3). **Найти** их сумму и разность.

Решение. а) Векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ перпендикулярны. Сложение выполняем по правилу треугольника (рис. 2.4).

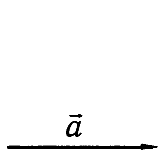


Рис. 2.3

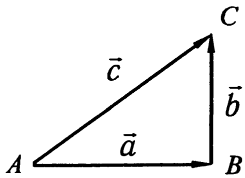


Рис. 2.4

От произвольной точки *A* отложим вектор $\vec{a}$, совместим начало вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$, вектор, идущий от начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, есть вектор-сумма. Модуль вектор-суммы находим по теореме Пифагора

$$\overrightarrow{AC} = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

б) Совместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и соединим их концы.

Вектор, идущий из конца вектора - «вычитаемого» в конец вектора -«уменьшаемого», есть вектор-разность (рис. 2.5).

Длина вектора $|\overrightarrow{CB}|$ может быть найдена по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{CB}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Рассмотрим еще один способ нахождения разности векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Поместим начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ и построим вектор -$\vec{b}$, т. е. вектор противоположно направленный. Поскольку под разностью двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ понимают третий вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и -$\vec{b}$, то вектор-разность находим по правилу треугольника, т. е. это вектор идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора -$\vec{b}$ (рис. 2.6).

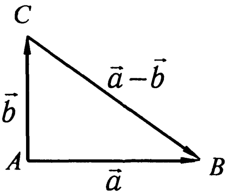


Рис. 2.5

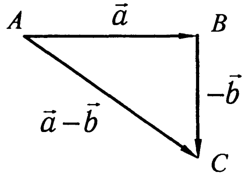


Рис. 2.6

Нетрудно заметить, что вектора-разности (рис. 2.5 и рис. 2.6) равны по величине и направлению, следовательно, они равны.

1.2. Дан вектор $\vec{a}$ (рис. 2.7). **Построить** векторы: а) $3\vec{a}$*;* *б)* $-\frac{3}{2}\vec{a}$.

Решение. а) Увеличиваем модуль вектора $\vec{a}$ в 3 раза, сохраняя его направление. Получаем вектор $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\vec{a}$ (рис. 2.8)

б) Строим вектор $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \frac{2}{3}\vec{a}$, а затем поворачиваем *OA* на 180°.

Получим искомый вектор $\left|\overrightarrow{OB}\right| = -\frac{2}{3}\vec{a}$ (рис. 9). Можно построить сначала вектор - $\vec{a}$, а затем изменить его модуль в $\frac{2}{3}$ раза.

Рис. 2.7

Рис. 2.8

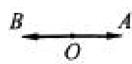


Рис. 2.9

1.3. Доказать, что в произвольном четырехугольнике вектор, соединяющий середины диагоналей, равен геометрической полусумме двух векторов, образующих противоположные стороны четырехугольника.

Решение. Построим четырехугольник и векторизуем стороны и диагонали, как показано на рис. 2.10. Требуется доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$ или $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})$. На основании правила сложения векторов вектор $\overrightarrow{EF}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}$.

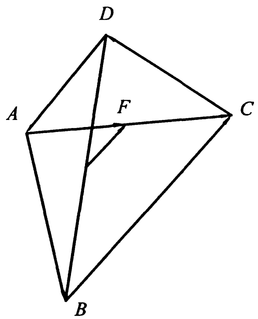


Рис. 2.10

Представим векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AF}$ через векторы сторон четырехугольника

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD};\quad \overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB});$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).$$

Подставляя найденные векторы в исходное векторное равенство, получим

$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}),$ что и требовалось доказать. Аналогично доказывается и второе векторное равенство.

1.4. Разложить высоту $\overline{DO}$ правильной треугольной пирамиды (рис. 2.11) по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

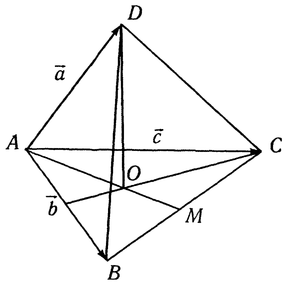


Рис. 2.11

Решение. Поскольку пирамида правильная, точка пересечения высоты DO и основания является точкой пересечения медиан основания. Используя свойство точки пересечения медиан треугольника, запишем

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.$$

Поскольку, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, то

$$\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}.$$

1.5. В параллелограмме $ABCD$ точки M,N,P,Q середины сторон (рис. 2.12).

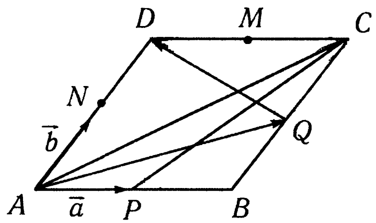


Рис. 2.12

Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{CP}$ как линейные комбинации векторов $\overrightarrow{AP} = \vec{a}$ *и* $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$.

Решение.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b};\ \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = 2\vec{a} + \vec{b};$$

$$\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - 2\vec{a};\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = -2\vec{b} - \vec{a}.$$

1.6. Однородный треугольник задан радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ своих вершин M_1, M_2, M_3. **Найти** радиус-вектор $\vec{R}$ центра тяжести.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 2.13).

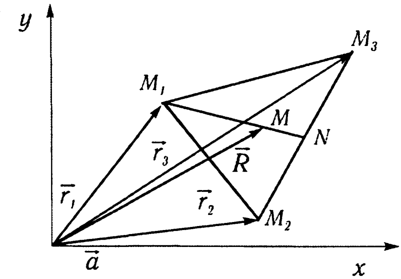


Рис. 2.13

Центр тяжести однородного треугольника находится в точке М пересечения его медиан. Векторизуем стороны треугольника, как показано на рисунке и проведем медиану M_1N. Из свойств медианы следует, что $\overrightarrow{M_2N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_3}$ и

Радиус вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{R}$ находим как сумму векторов $\vec{R} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2N} + \overrightarrow{NM}$. Вектор $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2$. Представим выражения векторов $\overrightarrow{M_2N}$ и $\overrightarrow{NM}$ через известные векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.

Из треугольника OM_2M_3 находим $\overrightarrow{M_2M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$, тогда $\overrightarrow{M_2N} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$. Из треугольника M_1 M_2 N находим

$\overrightarrow{NM_1} = -(\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2N})$; из треугольника OM_2M_1 находим $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Отсюда: $\overrightarrow{NM_1} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2))=$

$= \vec{r}_1 - \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3)$; $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 - \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3))$. Подставляя найденные значения векторов в выражение суммы векторов, получим $\vec{R} = \vec{r}_2 + \frac{1}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \frac{1}{3}(\vec{r}_1 - \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3)) = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$.

1.7. Электрический фонарь весом 3кг подвешен к потолку на шнуре AB и затем притянут к стенке веревкой BC (рис. 2.14).

Определить натяжение шнура и веревки, если известно, что угол $\alpha=60^{\circ}$, угол $\beta=135^{\circ}$.

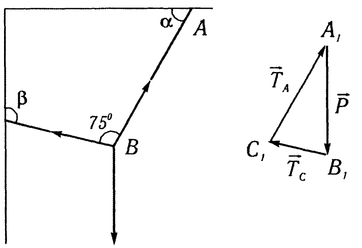


Рис. 2.14

Решение. На точку В действует две силы $\vec{T}_A, \vec{T}_C$ и $\vec{P}$ — вес лампы. Поскольку система сил находится в равновесии, то равнодействующая этих сил равна нулю.

Построим треугольник сил. В выбранном масштабе строим вектор $\vec{P}$ (рис. 2.14). Через начало этого вектора проведем линию действия силы $\vec{T}_A$, а через конец — линию действия силы $\vec{T}_C$. Получим треугольник $A_1B_1C_1$. Векторизуем его стороны $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{T}_C$, $\overrightarrow{C_1A_1} = \vec{T}_A$. Модули этих сил найдем по теореме синусов.

Для этого определим углы при вершинах треугольника.

По условию задачи угол при вершине A_1 равен 30°, при вершине В — 45°, значит, угол при вершине C_1 равен 105°.

Учитывая, что sinl05°=sin75°, по теореме синусов имеем

$$\frac{T_A}{\sin 45^\circ} = \frac{T_C}{\sin 30^\circ} = \frac{P}{\sin 75^\circ}$$

Откуда $T_A = 3\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 2{,}19$ *кг*; $T_C = 3\frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 1{,}55$ *кг*.

1.8. К вершине *O* прямоугольного параллелепипеда *ABCOGDEF* (рис. 2.15) приложены три силы, изображаемые векторами $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}$, **найти** величину и направление равнодействующей $\vec{F}$.

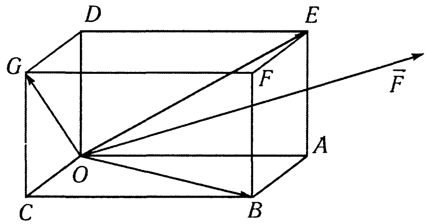


Рис.2.15

Решение. Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OC} = \vec{b}, \overrightarrow{OD} = \vec{c}$, тогда $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}.$

Поскольку $\vec{F} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}$, то

$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 2\overrightarrow{OF},$$

т. е. равнодействующая $\vec{F}$ изображается удвоенной диагональю параллелепипеда $\overrightarrow{OF}$.

2.2. Разложение вектора по координатным осям

1°. Всякий вектор в пространстве можно представить как сумму трех векторов, один из которых расположен на оси *Ox*, второй на оси *Oy* и третий — на оси *Oz*

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{1}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы координатных осей.

Модуль вектора $\vec{a}$ равен

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{2}$$

Если через α, β, γ обозначить углы, которые вектор $\vec{a}$ составляет с положительными направлениями координатных осей, то формулы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \tag{3}$$

дают выражения направляющих косинусов вектора $\vec{a}$ через его проекции.

Между направляющими косинусами существует зависимость

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

2°. Действия над векторами.

1. Сумма векторов

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}\ . \tag{5}$$

2. Умножение на скаляр

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\ . \tag{6}$$

3. а) Если $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2, y_2,\ z_2)$ — координаты начала и конца вектора, то проекции вектора

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1\ ,\ a_z = z_2 - z_1\ . \tag{7}$$

б) Модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{8}$$

в) Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{a}|} \tag{9}$$

г) Если некоторая ось l составляет с координатными осями углы α, β, γ, то проекция произвольного вектора $\vec{a}$ на эту ось определяется равенством

$$Пр_l\vec{a} = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma\ . \tag{10}$$

3°. Задачи на точку.

1. Расстояние между точками

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \tag{11}$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (11) примет вид

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \tag{12}$$

2. Деление отрезка M_1M_2 в заданном отношении λ. Координаты точки $M\,(x,y,z)$ делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ \text{ или } \vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\,\vec{r}_2}{2}\ .$$

Если точка М делит отрезок M_1M_2 пополам, то λ = 1 и формулы (13) примут вид

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ,\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{15}$$

3. Координаты центра тяжести системы n материальных точек массы m_i, расположенных в пространстве, находят по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\ y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\ z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}. \tag{16}$$

2.1. Заданы начало A(3,2,-1) и конец B(1,5,2) вектора $\overrightarrow{AB}$.

Найти разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по координатным осям, его модуль и направляющие косинусы.

Решение. Найдем по формулам (7) проекции вектора на координатные оси

$(AB)_x=1\text{-}3=\text{-}2;\ (AB)_y=5\text{-}2=3;\ (AB)_z=2+1=3.$

Отсюда вектор равен $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$, а его модуль

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}\ .$$

По формулам (9) направляющие косинусы

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{22}},\ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{22}},\ \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}\ .$$

2.2. Найти единичный вектор для вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$.

Решение. Находим модуль вектора $|\vec{a}\ |$ по формуле (2)

$$\backslash\, \vec{a}\ \backslash = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}\ .$$

Единичный вектор $\vec{a}^0$ находим по формуле

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{k}\ .$$

2.3. Найти сумму векторов

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\ , \vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\ ,\ \vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\ .$$

Решение. По формуле (5) находим

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3 + 4 - 1)\vec{i} + (2 - 1 + 2)\vec{j} + (5 + 3 + 2)\vec{k} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 10\vec{k}\ .$$

2.4. Найти разность векторов $\vec{a}$ (2;4;-1), $\vec{b}$ (4;-3;5).

Решение. По формуле (5) находим

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-4)\vec{i} + (4+3)\vec{j} + (-1-5)\vec{k} = -2\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}\ .$$

2.5. Определить координаты вектора $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{b}\ | = 5$, он коллинеарен вектору $\vec{a} = \sqrt{7}\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ и его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{b}$ через *x, y z,* т. е. $\vec{b} = \{x,y,z\}$. Поскольку векторы коллинеарные, то $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \sqrt{7}\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} + 2\lambda\vec{k}$.

Из равенства векторов $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \sqrt{7}\lambda\vec{i} - 5\lambda\vec{j} + 2\lambda\vec{k}$ следует равенство их координат:

$x = \sqrt{7}\lambda,\ y = -5\lambda,\ z = 2\lambda$. Так как $|\vec{b}\ | = 5$, то по формуле (2) имеем

$\sqrt{7\lambda^2+(-5\lambda)^2+(2\lambda)^2}=5$, откуда λ = ± $\dfrac{5}{6}$. Поскольку направления векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ совпадают, то следует взять λ >0, т. е. λ = $\dfrac{5}{6}$.

Таким образом, координаты искомого вектора будут:

$$x=\frac{5}{6},\ y=-\frac{25}{6},\ z=\frac{5}{3}.$$

2.6. На векторах $\vec{a}$ (3;1;4) и $\vec{b}$ (-2;7;1) построен параллелограмм.

Найти величину и направления его диагоналей.

Решение. Из точки *A* отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и построим параллелограмм *ABCD* (рис. 2.16).

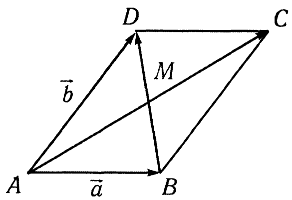


Рис. 2.16

Векторизуем стороны и диагонали параллелограмма. Из треугольника *ABC* диагональ

$$\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}=(-2-3)\vec{i}+(7-4)\vec{j}+(1-4)\vec{k}=-5\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}.$$

Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен

$$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-5)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{70}.$$

Направляющие косинусы определим по формулам (3)

$$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{70}},\ \cos\beta=\frac{6}{\sqrt{70}},\ \cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{70}}.$$

Вектор $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-2{,}5\vec{i}+3\vec{j}-1{,}5\vec{k}$.

Из треугольника *ABM* находим вектор

$$\overrightarrow{AM}:\quad \overrightarrow{AM}=\vec{a}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\vec{i}+4\vec{j}+2{,}5\vec{k}.$$

Отсюда вектор $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ равен $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$. Длина диагонали AC равна $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{90}$, а ее направление определяется направляющими косинусами

$$\cos\alpha_1 = -\frac{1}{3\sqrt{10}},\ \cos\beta_1 = \frac{8}{3\sqrt{10}},\ \cos\gamma = -\frac{5}{3\sqrt{10}}.$$

2.7. Даны точки A (1,2,-1) и B (4,-3,2). **Найти** проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. По условию задачи направляющие косинусы равны друг другу и из условия $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ следует, что $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции $\overrightarrow{AB}$ (3, - 5 , 3). Отсюда по формуле (10) находим, что искомая проекция на ось равна $Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.8. **Найти** величину и направляющие равнодействующей $\vec{R}$ трех сил $\vec{F}_1$ {14,5,4}, $\vec{F}_2$ {-6,2,7}, $\vec{F}_3$ {4,2,9} .

Решение. Находим проекции равнодействующей как сумму проекций компонентов $\vec{R} = 12\vec{i} + 9\vec{j} + 20\vec{k}$. Величина равнодействующей $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{144 + 81 + 400} = 25$. Направление равнодействующей определяется направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \frac{12}{25},\ \cos\beta = \frac{9}{25},\ \cos\gamma = \frac{4}{5}.$$

2.9. **Даны** точки А(1,2,3) и В(-1,4,2). **Найти** длину отрезка AB и координаты точки С, делящей отрезок в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

Решение. Применяя формулу (11), находим длину отрезка $d_{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2 + (2-3)^2} = 3$.

Координаты точки C находим по формулам (13)

$$x=\frac{1+\frac{1}{3}(-1)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\ y=\frac{2+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},\ z=\frac{3+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{11}{4}.$$

2.10. Отрезок *AB* делится точкой C в отношении, равном 2. По данным точкам *A* (3,4,-1) и *C* (2,-3,1) **найти** точку *B*.

Решение. Используя формулы деления отрезка в данном отношении (13), выразим координаты точки *B*

$$x_2=\frac{(1+\lambda)x-x_1}{\lambda},\ y_2=\frac{(1+\lambda)y-y_1}{\lambda},\ z_2=\frac{(1+\lambda)z-z_1}{\lambda}.$$

Подставляя данные условия, получаем

$$x_2=\frac{3\cdot 2-3}{2}=1{,}5,\ y_2=\frac{3\cdot(-3)-4}{2}=-6{,}5,\ z_2=\frac{3\cdot 1+1}{2}=2.$$

2.3. Скалярное произведение

1°. *Скалярным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр (число), равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

2°. Свойства.

1. Переместительность

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}. \qquad (2)$$

2. Распределительность

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c}). \qquad (3)$$

3. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения

$$(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}). \qquad (4)$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2. \qquad (5)$$

5. Скалярное произведение единичных векторов определяется формулами

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0. \qquad (6)$$

3°. Выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных проекций перемножаемых векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z. \qquad (7)$$

Угол между двумя векторами

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (8)$$

Условие перпендикулярности двух векторов

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \qquad (9)$$

Косинус угла между двумя направлениями в пространстве равен сумме произведений одноименных направляющих косинусов этих направлений

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2\ . \qquad (10)$$

Условие перпендикулярности двух направлений

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0. \qquad (11)$$

4°. Работа A силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

$$A=|\vec{F}||\vec{S}|\cos(\vec{F},\vec{S}). \qquad (12)$$

3.1. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}$-$3\vec{b}$ и $\vec{c}+4\vec{d}$.

Решение. Находим $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{c}+4\vec{d})=$

$$=2\ \vec{a}\cdot\vec{c}+8\vec{a}\cdot\vec{d}-3\vec{b}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\cdot\vec{d}\ .$$

3.2. Дан ромб $ABCD$ (рис. 17). **Доказать,** что его диагонали пересекаются под прямым углом.

Решение. Векторизуем стороны и диагонали ромба, как показано на рис. 2.17. Тогда имеем $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.$ Поскольку $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$, то

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. Составим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$:

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AB})^2-(\overrightarrow{BC})^2=0$,так как в ромбе все стороны равны и $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Поскольку скалярное произведение векторов—диагоналей $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ равно нулю, то эти векторы взаимно-перпендикулярны, что и требовалось доказать.

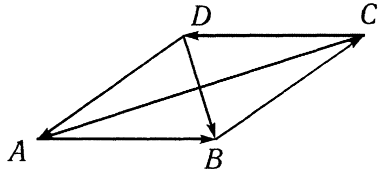


Рис. 2.17

3.3. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

Решение. Используя формулу (8), имеем

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot1+(-3)(-1)+5\cdot3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{418}}.$$

3.4. Определить углы треугольника *ABC* с вершинами A(1,1,1); B(2-1,3) и C(0,0,5).

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$(1,-2,2), $\overrightarrow{AC}$(-1,-1,4). Угол между ними находим по формуле (8)

$$\cos A=\frac{1(-1)+(-2)(-1)+2\cdot4}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad A=45^\circ.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ (-1,2,-2) и $\overrightarrow{BC}$ (-2,1,2). Отсюда угол между ними

$$\cos B = \frac{(-1)(-1)+(-2)(-1)+2\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = 0, \quad B = 90^\circ,$$

следовательно, C = 45°.

3.5. Заданы направления l_1 (45°;45°;90°) и l_2 (45°;90°;45°). **Найти** угол φ между ними.

Решение. По формуле (10) имеем

$$\cos\varphi = \cos 45^\circ \cos 45^\circ + \cos 45^\circ \cos 90^\circ + \cos 90^\circ \cos 45^\circ.$$

Отсюда φ =60°.

3.6. В плоскости *Oxy* **найти** вектор $\vec{a}$, перпендикулярный вектору $\vec{b}$ {3, -4,12} и имеющий с ним одинаковую длину.

Решение. Пусть вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Из условия перпендикулярности векторов имеем $3x - 4y=0$. Длина вектора $\vec{b}$ будет $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{9+16+144} = 13$, а длина $|\vec{a}\,| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, $x^2+y^2=169$. Поскольку $x = \frac{2}{3}y$, , то $\frac{16}{9}x^2+y^2=169$, $y = \pm\frac{39}{5}$, $x = \pm\frac{52}{5}$.

Откуда $\vec{a} = \pm\frac{13}{5}(4\vec{i}+3\vec{j})$.

3.7. Найти единичный вектор $\vec{n}$, одновременно перпендикулярный вектору $\vec{a}$ {5,-4,3} и оси абсцисс.

Решение. Пусть вектор $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поскольку он перпендикулярен оси абсцисс, то $\vec{n} = \vec{n}\,(0,y,z)$. Для единичного вектора имеем $|\vec{n}| = 1$ => $y^2+z^2 = 1$. Из условия перпендикулярности векторов получим $\vec{a}\cdot\vec{n} = -4y+3z = 0$; $y = \frac{3}{4}z$. Отсюда $\frac{9}{16}z^2+z^2 = 1$, $z = \pm\frac{4}{5}$, $y = \pm\frac{3}{5}$.

Таким образом, $\vec{n} = \pm\frac{1}{5}(3\vec{j}+4\vec{k})$.

3.8. Найти координаты вектора $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, если он ортогонален векторам $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$ скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ равно - 1 .

Решение. Условие ортогональности двух векторов заключается в равенстве нулю их скалярного произведения. Поэтому $x - 2y + 3z = 0$ и $2x + 6z = 0$.

Скалярное произведение вектора $\vec{d}$ *и* $\vec{c}$ запишем в виде $x+y+2z=-1$.

Полученные уравнения образуют неоднородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + 6z = 0, \\ x + y + 2z = -1. \end{cases}$$

Находим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение. Воспользуемся формулами Крамера $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$, $z = \dfrac{D_z}{D}$.

Вычислим определители D_x , D_y, D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12; \ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \ D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Отсюда $x = \dfrac{12}{-4} = -3$, $y = \dfrac{0}{-4} = 0$, $z = \dfrac{-4}{-4} = 1$.

Таким образом, вектор $\vec{d}$ будет $\vec{d} = -3\vec{i} + \vec{k}$.

3.9. Найти координаты вектора $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, если он ортогонален вектору $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, скалярное произведение вектора $\vec{d}$ и вектора $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ равно 1 и проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ равна $\frac{1}{5}$.

Решение. Из условия ортогональности векторов $\vec{d}$ *и* $\vec{a}$ находим, что $2x$-z = 0. Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ равно 1, то x-y+z = 1. Проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{c}$ равна $Пр_c\vec{d} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}|} = \frac{3y - 4z}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$.

Отсюда 3y - 4z = 1.

Таким образом, имеем линейную систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x - z = 0, \\ x - y + z = 1, \\ 3y - 4z = 1. \end{cases}$$

Вычисляем определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Воспользуемся формулами Крамера. Найдем определители

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4; \; D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11; \; D_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{-1} = 4, \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{-1} = 11, \; z = \frac{D_z}{D} = \frac{-8}{-1} = 8.$$

Таким образом, вектор $\vec{d}$ будет $\vec{d} = 4\vec{i} + 11\vec{j} + 8\vec{k}$.

3.10. Найти значение коэффициента α, при котором векторы $\vec{\alpha} = \alpha\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 4$ и угол между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\ \alpha\vec{e}_1 + 2\vec{e}\ )(\ 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\ )=$

$$=3\,\alpha(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) - \alpha(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + 6(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) - 2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) = 0\,.$$

Произведения векторов по определению скалярного произведения будут

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=1;$$

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 2;\ (\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)=(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1);\ (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) = 16.$$

Таким образом, 3α - 2 α +6·2-2·16=0, откуда α =20.

3.11. Найти работу, производимую силой $\vec{F}$ = {6,1,2} на перемещении $\vec{S}$ = {2,4,1}.

Решение. Составим скалярное произведение этих векторов, тогда работа будет равна

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=6\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot(-1)=14$$ *(ед.раб.)*

2.4. Векторное произведение

1°. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Модуль $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}). \qquad (1)$$

2. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. $\vec{c}$ направлен так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ составляют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначают $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ или

$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

2°. Основные свойства.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то данное равенство выражает условие коллинеарности векторов.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (2)

3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения

$$(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}). \qquad (3)$$

4. Векторное произведение единичных векторов определяется формулами

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i};\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad (4)$$

5. Обладает распределительностью

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \qquad (5)$$

3°. Выражение векторного произведения через проекции перемножаемых векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Условием параллельности векторов служит пропорциональность их одноименных проекций на координатные оси

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (7)$$

4°. Приложения.

1. Момент силы $\vec{F}$, приложенный к точке B относительно точки A определяется равенством

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}. \qquad (8)$$

2. Площадь ΔABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$ (рис. 2.18) и равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right\|. \qquad (9)$$

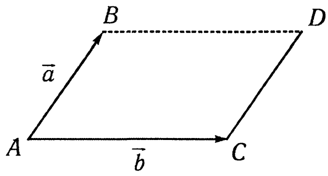


Рис. 2.18

4.1. Даны векторы $\vec{a}$ (3,4,1) и $\vec{b}$ (-1,2,5). **Найти** координаты векторного произведения [$\vec{a}\ \vec{b}$].

Решение. Воспользуемся формулой (6)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 18\vec{i} - 16\vec{j} + 10\vec{k},$$

тогда координаты векторного произведения будут

[$\vec{a}\times\vec{b}$] = {18,-16,10}.

4.2. Вычислить площадь треугольника с вершинами *A(1* ,0,6), B(4,5,-2) и C(7,3,4).

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ *:* $\overrightarrow{AB}$ (3,5, -8), $\overrightarrow{AC}$ (6,3,-2) и воспользуемся формулой (9)

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -8 \\ 6 & 3 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 24{,}5.$$

4.3. Пирамида задана координатами ее вершин $A_1(\backslash,2,0)$, $A_2(-l,2,l)$, $A_3(2,0,5)$, $A_4(-2,5,4)$.

Найти: а) длину ребра A_2A_3, б) площадь грани $A_1A_2A_3$, в) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Решение. а) Найдем вектор A_2A_3 по формуле

$\overrightarrow{A_2A_3} = (2+1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (5-1)\vec{k} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Отсюда модуль вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ равен $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

б) Найдем вектор $\overrightarrow{A_2A_1}$:

$\overrightarrow{A_2A_1} = (1+1)\vec{i} + (2-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{k}$.

Составим векторное произведение

$$\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_2A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 11\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Площадь грани находим по формуле (9)

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-11)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{141}.$$

в) Вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{A_2A_1} = -2\vec{i} + \vec{k}$. Найдем вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$\overrightarrow{A_1A_4} = (-2-1)\vec{i} + (5-2)\vec{j} + (4-0)\vec{k} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Косинус угла между ребрами находим по формуле (8) пункта 2.3

$$\cos\varphi = \frac{(-2)(-3) + 0\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{170}} \approx 0{,}766.$$

Откуда $\varphi \approx 40°$.

4.4. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}\{1,0,3\}$, $\vec{b}\{-2,4,-3\}$ и образует с осью Oy острый угол, а его модуль равен 39.

Решение. Поскольку векторы $\vec{x}$ *и* $\vec{a}\times\vec{b}$ коллинеарны, то

$$\vec{x}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&3\\-2&4&-3\end{vmatrix}=\lambda(-12\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}).$$

Зная модуль вектора $\vec{x}$, находим λ

$|\vec{x}|=39=|\lambda|\sqrt{144+9+16}$, $\lambda=\pm 3$.

Острый угол между векторами $\vec{x}$ и осью Oy будет

$\cos\beta=\dfrac{-3\lambda}{|\vec{x}|}>0,$ следовательно, $\lambda=-3$.

Таким образом, $\vec{x}=36\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}$.

4.5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}$ и $\vec{b}=5\vec{m}+4\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, а угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Площадь параллелограмма находим по формуле S = | $\vec{a}\times\vec{b}$ |. Используя распределительное свойство векторного произведения, а также то, что $\vec{m}\times\vec{m}=0$, $\vec{n}\times\vec{n}=0$, $\vec{m}\times\vec{n}=-\vec{n}\times\vec{m}$ будем иметь $\vec{a}\times\vec{b}=$

$$=(3\vec{m}-2\vec{n})\times(5\vec{m}+4\vec{n})=$$

$$=15\vec{m}\times\vec{m}+12(\vec{m}\times\vec{n})-10(\vec{n}\times\vec{m})-8(\vec{n}\times\vec{n})=22(\vec{m}\times\vec{n}).$$

Величина векторного произведения $\vec{m}\times\vec{n}$ равна

$$\vec{m}\times\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m},\vec{n}).$$

Отсюда S = 22 | $\vec{m}\times\vec{n}$ | = 22·3 = 66 (кв.ед.).

2.5. Смешанное произведение векторов

1°. *Смешанным произведением* трех векторов называется выражение вида $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ или $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Если векторы заданы своими координатами, то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

2°. Свойства.

1. При перестановке сомножителей смешанное произведение меняет знак

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}. \qquad (2)$$

2. Смешанное произведение обладает свойством

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} \qquad (3)$$

3. Если два из трех векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно нулю.

3°. Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\,. \qquad (4)$$

4°. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен

$$V_n=\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\,. \qquad (5)$$

5°. Условие компланарности. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

5.1. В пространстве даны четыре точки: A (1,1,1), B(2,4,7), C(-1,2,-3), и ***D***(-3,2,1). **Найти** объем тетраэдра ABCD и длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины B.

Решение. Пусть A вершина тетраэдра. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис.2.19): $\overrightarrow{AB}$ = {1,3,6}, $\overrightarrow{AC}$ ={-2,1,-4}, $\overrightarrow{AD}$ ={-4,1,0}. Объем тетраэдра находим по формуле (5)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{32}{3}.$$

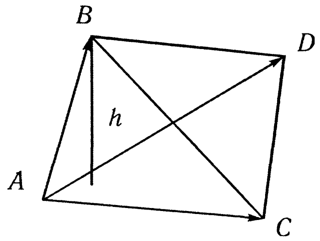


Рис. 2.19

Найдем площадь основания

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|4\vec{i}+16\vec{j}+2\vec{k}\right|=\sqrt{69}.$$

Поскольку $h=\dfrac{3V}{S}$, то $h=\dfrac{3\cdot 32}{\sqrt{69}}=\dfrac{32\sqrt{69}}{69}$.

5.2. Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}\{1,-3,2\}$, $\vec{b}\{3,1,-2\}$, $\vec{c}\{2,-1,2\}$ и определить ориентацию тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в пространстве.

Решение. Найдем значение смешанного произведения

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=20.$$

Поскольку смешанное произведение векторов положительное, то они образуют правую тройку.

Объем треугольной призмы равен 1/3 объема параллелепипеда построенного на этих векторах

$$V_{np} = \frac{1}{3}\left|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\right| = 10.$$

5.3. Доказать компланарность векторов

$\vec{a}$ {4,3,5}, $\vec{b}$ {2,2,2}, $\vec{c}$ {-3,-2,-4}

Решение. Условие компланарности $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ = 0. Откуда

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, векторы компланарны.

5.4. Даны векторы $\vec{a}$ = (-1,-1,2) и $\vec{b}$ = (1,-2,2). **Найти** неизвестный вектор $\vec{x}$ = *(x,y,z)*, если скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{x}$ = -7, вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{x}$ перпендикулярен оси *Ox*, а смешанное произведение $\vec{x}\ \vec{a}\ \vec{b}$ = 2.

Решение. Используя условие $\vec{a}\ \vec{x}$ = -7, получим уравнение $-x - y + 2z$ = -7 или $x + y - 2z = 7$.

Воспользуемся векторным произведением

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(z+2y)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}.$$

Поскольку вектор $\vec{c}$ перпендикулярен оси *Ox*, то проекция c_x вектора $\vec{c}$ на ось *Ox* равна 0, то есть c_x =-(2y+z)=0.

Из условия $\vec{x}\ \vec{a}\ \vec{b}$ =2 имеем

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \text{т.е. } 2x+4y+3z=2.$$

Полученные уравнения объединим в систему

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7, \\ \quad 2y + z = 0, \\ 2x + 4y + 3z = 2. \end{cases}$$

Решение ищем по формулам Крамера. Находим определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=12\neq 0.$$

Так как определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение $x=\dfrac{D_x}{D},\ y=\dfrac{D_y}{D},\ z=\dfrac{D_z}{D}$.

$$D_x=\begin{vmatrix}7 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=24;\ D_y=\begin{vmatrix}1 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=12;\ D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 7\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=-24.$$

$$x=\frac{24}{12}=2,\ y=\frac{12}{12}=1,\ z=\frac{-24}{12}=-2.$$

Таким образом, неизвестный вектор $\vec{x}=\{2,1,-2\}$.

5.5. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{k}$ построен параллелепипед. **Найти** его высоту, опущенную на грань, образованную векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Объем параллелепипеда по формуле (4) будет

$$V=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -4\end{matrix}\right\|=\left|16+12-6+12\right|=34.$$

С другой стороны, объем равен $V=S\cdot h$, где S – площадь грани, образованная векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -4\end{matrix}\right\|=\left|-4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}\right|=$$

$$=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}.$$

Таким образом, $H=\dfrac{V}{S}=\dfrac{34}{5\sqrt{2}}=\dfrac{17\sqrt{2}}{5}.$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Длина и направление отрезка

1°. *Координатой* точки M на оси x называется положительное или отрицательное число, отложенное, соответственно, вправо или влево от начала координат в выбранном масштабе.

Декартова или *прямоугольная система координат* представляет совокупность двух взаимно-перпендикулярных осей; оси абсцисс Ox и оси ординат Oy (рис. 3.1).

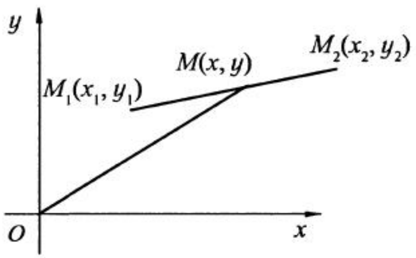


Рис. 3.1

Декартовыми координатами точки M называются проекции радиус-вектора OM на оси координат (x, y).

Направленным отрезком на оси называется отрезок, у которого определены начало $M_1(x_1)$ и конец $M_2(x_2)$. Здесь x_1, x_2 – координаты начала и конца отрезка.

2°. Величина отрезка на оси равна его длине $M_1M_2 = |M_1M_2|$,если направление отрезка совпадает с осью; в противном случае величина отрезка равна его длине со знаком минус $M_1M_2 = -|M_2M_1|$. Через координаты величина отрезка определяется по формуле

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \qquad (1)$$

а длина или расстояние между двумя точками

$$d = M_1M_2 = |x_2 - x_1|. \qquad (2)$$

Длина отрезка на плоскости (рис. 3.1), заданного координатами своего начала $M_1(x_1, y_1)$ и конца $M_2(x_2, y_2)$, равна

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3)$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (3) примет вид

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4)$$

3°. Пусть φ и ψ - углы, составляемые отрезком с положительными направлениями осей координат *Ox*, *Oy*, тогда направление отрезка определится заданием косинусов этих углов

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \ \cos\psi = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

1.1. Построить на числовой оси точки *A*(-4), *B*(5), и С(1), **найти** величины отрезков *AB*, *BC* и *AC* на оси, длину отрезка *BC* и **проверить** равенство *AB* + *BC* - *AC*.

Решение. На оси *x* в выбранном масштабе откладываем от начала координат соответственно точки *A,B* и *C* (рис .3.2). Величины отрезков находим по формуле (1)

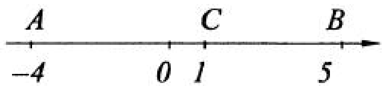


Рис. 3.2

$$AB = x_B - x_A = 5 - (-4) = 9,\ BC = x_C - x_B = 1 - 5 = -4,$$

$$AC = x_C - x_A = 1 - (-4) = 5.$$

Длину отрезка *BC* находим по формуле (2)

$$d = |BC| = |x_C - x_B| = |-4| = 4.$$

Подставляя найденные величины отрезков на оси в доказываемое равенство, получим 9+(-4) = 5, 5 = 5.

1.2. Даны точки A(-1,-3) и B(4,2). **Найти** длину отрезка и его направление.

Решение. Длину отрезка, заданного координатами своего начала и конца находим по формуле (3)

$$d = |AB| = \sqrt{(4+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Направляющие косинусы находим по формулам (5)

$$\cos\varphi = \frac{4+1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\psi = \frac{2+3}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда угол с положительным направлением оси Ox равен $\varphi = 45^\circ$, а оси Oy равен $\psi = 45^\circ$.

1.3. Найти точку, удаленную от оси Oy и от точки A(1,2) на 5 единиц.

Решение. Геометрическим местом точек удаленных от оси Oy и точки A будет прямая параллельная оси Oy и отстоящая от оси на расстоянии 5 единиц (рис. 3.3), т. е. $x = 5$. Пусть точка $M(5, y)$ искомая точка, тогда по формуле (3)

$$5 = \sqrt{(5-1)^2 + (y-2)^2},$$

откуда $25 = 16 + (y-2)^2$ или $(y-2)^2 = 9$.

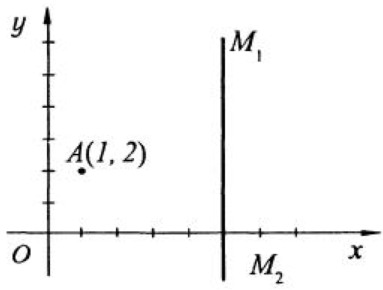


Рис. 3.3

Решая последнее уравнение, находим $y_1 = 5,\ y_2 = -1$. Таким образом, искомых точек на прямой две $M_1(5,5),\ M_2(5,-1)$.

1.4. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(2,1), B(-3,2), C(-1,1)$.

Решение. Обозначим координаты центра окружности *O* за *x*, *y*, а радиус за *R*, тогда по формуле (3) будем иметь

$$R^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2,$$

$$R^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2,$$

$$R^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Вычитая из первого третье уравнение, находим, что $x = \frac{1}{2}$.

Подставляя $x = \frac{1}{2}$ во второе и третье и вычитая из второго третье, находим, что $y = \frac{13}{2}$. Подставляя найденные *x,y* в любое из трех уравнений, получаем, что $R = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

1.5. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(1,5), B(-2,1), C(1,-2),$ и $D(10,2)$ есть параллелограмм.

Решение. Известно, что четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны, есть параллелограмм.

Докажем равенство противоположных сторон *AB* и *CD* *(BC* и *DA)* Найдем длины этих сторон

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Следовательно, *AB* = *CD*.

Аналогично:

$$d_{BC} = \sqrt{(7+2)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{10},$$

$$d_{DA} = \sqrt{(1-10)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{10}, \text{ то есть } BC = DA.$$

Поскольку противоположные стороны равны, то четырехугольник *ABCD* есть параллелограмм, что и требовалось доказать.

3.2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника. Центр тяжести

1°. Координаты точки *M(x,y)*, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{\mathrm{M_1M}}{\mathrm{MM_2}} = \lambda,$ (рис. 3.1) находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Если точка М делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$ и координаты равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2)$$

Если λ — число отрицательное, то точка *M* находится на продолжении отрезка M_1M_2 и деление называется внешним.

2°. Площадь треугольника с вершинами $M_1(x_1, y_1) M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]\right|. \qquad (3)$$

Если, следуя по контуру треугольника от M_1 к M_2 и к M_3, площадь обходится против часовой стрелки, то число S положительное, в противном случае — отрицательное. Поскольку площадь треугольника — величина положительная, то правая часть формулы (3) берется по абсолютной величине.

Если площадь треугольника равна нулю, то из формулы (3) следует равенство

$$x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)=0, \qquad (4)$$

которое является условием того, что три точки M_1, M_2 и M_3 расположены на одной прямой.

3°. Площадь многоугольника с вершинами $M_1\left(x_1,y_1\right),M_2\left(x_2,y_2\right),....,M_n\left(x_n,y_n\right)$ определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+....+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right)\right|. \qquad (5)$$

4°. Если в точках $M_1\left(x_1,y_1\right)$, $M_2\left(x_2,y_2\right)$, $M_3\left(x_3,y_3\right)$ помещены массы m_1, m_2, m_3 соответственно, то координаты центра тяжести этих масс находятся по формулам

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3};\ y_c=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} \qquad (6)$$

Отсюда координаты центра тяжести площади однородного треугольника определяются по формулам

$$x_c=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ y_c=\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \qquad (7)$$

Координаты центра тяжести системы, состоящей из n материальных точек $M_1\left(x_1,y_1\right),M_2\left(x_2,y_2\right),....,M_n\left(x_n,y_n\right)$, соответственно с массами $m_1,m_2,....m_n$, определяются по формулам

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n};\ y_c=\frac{m_1y_1+m_2y_2+...+m_ny_n}{m_1+m_2+...+m_n} \qquad (8)$$

2.1. Найти точку, делящую отрезок между точками $M_1\left(-1,8\right)$ и $M_2\left(3,3\right)$ в отношении $\lambda=\frac{3}{2}$.

Решение. Для отыскания координат точки, делящей отрезок в отношении $\lambda=\frac{3}{2}$, воспользуемся формулами (1)

$$x=\frac{-1+\frac{3}{2}\cdot 3}{1+\frac{3}{2}}=\frac{5}{7},\ y=\frac{8+\frac{3}{2}\cdot 3}{1+\frac{3}{2}}=5$$

2.2. Найти точку *C*, делящую отрезок между точками *A(-2)* и *B*(4) на оси в отношении $\lambda=-2$.

Решение. Считаем, что точки *A* и *B* расположены на оси *x*, тогда для отыскания точки *C* можно воспользоваться первой из формул (1) $x=\frac{-1-2\cdot 4}{1-2}=10$

2.3. В треугольнике с вершинами $A(-2,0), B(6,6), C(1,-4)$ **определить** длину медианы *AD*, длину биссектрисы *AE,* вычислить площадь треугольника и координаты центра тяжести, полагая его однородным.

Решение. Так как медиана *AD* делит отрезок *BC* пополам (рис. 3.4), то $\lambda=1$ и координаты точки *D* находятся по формулам (2)

$$x_D=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2},\ y_D=\frac{6-4}{2}=1.$$

Отсюда длина медианы $AD=\sqrt{(7/2+2)^2+(1-0)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{5}.$

Биссектриса *AE* делит сторону *BC* на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}=\lambda.$

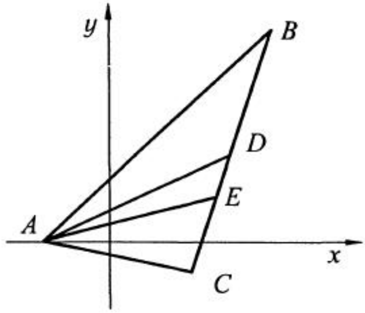


Рис. 3.4

Найдем длины отрезков AB и AC

$$|AB|=\sqrt{(6+2)^2+6^2}=10;\ |AC|=\sqrt{(1+2)^2+(-4)^2}=5.$$

Отсюда λ=2 и координаты точки E

$$x_E=\frac{6+2}{1+2}=\frac{8}{3};\ y_E=\frac{6-2\cdot 4}{1+2}=-\frac{2}{3}.$$

Длина биссектрисы AE

$$|AE|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}+2\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Площадь треугольника находим по формуле (3), полагая координаты точки A за x_1, y_1, точки B за x_2, y_2, C – за x_3, y_3

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[-2(6+4)+6(-4-0)+1(0-6)\right]\right|=25\,кв.ед.$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (7)

$$x=\frac{-2+6+1}{3}=\frac{5}{3};\ y=\frac{0+6-4}{3}=\frac{2}{3}.$$

2.4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1,1), B(2,2), C(3,-1)$. **Найти** четвертую вершину.

Решение. Диагонали параллелограмма в точке пересечения E делятся пополам (рис. 3.5).

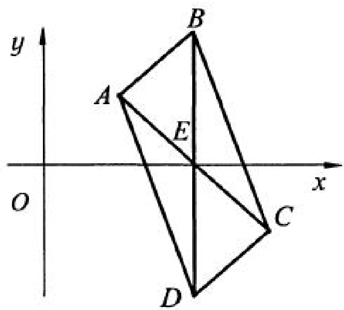


Рис. 3.5.

Зная координаты точек *A и C*, находим по формулам (2) координаты точки *E*

$$x=\frac{1+3}{2}=2;\ y=\frac{1-1}{3}=0.$$

Далее по этим же формулам находим координаты точки *D*

$$2=\frac{2+x}{2},\ 0=\frac{2+y}{2},\ x=2,\ y=-2.$$

2.5. В точках *A*(2,1), *B*(-1,3), *C*(-2,5) помещены соответственно массы 50, 20 и 30 г. **Определить** центр масс этой системы.

Решение. Для нахождения координат центра масс системы пользуемся формулами (6)

$$x_C=\frac{2\cdot 50-20-2\cdot 30}{50+20+30}=0,2,\ y_C=\frac{50+3\cdot 20+5\cdot 30}{50+20+30}=2,6.$$

2.6. На концы однородного стержня длиной 50 см и весом 100 г насажены шары весом 20 и 80 г. **Найти** центр тяжести системы.

Решение. Пусть ось *x* проходит вдоль стержня, причем начало координат совпадает с центром шара весом 20 г. Координата центра тяжести шаров может быть найдена из упрощенной формулы (6)

$$x_ш=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{20\cdot 0+80\cdot 50}{20+80}=40\,см$$

Координата центра тяжести стержня находится посередине стержня на расстоянии 25 см от начала координат. Полагая, что в этой точке $x_1=25\,см$ приложен вес стержня $m_1=100$ г, а в точке $x_2=40\,см$ вес шаров, по этой же формуле находим центр тяжести системы

$$x_C=\frac{100\cdot 25+100\cdot 40}{100+100}=32,5\,\text{см}.$$

2.7. **Проверить,** лежат ли точки $M_1(2,1)M_2(0,5),M_3(-1,7)$ на одной прямой.

Решение. Воспользуемся формулой (4)

$$2(5-7)+0(7-1)-1(1-5)=-4+4=0.$$

Поскольку левая часть равенства тождественно равна нулю, то точки лежат на одной прямой.

2.8. Вычислить площадь пятиугольника с вершинами $M_1(2,3)M_2(-2,2),M_3(-4,-1),M_4(-1,-5),M_5(4,-2)$.

Решение. Запишем формулу (5) для пятиугольника

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)\right|.$$

И подставим в нее координаты вершин

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(4+6)+(2+8)+(20-1)+(2+20)+(12+4)\right|=38{,}5\text{ кв. ед.}$$

2.9. Найти координаты центра тяжести фермы (рис. 3.6), состоящей из однородных стержней.

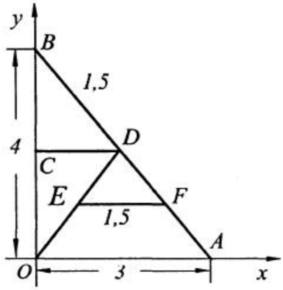


Рис. 3.6

Решение. Поскольку стержни однородны, то масса m_i каждого стержня пропорциональна его длине l_i, то есть $m_i=\rho l_i$, где ρ -линейная плотность.

Используя данные рис. 3.6, найдем массу каждого стержня и его центр тяжести.

Стержень	Масса	Центр тяжести
OA	$m_1 = 3\rho$	$M_1(1,5;0)$
AB	$m_2 = 5\rho$	$M_2(1,5;2)$
BO	$m_3 = 4\rho$	$M_3(0;2)$
CD	$m_4 = 1,5\rho$	$M_4(0,75;2)$
EF	$m_5 = 1,5\rho$	$M_5(1,5;1)$
OD	$m_6 = 2,5\rho$	$M_6(0,75;1)$

Центр тяжести системы из шести материальных точек $M_1,....,M_6$ находим по формулам (8)

$$x_C = \frac{\rho\left(3\cdot 1,5+5\cdot 1,5+4\cdot 0+1,5\cdot 0,75+1,5\cdot 1,5+2,5\cdot 0,75\right)}{\left(3+5+4+1,5+1,5+2,5\right)\rho} \approx 0,98.$$

$$y_C = \frac{\rho\left(3\cdot 0+5\cdot 2+4\cdot 2+1,5\cdot 2+1,5\cdot 1+2,5\cdot 1\right)}{\left(3+5+4+1,5+1,5+2,5\right)\rho} \approx 1,43.$$

3.3.Уравнения прямой линии. Геометрическое истолкование неравенства и системы неравенств первой степени

Прямой линии на плоскости соответствует уравнение первой степени с двумя неизвестными.

1°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

здесь A,B,C - произвольные коэффициенты.

2° Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

здесь $k = tg\varphi$ - угловой коэффициент прямой, φ - угол наклона прямой к положительному направлению оси O_x, b - величина отрезка, отсекаемая прямой на оси Oy от начала координат (рис. 3.7).

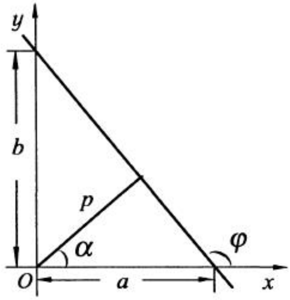


Рис. 3.7

Пользуясь уравнением прямой (2) можно установить, как изменится это уравнение, если от данной прямой L перейти к прямой (рис. 3.8), ей симметричной.

При симметрии относительно оси Ox следует изменить знак коэффициента при x и свободного члена или изменить знак коэффициента при y. На рис. 3.8. эта линия обозначена цифрой 1.

При симметрии относительно оси Oy следует изменить знак коэффициента при x. На рис. 3.8 это линия 2. При симметрии относительно начала координат следует изменить знак свободного члена. На рис. 3.8 это линия 3.

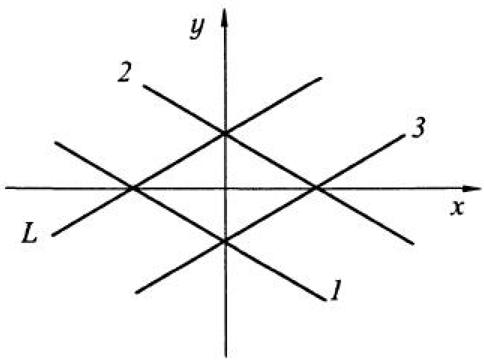


Рис. 3.8

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{3}$$

здесь a, b - величины отрезков, которые прямая отсекает от осей координат (рис. 3.7).

4°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1\left(x_1, y_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2\right)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

5°. Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{5}$$

Здесь p - длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, α - угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox, против часовой стрелки, до перпендикуляра p (рис. 3.7). Чтобы привести общее уравнение прямой (1) к нормальному виду, нужно общее уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{6}$$

взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C, а если $C = 0$, то знак может быть любой.

6°. Геометрическое истолкование неравенства первой степени. В общем случае неравенство первой степени $Ax+By+C=0$ определяет полуплоскость, которая при $C\neq 0$ устанавливается на основании знака C. Если при $x=0$ и $y=0$ знак С совпадает со смыслом неравенства, то полуплоскость, соответствующая ему включает начало координат; если же знак C противоречит неравенству, то соответствующая ему полуплоскость не включает начала координат. Если C = О, то следует ориентироваться на произвольно выбранную точку.

3.1. Написать уравнение прямой проходящей через точку A(3,4) и составляющей с Ox угол 45°.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом (2). Угловой коэффициент

$k = tg\varphi = tg\,45^o = 1.$ Подставляя в уравнение (2) координаты точки *A* и значение *k*, находим параметр *b:* $4 = 3 + b,$ откуда $b = 1$ и уравнение примет вид $y = x + 1$ или в общем виде $x - y + 1 = 0.$

3.2. По уравнению прямой $y = -2x + 3$ **написать** уравнения прямых, симметричных относительно осей и начала координат. Сделать чертеж.

Решение. Для случая симметрии относительно оси *Ox* будем иметь уравнение $y = 2x - 3;$ для случая симметрии относительно оси *Oy* - уравнение $y = 2x + 3;$ для случая симметрии относительно начала координат - уравнение $y = -2x - 3.$

На рис. 3.9 эти линии, соответственно, обозначены цифрами 1,2,3.

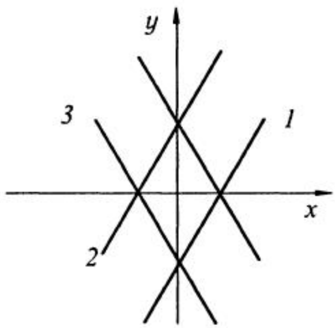


Рис. 3.9

3.3. Даны точки *O*(0,0) и *A*(4,0). На отрезке *OA* построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке *B*(0,3).

Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

Решение. Поскольку точка *B*, точка пересечения диагоналей параллелограмма, то, проводя из точки *O* и *A* прямые через точку *B* и откладывая от нее отрезки равные *OB* и AB, получим две другие вершины параллелограмма B и C (рис. 3.10).

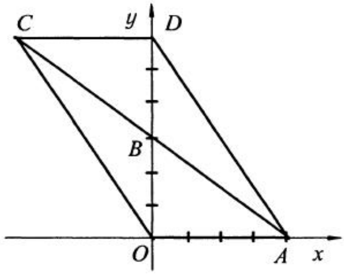


Рис. 3.10

Сторона параллелограмма OA совпадает с осью Ox, а диагональ OD с осью Oy, следовательно их уравнения будут $y=0$, $x=0$. Сторона CD параллельна оси Ox и отсекает на оси Oy отрезок равный 6 единицам, следовательно ее уравнение будет $y = 6$.

Диагональ AC и сторона AD отсекают на координатных осях отрезки равные $a=4$, $b=3$, и $a=4$, $b=6$ единицам, подставляя которые в уравнение прямой в отрезках на осях (3), получим

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$$

или в общем виде $3x+4y-12=0$ и $3x+2y-12=0$.

Сторона OC проходит через начало координат и имеет уравнение $y=kx,$ где угловой коэффициент

$$k=tg\varphi=tg\left(\frac{\pi}{2}+\angle COD\right)=-ctg\left(\angle COD\right)=-\frac{OD}{CD}=-\frac{2}{3}.$$

Отсюда, $y=-\frac{3}{2}x$ или $3x+2y=0$.

3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;2)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 2 кв. единицам.

Решение. Пусть прямая, проходящая через точку A, отсекает на координатных осях отрезки a и b (рис. 3.11), тогда уравнение прямой примет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1$.

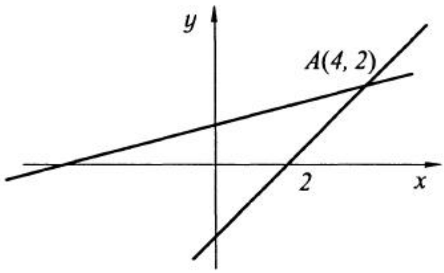


Рис. 3.11

С другой стороны известно, что $\frac{1}{2}a\cdot b=2$ или $a\cdot b=4$. Так как прямая проходит через точку A, то ее координаты обращают уравнение прямой в тождество $\frac{4}{a}+\frac{2}{-b}=1$. Решая эти уравнения для a и b находим

$$b^2-b-2=0,\ b_1=2,\ b_2=-1 \text{ и } a_1=2,\ a_2=-4.$$

Подставляя a_1, b_1 в уравнение искомой прямой, получим $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$ или $x-y-2=0$.

Подставляя a_2, b_2, будем иметь $\frac{x}{-4}+\frac{y}{1}=1$ или $x-4y+4=0$.

Таким образом, прямых удовлетворяющих условию, две.

3.5. В треугольнике с вершинами A(-2;0), B(5;3), C(1;-1) **найти** уравнение стороны BC и медианы AD.

Решение. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки (4), находим уравнение стороны BC

$$\frac{x-5}{1-5}=\frac{y-3}{-1-3} \text{ или } x-y-2=0.$$

Медиана делит противоположную сторону пополам, поэтому координаты точки D

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3; \; y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Еще раз пользуясь уравнением (4), находим уравнение медианы AD

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \text{ или } x - 5y + 2 = 0.$$

3.6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(1, \sqrt{3}\right)$ и удаленной от начала координат на расстояние равное 2 единицам.

Решение. Подставим координаты точки A и значение $p = 2$ в нормальное уравнение прямой (5), получим $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha - 2 = 0$ или $\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 1.$

Откуда $\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha = \sin\left(30^\circ + \alpha\right) = 1$ и $\alpha = 60^\circ$.

Тогда уравнение прямой $x\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 0$ или $x + \sqrt{3}y - 4 = 0.$

3.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;4)$ и $B(3;8)$.

Решение. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки (4), получим $\frac{y-4}{8-4} = \frac{x-3}{3-3}$. Данное уравнение имеет смысл, если x-3 = 0. Итак, уравнение прямой есть x = 3. Это прямая, параллельная оси Oy и отсекающая по оси x три единицы.

3.8. Найти полуплоскости, соответствующие неравенствам:

а) $x - 3y + 2 < 0$; б) $2x + y + 5 > 0$; в) $4x - 3y \geq 0$.

Решение. а) Так как свободный член не удовлетворяет неравенству при x = 0 и y = 0, то определяемая неравенством полуплоскость не содержит начала координат. Штриховка указывается направлением от прямой $x-3y+2=0$ в сторону противоположную началу координат (рис. 3.12).

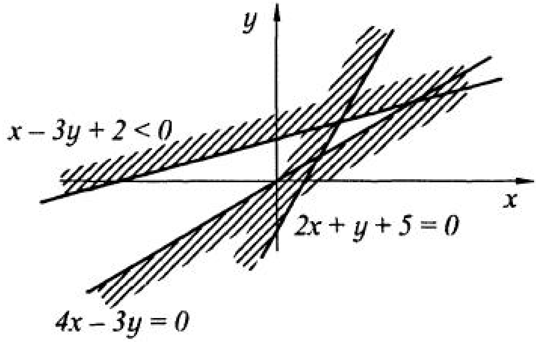


Рис. 3.12

б) Поскольку при x = 0, y = 0 знак свободного члена не нарушает неравенство, то соответствующая полуплоскость от прямой $2x+y+5=0$ включает начало координат.

в) Изобразим прямую на рис. 3.12. Для определения полуплоскости возьмем произвольную точку с координатами $M(0;1)$, тогда получим -3 > 0. Поскольку знак неравенства показывает, что искомая полуплоскость не включает выбранной точки M, то штриховка от прямой должна быть направлена в сторону, противоположную точке M. Следует заметить, что в данном случае полуплоскость включает и точки граничной прямой.

3.9. Найти области, соответствующие неравенствам:

$$\text{а)}\begin{cases} x-2y+3\ge 0, \\ x-2y-3<0; \end{cases} \text{б)}\begin{cases} x-2y+3\ge 0, \\ x-2y-3>0; \end{cases} \text{в)}\begin{cases} x-2y+3\le 0, \\ x-2y-3y>0. \end{cases}$$

Решение. Построим прямые $x-2y+3=0$ и $x-2y-3=0$, соответствующие заданным неравенствам (рис. 3.13). Прямые параллельны. Полагая x = 0, y = 0, строим полуплоскости по знаку свободного члена. В зависимости от сочетаний знаков неравенств пересечение соответствующих плоскостей существует: а) в виде части плоскости между двумя параллельными прямыми, причем прямая $x-2y+3=0$

включается в искомую область; б) при одинаковых знаках в системе общая часть совпадает с полуплоскостью, которая не включает другой граничной прямой, то есть геометрическим изображением служит полуплоскость $x-2y-3>0$ (рис. 3.14); в) в данном случае полуплоскости не имеют никакого пересечения, то есть общей области вовсе не существует (рис. 3.15).

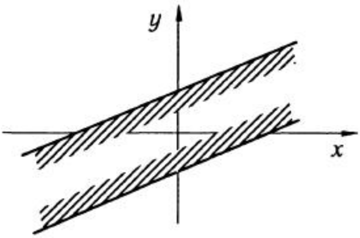


Рис. 3.13

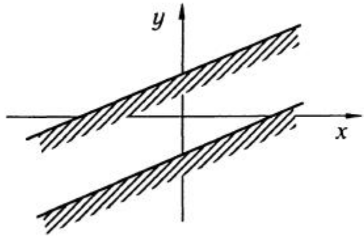


Рис. 3.14

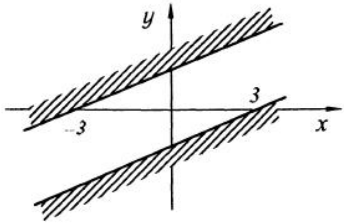


Рис.3.15

3.10. Построить область, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств $y>2x+4,\ x>-5,\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}\le 1.$

Решение. На плоскости Oxy строим сначала прямую $y=2x+4$. Для этого полагаем $x = 0$, $y = 0$, находим точки пересечения прямой с осями координат $y=4, 4<x=-2$ и проводим через эти точки прямую (рис. 3.16). Неравенство $y>2x+4$ будет представлять область, координаты точек которой расположены выше построенной прямой, причем сама прямая в искомую область не включается. Неравенство $x > -5$ представляет область расположенную правее прямой $x = -5$. Последнее неравенство напоминает уравнение прямой в отрезках на осях.

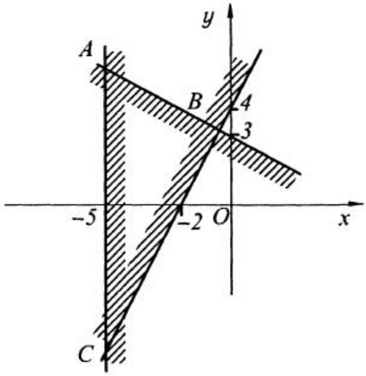


Рис. 3. 16

Откладывая по осям *Ox, Oy* точки *a = 5* и *b = 3* и проводя через них прямую, находим, что область удовлетворяющая этому неравенству расположена ниже прямой. Из построений видно, что искомая область представляет треугольник *ABC*, где отрезок *AB* принадлежит области.

3.11. Найти область, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - y + 4 > 0, \\ x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + 4 \geq 0, \\ x + y - 2 \geq 0, \\ x - 2y - 6 > 0. \end{cases}$

Решение. а) Поскольку из первого неравенства при x=0, $y = 0 \Rightarrow 4 > 0,$ то полуплоскость включает начало координат (рис. 3.17).

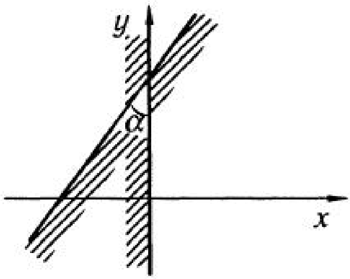


Рис. 3.17

Неравенству $x<0$ соответствуют все точки левой полуплоскости. Решением является общая часть или пересечение этих полуплоскостей, ограниченная прямыми $2x-y+4=0$, $x=0$ пересекающимися под углом α .

б) При x = 0, y = 0 из первого неравенства следует, что полуплоскость включает начало координат (рис. 3.18); из второго - следует, что полуплоскость не включает начало координат; из третьего, что не включает. Следовательно, имеются лишь три изолированных пересечения двух полуплоскостей, обозначаемых, соответственно, углами α, β, γ между прямыми

$$3x-y+4=0, x+y-2=0 \text{ и } x-2y-6=0$$

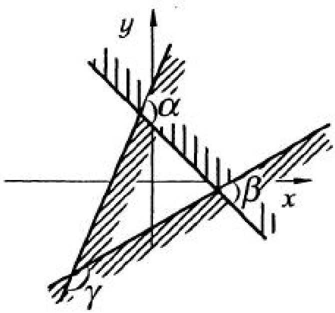


Рис.3.18

3.4. *Задачи на прямую линию*

1°. Точка пересечения двух прямых. Пусть прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ A_2x + B_2y + C_2 = 0\,. \qquad (1)$$

Координаты точки пересечения находятся из решения этой системы

$$x = \frac{C_2B_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1};\quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (2)$$

При этом возможны следующие случаи:

а) $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ - прямые пересекаются в определенной точке.

б) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ и $C_2B_1 - C_1B_2 \neq 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ - прямые параллельны, точек пересечения нет.

в) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ и $C_2B_1 - C_1B_2 = 0$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ - обе прямые сливаются в одну, система уравнений сводится к одному уравнению, точек пересечения бесчисленное множество.

2°. Под углом между двумя прямыми (рис. 3.19)

$$(L_1)\ \ y = k_1x + b_1;\quad (L_2)\ \ y = k_2x + b_2, \qquad (3)$$

понимают угол φ, отсчитываемый от прямой L_1 против часовой стрелки, до прямой L_2

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (4)$$

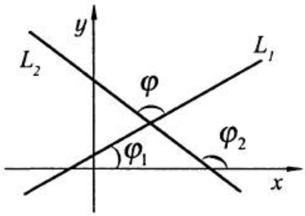


Рис. 3.19

Если прямые заданы общими уравнениями (1), то формула (4) принимает вид

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (5)$$

Условие параллельности прямых

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (6)$$

Условие перпендикулярности прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (7)$$

3°. Уравнение пучка прямых. Пучком прямых, проходящих через данную точку $M(x_0, y_0)$, называют совокупность всех прямых, проходящих через эту точку

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (8)$$

Точка $M(x_0, y_0)$ называется центром пучка. Угловой коэффициент k в уравнении пучка прямых неопределён.

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых (1), имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (9)$$

Здесь параметр λ неопределен.

4°. Расстояние от данной точки до данной прямой. Чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой, нужно в левую часть нормального уравнения прямой вместо текущих координат подставить координаты точки M_1 и взять абсолютную величину получившегося числа

$$d = \left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \right|. \qquad (10)$$

Если прямая задана общим уравнением, то формула (10) принимает вид

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (11)$$

5°. Уравнения биссектрис углов между прямыми (1)

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (12)$$

6°. *Из уравнения прямой проходящей через две точки следует условие расположения трех точек* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ одной прямой

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (13)$$

4.1. Написать уравнения прямых проходящих через точку A(-3,4) параллельно и перпендикулярно к прямой $2x - y - 3 = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка прямых (8) и запишем уравнение пучка прямых с центром пучка в точке A

$$y - 4 = k(x + 3).$$

Приводим уравнение прямой к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = 2x - 3,$ отсюда угловой коэффициент прямой $k = 2.$ Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны (6). Выбирая из уравнения пучка прямую с угловым коэффициентом $k = 2$ находим уравнение прямой параллельной данной

$$2x - y + 10 = 0.$$

Используя условие перпендикулярности прямых (7), находим угловой коэффициент перпендикулярной прямой

$k = -\frac{1}{2}$. Подставляя этот коэффициент в уравнение пучка, получим уравнение прямой перпендикулярной данной

$$x + 2y - 5 = 0.$$

4.2. Найти прямую, параллельную прямым $2x + y - 2 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$, расположенную между ними и делящую расстояние между ними в отношении 1:5.

Решение. Возьмем на первой прямой точку A, абсцисса которой равна, например, нулю. Тогда ордината точки A из уравнения прямой равна 2. Проведем из этой точки перпендикуляр до пересечения со второй прямой в точке B (рис. 2.20).

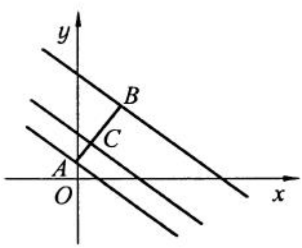


Рис .3.20

Угловой коэффициент прямой равен $k = -2$, следовательно, угловой коэффициент перпендикуляра $k_{AB} = \frac{1}{2}$. Подставляя его и координаты точки в уравнение пучка прямых (8), находим уравнение перпендикуляра $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0)$ или $x - 2y + 4 = 0$.

Решая уравнение перпендикуляра совместно с уравнением второй прямой, находим точку их пересечения

$$B\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right).$$

Пусть точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{5}$, тогда ее координаты

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{1}{5}\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 0,2;\; y = \frac{y1 + \lambda y2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5}\frac{13}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 2,1.$$

Так как искомая прямая параллельна данным прямым, то ее угловой коэффициент $k = -2$. Подставляя его и координаты точки C в уравнение пучка прямых, находим уравнение искомой прямой $y - 2,1 = -2\left(x - 0,2\right)$ или $2x + y - 2,5 = 0.$

4.3. Определить вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x - 3y - 3 = 0,\ 7x - y + 19 = 0,\ 3x + y + 1 = 0.$

Решение. Координаты вершин треугольника *A,B,C* являются точками пересечения прямых и находятся из совместного решения систем уравнений

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0, \\ \hline 7x - y + 19 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y - 3 = 0, \\ \hline 3x + y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - y + 19 = 0, \\ \hline 3x + y + 1 = 0; \end{cases}$$

Обозначим решение первой системы за координаты точки *A*(-3;-2), второй – *B*(0;1) и третьей - *C*(-2;5). Из построения $\triangle ABC$ (рис. 3.21) видно, что прямой *AB* соответствует первое уравнение, прямой *AC* - второе и прямой *BC* - третье.

При определении угла *A* пользуемся формулой (5), полагая за A_1, B_1 коэффициенты при переменных в уравнении прямой *AB*, а за A_2, B_2 коэффициенты в уравнении прямой *AC.*

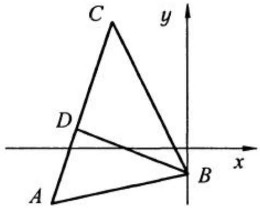


Рис. 3.21

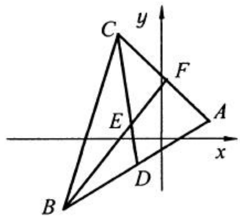


Рис. 3.22

$$tgA = \frac{1(-1)-7(-3)}{1\cdot 7+(-3)(-1)} = 2,\ \angle A = arctg\,2.$$

При определении угла B *за* A_2, B_2 формуле (5) принимаем коэффициенты в уравнении прямой BC

$$tgB = \frac{1\cdot 1-3(-3)}{1\cdot 3+(-3)\cdot 1} = \infty,\ \angle B = \frac{\pi}{2}.$$

Так как сумма углов в треугольнике равна π, то угол $\angle C = \dfrac{\pi}{2} - arctg\,2 = arctg\,\dfrac{1}{2}.$

4.4. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого A(1;4), B(-9;-8), C(-2; 16). Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла ***B***.

Решение. Медианы пересекаются в одной точке, делящей их в отношении 1:2 от противоположной стороны, которую они делят пополам. Построим треугольник (рис. 3.22) и проведем медиану из точки C. Координаты точки D будут

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-9}{2} = -1;\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-8}{2} = -2.$$

Зная координаты точек C и D и отношение $\lambda = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{1}{2}$, находим координаты точки пересечения медиан

$$x_E = \frac{x_D + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3};\ y_E = \frac{y_D + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{1}{2}(16)}{1+\frac{1}{2}} = 4.$$

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две точки, запишем уравнения сторон AB и BC

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A},\quad \frac{y-4}{-8-4}=\frac{x-7}{-9-7},\ \ y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4},$$

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{x-x_B}{x_C-x_B},\quad \frac{y+8}{16+8}=\frac{x+9}{-2+9},\ \ y=\frac{24}{7}x+\frac{160}{7}.$$

Угловые коэффициенты перпендикуляров к этим сторонам находим по формулам (7)

$$k_{AB}=-\frac{4}{3},\quad k_{BC}=-\frac{7}{24}.$$

Подставляя найденные угловые коэффициенты и координаты точек C *и* A в уравнение пучка прямых (8), находим перпендикуляры к прямой AB *и* BC

$$y-16=-\frac{4}{3}(x+2)\ \text{ или }\ 4x+3y-40=0,$$

$$y-4=-\frac{7}{24}(x-7)\ \text{ или }\ 7x+24y-145=0.$$

Решая эти уравнения высот совместно, находим координаты точки их пересечения (7;4), а это координаты точки A, т. е. угол A равен $\frac{\pi}{2}$ и треугольник прямоугольный.

Запишем уравнения сторон AB и BC в общем виде:

$$3x-4y-5=0,\quad 24x-7y+160=0.$$

Биссектрису BF угла B находим по формуле (12)

$$\frac{3x-4y-5}{\sqrt{9+16}}=\frac{24x-7y+160}{\sqrt{576+49}},\ \ 9x+13y+185=0.$$

4.5. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x+4y-7=0$ и удаленной от точки A(3;-1) на три единицы.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$, $k=-\frac{3}{4}$. Воспользовавшись уравнением (8), проведем через точку A прямую параллельную данной прямой

$$y+1=-\frac{3}{4}(x-3),\quad 3x+4y-5=0.$$

Пусть *x, y* текущие координаты точки на искомой прямой, тогда расстояние от этой точки до прямой, проходящей через точку *A*, находится по формуле

$$d=\left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Подставляя сюда значение $d=3$ и коэффициенты *A,B,C,* находим $3=\left|\frac{3x+4y-5}{5}\right|$ или, раскрывая модуль, $15=3x+4y-5$ и $15=3x-4y+5$

Отсюда имеем $3x+4y-20=0$ и $3x+4y+10=0$.

4.6. Через точку пересечения прямых $2x-y+3=0$ и $x+y-2=0$. **провести** прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y-7=0$.

Решение. Пользуясь уравнением (9), запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых

$$2x-y+3+\lambda(x+y-2)=0 \text{ или } (2+\lambda)x+(\lambda-1)y+3-2\lambda=0.$$

Угловой коэффициент пучка прямых $k=-\frac{2+\lambda}{\lambda-1}$, а угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k_1=\frac{3}{4}$. По условию перпендикулярности $k=-\frac{1}{k_1}$, откуда $\frac{2+\lambda}{\lambda-1}=\frac{3}{4}$, *а* $\lambda=10$

Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, получаем уравнение искомой прямой $12x+9y-17=0$.

4.7. Даны две вершины треугольника *A*(-4;2) и *B*(2;-5) и точка пересечения высот $M\left(\frac{8}{3};-2\right)$. Найти третью вершину *C* и расстояние ее от биссектрисы угла *A*.

Решение. По уравнению прямой, проходящей через две точки A и B, находим $\dfrac{y-2}{-5-2}=\dfrac{x+4}{2+4}$, $y=-\dfrac{7}{6}x-\dfrac{8}{3}$.

Используя условие перпендикулярности (7), из уравнения пучка прямых (8) находим уравнение перпендикуляра MC к прямой AB, проходящего через точку M (рис. 3.23) $y+2=\dfrac{6}{7}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$, $6x-7y-30=0$.

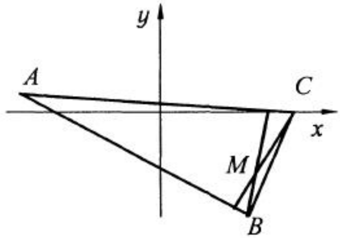


Рис. 3.23

Уравнение перпендикуляра BM к прямой AC находим по уравнению прямой проходящей через две точки B и M

$$\frac{y+5}{-2+5}=\frac{x-2}{\frac{8}{3}-2},\ y=-\frac{9}{2}x-14.$$

Учитывая, что прямые AC и BM перпендикулярны (7), из уравнения пучка прямых, проходящих через точку A, находим уравнение стороны AC

$$y-2=-\frac{2}{9}(x+4),\ 2x+9y-10=0.$$

Решая совместно уравнения прямых AC и MC, находим координаты точки $C(5;0)$. Подставляя уравнения сторон AB и AC в формулу (12), находим уравнение биссектрисы угла A

$$\frac{7x+6y+16}{\sqrt{49+36}}=-\frac{2x+9y-10}{\sqrt{4+81}},\ 3x+5y+2=0.$$

Расстояние точки C от биссектрисы находим по формуле (11)

$$d=\left|\frac{3\cdot 5+5\cdot 0+2}{-\sqrt{9+25}}\right|=\frac{17}{\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{34}}{2}.$$

4.8. Пересечение медиан в точке $M(3;3)$, а $x-y-2=0$ и $7x-y-8=0$ - уравнения двух сторон треугольника. **Найти** уравнение третьей стороны.

Решение. Найдем точку пересечения известных сторон треугольника и обозначим ее за A (рис. 3.24)

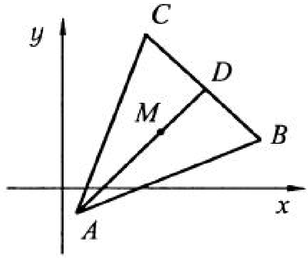


Рис. 3.24

$\begin{cases} x-y-2=0, \\ 7x-y-8=0, \end{cases}$ $x=1, y=-1.$ Точка пересечения медиан делит их в отношении 2:1, поэтому $AM:MD=2:1$, отсюда $\lambda=2$

$$x_D=\frac{(1+\lambda)x_M-x_A}{\lambda}=\frac{3\cdot 3-1}{2}=4, y_D=\frac{(1+\lambda)y_M-y_A}{\lambda}=\frac{3\cdot 3+1}{2}=5.$$

Координаты точек C и B удовлетворяют уравнениям прямых AC и AB

$$7x_c-y_c-8=0, \text{ и } x_B-y_B-2=0.$$

Точка D делит отрезок CB пополам $x_c+x_B=x_D=8$, $y_c+y_B=2y_D=10.$

Решая эти четыре уравнения относительно x_C, y_C, x_B, y_B, находим координаты точек C и B:

$$x_C=2, y_C=6, x_B=3, y_B=4.$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим уравнение прямой BC

$$\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-6}{2-6},\quad x+2y-14=0.$$

4.9. Через точку $M\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ **провести прямую** так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $2x+y-3=0$ и $2x+y-5=0$ лежала на прямой $2x-y-1=0$.

Решение. Проведем параллельные прямые на плоскости Oxy (рис. 3.25) и найдем точки пересечения A, B с третьей прямой.

Для этого решим системы уравнений

$$\begin{cases}2x+y-3=0,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}\quad x_A=1, y_A=1;$$

$$\begin{cases}2x+y-5=0,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}\quad x_B=\frac{3}{2}, y_B=2.$$

Поскольку середина отрезка искомой прямой между параллельными прямыми лежит на прямой AB, то из равенства треугольников ACN и BDN следует, что точка пересечения N делит прямую AB пополам. Найдем ее координаты

$$x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5}{4},\quad y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3}{2}.$$

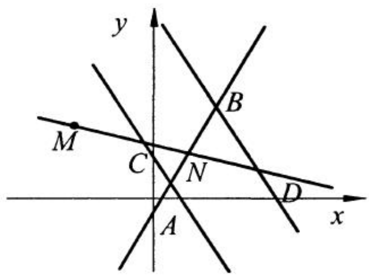


Рис. 3.25

Подставляя координаты точек M и N уравнение прямой, проходящей через две точки, получим

$$\frac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{x-\frac{5}{4}}{-3-\frac{5}{4}},\ 8x+34y-61=0.$$

4.10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x+y+9=0$ и $x-y-3=0$ и точка $M\left(-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$ пересечения его диагоналей. **Составить** уравнения двух других сторон параллелограмма.

Решение. Поскольку заданные стороны параллелограмма не параллельны, то найдем точку A их пересечения (рис. 3.26)

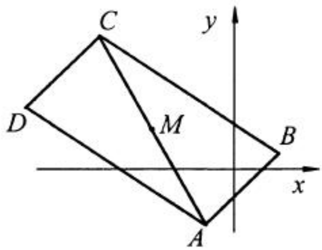


Рис. 3.26

$$\begin{cases} 2x+y+9=0, \\ x-y-3=0, \end{cases}\ x_A=-2, y_A=-5.$$

Диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам. Отсюда координаты точки C

$$x_C=2x_M-x_A=-2\cdot\frac{7}{2}+2=-5, y_C=2y_M-y_A=2\cdot\frac{7}{2}+5=12.$$

Уравнения прямых BC и CD находим из уравнения пучка прямых проходящих через точку C. Прямая BC параллельна

AD, угловой коэффициент которой $k=-2$, следовательно $y-12=2(x+5)$, $2x+y-2=0$.

Прямая CD параллельна AB, угловой коэффициент которой $k=1$, $y-12=x+5$, $x-y+17=0$.

4.11. Даны две вершины треугольника $A(5;1), B(1;3)$ и точка $M(3;4)$ пересечения его медиан. Составить уравнения сторон треугольника.

Решение. Построим заданные точки (рис. 3.27). Медиана проходит через точку M и делит сторону AB пополам в точке D. Зная координаты точек A и B, находим координаты точки D

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5+1}{2}=3,\ y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$$

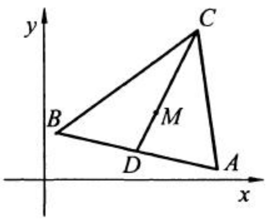


Рис. 3.27

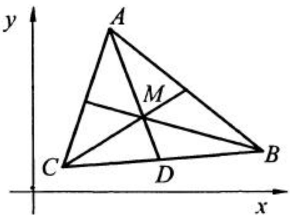


Рис. 3.28

Известно, что в треугольнике, точка пересечения медиан делит их в отношении $2:1$. Если обозначить за C третью вершину треугольника, то будем иметь $\frac{CM}{MD}=\frac{2}{1}=\lambda$. Отсюда, по формулам деления отрезка в заданном отношении, имеем

$$x_M=\frac{x_C+\lambda x_D}{1+\lambda}, y_M=\frac{y_C+\lambda y_D}{1+\lambda}.$$

Откуда $x_C=(1+\lambda)x_M-\lambda x_D=3\cdot3-2\cdot3=3$,

$$y_C=(1+\lambda)y_M-\lambda y_D=3\cdot4-2\cdot2=8.$$

Итак, получили $C(3;8)$. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим уравнения сторон треугольника

$$AB:\ \frac{y-1}{3-1}=\frac{x-5}{1-5},\ \text{откуда}\ x+2y-7=0,$$

$$AC:\ \frac{y-8}{1-8}=\frac{x-3}{5-3},\ \text{откуда}\ 7x+2y-37=0,$$

$$BC:\ \frac{y-8}{3-8}=\frac{x-3}{1-3},\ \text{откуда}\ 5x-2y+1=0.$$

4.12. Даны уравнения $x+y-8=0, x-y-2=0$ двух медиан треугольника и координаты одной из его вершин $A(4;6)$. Найти уравнения сторон треугольника.

Решение. Координаты точки $A(4;6)$ не удовлетворяют заданным уравнениям, следовательно, точка A не лежит на медианах.

Решая систему заданных уравнений, находим координаты точки M пересечения медиан $x_M=5, y_M=3$.

Проведем две медианы, отметим точку М их пересечения и точку A (рис. 3.28).

Пусть, например, координаты вершины $B(x_B, y_B)$ удовлетворяют первому уравнению, т. е. медиана проходит через вершину треугольника B, а координаты вершины C удовлетворяют второму из заданных уравнений. Тогда $x_B+y_B-8=0, x_C-y_C-2=0.$

Имеем два уравнения с четырьмя неизвестными. Составим еще два уравнения с теми же неизвестными. Медиана, проведенная через вершину A,пройдет через точку M и разделит сторону BC пополам в точке D. Найдем координаты точки D: $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{2}{1}=\lambda,$

$$x_M=\frac{x_A+2x_D}{1+2},\quad y_M=\frac{y_A+2y_D}{1+2},$$

$$x_D = \frac{2x_M - 2x_A}{2} = \frac{3\cdot 5 - 4}{2} = \frac{11}{2},$$

$$y_D = \frac{3y_M - y_A}{2} = \frac{3\cdot 3 - 6}{2} = \frac{3}{2}.$$

Итак, имеем $D\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Точка D делит BC пополам, следовательно,

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2},\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2},$$

откуда $x_B + x_C - 11 = 0, y_B + y_C - 3 = 0.$

Составим систему

$$\begin{cases} x_B + x_C = 11, \\ y_B + y_C = 3, \\ x_B + y_B = 8, \\ x_C - y_C = 2 \end{cases}$$

и найдем ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Составим определитель Δx_B

$$\Delta x_B = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

Находим $x_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta} = \frac{-14}{-2} = 7.$ Подставляя x_B в первое из уравнений системы, находим $x_C = 4.$ Из остальных уравнений находим, что $y_B = 1, y_C = 2$.

Зная координаты точек $B(7;1)$ и $C(4;2)$, находим уравнения сторон треугольника

$$AB:\ \frac{y-6}{1-6}=\frac{x-4}{7-4},\ \text{откуда}\ 5x+3y-38=0,$$

$$AC:\ \frac{y-6}{2-6}=\frac{x-4}{4-4},\ \text{откуда}\ x=4,$$

$$BC:\ \frac{y-1}{2-1}=\frac{x-7}{4-7},\ \text{откуда}\ x+3y-10=0.$$

4.13. Даны вершины $A(-3;-2)$, $B(4;-1)$ и $C(1;3)$ трапеции $ABCD\left(AB\,||\,BC\right)$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

Найти координаты вершины D.

Решение. Прямая $BC\,||\,AD$, следовательно, их угловые коэффициенты равны. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Отсюда уравнение прямой BC примет вид

$$\frac{y+1}{3+1}=\frac{x-4}{1-4},\ 3y+4x=13,\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3},\ k=-\frac{4}{3}.$$

Для записи уравнения прямой AD воспользуемся уравнением пучка прямых, проходящих через точку A и условием параллельности $BC\,||\,AD$

$$y-yA=k\left(x-xA\right),\ y+2=\left(x+3\right),\ 4x+3y+18=0.$$

Координаты точек A и C известны. Из уравнения прямой, проходящей через две точки находим, что уравнение прямой AC имеет вид

$$\frac{y+2}{3+2}=\frac{x+3}{1+3},\ y=\frac{5}{4}x+\frac{7}{4},\ k=\frac{5}{4}.$$

Из условия перпендикулярности диагоналей трапеции находим угловой коэффициент диагонали BD:

$$k_1=-\frac{1}{k},\ k_1=-\frac{4}{5}.$$

Из уравнения пучка прямых, проходящих через точку B, находим уравнение прямой BD

$$y+1=k_1(x-4),\ \ y+1=-\frac{4}{5}(x-4),\ \ 4x+5y-11=0.$$

Решая уравнения прямых BD и AD совместно, находим координаты точки D

$$\begin{cases} 4x+5y-11=0, \\ 4x+3y+18=0. \end{cases}$$

$$2y-29=0,\ \ y=\frac{29}{2},\ \ 4x+\frac{5\cdot 29}{2}-11=0,\ \ x=-\frac{123}{8}.$$

Ответ: $D\left(-\frac{123}{8};\frac{29}{2}\right)$.

3.5. Уравнение линии как геометрического места точек

Линии на плоскости соответствует уравнение с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, называется уравнением данной линии.

Всякому уравнению первой степени с двумя неизвестными на плоскости соответствует прямая линия.

Кривыми второго порядка называются кривые, уравнения которых в прямоугольных координатах представляют уравнения второй степени с двумя неизвестными

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Существуют три типа таких кривых:

если $AC-B^2>0,$ кривая эллиптического типа,

если $AC-B^2<0$ – гиперболического типа,

если $AC-B^2<0$ - параболического типа.

Если в общем уравнении второй степени (1) коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой $A = C$, член с произведением текущих координат отсутствует $B = 0$ и $D^2 + E^2 > AF$, то это уравнение представляет окружность.

Координаты точек при $A > 0$, лежащих внутри окружности определяются неравенством

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F < 0,$$

координаты точек, лежащих вне окружности, - неравенством

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F > 0.$$

Если алгебраическая линия, т. е. линия уравнение которой можно представить в виде многочлена, определяется в декартовой системе координат уравнением $n-$й степени относительно x и y, то она называется линией $n-$го порядка.

Геометрическим местом точек на плоскости называют линию, все точки которой обладают одним и тем же определенным свойством.

При составлении уравнения линии можно пользоваться следующей схемой:

1) определить линию как геометрическое место точек;
2) выбрать систему координат;
3) предположить, что некоторая точка $M(x, y)$ принадлежит данному геометрическому месту точек, причем точка должна иметь самое общее положение;
4) записать в геометрических символах условие, связывающее точку M с какими-либо элементами (точками), известными из определения данного геометрического места;
5) записать это условие, пользуясь формулами аналитической геометрии, по возможности, упростить.

5.1. **Принадлежат ли** точки $A(0;4), B(1;-2)$ линии

$$y = \frac{3x^2 - 4}{2x - 1}?$$

Решение. Если точка принадлежит данной линии, то ее координаты удовлетворяют уравнению данной линии.

Подставляем в уравнение заданной линии вместо текущих координат x, y координаты точки A. Получим $4 = \frac{3 \cdot 0^2 - 4}{2 \cdot 0 - 1} = 4$. Равенство выполняется, следовательно, точка A принадлежит данной линии.

Подставляя координаты точки B в уравнение линии, получим $-2 \neq \frac{3-4}{2-1} = -1$. Следовательно, точка B не принадлежит данной линии.

5.2. Найти точки пересечения парабол

$$y^2 = 4x, \;\; y = \frac{1}{4}x^2.$$

Решение. Так как точка пересечения принадлежит обеим линиям, то ее координаты удовлетворяют каждому из этих уравнений. Это значит, что координаты точки пересечения являются решением системы

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = \frac{1}{4}x^2. \end{cases}$$

Откуда находим, что $x_1 = 0, \;\; x_2 = 4$ и $y_1 = 0, \;\; y_2 = 4$. Следовательно, данные линии пересекаются в точках $O(0;0)$ и $A(4;4)$.

5.3. Даны уравнения двух линий: $(x-3)^2 + y^2 = 1$ — окружности и $x + y = 0$ — биссектрисы второго координатного угла. Найти точки их пересечения.

Решение. Для нахождения всех точек пересечения данных линий необходимо решить уравнения совместно. Подставим в первое уравнение $y = -x$, получим $x^2 - 3x + 4 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-5}}{2}$. Поскольку $\sqrt{-5}$ есть мнимое число, то система не имеет вещественных решений и, следовательно, данные линии не пересекаются.

5.4. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A(3;5)$ и $B(1;-4)$.

Решение. Построим точки A и B (рис. 3.29).

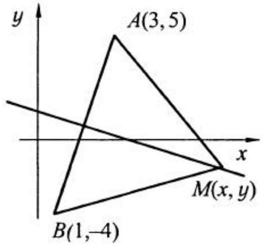


Рис.3.29

Известно, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух заданных, является перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего заданные точки. Возьмем точку $M(x,y)$, предполагая, что она лежит на этом перпендикуляре, тогда $AM = BM$. Но $AM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$ и $BM = \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}$, откуда уравнение линии $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2}$. Возводим в квадрат обе части этого равенства и упрощаем $4x + 18y - 17 = 0$. Искомая линия — прямая.

5.5. Найти уравнение траектории точки M, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(1;1)$, чем к точке $B(7;-2)$.

Решение. По условию $2AM = BM$. Обозначим через x, y координаты точки M, тогда $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ или

$$4\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right) = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$, т. е. траектория точки M есть окружность с центром в точке $O'(-1;2)$ и радиусом, равным $2\sqrt{5}$.

3.6. Кривые второго порядка

1°. Окружностью называют геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{1}$$

где a,b — координаты центра окружности; R — радиус окружности.

Частные случаи уравнения окружности:

1. Если $b=0; a=R$, то $x^2+y^2=2Rx$. Центр окружности расположен на расстоянии R по оси x (рис. 3.30).

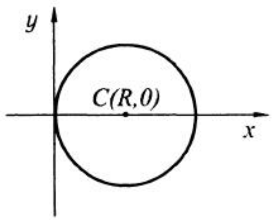


Рис. 3.30

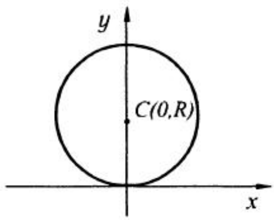


Рис. 3.31

2. Если $a=0; b=R$, то $x^2+y^2=2Ry$. Центр окружности расположен на расстоянии R по оси y (рис. 3.31).

3. Если $a=b=0$, то $x^2+y^2=R^2$ — каноническое уравнение окружности. Центр окружности радиуса R в начале координат.

2°. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная $r_1 + r_2 = 2a$, $a - const$ (рис. 3.32).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где a, b — большая и малая полуоси эллипса.

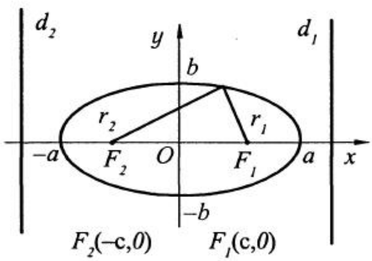


Рис. 3.32

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния эллипса c к его большой оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Поскольку у эллипса $c < a$, то эксцентриситет любого эллипса меньше единицы. Если $\varepsilon = 0$, то $c = 0$ и уравнение эллипса принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, это есть уравнение окружности.

Если фокусы эллипса расположены на оси Ox, то $b^2 = a^2 - c^2$; если же на оси Oy, то $a^2 = b^2 - c^2$.

Директрисами эллипса называются прямые d_1, d_2, параллельные его малой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, то есть $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса к расстоянию ее до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Фокальные радиусы r_1 и r_2 некоторой точки M могут быть найдены по формулам

$$r_1 = a - x,\ r_2 = a + x, \tag{3}$$

где x — абсцисса точки M.

Диаметром эллипса a' сопряженным с некоторым направлением, называют геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных этому направлению (рис. 3.33)

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k_2} x, \tag{4}$$

где $k_2 = tg\varphi_2$ — угловой коэффициент хорд.

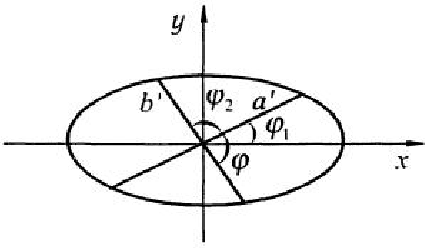


Рис. 3.33

Угловой коэффициент диаметра k_1, сопряженного хордам, связан с угловым коэффициентом хорд зависимостью

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k_2}. \tag{5}$$

Два диаметра a', b', каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому, называют сопряженными между собой диаметрами. Так, оси симметрии эллипса являются его сопряженными диаметрами и их называют *главными диаметрами*.

Угловые коэффициенты k_2 и k_1 входят в формулу (5) равноправно, поэтому, если бы исходить из хорд с угловым коэффициентом k_1, то пришли бы к диаметру с направлением k_2.

Теоремы Аполлония. 1. Сумма квадратов, построенных на двух взаимно-сопряженных диаметрах эллипса, равна сумме квадратов, построенных на его осях $\left(a'\right)^2+\left(b'\right)^2=a^2+b^2$.

2. Площадь параллелограмма, построенного на двух взаимно-сопряженных диаметрах эллипса, равна площади прямоугольника, построенного на его осях $ab=a'b'\sin\varphi$.

3°. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $r_2-r_1=2a$, $a-const$ (рис. 3.34).

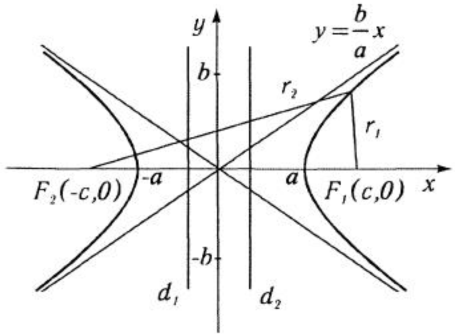


Рис. 3.34

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a — действительная полуось; b — мнимая полуось гиперболы.

Прямые, проходящие через центр симметрии, такие, что если точка M двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляясь от вершины неограниченно приближается к одной из них, называются *асимптотами гиперболы*. Уравнения асимптот

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния гиперболы c к ее действительной оси, то есть $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

Поскольку у гиперболы $a < c$, то эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

Если фокусы гиперболы расположены на оси Ox, то $b^2 = c^2 - a^2$, если же на оси Oy, то $a^2 = c^2 - b^2$.

Директрисами гиперболы называются прямые d_1, d_2 параллельные мнимой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к ее расстоянию до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Фокальные радиусы r_1, r_2 некоторой точки $M(x, y)$ могут быть найдены по формулам

$$r_1 = \pm(\varepsilon x - a), \ r_2 = \pm(a + \varepsilon x). \qquad (7)$$

Если полуоси гиперболы равны, то гипербола называется *равносторонней* и ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 . \qquad (8)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы служат биссектрисы координатных углов $y = \pm x$.

Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к своим асимптотам, как к осям координат, имеет вид

$$y = \frac{k}{x}, \qquad (9)$$

где $k = \dfrac{a^2}{2}$.

Каждая ветвь гиперболы (9) имеет вершину с равными по абсолютной по величине координатами и удаленную от начала координат на расстояние $a=\sqrt{2k}$.

Уравнение равносторонней гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат, имеет вид

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{10}$$

где a,b,c,d — постоянные коэффициенты.

Уравнение (10) по формулам параллельного переноса координатных осей может быть приведено к виду (9).

4°. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой ее фокусом и от данной прямой, называемой ее директрисой (рис. 3.35).

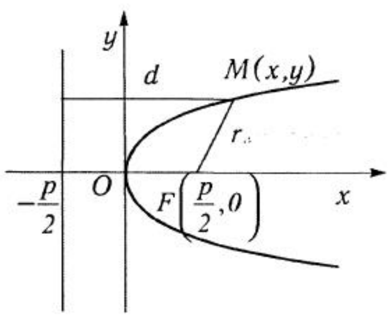


Рис. 3.35

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2=2px, \tag{11}$$

где p — параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Фокальный радиус любой точки параболы $M\left(x,y\right)$ вычисляется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$. У параболы один фокус, следовательно и одна директриса $x=-\frac{p}{2}$. Эксцентриситет параболы равен отношению расстояния любой ее точки от фокуса к расстоянию до директрисы. На основании определения параболы имеем, что эксцентриситет любой параболы равен единице $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Общее уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси ординат, имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{12}$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты.

6.1. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0.$$

Решение. Дополняя левую часть уравнения до полных квадратов, получим $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = 4$ или $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 4$.

Следовательно $a = 1, b = -4, R = 2$.

6.2. Составить уравнение окружности, проходящей через три данные точки $A(1;1), B(0;2)$ и $C(2;-2)$.

Решение. Уравнение искомой окружности содержит три неизвестных параметра a, b и R, которые следует определить.

Подставляя координаты точек A, B и C уравнение окружности (1), получим систему трех уравнений относительно неизвестных

$$(1-a)^2 + (1-b)^2 = R^2,$$

$$(0-a)^2 + (2-b)^2 = R^2,$$

$$(2-a)^2 + (2-b)^2 = R^2.$$

Вычтем из последнего уравнения сначала первое, потом - второе уравнение, тогда получим: $2a - 6b = 6$, $4a - 8b = 4$, откуда $a = -3, b = -2$. Из первого уравнения находим, что $R^2 = 25$. Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

6.3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(7;9)$ и касающейся оси Ox в точке $B(4;0)$.

Решение. Делаем схематический чертеж (рис. 3.36).

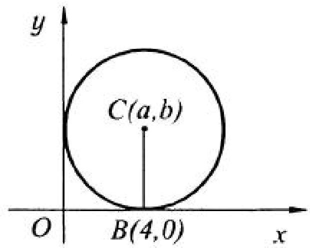


Рис. 3.36

Замечаем, что $OB = a = 4, BC = b = R$, так как перпендикуляр BC к касательной Ox параллелен оси Oy и проходит через центр окружности $C(a,b)$. Уравнение искомой окружности примет вид $(x-4)^2 + (y-R)^2 = R^2$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A(7;9)$, получим $(7-4)^2 + (9-R)^2 = R^2$, откуда $R = 5$. Следовательно, уравнение окружности примет вид $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$.

6.4. Не выполняя построения, **установить**, как расположены относительно окружности

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 29 = 0$$

точки: $A(4;3)$, $B(-1;2)$, $C(-4,9)$.

Решение. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получим $16+9+32-12-29=16$, следовательно, точка A лежит вне окружности.

Подставляя координаты точки B, будем иметь $1+4-8-8-29=-40$, следовательно, точка B лежит внутри окружности.

Подставляя координаты точки C, получим $16+81-32-36-29=0$, следовательно, точка C лежит на окружности.

6.5. Составить уравнение эллипса, зная, что он проходит через точки $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ и $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$ и его оси симметрии совпадают с осями координат. **Найти** уравнения его директрис, координаты вершин и фокусов, вычислить эксцентриситет и величины фокальных радиусов точки M .

Решение. Уравнение эллипса имеет вид (2). Точки M и N принадлежат эллипсу, значит их координаты удовлетворяют его уравнению. Подставляя их в уравнение эллипса, получим систему двух уравнений относительно a^2 и b^2

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-2\right)^2}{b^2}=1,\ \frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\ a^2=15,\ b^2=5.$$

Следовательно, искомое уравнение $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

Величину c найдем из соотношения

$$c^2=a^2-b^2=15-5=10.$$

Итак, $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{5}$ и $c=\sqrt{10}$. Эксцентриситет будет

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Уравнения директрис: $x=\pm\frac{2\sqrt{10}}{2}$.

Вершины эллипса (рис. 3.37): $A_1\left(\sqrt{15},0\right)$, $A_2\left(-\sqrt{15},0\right)$, $B_1\left(0,\sqrt{5}\right)$, $B_2\left(0,-\sqrt{5}\right)$,

Фокусы: $F_1\left(\sqrt{10},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{10},0\right)$.

Фокальные радиусы точки M находим по формулам (3):

$$r_1=\sqrt{15}-\sqrt{2}\ ,\quad r_2=\sqrt{15}+\sqrt{2}\ .$$

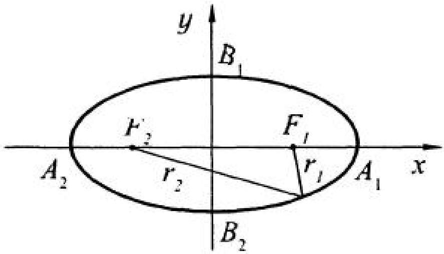


Рис. 3.37

6.6. Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси, соответственно, равны 8 и 2. **Составить** каноническое уравнение эллипса.

Решение. Данные расстояния могут быть представлены формулами $a-c=2$ и $a+c=8$. Отсюда $2a=10$, $2c=6$ или $a=5$, $c=3$.

Так как $b^2=a^2-c^2$, то $b^2=25-9=16$. Следовательно, уравнение искомого эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

6.7. Один из диаметров эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ имеет уравнение $y=-2x$. Найти уравнение сопряженного ему диаметра.

Решение. Здесь $a^2=9$, $b^2=16$, $k_1=-1$. По формуле (5) находим, что $k_2=-\frac{16}{9(-2)}=\frac{8}{9}$. Уравнение искомого диаметра имеет вид $y=\frac{8}{9}x$.

6.8. Оси эллипса совпадают с осями координат и равны: $a=10$, $b=1$. Определить длину сопряженных полудиаметров a' и b' и направление диаметра $2b'$ если известно, что диаметр $2a'$ образует с осью $2a$ угол 20°.

Решение. Уравнение эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{1}=1$. Пусть уравнение диаметра имеет вид $y=k_1x$. Решая эти уравнения совместно, находим точки пересечения

$$x_{1,2}=\pm\frac{10}{\sqrt{100k_1^2+1}},\ y_{1,2}=\pm\frac{10k_1}{\sqrt{100k_1^2+1}}$$

Учитывая, что $k_1=tg\varphi_1=tg20^\circ\simeq 0,364$, длину первого полудиаметра находим по формуле расстояния между двумя точками

$$a'=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=ab\sqrt{\frac{1+k_1^2}{a^2k_1^2+b^2}}=10\sqrt{\frac{1+(0,364)^2}{100(0,364)^2+1}}\simeq 2,82\ .$$

Длину второго полудиаметра находим по теореме Аполлония

$$(b')^2=a^2+b^2-(a')^2,\ \text{откуда}\ b'=\sqrt{100+1-(2,82)^2}\simeq 9,59\ .$$

Угловой коэффициент сопряженного диаметра находим по формуле (5)

$$k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}=-\frac{1}{100\cdot 0,364}=-0,0275,\ tg\varphi=k_2,\ \varphi\simeq 178^\circ 25'.$$

6.9. Составить уравнение гиперболы, зная, что ее оси совпадают с осями координат и гипербола проходит через точки $M(5;-2)$ и $N\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **Найти** уравнения директрис и вычислить эксцентриситет гиперболы.

Решение. Координаты точки M и N должны удовлетворять каноническому уравнению гиперболы (6). Подставляя их в уравнение гиперболы получим систему уравнений

$$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\ \frac{18}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1.$$

Решая систему относительно $\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{b^2}$, находим $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{11}$, $\frac{1}{b^2}=\frac{7}{22}$. Откуда $a^2=11$, $b^2=\frac{22}{7}$. Составляем уравнение гиперболы $\frac{x^2}{11}-\frac{7y^2}{22}=1$.

Поскольку для гиперболы $c^2=a^2+b^2$, то $c^2=11+\frac{22}{7}=\frac{99}{7}$.

Тогда эксцентриситет будет равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{99}{7\cdot 11}}=3\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Уравнения директрис находим по формуле $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\frac{\sqrt{77}}{3}$.

6.10. Гипербола проходит через точку $M\left(12;3\sqrt{3}\right)$ и имеет асимптоты $y=\pm\frac{1}{2}x$. **Составить** уравнение гиперболы.

Решение. Запишем уравнения асимптот в общем виде $y=\pm\frac{b}{a}x$, тогда $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. Обозначим $b=\gamma$ и $a=2\gamma$, где γ - коэффициент пропорциональности.

Так как точка M принадлежит гиперболе, то подставляя ее координаты и значения a и b каноническое уравнение (6), получим $\frac{144}{4\gamma^2}-\frac{27}{\gamma^2}=1$. Откуда $\gamma^2=9$, следовательно, $a=6$, $b=3$. Уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1.$$

6.11. Вычислить площадь трапеции, вписанной в гиперболу $xy=6$, если вершинами трапеции являются точки пересечения этой гиперболы с прямыми $x+y+5=0$ и $x+y-7=0$.

Решение. Строим чертеж (рис. 3.38) и определяем координаты вершин трапеции. Система уравнений $xy = 6$, $x + y + 5 = 0$ дает значения координат точек $A(-3;-2)$; $B(-2;-3)$. Вторая система $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$ дает значения координат точек $C(6;1)$ и $D(1;6)$,

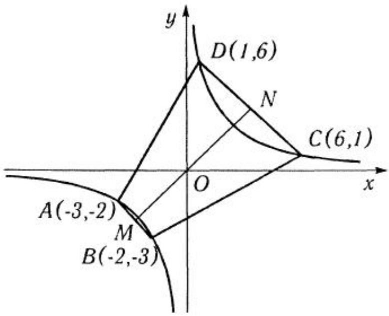


Рис. 3.38

Отсюда длина большего основания $CD = \sqrt{(6-1)^2 + (1-6)^2} = 5\sqrt{2}$; длина меньшего основания $AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{2}$. Высоту трапеции представляет отрезок MN биссектрисы координатного угла, заключений между основаниями трапеции. Совместное решение уравнения $y = x$ с каждым из уравнений $x + y + 5 = 0$ определяет координаты точек $M\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$ и $N\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Отсюда длина высоты $MN = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}$.

Таким образом, площадь трапеции равна $S = \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2} = 36$ кв.ед.

6.12. Преобразовать к простейшему виду уравнение $y=\dfrac{4x-3}{3x+5}$ и построить гиперболу, определяемому этим уравнением.

Решение. Выполним преобразование заданного уравнения параллельным переносом осей по формулам $x = x'+a$, $y = y'+b$.

Преобразуем уравнение $3xy+5y-4x=-3$ или $xy+\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}x=-1.$

Используем подстановку

$$(x'+a)(y'+b)+\frac{5}{3}(y'+b)-\frac{4}{3}(x'+a)=-1,$$

откуда

$$x'y'+x'\left(b-\frac{4}{3}\right)+y'\left(a+\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}a-\frac{5}{3}b-ab-1.$$

Условия преобразования требуют, чтобы $b-\frac{4}{3}=0$ и $a+\frac{5}{3}=0,$ тогда координаты нового начала координат равны $a=-\frac{5}{3},\ b=\frac{4}{3}.$ При этом свободный член принимает значение $k=\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)-\frac{5}{3}\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{4}{3}-1=-\frac{29}{9}.$

Заданное уравнение в системе $x'0'y'$ имеет вид $x'y'=-\frac{29}{9}$ и гипербола располагается во II и IV четвертях (рис. 3.39). Вершины гиперболы находятся на биссектрисе II и IV координатных углов на расстоянии $a=\sqrt{\frac{58}{9}}$ от $0'$.

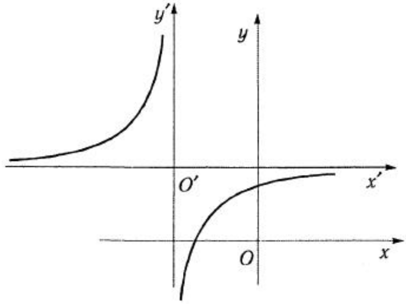


Рис. 3.39

6.13. Составить уравнение гиперболы, если известны точка пересечения ее асимптот $O'(2;-3)$ и одна из вершин $A(4;-1)$.

Решение. Относительно системы координат с началом в точке $O'(2;-3)$ пересечения асимптот условию соответствует уравнение гиперболы $y' = \dfrac{k}{x'}$. Воспользуемся формулами параллельного переноса начала координат $x' = x-2,\ y' = y+3.$ Тогда уравнение гиперболы примет вид $y+3 = \dfrac{k}{x-2}.$ Квадрат расстояния от начала координат до вершины A находим по формуле $a^2 = (4-2)^2 + (-1+3)^2 = 8,$ тогда по формуле $k = \dfrac{a^2}{2}$ находим, что $k = 4.$ Следовательно, уравнение гиперболы примет вид $y+3 = \dfrac{4}{x-2}$ или $y = \dfrac{-3x+10}{x-2}.$

6.14. Написать уравнение параболы, зная, что ось симметрии ее совпадает с осью Ox, а вершина—с началом координат и расстояние от вершины до фокуса равно 5.

Решение. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. По условию задачи $\frac{p}{2} = 5$, откуда $p = 10$. Уравнение примет виду $y^2 = 20x$.

6.15. Составить уравнение параболы, если парабола симметрична относительно оси Oy, вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(0;3)$.

Решение. Поскольку парабола симметрична относительно оси Oy, то каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2py$. По условию $\frac{p}{2} = 3,\ p = 6.$

Отсюда уравнение параболы $x^2 = 12y$.

6.16. Для параболы $x^2 = 2py$. найти длину хорды, перпендикулярной к оси Oy и проходящей через фокус.

Решение. Фокус параболы имеет координаты $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$. Пусть точка M имеет координаты $M\left(x;\frac{p}{2}\right)$ и принадлежит параболе (рис. 3.40), тогда $x^2 = p\cdot\frac{p}{2}$ или $x_м = p$. Отсюда длина половины искомой хорды равна p, следовательно, длина всей хорды MN равна $2p$.

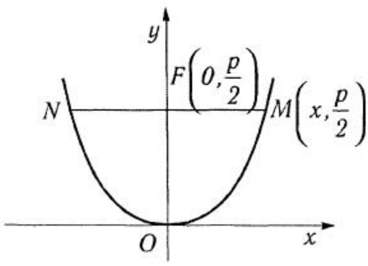


Рис. 3.40

6.17. Определить координаты вершины параболы, величину параметра и уравнение оси симметрии, если парабола задана уравнением $y^2 - 8x - 4y + 12 = 0$.

Решение. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата переменной y

$$y^2 - 4y + 4 - 8x + 12 - 4 = 0 \text{ или } \left(y-2\right)^2 = 2\cdot 4\left(x-1\right).$$

Следовательно, вершина параболы имеет координаты $x_b = 1,\ y_b = 2$. Параметр $p = 4$, а ось симметрии параллельна оси Ox и имеет уравнение $y = 2$.

6.18. Найти уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, если известно, что парабола проходит через точки $M\left(-3;6\right)$ и $N\left(2;-4\right)$.

Решение. Искомое уравнение параболы примем в виде $y = ax^2 + c$. Подставляя координаты точек, будем иметь $6 = 9a + c, -4 = 4a + c$. Решая эту систему, находим, что $a = 2,\ c = -12$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяет парабола $y = 2x^2 - 12$.

6.19. Найти уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, если известно, что парабола проходит через точки (1;2), (2;4) и (3;8).

Решение. Подставляя координаты точек в общее уравнение параболы, получим систему

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 4, \\ 9a + 3b + c = 8. \end{cases}$$

Из решения системы находим, что $a = 1,\ b = -1,\ c = 2$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет парабола $y = x^2 - x + 2$.

6.20. Найти координаты вершины, написать уравнение оси симметрии и построить параболу, заданную уравнением $y = 5 + 4x - x^2$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения, выделив в ней полный квадрат $y = 5 - \left(x^2 - 4x + 4\right) + 9 - \left(x - 2\right)^2$. Вершина параболы находится в точке, которая имеет наибольшую ординату, т. е. в точке $x = 2,\ y = 9$. Отсюда уравнение оси симметрии $x = 3$.

Перенос начала координат в вершину при параллельном перемещении осей по формулам $x = x' + 2$ и $y = y' + 9$ дает $y' = -\left(x'\right)^2$.

Знак минус указывает, что ветви параболы направлены вниз.

Помещая в системе xOy новую систему $x'O'y'$ с началом в точке $O'\left(2;9\right)$, строим параболу $y' = -\left(x'\right)^2$ (рис. 3.41).

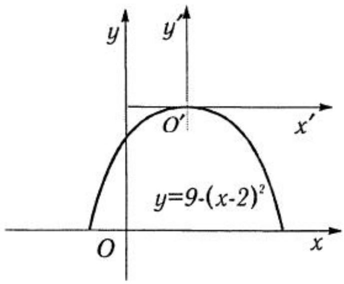


Рис. 3.41

6.21. Построить параболу по заданному уравнению $y^2 - 8y - 6x + 4 = 0$.

Решение. Первые два члена дополняем до полного квадрата, а остальные члены переносим в правую часть $y^2 - 8y + 16 = 6x - 4 + 16$ или $\left(y - 4\right)^2 = 6\left(x + 2\right)$. Отсюда видно, что вершина параболы имеет координаты (-2;4) и ось симметрии определяется уравнением $y - 4 = 0$.

Переходя по формулам $y = y' + 4, \ x = x' - 2$ к новой системе координат $x'O'y'$ с началом $O'(-2;4)$, находим, что $(y')^2 = 6x'$. Таким образом, парабола имеет вид (рис. 3.42).

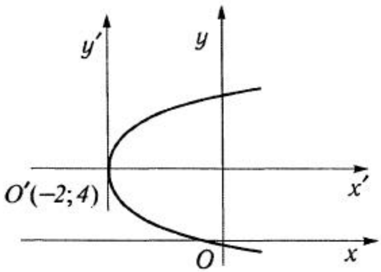


Рис. 3.42

6.22. Определить площадь трапеции, вписанной в параболу $y = x^2 - 4x - 12$, если одно из оснований трапеции лежит на оси Ox, а второе основание проходит через точку пересечения параболы с осью Oy.

Решение. Полагая x = 0, находим точку пересечения параболы с осью Oy, то есть $A(0;-12)$ (рис. 3.43). Высота трапеции $AO = 12$. Длины оснований определим по абсциссам точек пересечения параболы с прямыми $y = 0$ и $y = -12$.

Абсциссы концов основания DC находим из уравнения $x^2 - 4x - 12 = 0$, откуда, $x_1 = -2, \ x_2 = 6$, а концов основания AB из уравнения $x^2 - 4x = 0$, откуда $x_1 = 0, \ x_2 = 4$. Таким образом, верхнее основание $DC = 8$, а нижнее $AB = 4$. Площадь трапеции равна $S = \dfrac{8+4}{2} \cdot 12 = 72$ кв.ед.

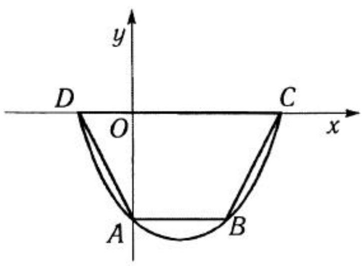


Рис. 3.43

6.23. Определить область, ограниченную линиями $y = x^2 - 1,\ x = 2$, и осью абсцисс.

Решение. В системе координат Oxy строим параболу $y = x^2 - 1$ и прямую $x = 2$ (рис. 3.44). Координаты точки C находятся из решения системы $y = x^2 - 1,\ x = 2$ и равны $C(2;3)$. Ось абсцисс $y = 0$ замыкает искомую область по прямой AB.

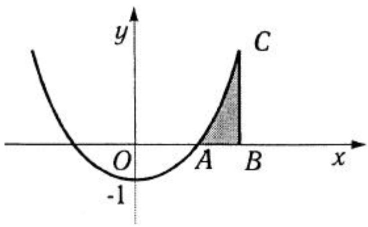


Рис. 3.44

3.7. Преобразование декартовых координат

1°. *Параллельный перенос осей*. Оси двух систем координат параллельны и одинаково направлены (рис. 3.45). Координаты точки M в этих системах связаны зависимостью

$$x = x' + a,\ y = y' + b,\ x' = xa\ \ y' = yb, \qquad (1)$$

где x, y - координаты точки M в системе Oxy; $x'y'$ - координаты точки M в системе $O'x'y'$; a, b - координаты начала координат O' системы $O'x'y'$ в системе Oxy.

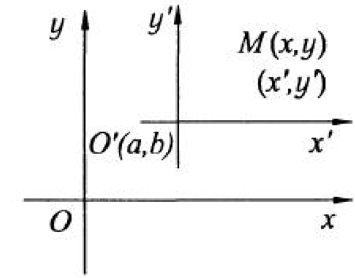


Рис. 3.45

2°. *Поворот осей*. Обе системы координат имеют общее начало и различаются направлением осей. Если положение системы $O'x'y'$ определяется относительно системы Oxy углом поворота осей α (рис. 3.46), то зависимость между координатами точки M определяется по формулам

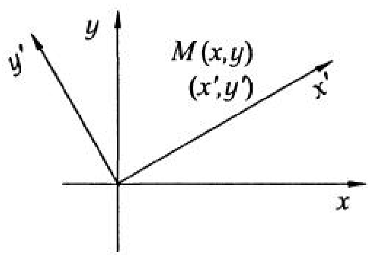


Рис. 3.46

$$\begin{aligned} &x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ &x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (2)$$

3°. *Общий случай*. Если системы Oxy и $O'x'y'$ имеют различные начала и различно направленные оси (рис. 3.47), то зависимость между координатами точки M определяется по формулам

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \qquad (3)$$

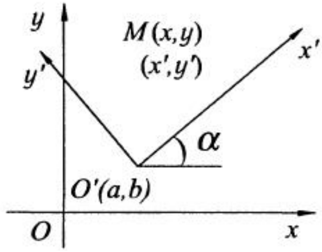


Рис. 3.47

Новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (4)$$

7.1. Точка **M** имеет координаты $x = 3,\ y = -7.$ **Найти** ее координаты, если начало координат перенесено в точку $O'(-2;5)$.

Решение. По условию $x = 3,\ y = -7,\ a = -2,\ b = 5.$ Координаты точки M в новой системе будут $x' = x - a = 3 + 2 = 5,\ y' = y - b = -7 - 5 = -12.$

7.2. Найти координаты точки $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -2\sqrt{2}\right)$, если оси координат поворачиваются на угол $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Координаты точки M даны в системе Oxy. Воспользуемся формулами (2)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2},\ -2\sqrt{2} = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из решения системы находим, что $x' = -\dfrac{3}{2},\ y' = -\dfrac{5}{2}.$

7.3. Найти координаты точки $M(1;2)$, если начало координат перенесено в точку $O'(-1;1)$ и оси координат были повернуты на угол $\alpha = 30^\circ$.

Решение. По условию задачи $x=1,\ y=2,\ a=-1,\ b=1,\ \alpha=30^\circ.$

Воспользуемся формулами (3)

$$1=x'\frac{\sqrt{3}}{2}-y'\frac{1}{2}-1,\ 2=x'\frac{1}{2}+y'\frac{\sqrt{3}}{2}+1.$$

Из решения системы находим, что

$$x'=\frac{1+2\sqrt{3}}{2},\ y'=\frac{\sqrt{3}-2}{2}.$$

7.4. Путем параллельного переноса осей координат **найти** координаты вершины параболы $y=2x^2-4x+9$ и привести ее уравнение к виду $Y=aX^2$.

Решение. Воспользуемся формулами (1). Подставив их в уравнение параболы, получим

$$y'+b=2\left(x'+a\right)2-4\left(x'+a\right)+9$$

или

$$y'=2x'^2+4\left(a-1\right)x'+2a^2-4a+9-b.$$

Координаты нового начала координат неизвестны. Находим их из условия равенства нулю свободного члена в новом уравнении параболы и коэффициента при x', то есть $2a^2-4a+9-b=0$ и $a-1=0.$ При этих условиях имеем $a=1,\ b=7.$ Уравнение параболы в новых осях $O'x'y'$ имеет вид $y'=2x'^2.$ График параболы показан на рис. 3.48.

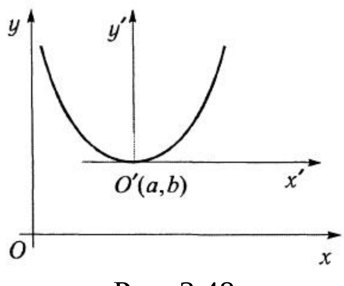


Рис. 3.48

7.5. Составить уравнение равносторонней гиперболы, приняв ее асимптоты за оси координат.

Решение. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = a2$. Уравнения асимптот $y = \pm x$. Здесь $tg\alpha = \pm 1$, то есть $\alpha = \pm 45^\circ$.

Примем $\alpha = 45^\circ$ (рис. 3.49). Воспользуемся формулами (2)

$$x = x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ, \ x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ, \ y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

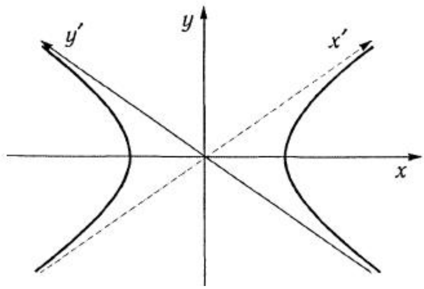


Рис. 3.49

Подставляя значения x,y в уравнение гиперболы, получим $\dfrac{(x' - y')^2}{2} - \dfrac{(x' + y')^2}{2} = a^2$, откуда $y' = -\dfrac{a^2}{2x'}$.

7.6. Выполнить параллельный перенос осей координат так, чтобы в новой системе координат уравнение параболы приняло канонический вид: а) $x^2 - 4x + y + 1 = 0$;

б) $y^2 - 3x - 2y + 10 = 0$.

Решение. а) Выделим полный квадрат $x^2 - 4x + 4 + y + 1 - 4 = (x - 2)^2 + y - 3 = 0$. Введем теперь новые координаты x', y', полагая $x = x' + 2$, $y = y' + 3$, что соответствует параллельному перемещению осей на две единицы по оси Ox и на три по оси Oy. В координата x', y', уравнение параболы примет вид: $x'^2 + y' = 0$ или $x'^2 = -y'$. Поскольку правая часть отрицательна, то ветви параболы направлены вниз (рис. 3.50).

б) Выделим полный квадрат $y^2 - 2y + 1 - 3x + 10 - 1 = (y-1)^2 - 3x + 9 = 0$ и запишем уравнение в виде $9(y-1)^2 = 3(x-3)$. Введем новые координаты, полагая $y = y' + 1,\ x = x' + 3,$ что соответствует параллельному перемещению осей на 3 единицы по оси Ox и на 1 единицу по оси Oy (рис. 3.51). Тогда получим $x'^2 = 3x'$ -— каноническое уравнение параболы.

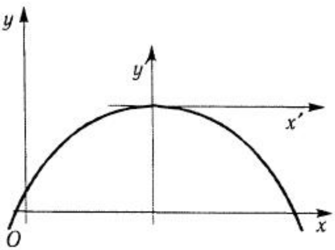


Рис. 3.50

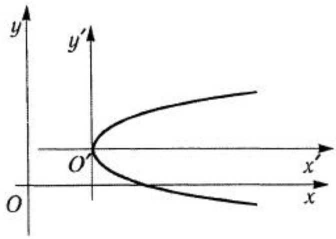


Рис. 3.51

7.7. Путем преобразования системы координат **упростить** уравнение окружности $x^2 + y^2 + 10x - 18y + 70 = 0,$ принимая за новое начало центр окружности.

Решение. Подставляя формулы (1) в уравнение окружности, будем иметь

$$(x' + a)^2 + (y' + b)^2 + 10(x' + a) - 18(y' + b) + 70 =$$

$$= x'^2 + (2a + 10)x' + y'^2 + (2b - 18)y' + a^2 + b^2 + 10a - 18b + 70 = 0.$$

Условия $2a + 10 = 0$ *и* $2b - 18 = 0$ определяют координаты центра окружности $a = -5, b = 9$. Подстановка этих значений дает уравнение окружности в новых координатах $x'^2 + y'^2 + 25 + 81 - 50 - 162 + 70 = 0$ или $x'^2 + y'^2 = 36.$

7.8. **Привести** к каноническому виду уравнение $8x^2 + 12xy + 3y^2 - 40x - 24y + 7 = 0.$

Решение. Прежде всего воспользуемся формулами параллельного переноса координатных осей (1). Перенесем начало координат в точку $O'(a,b)$. После приведения подобных членов исходное уравнение примет вид $8x'^2+12x'y'+3y'^2+(16a+12b-40)x'+(12a+6b-24)y'+8a^2+$

$$+12ab+3b^2-40a-24b+7=0.$$

Подберем a,b так, чтобы выполнялись равенства $16a+12b-40=0,\ 12a+6b-24=0,$ тогда в уравнении данной кривой исчезнут члены первой степени. Решая эти уравнения совместно, находим: $a=1,\ b=2.$

Теперь начало координат новой системы находится в точке $O'(1;2)$. Уравнение кривой в новых координатах имеет вид $8x'^2+12x'y'+3y'^2-13=0.$

Чтобы избавится от члена, содержащего произведение координат x',y', произведем поворот перенесенных осей на некоторый угол α, согласно формулам (3), тогда получим $\left(8\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha+12\cos\alpha\sin\alpha\right)x''^2+$

$$+\left(-16\sin\alpha\cos\alpha+6\sin\alpha\cos\alpha+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha\right)x''y''+$$

$$+\left(8\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha-12\sin\alpha\cos\alpha\right)y''^2-13=0.$$

Подберем угол ее так, чтобы коэффициент при $x''y''$ обратился в нуль $-10\sin\alpha\cos\alpha+12\cos^2\alpha-12\sin^2\alpha=0,$ откуда $6tg^2\alpha+5tg\alpha-6=0.$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $tg\alpha$, находим: $tg\alpha=\frac{2}{3}$ и $tg\alpha=-\frac{3}{2.}$. Возьмем первое значение, что соответствует повороту координатных осей на острый угол. Зная $tg\alpha$, находим

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Тогда уравнение кривой в системе x'', y'' примет вид

$$\frac{156}{13}x''^2 - y''^2 = 13 \text{ или } \frac{x''^2}{\frac{13}{12}} - y''^2 = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы с полуосями $\sqrt{\frac{13}{12}}$ и 1 (рис. 3.52).

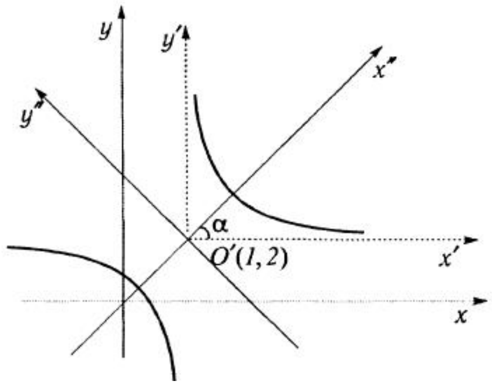


Рис. 3.52

7.9. Привести к каноническому виду уравнение $3x^2 - 6y + 3y^2 - 2x - 8y + \frac{23}{4} = 0.$

Решение. Применяя формулы (1), перенесем начало координат в точку

$$O'(a;b) \; 3x'^2 + 6x'a + 3a^2 - 6(x'y' + x'b + y'a + ab) +$$

$$+3y'^2 + 6y'b + 3b^2 - 2x' - 2a - 8y' - 8b + \frac{23}{4} = 0.$$

Чтобы исчезли члены первой степени, приравниваем к нулю коэффициенты при x', y': $3a - 3b - 1 = 0,\ -3a + 3b - 4 = 0.$ Нетрудно заметить, что полученная система несовместна, следовательно данная кривая не имеет центра.

По формулам (3) повернем оси на некоторый угол α, тогда получим

$$3x^2-6y+3y^2-2x-8y+\frac{23}{4}=3x'^2\cos^2\alpha-6x'y'\cos\alpha\sin\alpha+$$
$$+3y'^2\sin^2-6\left(x'^2\cos\alpha\sin\alpha+x'y'\cos^2\alpha-x'y'\sin^2\alpha-y'^2\cos^2\alpha\sin\alpha\right)+$$
$$+3x'^2\sin^2\alpha+6x'y'\cos\alpha\sin\alpha+3y'^2\cos^2\alpha-2x'\cos\alpha+$$
$$+2y'\sin\alpha-8x'\sin\alpha-8y'\cos\alpha+\frac{23}{4}=0.$$

Подберем угол так, чтобы коэффициент при x', y' обратился в нуль: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, откуда $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Уравнение кривой в этом случае примет вид:

$$3y'^2\left(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)-$$
$$-2x'\cos\alpha+2y'\sin\alpha-8x'\sin\alpha-8y'\cos\alpha+\frac{23}{4}=0$$

Или $6y'^2-6y'\frac{\sqrt{2}}{2}-5\sqrt{2}x'+\frac{23}{4}=0.$

Дальнейшее упрощение уравнения проводится при помощи параллельного перенесения осей Ox' и Oy'. Выделим полный квадрат $6\left(y'-\frac{1}{8}\right)^2=5\sqrt{2}\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Введем новые координаты $x'=x''+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=y''+\frac{1}{8}$, что соответствует параллельному перемещению осей на величину $\frac{\sqrt{2}}{2}$ по оси Ox' и на величину $\frac{1}{8}$ по оси Oy'. В координатах x'', y'' уравнение кривой примет вид $y''^2=\frac{5\sqrt{2}}{6}x''$ - каноническое уравнение параболы. Ветви параболы расположены симметрично относительно оси x'' и совпадают с положительным направлением этой оси (рис. 3.53).

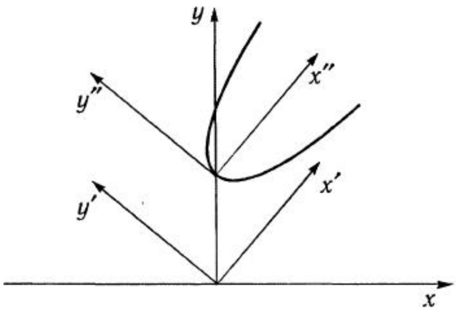


Рис. 3.53

Вершина параболы находится в начале координат системы x'', y''; параметр параболы $p = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

3.8. Полярная система координат. Уравнения кривых

1°. Полярными координатами точки M (рис. 3. 54) являются полярный радиус ρ и полярный угол φ, для которых приняты следующие интервалы изменения $\rho \in [0, \infty[$ и $\varphi \in [0, 2\pi[$ или $\varphi \in [-\pi, \pi[$.

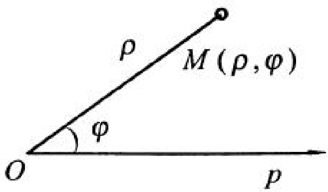


Рис. 3.54

Если начала координат прямоугольной и полярной системы совпадают, а полярная ось совмещена с положительным направлением оси Ox, то прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Полярные координаты выражаются через прямоугольные по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = arctg\frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Вторую из формул (2) иногда удобнее заменить двумя следующими формулами

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (3)$$

Проекции произвольного отрезка на координатные оси выражаются через его длину и полярный угол формулами:

$$x_2 - x_1 = d\cos\varphi,\ y_2 - y_1 = d\sin\varphi. \qquad (4)$$

Полярный угол отрезка по координатам его конца и начала определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2°. Если за полюс принять один из фокусов линии второго порядка (рис. 3.55), то уравнение линии в полярной системе координат примет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (5)$$

где $\varepsilon = \frac{\rho}{d}$ - эксцентриситет, d - расстояние точки $M(\rho,\varphi)$ до директрис, ρ - параметр линии второго порядка, равный половине длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной фокальной оси.

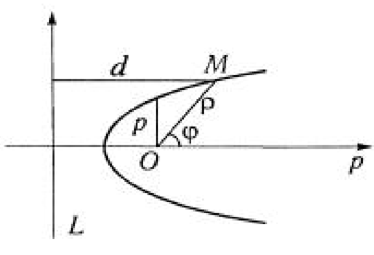


Рис. 3.55

Если $\varepsilon = 0$, то уравнению (5) соответствует окружность, если $\varepsilon < 1$ - эллипс, если $\varepsilon > 1$ - гипербола, если $\varepsilon = 1$ - парабола.

Если полярную ось ориентировать в противоположную сторону, то уравнение линии второго порядка в полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \qquad (6)$$

3°. Рассмотрим некоторые линии, уравнения которых заданы в полярной системе координат.

1. $\varphi = a$ (a - радиан) - геометрическое место точек, полярный угол которых имеет постоянную величину, есть луч, выходящий из полюса полярной системы координат (рис. 3.56).

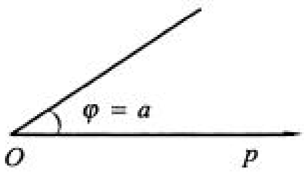


Рис. 3.56

2. $\rho = a$ - окружность с центром в полюсе и с радиусом, равным a.

3. $\rho = 2a \cos \varphi$ - окружность, центр которой находится на полярной оси в точке $C(a, 0)$ и радиус которой равен a (рис. 3.57).

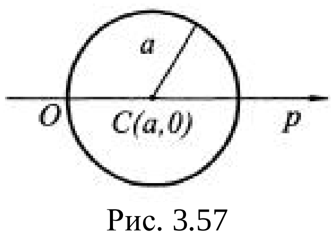


Рис. 3.57

4. $\rho = a\varphi \ \left(a - const\right)$ - спираль Архимеда (рис. 3.58).

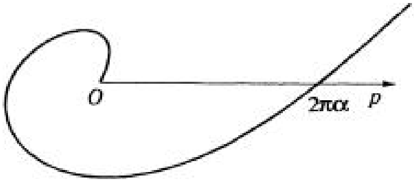


Рис. 3.58

5. $\rho = \dfrac{a}{\varphi} \ \left(const\right)$ - гиперболическая спираль $\varphi \neq 0$ (рис. 3.59). Здесь $\rho \neq 0$ и полюс называют поэтому асимптотической точкой кривой, т. е. такой точкой, к которой точки кривой неограниченно приближаются, но никогда ее не достигают.

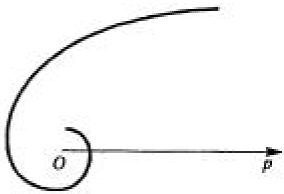


Рис. 3.59

6. $\rho = a^{\varphi} \left(a > 0\right)$ - логарифмическая спираль (рис. 3.60)

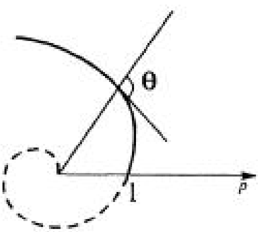


Рис. 3.60

Логарифмическая спираль с любой прямой, проведенной через полюс образует один и тот же угол θ.

Изменению φ от 0 до $-\infty$ соответствует часть графика спирали, которая изображена пунктиром (рис. 3.60).

7. $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$ - кардиоида (рис. 3.61). Это траектория, которую опишет точка окружности, катящееся без скольжения по окружности равного радиуса, касаясь ее внешним образом.

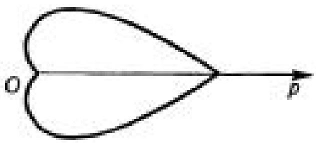


Рис. 3.61

8. Лемниската Бернулли $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (рис. 3.62). Характеристическое свойство $|F_1M|\cdot|F_2M| = a^2 - const$, где $F_1(-a;0)$, $F_2(a;0)$.

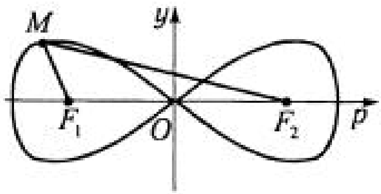


Рис. 3.62

8.1. Найти декартовы координаты точек $A\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Применяя формулы (1), находим $x_A = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$, $y_A = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

В декартовой системе получим $A\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Декартовы координаты точки B будут: $x_B = 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\;\; y_B = 3\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -3,$ то есть $B(0;-3)$.

8.2. Найти полярные координаты точек $A(-2;0)$, $B(1;-1)$.

Решение. Применяя формулы (2), (3), находим координаты точки A

$$\rho_A = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2,\; \sin\varphi_A = \frac{0}{2} = 0,\; \cos\varphi_A = \frac{-2}{2} = -1.$$

По численным значениям синуса и косинуса находим, что $d = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\sqrt{3-2\sqrt{3}}\right)^2} = 2.\; \varphi_A = \pi$. Таким образом, в полярной системе $A(2;\pi)$.

Полярные координаты точки B будут $\rho_B = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\; \sin\varphi_B = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}^{-1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\; \cos\varphi_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},$

$\varphi_B = -\dfrac{\pi}{4},$ то есть $B\left(\sqrt{2};-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8.3. Найти полярные координаты вершин квадрата со стороной a, равной единице, изображенного на рис. 3.63.

Решение. $AB = BC = CD = DA = 1$. Полярные радиусы всех вершин квадрата равны $\rho = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Полярные углы: $\varphi_C = \dfrac{\pi}{4},\; \varphi_D = \dfrac{3\pi}{4},\; \varphi_A = \dfrac{5\pi}{4},\; \varphi_B = \dfrac{7\pi}{4}$.

Следовательно:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{5\pi}{4}\right),\; B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\pi}{4}\right),\; C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}\right),\; D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$$

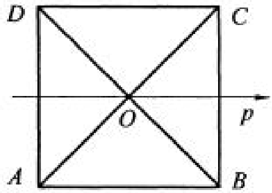


Рис. 3.63

8.4. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d=6$ и полярный угол $\varphi=120^\circ$.

Решение. По формулам (4) находим

$$X=6\cos 120^\circ=6\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,\ Y=6\sin 120^\circ=6\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$$

8.5. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1\left(3;2\sqrt{3}\right)$ в точку $M_2\left(4;\sqrt{3}\right)$.

Решение. Длина отрезка M_1M_2 равна $d=\sqrt{(4-3)^2+\left(\sqrt{3-2\sqrt{3}}\right)^2}=2.$

Применяя формулы (4), находим:

$\cos\varphi=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Отсюда следует, что главное значение $\varphi=300^\circ$.

8.6. Даны точки $M_1(1;0)$ и $M_2(3;5)$. **Найти** проекцию отрезка M_1M_2 на ось, проходящую через точки $A(-1;2)$ и $B(3;5)$ и направленную от A к B.

Решение. Обозначим через l данную ось (рис. 3.64), через φ и φ_1 - полярные углы отрезков AB и M_1M_2. Из простых геометрических соображений находим, что $Пр._l\, M_1M_2=M_1M_2\cos\left(\varphi_1-\varphi\right)=M_1M_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi+\sin\varphi_1\sin\varphi\right).$

Отсюда, пользуясь формулами (4) и обозначая через X, Y - проекции на координатные оси отрезка AB, а через

X_1Y_1 - проекции отрезка M_1M_2, получим: $Пр._l M_1M_2 = M_1M_2\cos(\varphi_1-\varphi) = \dfrac{X_1X+Y_1Y}{d}$, где d - длина отрезка AB, равная $d=\sqrt{X^2+Y^2} = =\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=5.$

Таким образом, $Пр._l M_1M_2 = \dfrac{(3-1)4+(5-0)3}{5} = \dfrac{23}{5}.$

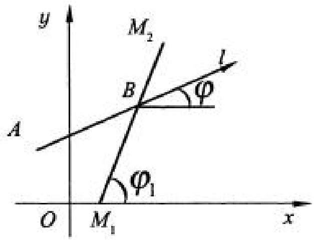


Рис. 3.64

8.7. Линия задана уравнением $\rho = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$. **Требуется:** а) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{4}$; б) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью; в) по полученному уравнению определить, какая это линия.

Решение. а) Составим таблицу и строим линию по точкам (рис. 3.65)

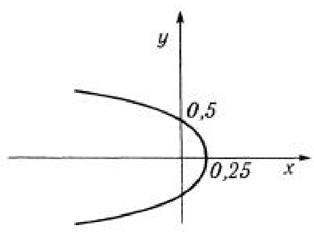


Рис. 3.65

φ	*0*	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos\varphi$	*1*	*0,707*	*0*	*-0,707*	*-1*	*-0,707*	*0*	*0,707*	*1*
$\frac{1}{2+2\cos\varphi}$	*0,25*	*0,29*	*0,5*	*1,7*	∞	*1,7*	*0,5*	*0,29*	*0,25*

б) Между декартовыми и полярными координатами существует зависимость $y=\rho\sin\varphi,\ x=\rho\cos\varphi,$ откуда $\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Подставляя эти значения в данное уравнение, получим

$$2\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}},\ 2\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=1,\ \sqrt{x^2+y^2}=\frac{1-2x}{2},$$

$$4x^2+4y^2=1-4x+4x^2,\ 4x=1-4y^2,\ x=\frac{1}{4}-y^2.$$

в) Полученное уравнение $x=\dfrac{1}{4}-y^2$ - есть уравнение параболы.

3.9. Параметрические уравнения плоских кривых

Уравнения $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, где t - параметр, называются параметрическими уравнениями кривой. Для того чтобы получить уравнение кривой в прямоугольных координатах, из двух параметрических уравнений нужно исключить параметр.

1. Параметрические уравнения окружности:

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

2. Параметрические уравнения эллипса:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

В параметрических уравнениях эллипса параметр t есть угол, образованный радиусом OM с осью абсцисс (рис. 3.66).

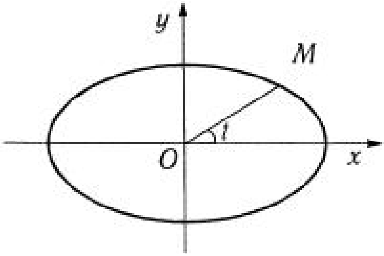


Рис. 3.66

3. Циклоидой называется кривая, описанная точкой M, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 3.67).

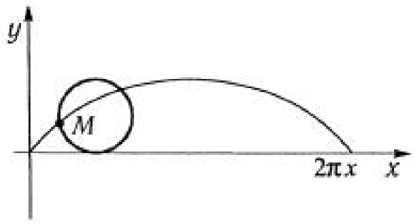


Рис. 3.67

Параметрические уравнения циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

9.1. Найти параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = 2Rx$, если полярная ось совпадает с осью Ox, а полюс находится в начале координат.

Решение. Между декартовыми координатами и полярными существует зависимость $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. В качестве параметра примем полярный угол $\varphi = t$, тогда уравнение окружности будет $\rho = 2R\cos\varphi = 2R\cos t$. Если в формулы перехода вместо ρ и φ подставить их выражения в функции t, то получим

$$x = \rho(t)\cos t = 2R\cos^2 t,\ y = \rho(t)\sin t = 2R\cos t\sin t = R\sin 2t.$$

$$\text{Откуда } x = R(1 + \cos 2t),\ y = R\sin 2t.$$

9.2. Найти уравнения кривых в прямоугольных координатах:

а) $x=-2+t,\ y=1+2t;$ б) $x=t^2+2t+4,\ y=t+1;$

в) $x=1+2\cos t,\ y=-3t+2\sin t;$ г) $x=a\cos t,\ y=b\sin t;$

д) $x=2R\cos^2 t,\ y=R\sin 2t.$

Решение. а) Найдем из первого уравнения параметр $t=x+2$ и исключим его из второго уравнения. Тогда получим $y=1+2(x+2)$ или $2x-y+5=0$. Это уравнение прямой.

б) Представим первое уравнение в виде $x=(t+1)^2+3$, тогда $x=y^2+3$. Это уравнение параболы с вершиной, смещенной на три единицы по оси Ox.

в) Разрешим уравнения относительно тригонометрических функций $2\cos t=x-1,\ 2\sin t=y+3.$ Возведем в квадрат и сложим $4=(x-1)^2+(y+3)^2$. Кривая представляет окружность с центром в точке (1; -3) и радиусом равным 2.

г) Разделим правые части из, a и b, возведем выражения в квадрат и сложим $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Это уравнение эллипса.

д) Возведем второе выражение в квадрат и преобразуем $y^2=R^2\sin^2 2t\Rightarrow y^2=4R^2\left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 t.$

Найдем из первого уравнения $\cos^2 t=\frac{x}{2R}$ - и подставим, тогда

$$y^2=4R^2\left(1-\frac{x}{2R}\right)\frac{x}{2R}\Rightarrow y^2=2Rx-x^2\Rightarrow (x-R)^2+y^2=R^2.$$

Уравнение окружности с центром, смещенным по оси Ox на радиус R.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Системы координат

1°. Декартова или прямоугольная система координат представляет совокупность трех взаимно-перпендикулярных осей: оси абсцисс $0x$, оси ординат $0y$ и оси аппликат $0z$.

Система координат называется правой, если для каждой пары осей *xy*, *yz*, *zx* кратчайший поворот первой из них вокруг начала координат до совпадения с положительным направлением второй виден со стороны положительного направления третьей оси, совершающимся против часовой стрелки, и левой - в противоположном случае.

Декартовыми координатами точки М называются проекции радиус-вектора *OM* (рис. 4.1) на оси координат.

2°. Цилиндрическими координатами точки *M* являются ее апликата *z* и полярные координаты проекции точки *M* на плоскость $y0x$ (рис. 4.1).

Цилиндрические координаты связаны с прямоугольными координатами формулами (3)

$$x = p\cos\varphi;\ \ y = p\sin\varphi;\ \ z = z\ . \qquad (1)$$

Из равенств (1) легко находятся формулы обратного перехода

$$p = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ tg\varphi = \frac{y}{x};\ \ z = z \qquad (2)$$

причем выбор нужного угла φ из двух главных значений можно произвести, например, по знаку координаты *y*.

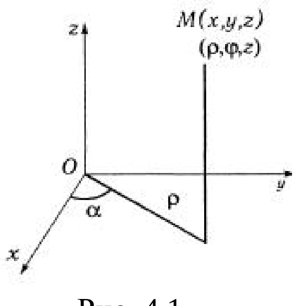


Рис. 4.1

3°. В сферической системе координат (рис. 4.2) положение точки M определяется: ее расстоянием p от начала координат (радиус-вектором) $\left(0 \le p < \infty\right)$; углом φ, который образует проекция радиус-вектора на плоскость $x0y$ с положительным направлением оси $0x\left(0 \le \varphi < 2\pi\right)$ θ, который радиус-вектор образует с положительным направлением оси $0z\left(0 \le \theta < \pi\right)$.

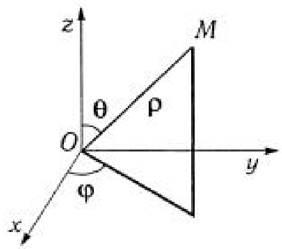


Рис. 4.2

Связь между прямоугольными координатами точки и ее сферическими координатами устанавливается формулами

$$x = p\sin\theta\cos\varphi;\;\; y = p\sin\theta\sin\varphi;\;\; z = p\cos\theta\,. \qquad (3)$$

Решая уравнения (3) относительно p,φ,θ, получим формулы обратного перехода

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\;\; tg\varphi = \frac{y}{x};\;\; \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (4)$$

причем выбор нужного знака угла φ из двух главных значений можно произвести, например, по знаку координаты y.

4.2. Плоскость

1°. *Основные уравнения плоскости.*

1. Общее уравнение плоскости. Всякая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными

$$Ax + By + Cz + D = 0\,. \qquad (1)$$

2. Нормальное уравнение плоскости

$$\overline{r}\cdot\overline{n}^{\circ}-p=0 \text{ или } x\cos\alpha+y\cos\beta+\cos\gamma-p=0, \qquad (2)$$

где p-длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; α,β,γ - углы, которые этот перпендикуляр образует с положительными направлениями координатных осей; $\overline{n}^{\circ}$ - единичный вектор направления *OP* (рис. 4.3).

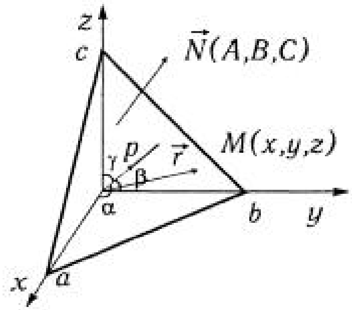


Рис. 4.3

Для приведения общего уравнения плоскости (1) к нормальному виду нужно это уравнение умножить на нормирующий множитель $M=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, при этом знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку *D* в уравнении (1). (Если *D = 0*, то знак *M* может быть любой). Зная общее уравнение плоскости, косинусы направляющих углов в нормальном уравнении плоскости находятся по формулам

$$\cos\alpha=A\cdot M;\ \cos\beta=B\cdot M;\ \cos\gamma=C\cdot M,$$

а длина перпендикуляра $p=\left|D\cdot M\right|$.

3. Уравнение плоскости в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3)$$

где a,b,c - отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях (Рис. 4.3).

4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (4)$$

5. Параметрические уравнения плоскости

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_x + vb_x; \\ y &= y_0 + ua_y + vb_y; \\ z &= z_0 + ua_z + vb_z, \end{aligned} \qquad (5)$$

где u, v - два параметра; $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$ - проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяющих векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{N}$.

2°. *Основные задачи на плоскость.*

1. Точка пересечения трех плоскостей находится из совместного решения их уравнений.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

3. Параметрические уравнения плоскости, проходящей через три точки, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1); \\ y &= y_1 + u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1); \\ z &= z_1 + u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1). \end{aligned} \qquad (7)$$

4. Угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним векторами $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (8)$$

5. Если две плоскости взаимно-перпендикулярны, то сумма произведений коэффициентов при одноименных текущих координатах равна нулю

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (9)$$

6. Если две плоскости параллельны, то коэффициенты при одноименных текущих координатах пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (10)$$

7. Расстояние от точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ до плоскости

$$d = \left|x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p\right| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (11)$$

2.1. Дано уравнение плоскости $9x - 2y + 6z - 11 = 0$. **Привести**: а) к нормальному виду; б) к уравнению плоскости в отрезках на осях.

Решение. а) Найдем нормирующий множитель $M = \frac{1}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{1}{11}$. Умножая на M данное уравнение,

получим $\frac{9}{11}x - \frac{2}{11}y + \frac{6}{11}z - 1 = 0$,

где $\cos\alpha = \frac{9}{11}$, $\cos\beta = -\frac{2}{11}$, $\cos\gamma = \frac{6}{11}$ и $p = 1$.

б) Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим на него уравнение, представив его в виде

$\frac{x}{\frac{11}{9}} + \frac{y}{-\frac{11}{2}} + \frac{z}{\frac{11}{6}} = 1.$ Отрезки на осях $a = \frac{11}{9}$, $b = -\frac{11}{2}$, $c = \frac{11}{6}$.

2.2. Написать общее и параметрические уравнения плоскости, проходящей через три точки $A(1,1,0)$; $B(3,2,-1)$ и $C(2,-1,4)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (6)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Общее уравнение искомой плоскости $2x - 9y - 5z + 7 = 0$.

Для получения параметрических уравнений плоскости подставляем координаты точек в формулы (7)

$$x = 1 + 2u + v,$$

$$y = 1 + u - 2v,$$

$$z = -u + 4v.$$

2.3. Через точку (2,1,3) **провести** плоскость, которая была бы перпендикулярна к плоскости $x + 3y - z + 2 = 0$ и проходила бы через точку (3,-1,5).

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости (4), проходящей через данную точку и перпендикулярной некоторому вектору $\vec{N}(A, B, C)$

$$A(x-2) + B(y-1) + C(z-3) = 0. \quad (*)$$

Из условия перпендикулярности (9) этой и данной плоскости имеем $A + 3B - C = 0$.

Поскольку наша плоскость должна проходить через точку (3,-1,5), то подставляя ее координаты в уравнение (*), получим $A - 2B + 2C = 0$.

Мы получили систему трех линейных однородных уравнений относительно неизвестных A, B, C. Чтобы система имела решение отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости $4x - 3y - 5z + 10 = 0$.

2.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,1,-2)$ перпендикулярную линии пересечения плоскостей $x + 3y + 2z + 1 = 0$ и $3x + 2y - z + 8 = 0$.

Решение. Найдем вектор параллельный линии пересечения плоскостей

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Воспользуемся теперь уравнением плоскости, проходящей через точку M_0, нормальный вектор которой параллелен линии пересечения плоскостей

$$-7(x-2) + 7(y-1) - 7(z+2) = 0 \text{ или } x - y + z + 1 = 0$$

2.5. Через точку (2,-1,3) **провести** плоскость, параллельную плоскости $x - 2y + 4z - 5 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-2) + B(y+1) + C(z-3) = 0$.

Поскольку плоскости параллельны, то, используя условие параллельности плоскостей (10), подставляем вместо *A, B, C* значения коэффициентов из заданного уравнения плоскости (с коэффициентом пропорциональности, равным 1)

$$x - 2 - 2(y+1) + 4(z-3) = 0$$

$$\text{или } x - 2y + 4z - 16 = 0.$$

2.6. Вычислить расстояние от точки *M* (2;-1;3) до плоскости $11x - 2y + 10z + 6 = 0$.

Решение. По формуле (10) имеем

$$d=\left|\frac{11\cdot 2-2(-1)+10\cdot 3+6}{\sqrt{(11)^2+(-2)^2+(10)^2}}\right|=\frac{60}{15}=4.$$

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;-1;2)$ и перпендикулярной вектору $N(4;3;-1)$.

Решение. В соответствии с уравнением (5) имеем $4(x-1)+3(y+1)-(z-2)=0$, откуда $4x+3y-z+1=0$.

2.8. Вычислить угол между плоскостями

$$x+2y-3z-4=0;\quad 2x-y+z+l=0.$$

Решение. Используя формулу (7), получим

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2(-1)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(1)^2}}=-\frac{3}{2\sqrt{21}},$$

откуда $\varphi=arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)$.

Следует отметить, что в данном случае получен тупой угол. Острый угол между этими плоскостями равен $\pi-\varphi$,

2.9. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$5x+2y-3z-7=0 \text{ и } 5x+2y-3z+4=0.$$

Решение. Искомое расстояние равно расстоянию от любой точки, лежащей на одной из плоскостей, до другой. Возьмем на первой плоскости точку, полагая для удобства расчета

$x=0;\ y=0$. Тогда $z=\frac{7}{3}$. Расстояние от точки $\mathrm{M}\left(0;0;-\frac{7}{3}\right)$

до второй плоскости находим по формуле (11)

$$\mathrm{d}=\frac{\left|5\cdot 0+2\cdot 0-3\left(-{}^{7}\!/_{3}\right)+4\right|}{\sqrt{25+4+9}}=\frac{11}{\sqrt{38}}.$$

2.10. **Найти** уравнения плоскостей, параллельных плоскости

$x+2y-2z+4=0$ и отстоящих от нее на расстояние d = 3.

Решение. Очевидно, что искомых плоскостей - две. Пусть точка $\mathrm{M}\left(x,y,z\right)$ произвольна и принадлежит какой-либо одной из искомых плоскостей. Поскольку расстояние от точки до плоскости равно трем, то имеем

$$\frac{\left|x+2y-2z+4\right|}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=3.$$

Откуда следует, что

$$\frac{x+2y-2z+4}{3}=3;\frac{x-2y-2z+4}{3}=-3.$$

Таким образом, искомые уравнения плоскостей имеют вид

$$x+2y-2z-5=0;x-2y-2z+13=0.$$

4.3. Прямая линия

1°. *Основные уравнения прямой линии.*

1. Уравнение прямой линии в общем виде

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Уравнение прямой в симметричном (каноническом) виде

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (2)$$

где $l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $m=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ - проекции направляющего вектора $\vec{a}\left(l,m,n\right)$ прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

3. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ в направлении вектора $\vec{a}\left\{l,m,n\right\}$ имеют вид

$$x = x_0 + lt;\;\; y = y_0 + mt;\;\; z = z_0 + nt, \qquad (3)$$

где t — параметр.

Если считать, что t - время, то уравнения (3) определяют прямолинейное и равномерное движение точки M(x,y,z) со скоростью $v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ в направлении вектора $\vec{a}\{l,m,n\}$.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является начальным положением переменной точки $M(x, y, z)$, то есть положением при $t = 0$.

2°. *Основные задачи на прямую линию.*

1. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \text{ и } M_2(x_2, y_2, z_2) \qquad (4)$$

2. Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (5)$$

3. Если две прямые взаимно-перпендикулярны, то сумма произведений их одноименных направляющих коэффициентов равна нулю

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (6)$$

4. Если две прямые параллельны, то одноименные направляющие коэффициенты этих прямых пропорциональны

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (7)$$

3.1. Составить симметричные уравнения прямой линии

$$\begin{cases} 8x - 4y - z + 6 = 0; \\ 5x + y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x_0 = 0$, тогда

$$\begin{cases} -4y - z + 6 = 0; \\ y - 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

откуда $y_0 = 1; z_0 = 2.$

Воспользуемся теперь формулой (2)

$$l=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=13;\ \ m=-\begin{vmatrix}8 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=19;\ \ n=\begin{vmatrix}8 & -4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=28.$$

$$\frac{x}{13}=\frac{y-1}{19}=\frac{z-2}{28}.$$

3.2. Получить параметрические уравнения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=z.$

Решение. Обозначим в симметричном уравнении прямой равные отношения буквой t

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}=t,$$

откуда $x=2+3t,\ \ y=-1+4t,\ \ z=t.$

3.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2,1,-1)$ и $M_2(4,-3,2)$.

Решение. Принимая в качестве элементов, определяющих прямую, точку M_1 и направляющий вектор $\overline{M_1M_2}(2,-4,3)$, запишем по формуле (4) уравнение прямой

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{3}.$$

3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x+2y-3z-2=0$ с прямыми

$$\frac{x-5}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}\ \text{ и }\ \frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{1}.$$

Решение. Запишем уравнение первой прямой в параметрическом виде $x=5-5t, y=3+t, z=2t.$ Для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью подставим эти уравнения в уравнение плоскости и найдем параметр t

$$5-5t+6+2t-6t-2=0,\ \ -9t=-9,\ \ t=1.$$

Отсюда координаты точки пересечениях $x_1 = 0$, $y_1 = 4$, $z_1 = 2$.

Параметрические уравнения второй прямой будут $x = 7 + 5t$, $y = 1 + 4t$, $z = -1 + t$. Подставляя их в уравнение плоскости $7 + 5t + 2 + 8t + 3 - 3t - 2 = 0$, находим, что $t = -1$ и координаты точки пересечения $x_2 = 2, y_2 = -3, z_2 = -2$. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, получим

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-3-4} = \frac{z-2}{-2-2} \text{ или } \frac{x}{2} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-2}{-4}.$$

3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 0, -3)$ параллельно линии пересечения плоскостей $x + 2y - z + 3 = 0$ и $3x - y - 4z + 2 = 0$.

Решение. Перемножая векторно нормальные к заданным плоскостям векторы, находим вектор параллельный линии их пересечения

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку M паралельно вектору N, примет вид

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-7}.$$

3.6. Найти угол, образованный прямыми:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{7}{9}; \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{6}.$$

Решение. Угол между прямыми находим по формуле (5)

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2}\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{72}{77} = 0{,}936,$$

откуда $\varphi = 20^\circ 30'$.

3.7. Составить уравнения движения точки М, которая, имея начальное положение $M_0(1;2;1)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{a}=\{4;4;2\}$ со скоростью $v=18 м/с$.

Решение. Сравнивая модуль вектора а, который равен $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$ с заданной скоростью v = 18м/с, видим, что в качестве вектора $\vec{s}$ следует взять вектор в три раза больший, т. е. $\vec{s}=\{12;12;6\}$. Согласно формулам (3) уравнения движения будут

$$x=1+12t;\quad y=2+12t;\quad z=1+6t.$$

4.4. Прямая и плоскость

1. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi=\pm\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{1}$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{2}$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \tag{3}$$

4. Уравнение пучка плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0. \tag{4}$$

5. Точка пересечения прямой $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формулам

$$x=x_0+tl;\ y=y_0+tm;\ z=z_0+tn,$$

где $t=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$.

4.1. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ и плоскости $2x+y-z-7=0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x = 2t;\ \ y = t + 2;\ \ z = 3t - 1.$

Подставляя x,y,z в уравнение плоскости, находим соответствующее значение t: $4t + t + 2 - 3t + l - l = 0.$

Отсюда $t = 2$ и координаты точки пересечения $x = 4;$ $y = 4;$ $z = 5.$

4.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y - 3z - 1 = 0$ и $2x + y - 3z - 4 = 0$ через точку (2,-1,3).

Решение. Воспользуемся уравнением пучка плоскостей (4), проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей

$$x + 2y - 3z - 1 + \lambda\left(2x + y - 3z - 4\right) = 0.$$

Подставляя координаты точки в уравнение пучка, находим соответствующее значение λ:

$$2 + 2\left(-1\right) - 3\cdot 3 - 1 + \lambda\left(2\cdot 2 + \left(-1\right) - 3\cdot 3 - 4\right) = 0.$$

Отсюда $\lambda = -1$. Подставляя значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение x-y+3=0 .

4.3. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1\left(2,-1,4\right)$ и $M_2\left(5,2,-3\right)$.

Решение. Уравнение плоскости проходящей через точку M_1 будет $A\left(x-2\right) + B\left(y+1\right) + C\left(z-4\right) = 0$. Так как искомая плоскость параллельна оси Ox, то проекция нормального к плоскости вектора на эту ось равна нулю, т.е. $A = 0$. Поскольку плоскость проходит еще и через точку M_2, то получим $3A + 3B - 7C = 0.$

Система имеет решение отличное от нулевого, когда определитель равен нулю $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$ или $7y + 3z - 5 = 0.$

4.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,2,-1)$ и параллельной прямым $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0, будет $A(x-3)+B(y-2)+C(z+1)=0$. Поскольку плоскость параллельна прямым, то из условия (2) имеем $2A+3B-2C=0$ и $4A+B+3C=0$. Система этих уравнений может иметь решение, если определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Откуда уравнение искомой плоскости

$$11x-14y-10z-15=0.$$

4.5. Определить угол между прямой, проходящей через точки $M_1(0,2,6)$ и $M_2(3,6,-6)$, и плоскостью

$$2x-y-2z-1=0.$$

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, примет вид $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-12}$.

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле (1) $\sin\varphi=\frac{2\cdot3-1\cdot4+2\cdot12}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16+144}}=\frac{26}{3\cdot13}=\frac{2}{3}$.

4.6. Найти проекцию точки $M_0(1,2,3)$ на плоскость $x-2y+z-6=0$.

Решение. Уравнение перпендикуляра, проходящего через точку M_0 к плоскости, имеет вид

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

Поскольку направляющий вектор прямой совпадает с нормальным вектором к плоскости, то на основании условия (3) будем иметь

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}=t.$$

Откуда $x=1+t$, $y=2-2t$, $z=3+t$. Зная параметрические уравнения прямой, находим точку пересечения прямой и плоскости.

Для этого подставим эти уравнения в уравнение плоскости и найдем параметр t: $1+t-4+4t+3-6=0$, $t=1$. Отсюда $x=2$, $y=0$, $z=4$.

4.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 8x+2y+3z+6=0, \\ 3x+4y+z+1=0 \end{cases}$$

параллельно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей (4), проходящих через первую из данных прямых

$$8x+2y+3z+6+\lambda\left(3x+4y+z+1\right)=0.$$

Выберем из этого пучка плоскость параллельную второй прямой, то есть найдем соответствующее численное значение λ.

Представим уравнение пучка плоскостей в виде

$$\left(8+3\lambda\right)x+\left(2+4\lambda\right)z+6+\lambda=0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости (2), имеем $2\left(8+3\lambda\right)+3\left(2+4\lambda\right)=0$, откуда $\lambda=-1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка плоскостей, получим искомое уравнение $5x-2y+2z+5=0$.

4.8. Найти проекцию прямой

$\begin{cases} x-3y-z+4=0, \\ 2x-4y+3z-2=0 \end{cases}$ на плоскость $3x+2y+z-7=0$.

Решение. Искомая проекция определится, как пересечение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую

$$x-3y-z+4+\lambda(2x-4y+3z-2)=0$$

или

$$(1+2\lambda)x-(3+4\lambda)y-(1-3\lambda)z+4-2\lambda=0.$$

Искомая плоскость должна быть перпендикулярна данной плоскости. Используя условие перпендикулярности двух плоскостей для определения неизвестной величины λ, получим уравнение $3(1+2\lambda)-2(3+4\lambda)-(1-3\lambda)=0$, откуда λ = 4. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, находим уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую перпендикулярно к данной плоскости $9x-19y+11z-4=0$.

Проекция данной прямой на данную плоскость определяется пересечением плоскостей

$$\begin{cases} 9x-19y+11z-4=0, \\ 3x+2y+z-7=0. \end{cases}$$

4.9. Найти расстояние от точки $M(1,2,-1)$ до прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{2}.$$

Решение. Найдем точку пересечения плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной прямой. Искомое расстояние будет равно расстоянию от точки M до точки пересечения плоскости и прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M, имеет вид

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Из условию перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{1}=\frac{B}{1}=\frac{C}{2}$, полагая множитель пропорциональности равным единице, находим $A=1, B=1, C=2.$ Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид $x+y++2z-1=0$.

Для нахождения точки пересечения плоскости и данной прямой решаем совместно уравнения плоскости и прямой. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=t+3,\ y=t+2,\ z=2t+4.$ Подставляя эти выражения в левую часть уравнения данной плоскости $t+3+t+2+2(2t+4)-1=0$, находим, что параметр t равен $t=-2.$ Следовательно, координаты искомой точки суть

$$x_0=1,\ \ y_0=0,\ \ z_0=0.$$

Искомое расстояние от точки M до прямой определяем по формуле расстояния между двумя точками

$$d=\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(-1-0)^2}=5.$$

4.5. Поверхности второго порядка

Степень алгебраического уравнения, определяющего данную поверхность, называется порядком этой поверхности.

1°. Эллипсоид. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

где a,b,c - полуоси трехосного эллипсоида (рис. 4.4).

Эллипсоид, две оси которого равны между собой, например $a=b,$ называется *эллипсоидом вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

И получается от вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Oz.

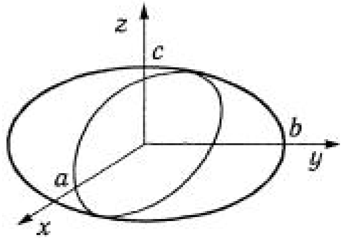


Рис. 4.4

2°. Однополостный гиперболоид. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

где a, b — полуоси эллипса в плоскости xOy (рис. 4.5).

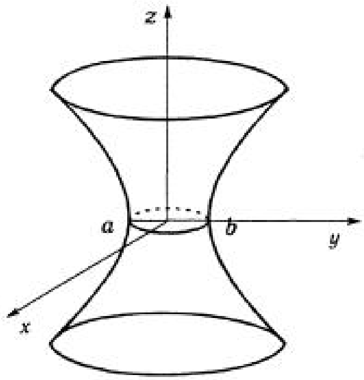


Рис. 4.5

Форму поверхности определяют методом сечений. При z=0 в плоскости xOy получают $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — наименьший из всех возможных эллипсов, который называется *горловым*.

Сечения поверхности с плоскостями yOz и xOz образуют гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Сечение поверхности с плоскостью $x=a$ образует две прямые

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$; $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$. Можно установить, что через любую точку однополостного гиперболоида проходят две прямые, лежащие на этом гиперболоиде.

Поэтому однополостный гиперболоид называют линейчатой поверхностью.

Если $a=b$, то уравнение (3) принимает вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Она образуется вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси.

3°. *Двуполостный гиперболоид*. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

При $x=a$ получаем точки $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$ — вершины поверхности (рис. 4.6). В сечении с плоскостями $|x|>a$ поверхность образует эллипсы. В сечении с плоскостями xOy и xOz получаются гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхность (5) симметрична относительно плоскости yOz.

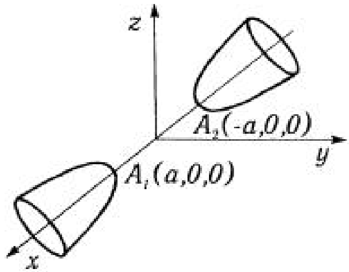


Рис. 4.6

При $b = c$ уравнение (5) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *двуполостным гиперболоидом вращения*. Она образуется при вращении гиперболы вокруг оси Ox.

4°. *Эллиптический параболоид*. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z; \quad p > 0; \quad q > 0. \tag{6}$$

При пересечении с плоскостями $z = h$ поверхность (6) образует эллипс (рис. 4.7).

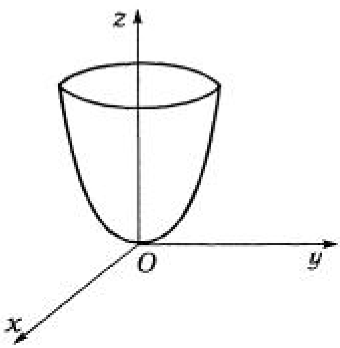


Рис. 4.7

В сечении с плоскостями xOz и yOz поверхность образует параболы $x^2 = 2pz$ и $y^2 = 2qz$. При $p = q$ уравнение (6) принимает вид $x^2 + y^2 = 2pz$ и поверхность, соответствующая этому уравнению, называется *параболоидом вращения*. Она образуется вращением параболы вокруг оси z.

5°. *Гиперболический параболоид*. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z; \quad p < 0; \quad q > 0. \tag{7}$$

Сечение поверхности (7) с плоскостью xOy образует пару прямых $y = \sqrt{\frac{q}{p}}x$; $y = -\sqrt{\frac{q}{p}}x$ (рис. 4.8). Сечения поверхности с плоскостями $z = h$ $(h > 0)$ — гиперболы, у которых действительная ось параллельна оси Ox. Сечения с плоскостями $z = h$ $(h < 0)$ - гиперболы, у которых действительная ось параллельна оси Oy. Сечения поверхности с плоскостями xOz и yOz представляют параболы $x^2 = 2pz$ и $y^2 = -2pz$.

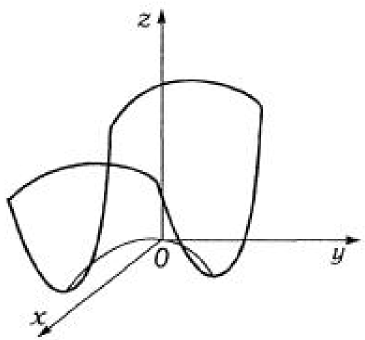


Рис. 4.8

Если $p=q$, то уравнение (7) принимает вид $x^2+y^2=2pz$, гиперболы в сечениях будут равносторонними, а параболы будут иметь равные параметры.

При повороте системы координат вокруг оси Oz на угол 135° уравнение (7) примет вид $xy=pz$. Сечения поверхности плоскостями $z=h$ суть равносторонние гиперболы. Плоскость xOy пересекает эту поверхность по осям координат.

6°. *Цилиндрические поверхности*. Уравнения, не содержащие какой-либо одной координаты, в пространстве изображаются цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны отсутствующей координатной оси. Само же уравнение есть уравнение направляющей кривой этого цилиндра.

1. *Эллиптический цилиндр* (рис. 4.9)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (8)$$

Направляющей, лежащей в плоскости xOy, служит эллипс.

Если $a=b$, то направляющая есть круг, а цилиндр называется круговым.

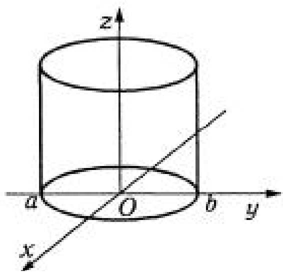


Рис. 4.9

2. *Гиперболический цилиндр* (рис. 4.10)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Направляющей является гипербола.

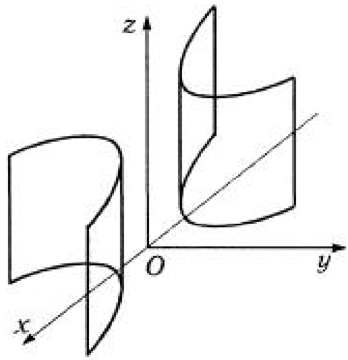


Рис. 4.10

3. *Параболический цилиндр* (рис. 4.11)

$$y^2 = 2px. \tag{10}$$

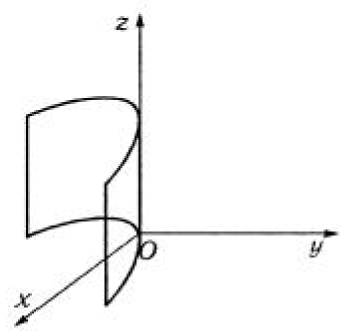


Рис. 4.11

Направляющей является парабола.

Аналогично записываются уравнения цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными координатным осям Ox и Oy.

7°. Поверхность, образованная движением прямой, проходящей через неподвижную точку пространства и пересекающей при этом некоторую кривую, называется *конической поверхностью*.

Неподвижная точка называется *вершиной,* кривая — *направляющей* и прямая - *образующей* конической поверхности.

Каноническое уравнение конуса, когда ось симметрии конуса совпадает с осью Oz (рис. 4.12), имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,. \qquad (11)$$

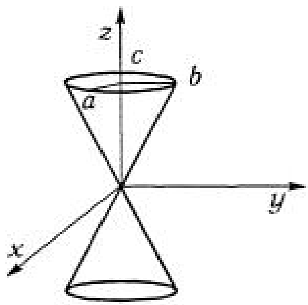


Рис. 4.12

Если $a=b\neq c$ — конус круговой; если $a=b=c$, то $x^2+y^2-z^2=0$ — прямой круговой конус, образующие наклонены к плоскости xOy под углом 45°.

5.1. По заданному уравнению $f\left(x,y,z\right)=0$ **определить** вид поверхности и указать ее расположение в координатной системе:

а) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$;

б) $4x^2+4y^2+5z^2-20=0$;

в) $5x^2+5y^2-4z^2-20=0$; г) $4x^2+y^2-2z=0$;

д) $x^2+z^2-y=0$;

ж) $y^2-4z-5=0$; з) $y^2-8x+3=0$.

Решение. а) Дополним до полных квадратов многочлен в левой части $x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9-9=0$ или $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3^2.$

Полагая $x'=x-1;\ \ y'=y+1;\ \ z'=z-3,$ находим, что в системе координат $x',y',z',$ смещенной относительно системы x,y,z параллельным переносом в точку с координатами $x_0=1;\ y_0=-1;\ z_0=3,$ данная поверхность имеет простейшее уравнение вида $x'^2+y'^2+z'^2=3^2$. Таким образом, данное уравнение определяет сферу с центром в точке $O'(1,-2,3)$ и радиусом равным $R=3$.

б) Перенесем свободный член в правую часть и разделим на него, тогда будем иметь $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1.$

Данное уравнение представляет эллипсоид вращения вокруг оси z с полуосями $a=b=\sqrt{5};\ c=2.$

в) Перенесем свободный член в правую часть и разделим на него, тогда будем иметь $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1.$

Данное уравнение представляет однополостный гиперболоид вращения (4) вокруг оси z.

г) Разрешим выражение относительно z, тогда будем иметь

$$z=\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{2}.$$

Данное уравнение представляет эллиптический параболоид (5).

д) Разрешим выражение относительно y, тогда получим $y=x^2+z^2$.Нетрудно заметить, что это уравнение предствляет параболоид вращения с осью вращения y (рис. 4.13).

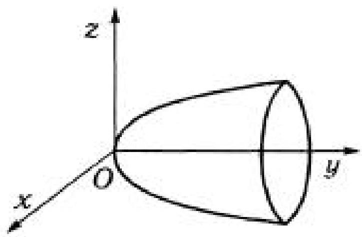


Рис. 4.13

ж) Поскольку переменная x отсутствует, то уравнение $z=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$ представляет параболический цилиндр с образующими параллельными оси x (рис. 4.14). Сечение параболического цилиндра с плоскостью Oyz образует параболу, вершина которой находится в точке с координатой $z=-\frac{5}{4}$.

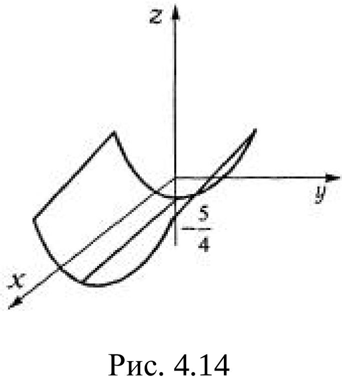


Рис. 4.14

з) Поскольку переменная z отсутствует, то выражение $x=\frac{1}{8}y^2+\frac{3}{8}$ представляет параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси z (рис. 4.15). Сечение параболического цилиндра с плоскостью Oxy образуют параболу, вершина которой находится в точке с координатой $x = \dfrac{3}{8}$.

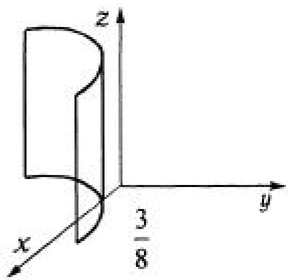


Рис. 4.15

5.2. Установить поверхность, определяемую уравнением:

а) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 16x + 36y + 32z + 59 = 0$;

б) $x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 2x + 8y - 7 = 0$;

в) $x^2 - 16y^2 - 4z^2 - 10x - 64y + 24z - 48 = 0$;

г) $5x^2 + 2y + 3z^2 - 9 = 0$.

Решение. а) Поскольку уравнение не содержит произведений координат, то приведение его к простейшему виду осуществляется посредством параллельного переноса. Выделим полные квадраты

$$4x^2 + 9x^2 + 16x + 36y + 32z + 59 =$$
$$= 4\left(x^2 - 4x + 4\right) + 9\left(y^2 + 4y + 4\right) + 16\left(z^2 + 2z + 1\right) - 9 =$$
$$= 4\left(x-2\right)^2 + 9\left(y+2\right)^2 + 16\left(z+1\right)^2 - 9$$

Полагая $x' = x - 2$, $y' = y + 2$, $z' = z + 1$, находим, что в системе координат x', y', z' смещенной относительно системы x, y, z параллельным переносом начала в точку с координатами $a = 2,\ b = -2,\ c = -1$ данная поверхность имеет простейшее уравнение вида

$$4(x')^2+9(y')^2+16(z')^2=9 \text{ или } \frac{(x')^2}{\left(3/2\right)^2}+\frac{(y')^2}{1^2}+\frac{(zx)^2}{\left(3/4\right)^2}=1.$$

Таким образом, данное уравнение определяет эллипсоид (1) с центром в точке $O'(2,-2,-1)$ и полуосями

$$a=3/2,\ \ b=1,\ \ c=3/4.$$

б) Уравнение не содержит произведений координат. Преобразуем левую часть до полных квадратов

$$x^2+2x+1-4\left(y^2-2y+1\right)+4z^2-4=(x+1)^2-4(y-1)^2+4z^2-4.$$

Полагая $x'=x+1,\quad y'=y-1,\quad z'=z,$ получим уравнение поверхности в системе координат $x',y',z',$ смещенной относительно системы x,y,z параллельным переносом начала в точку $O'(-1,1,0)$

$$(x')^2-4(y')^2+4(z')^2=4 \text{ или } \frac{(x')^2}{2^2}-(y')^2+(z')^2=1.$$

Поскольку в этом уравнении коэффициенты при $(x')^2$ и $(z')^2$ положительные, а при $(y')^2$ — отрицательный, то данное уравнение определяет однополостный гиперболоид (3), расположенный вдоль оси y'.

в) Преобразуя левую часть до полных квадратов, приходим к уравнению $(x-5)^2-16(y+2)^2-4(z-3)^2=0$, из которого после замены $x'=x-5,\ \ y'=y+2,\ \ z'=z-3$ получим уравнение поверхности в системе координат $x',y',z',$ смещенной относительно системы x,y,z параллельным переносом начала координат в точку (5,-2,3) $(x')^2-16(y')^2-4(z')^2=0.$

Поскольку в этом уравнении свободный член равен нулю и коэффициенты при квадратах координат разных знаков, то данное уравнение определяет конус второго порядка (11) с осью вдоль оси x' и вершиной в точке (5, -2,3).

г) Данное уравнение содержит две координаты во второй степени одну в первой, следовательно, уравнение определяет эллиптический параболоид (5). Переписывая его в виде $5x^2+3z^2=-2\left(y-9/2\right)$, заключаем, что вершина параболоида расположена в точке с координатами $O'\left(0,9/2,0\right)$ и его полость обращена в сторону отрицательных значений y. Если обозначить $x'=x,\ y'=y-9/2,\ z'=z,$ то получим каноническое уравнение параболоида (рис. 4.16)

$$\frac{\left(x'\right)^2}{2/5}+\frac{\left(zx\right)^2}{2/3}=-y'.$$

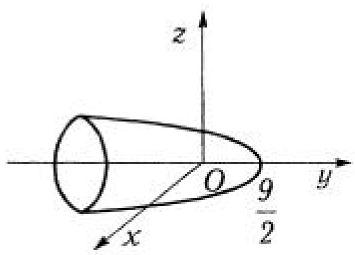


Рис. 4.16

4.6. Геометрический смысл уравнений с тремя неизвестными в пространстве

1°. Рассмотрим уравнение с тремя неизвестными $F\left(x,y,z\right)=0.$

Предположим, что уравнение может быть разрешено относительно z, то есть $z=f\left(x,y\right)$. Данное уравнение в пространстве представляет поверхность и называется *уравнением поверхности*.

Если поверхность определена геометрически, т. е. задано некоторое свойство, принадлежащее всем ее точкам и не принадлежащее другим точкам пространства, то можно составить уравнение этой поверхности. Заданное геометрическое свойство, выраженное уравнением, связывающим текущие координаты, и будет уравнением поверхности.

2°. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$. То есть, линия в пространстве рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе этих уравнений.

6.1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $M(2,1,-1)$ и $N(-3,0,3)$

Решение. Пусть точка $P(x, y, z)$ будет текущей точкой искомого геометрического места точек. Тогда, по формуле (11. Гл.2.2) данное условие примет вид

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2+(z-3)^2}.$$

Упрощая, получим уравнение геометрического места точек $5x + y - 4z + 6 = 0$, Полученное уравнение изображает плоскость, перпендикулярную отрезку MN и пересекающую его
посередине.

6.2. Найти геометрическое место точек, удаленных на расстояние 5 единиц от точки $C(1,-2,1)$.

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ есть текущая точка поверхности.

Тогда, по условию задачи будем иметь $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 25$. Данное уравнение представляет сферическую поверхность с центром в точке C и радиусом $R = 5$.

6.3. Каков геометрический смысл системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение есть сфера, второе представляет в пространстве плоскость. Подставляя $z=3$ в первое уравнение, получим $x^2+y^2=16$. То есть пересечение плоскости со сферой есть окружность, параллельная плоскости Oxy, с центром в точке $C(0,0,3)$ и радиусом равным 4.

6.4. Найти проекцию линии пересечения конуса

$$x^2+y^2-3z^2=0 \ \left(z\ge 0\right) \text{ и сферы } \left(x-1\right)^2+y^2+z^2=1$$

на координатную плоскость Oxy.

Решение. Находим уравнение проектирующего цилиндра.

Для этого исключаем из уравнений поверхностей переменную z. Умножая второе уравнение на 3 и складывая с первым, получим

$$4x^2-6x+4y^2=0\,.$$

Таким образом, проекция линии на плоскость Oxy определяется следующей системой: $x^2+y^2-\frac{3}{2}x=0; \quad z=0$.

Выделяя в первом уравнении полный квадрат, получим

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}.$$

Следовательно, проекция линии пересечения поверхностей на плоскость Oxy представляет окружность с центром в точке $O_1\left({}^3\!/_4;0\right)$ и радиусом, равным $\frac{3}{4}$.

6.5. Тело в пространстве задано системой неравенств. **Определить** вид поверхностей, ограничивающих это тело. Указать по каким линиям и в каких плоскостях пересекаются эти поверхности:

а) $x^2+y^2<\left(z-2\right)^2,\ x^2+y^2\le z$;

б) $x^2+y^2+z^2\le 25,\ \ x^2+y^2\le 9;$

в) $x^2+y^2-9\ge z^2,\ \ \ x^2+y^2\le 16.$

Решение. а) Уравнение $x^2+y^2=(z-2)^2$ задает в пространстве конус, смещенный вверх по оси Oz на 2. Неравенство $x^2+y^2\le(z-2)^2$ показывает, что поверхность ограничивает тело внутри конуса.

Уравнение $x^2+y^2=z$ задает в пространстве параболоид, а неравенство $x^2+y^2\le z$ показывает, что поверхность ограничивает тело внутри параболоида. Объединяя результаты, мы получим, что тело, ограниченное заданными поверхностями, имеет вид (рис. 4.17).

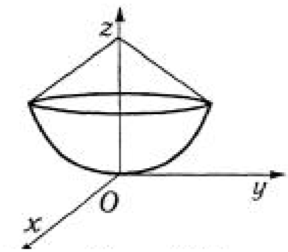


Рис. 4.17

Решая совместно уравнения поверхностей $x^2+y^2=z$ и $x^2+y^2=(z-2)^2$, находим, что $z=1$, то есть поверхности пересекаются по окружности $x^2+y^2=1$ в плоскости $z=1$.

б) Уравнение $x^2+y^2+z^2=25$ задает сферу с центром в начале координат и радиусом равным 5. Неравенство $x^2+y^2+z^2\le 25$ показывает, что ограничивает тело внутри сферы.

Уравнение $x^2+y^2=9$ задает цилиндрическую поверхность с осью Oz и радиусом 3. Неравенство $x^2+y^2\le 9$ показывает, что ограничивает тело внутри цилиндра. Таким образом, тело, ограниченное заданными поверхностями, имеет вид (рис. 4.18).

Очевидно, что линиями пересечения поверхностей будут окружности того же радиуса, что и направляющая цилиндра. Теперь определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности.

Для этого из системы уравнений исключим x и y. Подставляя x^2+y^2 в уравнение сферы, получим $z^2=16$, $z=\pm 4$. Следовательно, поверхности пересекаются по окружности в плоскостях $z=\pm 4$.

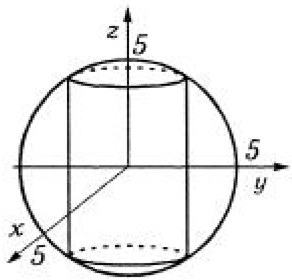


Рис. 4.18

в) Уравнение $x^2+y^2-z^2\geq 9$ задет в пространстве однополостный гиперболоид с осью вращения Oz и радиусом окружности в плоскости Oxy равным 3. Неравенство $x^2+y^2-9\geq z^2$ показывает, что тело находится вне поверхности.

Уравнение $x^2+y^2=16$ задает цилиндрическую поверхность радиуса 4 с осью Oz. Неравенство $x^2+y^2\leq 16$ показывает, что тело находится внутри цилиндра. Таким образом, тело находится между однополостным гиперболоидом и цилиндром (рис. 4.19).

Определим, в каких плоскостях пересекаются поверхности.

Исключая x, y из системы уравнений $x^2 + y^2 - 9 = z^2$, $x^2 + y^2 = 16$, находим, что $z^2 = 7$. Отсюда уравнения плоскостей $z = \sqrt{7}$.

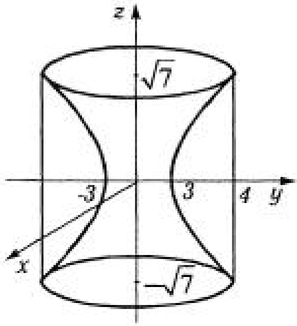


Рис. 4.19

4.7. Параметрические уравнения пространственных кривых

1°. Уравнения вида

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{1}$$

где t — параметр, называются параметрическими уравнениями линии в пространстве.

Исключая из двух любых пар уравнений (1) параметр t, можно получить уравнение линии в виде двух уравнении с тремя переменными.

2°. Цилиндрической винтовой линией называется линия, которую описывает точка M, движущаяся по поверхности кругового цилиндра радиуса R, обходя его кругом и одновременно поднимаясь вверх пропорционально углу, описываемому ее проекцией на горизонтальную плоскость (рис. 4.20).

Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt,\ (k = Rtg\alpha > 0). \tag{2}$$

Если $k > 0$, то уравнения (2) называют уравнениями правой винтовой линии, если же $k < 0$ эти уравнения представляют левую винтовую линию.

Когда точка M совершит полный оборот, апликата z точки M увеличится на величину, называемую шагом или ходом винтовой линии, равным $l = 2\pi R tg\alpha$.

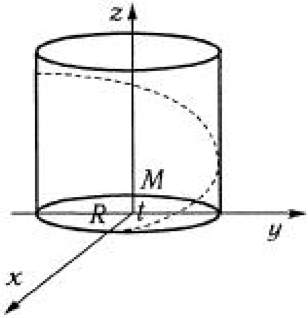


Рис. 4.20

7.1. Определить линию, заданную уравнениями $x = (t-1)^2$, $y = 3(t+1)$ и $z = -(t+2)$.

Решение. Исключая из второго и третьего уравнения параметр t, получим $y + 3z + 3 = 0$ — уравнение плоскости. Находя из второго t и подставляя в первое уравнение, будем иметь $9x = (y-2)^2$ — параболический цилиндр. Следовательно, мы имеем линию пересечения плоскости с параболическим цилиндром.

7.2. Определить линию, заданную уравнениями: $x = 3\cos t$, $y = 4\cos t$, $z = 5\sin t$

Решение. Деля первое уравнение на второе, получим $4x - 3y = 0$ — уравнение плоскости.

Возводя в квадрат левые и правые части каждого из трех уравнений и складывая, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ — уравнение сферы.

Следовательно, мы имеем линию пересечения плоскости со сферой.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА И ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

Задача №1.

Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

№ *п/п*	$\overline{x}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{r}$
1.1.	(-2, 4, 7)	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(-1, 2, 4)
1.2.	(6, 12, -1)	(1, 3, 0)	(2, -1, 1)	(0, -1, 2)
1.3.	(1, -4, 4)	(2, 1, -1)	(0, 3, 2)	(1, -1, 1)
1.4.	(-9, 5, 5)	(4, 1, 1)	(2, 0, -3)	(-1, 2, 1)
1.5.	(-5, -5, 5)	(-2, 0, 1)	(1, 3, -1)	(0, 4, 1)
1.6.	(13, 2, 7)	(5, 1, 0)	(2, -1, 3)	(1, 0, -1)
1.7.	(-19, -1, 7)	(0, 1, 1)	(-2, 0, 1)	(3, 1, 0)
1.8.	(3, -3, 4)	(I, 0, 2)	(0, 1, 1)	(2, -1, 4)
1.9.	(2, 2, -1)	(3, II, 0)	(-1, 2, 1)	(-1, 0, 2)
1.10.	(-1, 7, -4)	(-1, 2, 1)	(2, 0, 3)	(1, 1, -1)
1.11.	(6, 5, -14)	(1, 1, 4)	(0, -3, 2)	(2, 1, -1)
1.12.	(6, -1, 7)	(1, -2, 0)	(-1. 1, 3)	$\overline{r}$ (1, 0, 4)
1.13.	(5, -15, 0)	(1, 0, 5)	(-1, 3, 2)	(0, -1, 1)
1.14.	(2, -1, 11)	(1, 1, 0)	(0, 1, -2)	(1, 0, 8)
1.15.	(11, 5, -3)	(1, 0, 2)	(-1, 0, 1)	(2, 5, -3)
1.16.	(8, 0, 5)	(2, 0, 1)	(1, 1, 0)	(4, 1, 2)
1.17.	(3, 1, 8)	(0, 1, 3)	(1, 2, -1)	(2, 0, -1)
1.18.	(8, 1, 12)	(1, 2, -1)	(3, 0, 2)	(-1, 1, 1)
1.19.	(-9, -8, -3)	(1, 4, 1)	(-3, 2, 1)	(1, -1, 2)
1.20.	(-5, 9, -13)	(0, 1, -2)	(3, -1, 1)	(4, 1, 0)
1.21.	(-15, 5, 6)	(0, 5, 1)	(3, 2, -1)	(-1, 1, 0)
1.22.	(8, 9, 4)	(1, 0, 1)	(0, -2, 1)	(1, 3, 0)
1.23.	(23, -14, -30)	(2, 1, 0)	(1, -1, 0)	(-3, 2, 5)
1.24.	(3, 1, 3)	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	(4, 2, 1)
1.25.	(-1, 7, 0)	(0, 3, 1)	(1, -1, 2)	(2, -1, 0)
1.26.	(11, -1, 4)	(1, -1, 2)	(3, 2, 0)	(-1, 1, 0)
1.27.	(-13, 2, 18)	(1, 1, 4)	(-3, 0, 2)	(1, 2, -1)
1.28.	(0, -8, 9)	(0, -2, 1)	(3, 1, -1)	(4, 0, 1)
1.29.	(8, -7, -13)	(0, 1, 5)	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)
1.30.	(2, 7, 5)	(1, 0, 1)	(1, -2, 0)	(0, 3, 1)

Задача №2.

Определить коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, построенные на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

№ *п/п*	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c_1	c_2
2.1.	(1, -2, 3)	(3, 0, -1)	$2\bar{a}+4\bar{b}$	$3\bar{b}-\bar{a}$
2.2.	(1, 0, -1)	(-2, 3, 5)	$\bar{a}+2\bar{b}$	$3\bar{a}-\bar{b}$
2.3.	(-2, 4, 1)	(1, -2, 7)	$5\bar{a}+3\bar{b}$	$2\bar{a}-\bar{b}$
2.4.	(1, 2, -3)	(2, -1, -1)	$4\bar{a}+3\bar{b}$	$8\bar{a}-\bar{b}$
2.5.	(3, 5, 4)	(5, 9, 7)	$2\bar{a}+\bar{b}$	$3\bar{a}-2\bar{b}$
2.6.	(1, 4, -2)	(1, 1, -1)	$\bar{a}+\bar{b}$	$4\bar{a}+2\bar{b}$
2.7.	(1, -2, 5)	(3, -1, 0)	$4\bar{a}-2\bar{b}$	$\bar{b}-2\bar{a}$
2.8.	(3, 4, -1)	(2, -1, 1)	$6\bar{a}-3\bar{b}$	$\bar{b}-2\bar{a}$
2.9.	(2, -3, -2)	(1, 0, 5)	$3\bar{a}+9\bar{b}$	$\bar{a}-3\bar{b}$
2.10.	(-1, 4, 2)	(3, -2, 6)	$2\bar{a}-\bar{b}$	$3\bar{b}-6\bar{a}$
2.11.	(5, 0, -1)	(7, 2, 3)	$2\bar{a}-\bar{b}$	$3\bar{b}-6\bar{a}$
2.12.	(0, 3, -2)	(1, -2, 1)	$5\bar{a}-2\bar{b}$	$3\bar{a}+5\bar{b}$
2.13.	(-2, 7, -1)	(-3, 5, 2)	$2\bar{a}+3\bar{b}$	$3\bar{a}+2\bar{b}$
2.14.	(3, 7, 0)	(1, -3, 4)	$4\bar{a}-2\bar{b}$	$\bar{b}-2\bar{a}$
2.15.	(-1, 2, -1)	(2, -7, 1)	$6\bar{a}-2\bar{b}$	$\bar{b}-3\bar{a}$
2.16.	(7, 9, -2)	(5, 4, 3)	$4\bar{a}-\bar{b}$	$4\bar{b}-\bar{a}$
2.17.	(5, 0, -2)	(6, 4, 3)	$5\bar{a}-3\bar{b}$	$6\bar{b}-10\bar{a}$
2.18.	(8, 3, -1)	(4, 1, 3)	$2\bar{a}-\bar{b}$	$2\bar{b}-4\bar{a}$
2.19.	(3, -1, 6)	(5, 7, 10)	$4\bar{a}-2\bar{b}$	$\bar{a}-2\bar{b}$
2.20.	(1, -2, 4)	(7, 3, 5)	$6\bar{a}-3\bar{b}$	$\bar{b}-2\bar{a}$
2.21.	(3, 7, 0)	(4, 6, -1)	$3\bar{a}+2\bar{b}$	$5\bar{a}-7\bar{b}$
2.22.	(2, -1, 4)	(3, -7, -6)	$2\bar{a}-3\bar{b}$	$3\bar{a}-2\bar{b}$
2.23.	(5, -1, -2)	(6, 0, 7)	$3\bar{a}-2\bar{b}$	$4\bar{b}-6\bar{a}$
2.24.	(-9, 5, 3)	(7, 1, -2)	$2\bar{a}-\bar{b}$	$3\bar{a}+5\bar{b}$

2.25.	(4, 2, 9)	(0, -1, 3)	$4\overline{b}-3\overline{a}$	$4\overline{a}-3\overline{b}$
2.26.	(2, -1, 6)	(-1, 3, 8)	$5\overline{a}-2\overline{b}$	$2\overline{a}-5\overline{b}$
2.27.	(5, 0, 8)	(-3, 1, 7)	$3\overline{a}-4\overline{b}$	$12\overline{b}-9\overline{a}$
2.28.	(-1, 3, 4)	(2, -1, 0)	$6\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-3\overline{a}$
2.29.	(4, 2, -7)	(5, 0, -3)	$\overline{a}-3\overline{b}$	$6\overline{b}-2\overline{a}$
2.30.	(2, 0, -5)	(1, -3, 4)	$2\overline{a}-5\overline{b}$	$5\overline{a}-2\overline{b}$

Задача №3.

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

№ *n/n*	*A*	*B*	*C*
3.1.	(6, 5, 1)	(0, 1, 2)	(2, 1, 0)
3.2.	(5, 4, 2)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
3.3.	(2, 0, 4)	(1, 1, 1)	(3, 2, 1)
3.4.	(1, 2, 3)	(2, -1, 0)	(3, 2, 1)
3.5.	(1, -1, 2)	(5, -6, 2)	(2, 3, -1)
3.6.	(3, -3, 1)	(-3, -2, 0)	(5, 0, 2)
3.7.	(4, 2, 1)	(0, 4, 5)	(1, 2, 7)
3.8.	(1, 0, 2)	(2, 4, 3)	(1, 7, 1)
3.9.	(5, -1, 3)	(2, 0, 1)	(3, 1, -1)
3.10.	(0, 8, 1)	(2, 1, 1)	(-1, 4, 5)
3.11.	(1, 0, 4)	(0, 2, 3)	(-1, 1, 0)
3.12.	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(-4, 5, 6)
3.13.	(1, -2, 3)	(0, -1, 2)	(3, -4, 5)
3.14.	(0, -3, 6)	(-12, -3, -3)	(-9, -3, -6)
3.15.	(3, 3, -1)	(5, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.16.	(-1, 2, -3)	(3, 4, -6)	(1, 1, -1)
3.17.	(-4, -2, 0)	(-1, -2, 4)	(3, -2, 1)
3.18.	(5, 3, -1)	(5, 2, 0)	(6, 4, -1)
3.19.	(-3, -7, -6)	(0, -1, -2)	(2, 3, 0)
3.20.	(2, -4, 6)	(0, -2, 4)	(6, -8, 10)
3.21.	(0, 1, -2)	(3, 1, 2)	(4, 1, 1)
3.22.	(3, 3, -1)	(1, 5, -2)	(4, 1, 1)

3.23.	(2, 1, -1)	(6, -1, -4)	(4, 2, 1)
3.24.	(-1, -2, 1)	(-4, -2, 5)	(-8, -2, 2)
3.25.	(6, 2, -3)	(6, 3, -2)	(7, 3, -3)
3.26.	(0, 0, 4)	(-3, -6, 1)	(-5, -10, -1)
3.27.	(2, -8, -1)	(4, -6, 0)	(-2, -5, -1)
3.28.	(3, -6, 9)	(0, 3, 6)	(9, -12, 15)
3.29.	(0, 2, -4)	(8, 2, 2)	(6, 2, 4)
3.30.	(3, 3, -1)	(5, 1, -2)	(4, 1, 1)

Задача №4.

Определить направляющие косинусы вектора силы F. Найти момент силы F, приложенной в точке B, относительно точки A.

№ *п/п*	F	B	A
4.1.	(3, 3, 3)	(3, -1, 5)	(4,-2,3)
4.2.	(4, 4, 4)	(4, -2, 5)	(5,-3,3)
4.3.	(8, -8, 8)	(10, -8, 1)	(9,-7,3)
4.4.	(-2, 2, -2)	(11, -9, 1)	(10,-8,3)
4.5.	(5, 5, 5)	(5, -3, 5)	(6,-4,3)
4.6.	(-3, 3, -3)	(12, -10, 1)	(11,-9,3)
4.7.	(6, 6, 6)	(6, -4, 5)	(7,-5,3)
4.8.	(-4, 4, -4)	(13, -11, 1)	(12,-10,3)
4.9.	(7, 7, 7)	(7, -5, 5)	(8,-6,3)
4.10.	(-5, 5, -5)	(14, -12, 1)	(13, -11, 3)
4.11.	(-1, -1, 1)	(8, -6, -5)	(9, -7, 3)
4.12.	(3, 3, -3)	(0, 1, 2)	(2, -1, -2)
4.13.	(-2, -2, -2)	(9, -7, 5)	(10, -8, 3)
4.14.	(4, 4, -4)	(1, 0, 2)	(3, 2, -2)
4.15.	(-3, -3, -3)	(10, -8, 5)	(11, -9, 3)
4.16.	(5, 5, -5)	(2,-1,2)	(4, -3, 2)
4.17.	(-4, -4, -4)	(11,-9,5)	(12, -10, 3)
4.18.	(6, 6, -6)	(3,-2,2)	(5, -4, -2)
4.19.	(-5, -5, -5)	(12,-10,5)	(13, -11, 3)
4.20.	(7, 7, -7)	(4,-3,2)	(6, -5, -2)

4.21.	(3, -3, 3)	(5,-3,1)	(4, -2, 3)
4.22.	(8, 8, -8)	(5,-4,2)	(7, -6, -2)
4.23.	(4, -4, 4)	(6,-4,1)	(5, -4, 3)
4.24.	(-2, -2, 2)	(6,-5,2)	(8, -7, -2)
4.25.	(5, -5, 5)	(7,-5,1)	(6, -4, 3)
4.26.	(-3, -3, 3)	(7,-6,2)	(9, -8, 2)
4.27.	(6, -6, 6)	(8,-6,1)	(7, -5, 3)
4.28.	(-4, -4, 4)	(8,-7,2)	(10, -9, -2)
4.29.	(7, -7, 7)	(9,-7,1)	(8, -6, 3)
4.30.	(-5, -5, 5)	(9,-8,2)	(11, -10, 2)

Задача №5.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b.

№ *п/п*	a	b	$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$(p\hat{\ }q)$
5.1.	$p+2q$	$3p-q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.2.	$3p+q$	$p-2q$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
5.3.	$p-3q$	$p+2q$	$1/5$	1	$\frac{\pi}{2}$
5.4.	$3p-2q$	$p+5q$	4	$1/2$	$\frac{5\pi}{6}$
5.5.	$p-2q$	$2p+q$	2	3	$\frac{3\pi}{4}$
5.6.	$p+3q$	$p-2q$	2	3	$\frac{\pi}{3}$
.5.7.	$2p-q$	$p+3q$	3	2	$\frac{\pi}{2}$
5.8.	$4p+q$	$p-q$	7	2	$\frac{\pi}{4}$

5.9.	$p-4q$	$3p+q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.10.	$p+4q$	$2p-q$	7	2	$\frac{\pi}{3}$
5.11.	$3p+2q$	$p-q$	10	1	$\frac{\pi}{2}$
5.12.	$4p-q$	$p+2q$	5	4	$\frac{\pi}{4}$
5.13.	$2p+3q$	$p-2q$	6	7	$\frac{\pi}{3}$
5.14.	$3p-q$	$p+2q$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.15.	$2p+3q$	$p-2q$	2	3	$\frac{\pi}{6}$
5.16.	$2p-3q$	$3p+q$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.17.	$3p-2q$	$2p+3q$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.18.	$4p-3q$	$p+2q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.19.	$p-q$	$p+q$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.20.	$5p-q$	$p+5q$	5	3	$\frac{\pi}{6}$
5.21.	$3p-q$	$p+3q$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
5.22.	$p-4q$	$p+5q$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$
5.23.	$5p+q$	$p-3q$	1	2	$\frac{\pi}{3}$
5.24.	$7p-2q$	$p+3q$	$1/2$	2	$\frac{\pi}{2}$

5.25.	$6p-q$	$p+q$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.26.	$10p+q$	$3p-2q$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.27.	$6p-q$	$3p+2q$	8	$1/2$	$\frac{\pi}{3}$
5.28.	$3p+4q$	$q-p$	2,5	2	$\frac{\pi}{2}$
5.29.	$7p+q$	$p-3q$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$
5.30.	$p+3q$	$3p-q$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$

Задача №6

Определить компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, и $\bar{c}$.

№ n/n	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
6.1.	(2,3,1)	(-1,0,-1)	(2,2,2)
6.2.	(3,2,1)	(2,3,4)	(3,1,-1)
6.3.	(1,5,2)	(-1,1,-1)	(1,1,1)
6.4.	(1,-1,-3)	(3,2,1)	(2,3,4)
6.5.	(3,3,1)	(1,-2,1)	(1,1,1)
6.6.	(3,1,-1)	(-2,-1,0)	(5,2,-1)
6.7.	(4,3,1)	(1,-2,1)	(2,2,2)
6.8.	(4,3,1)	(6,7,4)	(2,0,-1)
6.9.	(3,2,1)	(1,-3,-7)	(1,2,3)
6.10.	(3,7,2)	(-2,0,-1)	(2,2,1)
6.11.	(1,-2,6)	(1,0,1)	(2,-6,17)
6.12.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.13.	(7,3,4)	(-1,-2,-1)	(4,2,4)
6.14.	(2,3,2)	(4,7,5)	(2,0,-1)
6.15.	(5,3,4)	(-1,0,-1)	(4,2,4)

6.16.	(3,10,5)	(-3,-2,-3)	(2,4,3)
6.17.	(-2,-4,-3)	(4,3,1)	(6,7,4)
6.18.	(3,1,-1)	(1,0,-1)	(8,3,-2)
6.19.	(4,2,2)	(-3,-3,-3)	(2,1,2)
6.20.	(4,1,2)	(9,2,5)	(1,1,-1)
6.21.	(5,3,4)	(4,3,3)	(9,5,8)
6.22.	(3,4,2)	(1,1,0)	(8,11,6)
6.23.	(4,-1,-6)	(1,-3,-7)	(2,-1,-4)
6.24.	(3,1,0)	(-5,-4,-5)	(4,2,4)
6.25.	(3,0,3)	(8,1,6)	(1,1,-1)
6.26.	(1,-1,4)	(1,0,3)	(1,-3,8)
6.27.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.28.	(4,1,1)	(-9,-4,-9)	(6,2,6)
6.29.	(-3,3,3)	(-4,7,6)	(3,0,-1)
6.30.	(-7,10,-5)	(0,-2,-1)	(-2,4,-1)

Задача №7

Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A, B, C и D, и его высоту, опущенную из вершины D на граньА В С.

№ *п/п*	*A*	*B*	*C*	*D*
7.1.	(0,1,2)	(2,1,7)	(2,7,4)	(0,0,4)
7.2.	(1,2,3)	(2,8,-4)	(0,5,4)	(2,9,4)
7.3.	(1,1,1)	(2,4,-2)	(2,0,2)	(0,1,-1)
7.4.	(1,-1,1)	(0,2,3)	(1,-1,0)	(0,2,2)
7.5.	(2,1,3)	(4,-2,0)	(1,3,-3)	(7,5,2)
7.6.	(-2,0,4)	(1,3,-1)	(4,-1,3)	(2,7,3)
7.7.	(1,2,3)	(0,0,0)	(1,4,3)	(1,8,-1)
7.8.	(-1,2,0)	(1,0,3)	(0,2,2)	(1,8,3)
7.9.	(2,-1,1)	(3,3,2)	(2,1,0)	(4,1,-3)
7.10.	(2,1,-1)	(-3,1,2)	(0,1,2)	(-1,8,3)
7.11.	(-2,1,1)	(5,5,4)	(3,2,-1)	(4,1,3)
7.12.	(0,1,-1)	(3,-1,5)	(1,0,4)	(3,5,7)
7.13.	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)	(-1,0,-2)
7.14.	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)	(7,5,-3)

7.15.	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)	(5,9,-8)
7.16.	(1,5,-7)	(-3,5,3)	(-2,7,3)	(-4,8,-12)
7.17.	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-6,-2,0)	(2,5,4)
7.18.	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)	(3,4,5)
7.19.	(4,-1,3)	(-2,1,0)	(0,-5,1)	(3,2,-6)
7.20.	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)	(2,-2,-4)
7.21.	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)	(-3,0,1)
7.22.	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)	(2,1,0)
7.23.	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)	(0,-5,-4)
7.24.	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)	(1,-1,2)
7.25.	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)	(7,-3,1)
7.26.	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)	(3,1,-4)
7.27.	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)	(-4,3,5)
7.28.	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)	(-4,7,3)
7.29.	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)	(-5,2,-8)
7.30.	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)	(-10,-8,7)

Итоговый контроль

1. Элементы линейной алгебры

Изучив данную тему, студент должен

знать:

- определения основных понятий: арифметическое пространство, подпространство, размерность пространства, матрица, определитель и ранг матрицы, система линейных уравнений, линейный оператор, квадратичная форма;
- свойства определителей;
- определения и основные свойства операций с матрицами: сложения, умножения на число, умножения, транспонирования, обращения;
- основные методы и алгоритмы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса, правило Крамера, матричный метод;
- структуру множества решений систем линейных однородных и неоднородных уравнений;
- геометрическую интерпретацию системы линейных уравнений и множества ее решений;

уметь:

- вычислять определители различными методами, вычислять ранг матрицы;
- выполнять операции с матрицами;
- решать системы линейных уравнений методом Гаусса и с помощью определителей;
- записывать систему линейных уравнений в матричном виде и решать ее матричным методом, решать матричные линейные уравнения;
- выяснять линейную зависимость или независимость данной системы векторов;
- приводить квадратичную форму к каноническому виду.

Тест «Элементы линейной алгебры»

1. Сумма матриц $A+B$ определена:

а) для любых матриц A и B;

б) только для квадратных матриц A и B;

в) если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

г) если матрицы A и B имеют одинаковые размеры.

2. Произведение матриц A и B определено:

а) только для квадратных матриц A и B;

б) если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

в) если число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B;

г) если матрицы A и B имеют одинаковые размеры.

3. Какое из условий необходимо и достаточно для обратимости матрицы A?

а) Матрица A – квадратная; б) $\det A = 0$;

в) $\det A \neq 0$; г) $A \neq 0$.

4. Как изменится определитель, если первую строку умножить на 2 и прибавить к ней утроенную вторую строку?

а) Увеличится в 2 раза; б) не изменится;

в) увеличится в 3 раза; г) увеличится в 6 раз.

5. Как изменится определитель, если в нем переставить две строки?

а) Не изменится;

б) изменит знак на противоположный;

в) это зависит от определителя;

г) обратится в нуль.

6. Система трех линейных уравнений с 4 неизвестными может иметь количество решений, равное:

а) 0 или 1; б) 1 или 2; в) 0 или ∞; г) 1 или ∞.

7. Система линейных однородных уравнений всегда является:

а) совместной;

б) несовместной;

в) определенной;

г) неопределенной.

8. Какое из преобразований системы линейных уравнений не приводит к равносильной системе?

а) Умножить обе части одного из уравнений системы на –1;

б) изменить порядок уравнений;

в) умножить обе части одного из уравнений системы на 0;

г) добавить к одному уравнению другое, умноженное на 2.

9. Выберите условие, которое необходимо и достаточно для совместности системы линейных уравнений (A – основная матрица системы, $\overline{A}$ – расширенная матрица, n – число неизвестных):

а) $\operatorname{rg}\overline{A} < \operatorname{rg} A$; б) $\operatorname{rg}\overline{A} = \operatorname{rg} A$; в) $\operatorname{rg} A < n$; г) $\operatorname{rg}\overline{A} > \operatorname{rg} A$.

10. Какое из предыдущих условий невозможно?

11. Какое из условий выполняется всегда (для любой системы линейных уравнений)?

а) $\operatorname{rg} A \le n$; б) $\operatorname{rg} A < n$; в) $\operatorname{rg} A > n$; г) $\operatorname{rg} A \ge n$.

12. Система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имеет единственное решение:

а) всегда;

б) если основная матрица системы – невырожденная;

в) никогда;

г) если основная матрица системы – вырожденная.

13. Какое из следующих множеств матриц образует векторное пространство?

а) Все квадратные матрицы различных порядков;

б) все квадратные матрицы одного порядка с положительными элементами;

в) все квадратные матрицы одного порядка;

г) все квадратные матрицы одного порядка с целыми элементами.

14. Установить, какой из заданных операторов не является линейным:

а) $A_x = (x_2 - x_1, x_3, x_1)$; б) $A_x = (x_2, x_1, x_3, x_1)$;

в) $A_x = (x_2 + x_1, x_3, x_1)$; г) $A_x = (x_3 + x_1, x_3, x_1)$.

15. Какая из форм не является квадратичной?

а) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$; б) $x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$;

в) $3x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$; г) $4x_1^2 + 2x_1 + x_2^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 2. Решить систему методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 9x_4 = 8 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 13x_2 - x_3 + 10x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 9x_4 = 8 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 9x_4 = 17 \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 - 6x_4 = 19 \end{cases}$

Задание 3. Решить систему методом Крамера

1. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -6 \\ -6x_1 - x_2 + 8x_3 = 19 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

Задание 4. Решить систему матричным методом.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ -6x_1 - x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$

Задание 5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. Векторная алгебра

Изучив данную тему, студент должен:

иметь представление:

• о методе координат;

• о линейных и нелинейных операциях над векторами; знать:

• определения основных понятий: линейная зависимость и независимость векторов, базис, координаты вектора;

• скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; уметь:

• вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, углы между векторами, расстояние между точками, координаты векторов в заданном базисе;

• определять линейную зависимость и независимость системы векторов, взаимное расположение точек, векторов.

Тест «Векторная алгебра»

1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда:

а) хотя бы один из них – нулевой;

б) они лежат в одной плоскости;

в) они коллинеарны;

г) они ортогональны.

2. Какое из следующих условий является необходимым для линейной зависимости трех векторов?

а) Среди них есть нулевой вектор;

б) среди них есть два коллинеарных вектора;

в) они попарно ортогональны;

г) они компланарны.

3. Координаты вектора зависят от выбора:

а) базиса;

б) начала координат;

в) масштаба;

г) начала вектора.

4. Чтобы найти координаты вектора, надо:

а) умножить координаты начала и конца вектора;

б) вычесть из координат начала координаты конца вектора;

в) сложить координаты начала и конца вектора;

г) вычесть из координат конца координаты начала вектора.

5. Координаты вектора $3\overline{a}-2\overline{b}$, где $\overline{a}(1,-2,3)$, $\overline{b}(3,2,-2)$, равны:

а) (9,–2,5); б) (9 –10,13); в) (–3,–10,13); г) (–3,–10,5)

6. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда:

а) их скалярное произведение равно нулю;

б) пропорциональны их координаты;

в) они сонаправлены;

г) равны их длины.

7. Два вектора равны тогда и только тогда, когда:

а) равны их координаты;

б) они коллинеарны;

в) равны их длины;

г) они сонаправлены.

8. Скалярное произведение $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда:

а) $\overline{a} = 0$ или $\overline{b} = 0$;

б) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны;

в) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;

г) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно независимы.

9. Скалярное произведение $(\overline{a}, \overline{b})$ векторов $\overline{a}(1, -2, 3)$, $\overline{b}(3, 2, -2)$ равно:

а) 7; б) 12; в) 6; г) -7.

10. Векторное произведение $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$ тогда и только тогда, когда:

а) $\overline{a} = 0$ или $\overline{b} = 0$;

б) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны;

в) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;

г) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно независимы.

11. Модуль векторного произведения $[\overline{a}, \overline{b}]$ векторов $\overline{a}(1, -2, 3)$, $\overline{b}(3, 2, -2)$ равен:

а) $3\sqrt{21}$; б) 13; в) $21\sqrt{3}$; г) 12.

12. Смешанное произведение $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда:

а) хотя бы один из векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ равен нулевому;

б) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ попарно ортогональны;

в) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны;

г) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы.

13. Смешанное произведение $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > 0$ тогда и только тогда, когда:

а) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарные;

б) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку векторов;

в) векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы;

г) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют левую тройку векторов.

14. Смешанное произведение $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ векторов $\overline{a}(1,-2,3)$, $\overline{b}(3,2,-2)$, $\overline{c}(1,-1,2)$ равно:

а) -3; б) 5; в) 0; г) 3.

15. Объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{a}(2,-1,6)$, $\overline{b}(3,2,-4)$, $\overline{c}(1,-1,4)$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти косинус угла между векторами $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$, построенных по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=\{-2;4;1\},\overline{b}=\{1;2;7\},\overline{c}_1=5\overline{a}+3\overline{b},\overline{c}_2=2\overline{a}-\overline{b}$.
2. $\overline{a}=\{1;0;1\},\overline{b}=\{-2;3;5\},\overline{c}_1=\overline{a}+2\overline{b},\overline{c}_2=3\overline{a}-\overline{b}$.
3. $\overline{a}=\{1;2;-3\},\overline{b}=\{2;-1;-1\},\overline{c}_1=4\overline{a}+3\overline{b},\overline{c}_2=8\overline{a}-\overline{b}$.
4. $\overline{a}=\{3;5;4\},\overline{b}=\{5;9;7\}$, $\overline{c}_1=-2\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{c}_2=3\overline{a}-2\overline{b}$.
5. $\overline{a}=\{1;4;-2\},\overline{b}=\{1;1;-1\},\overline{c}_1=\overline{a}+\overline{b},\overline{c}_2=4\overline{a}+2\overline{b}$.
6. $\overline{a}=\{1;-2;5\},\overline{b}=\{3;-1;0\},\overline{c}_1=4\overline{a}-2\overline{b},\overline{c}_2=-2\overline{a}+\overline{b}$.
7. $\overline{a}=\{3;4;-1\},\overline{b}=\{2;-1;1\},\overline{c}_1=6\overline{a}-3\overline{b},\overline{c}_2=-2\overline{a}+\overline{b}$.
8. $\overline{a}=\{-2;-3;-2\},\overline{b}=\{1;0;5\},\overline{c}_1=3\overline{a}+9\overline{b},\overline{c}_2=-\overline{a}-3\overline{b}$.
9. $\overline{a}=\{-1;4;2\}$, $\overline{b}=\{3;-2;6\},\overline{c}_1=2\overline{a}-\overline{b},\overline{c}_2=-6\overline{a}+3\overline{b}$.
10. $\overline{a}=\{0;3;-2\},\overline{b}=\{1;-2;1\},\overline{c}_1=5\overline{a}-2\overline{b},\overline{c}_2=3\overline{a}+5\overline{b}$.

Задание 2. Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p},\overline{q},\overline{r}$.

1. $\overline{x}=\{1;-4;4\},\overline{p}=\{2;1;-1\},\overline{q}=\{0;3;2\},\overline{r}=\{1;-1;1\}$.
2. $\overline{x}=\{-9;5;5\},\overline{p}=\{4;1;1\},\overline{q}=\{2;0;-3\},\overline{r}=\{-1;2;1\}$.

3. $\overline{x}=\{-5;-5;5\},\overline{p}=\{-2;0;1\},\overline{q}=\{1;3;-1\},\overline{r}=\{0;4;1\}$.

4. $\overline{x}=\{-19;-1;7\},\overline{p}=\{0;1;1\},\overline{q}=\{-2;0;1\},\overline{r}=\{3;1;0\}$.

5. $\overline{x}=\{3;-3;4\},\overline{p}=\{1;0;2\},\overline{q}=\{0;1;1\},\overline{r}=\{2;-1;4\}$.

6. $\overline{x}=\{3;3;-1\},\overline{p}=\{3;1;0\},\overline{q}=\{-1;2;1\},\overline{r}=\{-1;0;2\}$.

7. $\overline{x}=\{6;-1;7\},\overline{p}=\{1;-2;0\},\overline{q}=\{-1;1;3\},\overline{r}=\{1;0;4\}$.

8. $\overline{x}=\{6;5;-14\},\overline{p}=\{1;1;4\},\overline{q}=\{0;-3;2\},\overline{r}=\{2;1;-1\}$.

9. $\overline{x}=\{-1;7;-4\},\overline{p}=\{-1;2;1\},\overline{q}=\{2;0;3\},\overline{r}=\{1;1;-1\}$.

10. $\overline{x}=\{5;15;0\},\overline{p}=\{1;0;5\},\overline{q}=\{-1;3;2\},\overline{r}=\{0;-1;1\}$.

Задание 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q},\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, если $|\overline{p}|=1,|\overline{q}|=2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

2. $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q},\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, если $|\overline{p}|=4,|\overline{q}|=1,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

3. $\overline{a}=\overline{p}-3\overline{q},\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, если $|\overline{p}|=1/5,|\overline{q}|=1,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

4. $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q},\overline{b}=\overline{p}+5\overline{q}$, если $|\overline{p}|=4,|\overline{q}|=1/2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$.

5. $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q},\overline{b}=2\overline{p}+\overline{q}$, если $|\overline{p}|=2,|\overline{q}|=3,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

6. $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q},\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, если $|\overline{p}|=2,|\overline{q}|=3,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

7. $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$, если $|\overline{p}|=3,|\overline{q}|=2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

8. $\overline{a}=4\overline{p}+\overline{q},\overline{b}=\overline{p}-\overline{q}$, если $|\overline{p}|=7,|\overline{q}|=2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $\overline{a}=\overline{p}-4\overline{q},\overline{b}=3\overline{p}+\overline{q}$, если $|\overline{p}|=1,|\overline{q}|=2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

10. $\overline{a}=\overline{p}+4\overline{q},\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, если $|\overline{p}|=7,|\overline{q}|=2,\varphi\left(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Задание 4. а) Найти векторное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}$; б) Найти смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

1. $\overline{a} = \{3,2,1\}, \overline{b} = \{2,3,4\}, \overline{c} = \{3,1,-1\}$.

2. $\overline{a} = \{1,5,2\}, \overline{b} = \{-1,1,-1\}, \overline{c} = \{1,1,1\}$.

3. $\overline{a} = \{1,-1,-3\}, \overline{b} = \{3,2,1\}, \overline{c} = \{2,3,4\}$.

4. $\overline{a} = \{3,3,1\}, \overline{b} = \{1,-2,1\}, \overline{c} = \{1,1,1\}$.

5. $\overline{a} = \{3,1,-1\}, \overline{b} = \{-2,-1,0\}, \overline{c} = \{5,2,-1\}$.

6. $\overline{a} = \{4,3,1\}, \overline{b} = \{1,-2,1\}, \overline{c} = \{2,2,2\}$.

7. $\overline{a} = \{4,3,1\}, \overline{b} = \{6,7,4\}, \overline{c} = \{2,0,-1\}$.

8. $\overline{a} = \{3,2,1\}, \overline{b} = \{1,-3,-7\}, \overline{c} = \{1,2,3\}$.

9. $\overline{a} = \{3,7,2\}, \overline{b} = \{-2,0,-1\}, \overline{c} = \{2,2,1\}$.

10. $\overline{a} = \{1,-2,6\}, \overline{b} = \{1,0,1\}, \overline{c} = \{2,-6,17\}$.

Задание 5. Вычислить объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$ $A_3(-1;0;1)$ $A_4(-4;6;-3)$.

2. $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$ $A_3(3;3;1)$ $A_4(-4;2;1)$.

3. $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$ $A_3(-7;-3;2)$ $A_4(-6;-3;6)$.

4. $A_1(-1;-5;2)$, $A_2(-6;0;-3)$ $A_3(3;6;-3)$ $A_4(-10;6;7)$.

5. $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$ $A_3(1;-5;-9)$ $A_4(-1;-6;-3)$.

6. $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$ $A_3(1;2;4)$ $A_4(-1;1;1)$.

7. $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$ $A_3(5;0;-6)$ $A_4(-10;9;-7)$.

8. $A_1(-2;0;-4)$ $A_2(-1;7;1)$ $A_3(4;-8;-4)$ $A_4(1;-4;6)$.

9. $A_1(14;4;5)$, $A_2(-5;-3;2)$ $A_3(-2;-6;-3)$ $A_4(-2;2;-1)$.

10. $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$ $A_3(5;2;6)$ $A_4(8;4;-9)$.

3. Элементы аналитической геометрии

Изучив данную тему, студент должен:

иметь представление:

• об уравнениях линий на плоскости и в пространстве;

• об уравнениях поверхностей пространства;

знать:

• различные формы уравнений прямой и плоскости, канонические уравнения кривых второго порядка;

• геометрический смысл коэффициентов в уравнениях прямой и плоскости; уметь:

• вычислять углы между прямыми и плоскостями, расстояние между прямыми и плоскостями;

• определять взаимное расположение прямых и плоскостей;

• изображать на плоскости в декартовой системе координат прямые и кривые второго порядка по заданному уравнению.

Тест «Элементы аналитической геометрии»

1. Какая из следующих прямых проходит через точку (1,2)?

а) $(x-2)+2(y+3)=0$; б) $x+2y-5=0$;

в) $y=2x+5$; г) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}$.

2. Какая из следующих прямых параллельна вектору (1,2)?

а) $3(x+1)+2(y-2)=0$; б) $2x-3y-1=0$;

в) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}$; г) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{4}$.

3. Выберите из уравнений прямых каноническое:

а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$; б) $y=-2x+1$;

в) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{1}$; г) $3x+y-4=0$.

4. Из предыдущих уравнений прямых выберите общее уравнение.

5. Из уравнений прямых вопроса 1 выберите уравнение прямой в отрезках.

6. Из уравнений прямых вопроса 1 выберите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

7. Прямые $x+2y-5=0$ и $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-3}{2}$:

а) параллельны, но не совпадают;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются;

г) совпадают.

8. Выберите из следующих уравнений уравнение прямой, проходящей через точку (1,2,3):

а) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$; б) $\begin{cases} x-2y+z+1=0, \\ 5x-y-z-3=0 \end{cases}$;

в) $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$; г) $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$.

9. Прямая $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ не параллельна плоскости:

а) $(x-2)+2(y+3)+3(z+1)=0$;

б) $x+2y+3z-14=0$;

в) $2(x+1)-3(y+2)+(z+3)=0$;

г) $3(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0$.

10. Плоскость $2x+8y+4z-1=0$ и прямая $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$:

а) параллельны;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются, но не перпендикулярны;

г) прямая принадлежит плоскости.

11. Плоскости $2x-3y+5z-1=0$ и $4x-6y+10z+2=0$:

а) параллельны;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются;

г) совпадают.

12. Из следующих уравнений выберите уравнение эллипса:

а) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{9}=1$; б) $4y^2-9x^2=5$;

в) $x^2+2xy+y^2=9$; г) $x^2+2x+2y^2=3$.

Из предыдущих уравнений выберите уравнение гиперболы.

14. Из уравнений вопроса 12 выберите уравнение, задающее пару пересекающихся прямых.

15. Множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки этой плоскости вдвое больше расстояния до данной прямой этой плоскости, есть:

а) окружность;

б) эллипс;

в) гипербола;

г) парабола.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Даны вершины треугольника *ABC*. Составить уравнения его сторон и высоты, опущенной из вершины *B*.

1. $A(1,-2),\ B(-1,0),\ C(3,4)$ 2. $A(-2,1),\ B(4,-1),\ C(0,-2)$

3. $A(0,2),\ B(-1,5),\ C(-1,-2)$ 4. $A(2,-1),\ B(3,1),\ C(1,1)$

5. $A(3,5),\ B(-1,-2),\ C(3,-2)$ 6. $A(-2,4),\ B(4,3),\ C(1,-4)$

7. $A(6,3),\ B(-2,3),\ C(-1,-5)$ 8. $A(3,-4),\ B(2,1),\ C(-2,4)$

9. $A(1,1),\ B(-4,-2),\ C(3,-3)$ 10. $A(5,2),\ B(-1,3),\ C(0,-4)$

Задание 2. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки

1. $M_1\left(-1,2,-3\right), M_2(4,-1,0), M_3(2,1,-2), M_0(1,-6,-5)$

2. $M_1(-3,-1,1), M_2(-9,1,-2), M_3(3,-5,4), M_0(-7,0,-1)$

3. $M_1(1,-1,1), M_2(-2,0,3), M_3(2,1,-1), M_0(-2,4,2)$

4. $M_1(1,2,0), M_2(1,-1,2), M_3(0,1,-1), M_0(2,-1,4)$

5. $M_1\left(1,0,2\right), M_2(1,2.-1), M_3(2,-2,1), M_0(-5,-9,1)$

6. $M_1(1,2,-3), M_2(1,0,1), M_3(-2,-1,6), M_0(3,-2,-9)$

7. $M_1\left(3,10,-1\right), M_2\left(-2,3,-5\right), M_3\left(0,1,-1\right), M_0\left(2,-1,4\right)$

8. $M_1(-1,2,4), M_2(-1,-2,-4), M_3(3,0,-1), M_0(-2,3,5)$

9. $M_1\left(0,-3,1\right),\ M_2\left(-4,1,2\right),\ M_3\left(2,-1,5\right),\ M_0\left(-3,4,-5\right)$

10. $M_1\left(1,3,0\right),\ M_2\left(4,-1,2\right),\ M_3\left(3,0,1\right),\ M_0\left(4,3,0\right)$

Задание 3. Найти угол между двумя плоскостями α_1 и α_2.

1. $\alpha_1: x-3y+5=0; \alpha_2: 2x-y+5z-16=0.$

2. $\alpha_1: x-3y+z-1=0; \alpha_2: x+z-1=0.$

3. $\alpha_1: 4x-5y++3z-1=0; \alpha_2: x-4y-z+9=0.$

4. $\alpha_1: 6x+2y-4z+17=0; \alpha_2: 9x+3y-6z-4=0.$

5. $\alpha_1: 3y-z=0; \alpha_2: 2y+z=0.$

6. $\alpha_1: 6x+3y-2z=0; \alpha_2: x+2y+6z-12=0.$

7. $\alpha_1: x+2y+2z-3=0; \alpha_2: 16x+12y-15z-1=0$.

8. $\alpha_1: 2x-y+5z+16=0; \alpha_2: x+2y+3z+8=0.$

9. $\alpha_1: 2x+2y+z-1=0; \alpha_2: x+z-1=0.$

10. $\alpha_1: 3x+y+z-4=0; \alpha_2: y+z+5=0.$

Задание 4. Найти точку пересечения прямой L и плоскости P.

1. $L: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}; P: x+2y+3z-14=0$.

2. $L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}; P: x+2y-5z+20=0$.

3. $L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}; P: x-3y+7z-24=0$.

4. $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}; P: 2x-y+4z=0$.

5. $L:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}; P: 3x+y-5z-12=0$.

6. $L:\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}; P: x+3y-5z+9=0$.

7. $L:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}; P: x-2y+5z+17=0$.

8. $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}; P: x-2y+4z-19=0$.

9. $L:\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{-1}; P: 2x-y+3z+23=0$.

10. $L:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{0}; P: 2x-3y-5z-7=0$.

Задание 5. Составить канонические уравнения прямой.

1. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+5y+2z=11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Любая ли прямая может быть задана линейным уравнением?

2. Любое ли линейное уравнение определяет прямую?

3. Опишите все виды уравнений прямой и поясните, каков геометрический смысл коэффициентов в этих уравнениях?

4. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости?

5. Как определить взаимное расположение прямых на плоскости: параллельны, перпендикулярны или пересекаются? И если пересекаются, как найти угол между прямыми?

6. Любая ли плоскость может быть задана линейным уравнением и наоборот?

7. Каков геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости?

8. Как получить уравнение плоскости, проходящей через три точки?

9. Каков канонический вид уравнений эллипса, гиперболы, параболы и каков геометрический смысл коэффициентов этих уравнений?

10. Сколько осей симметрии имеет эллипс (гипербола, парабола)?

11. Сколько вершин имеет эллипс (гипербола, парабола)?

12. Как определить эксцентриситет, директрисы и фокусы эллипса (гиперболы)?

13. Что такое цилиндрические поверхности и какие бывают виды цилиндров второго порядка?

14. Что такое поверхности вращения? Являются ли поверхностями вращения эллиптический или гиперболический параболоид?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приступая к изучению высшей математики, необходимо знать, что математику нельзя изучать пассивно, нужно стараться глубоко вникать в смысл математических понятий и теорем, пытаться самостоятельно решать математические задачи. Результатами изучения курса высшей математики должны быть развитие аналитического мышления, овладение навыками решения математических задач, выработка умения самостоятельно ставить задачи и выбирать или разрабатывать методы их решения.

Материал практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения одного из важнейших разделов в курсе высшей математики – векторной алгебры и аналитической геометрии. Позволяет приобрести и закрепить практические навыки решения простых типовых задач, а также познакомится с методикой использования векторов и матриц к задачам механики и физики. Наиболее эффективный результат может быть достигнут, если использовать пособие, как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Несколько слов о том, как работать с этой книгой. Прежде, чем приступать к изучению методов решения задач, необходимо повторить основные определения и теоремы, относящиеся к данному разделу, постараться понять и запомнить наиболее часто используемые формулы. После этого можно переходить к изучению разобранных примеров. Некоторые типовые задачи и методы рассмотрены в пособии, как в общем виде, так и на примерах. Весьма полезно изучить и то и другое. Это поможет вам не только отработать навыки решения задач, но и лучше понять и усвоить теоретический материал.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов / В.П. Минорский. — М.: Наука, 1987.

2. Гусак А.А. Высшая математика / А.А.Гусак. — Мн.: «ТетраСистемс», 2003. Т. 1. - 543 с.

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, Ч. 1, 2. — М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003.

4. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, З.Г. Поздняк. – М.: Физматлит, 1981.

5. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемешев. – М.:Наука, 1985.

6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. - М.: Физматлит, 1978.

7. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. - М.: Высш. шк., 1978.

8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. - М.: Высш. шк., 1987.

9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – М.: Наука, 1970.

10. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Рольф, 2007.

11. Краснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Пантелеев Игорь Николаевич

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В авторской редакции

Подписано к изданию 10.11.2017.

Объем данных 1,9 Мб.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14