МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Воронеж 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие содержит избранные главы курса «Высшая математика», который изучают студенты-ускоренники специальности «Автомобильные дороги и аэродромы» Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

Данное пособие состоит из шести разделов: векторная алгебра и аналитическая геометрия; дифференциальное исчисление; интегральное исчисление; дифференциальные уравнения; кривизна плоской кривой, варианты расчетно-графических работ.

При изучении раздела «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» следует хорошо разобраться в понятии вектора и методе координат. После изучения этого раздела выполняется расчетно-графическая работа 1, которая включает задачи с использованием действий над векторами, элементов аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

В разделе «Дифференциальное исчисление» изучается такие фундаментальные понятия математического анализа, как производная и дифференциал, которые необходимы для исследования функций и построения графиков функций одной переменной. После изучения раздела «Дифференциальное исчисление» выполняется расчетно-графическая работа 2.

Раздел «Интегральное исчисление» рассматривает понятие неопределенного и определенного интегралов и основные методы интегрирования. В пособии приводятся примеры по применению определенных интегралов для решения геометрических задач. После изучения раздела «Интегральное исчисление» выполняется расчетно-графическая работа 3, которая посвящена нахождению неопределенных интегралов.

В разделе «Дифференциальные уравнения» изложены необходимые сведения по методам решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядка. После изучения раздела «Дифференциальные уравнения» выполняется расчетно-графическая работа 4.

В пятом разделе «Кривизна плоской кривой» вводятся такие основные понятия дифференциальной геометрии, как кривизна плоской кривой, радиус, центр и круг кривизны, а также понятие эволюты и эвольвенты плоской кривой.

Варианты расчетно-графических работ 1, 2, 3 и 4 по темам «аналитическая геометрия», «дифференциальное исчисление», «неопределенные интегралы» и «дифференциальные уравнения» соответственно приведены в шестом разделе.

Авторы выражают благодарность кандидатам физ.-мат. наук, доцентам А.М. Дементьевой, А.Б. Кущеву и С.А. Шаброву внимательно прочитавшим рукопись. Их ценные замечания и рекомендации помогли улучшить содержание пособия.

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Векторная алгебра

1.1.1. Векторы и действия над ними

Вектором называется **направленный отрезок.**

Направление на отрезке задается следующим образом: один конец отрезка принимается за начало вектора, а другой конец отрезка принимается за конец вектора, направление задается от начала к концу. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$ (рис. 1.1)

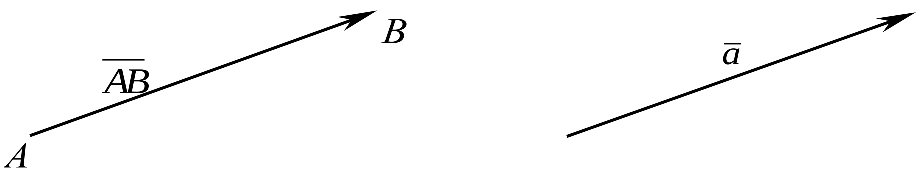


Рис. 1.1. Различные обозначения вектора

Если точка A является началом вектора, то будем говорить, что вектор выходит из точки A.

Вектор характеризуется длиной и направлением.

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. *Модуль вектора – скалярная величина (число).*

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются **коллинеарными**. Коллинеарные векторы могут быть **одинаково направленными** (обозначается $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$) или **противоположно направленными** (обозначается $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Чтобы отличить одну ситуацию от другой, построим плоскость проходящую через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и проведем прямую через начала этих векторов. В случае, если концы векторов окажутся в одной полуплоскости относительно этой прямой, то $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. В случае, если концы векторов окажутся в разных полуплоскостях относительно этой прямой, то $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

Два вектора *равны,* если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Из определения равенства векторов следует, что началом одного и того же вектора могут быть разные точки. Главное, чтобы выходящие из этих точек векторы имели равную длину и были одинаково направленными.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называют **нулевым вектором и обозначают** $\overline{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, а его направление не определяется. Считается, что нулевой вектор коллинеарен любому вектором. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором**.

Определим угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Сначала договоримся, что углом мы называем часть плоскости, заключенной между двумя лучами с общим началом. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют общее начало N, то углом между ними называется меньший из двух углов, вершина которого находится в N, а стороны которого проходят через $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не имеют общего начала, то построим вектор $\overline{b}' = \overline{b}$ и углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем считать угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}'$. Обозначение: $\angle(\overline{a},\overline{b})$ или $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$. Из определения следует, что $\angle(\overline{a},\overline{b}) = 0$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $\angle(\overline{a},\overline{b}) = \pi$, если $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. Если $\angle(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **ортогональными** (обозначение: $\overline{a} \perp \overline{b}$). В дальнейшем, мы будем рассматривать векторы, лежащие на одной плоскости, и векторы, расположенные в пространстве. Для векторов пространства введем одно важное понятие. Пусть даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Построим векторы $\overline{a}' = \overline{a}$, $\overline{b}' = \overline{b}$ и $\overline{c}' = \overline{c}$. Если векторы $\overline{a}'$, $\overline{b}'$ и $\overline{c}'$ лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называются **компланарными**.

Далее мы определим основные действия с векторами: сложение, вычитание, умножение на число. При этом не играет роли рассматриваются векторы на плоскости или в пространстве.

Для любых двух векторов **сложение** проводят по правилу **треугольника**.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – два произвольных вектора. Чтобы найти их сумму $\overline{a} + \overline{b}$ **по правилу треугольника** необходимо в конец первого вектора ($\overline{a}$) переместить начало второго вектора ($\overline{b}$) и провести вектор, выходящий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ (рис. 1.2).

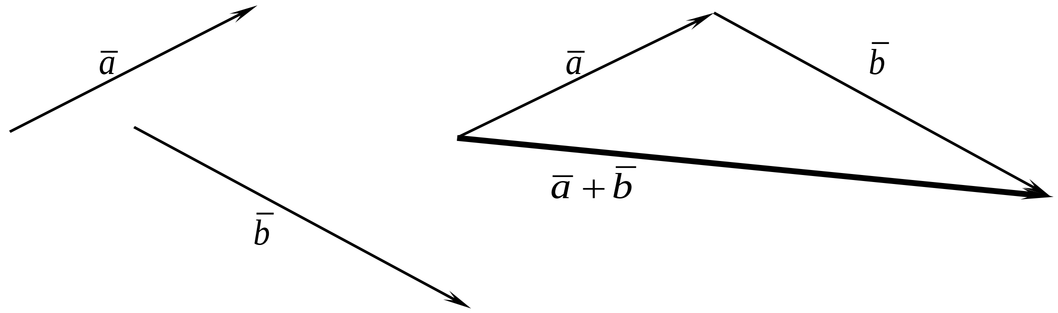


Рис. 1.2. Сложение векторов по правилу треугольника

Если вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то их сложение можно провести не только по правилу треугольника, но и по правилу параллелограмма.

Сложение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **по правилу параллелограмма** представлено на рис. 1.3.

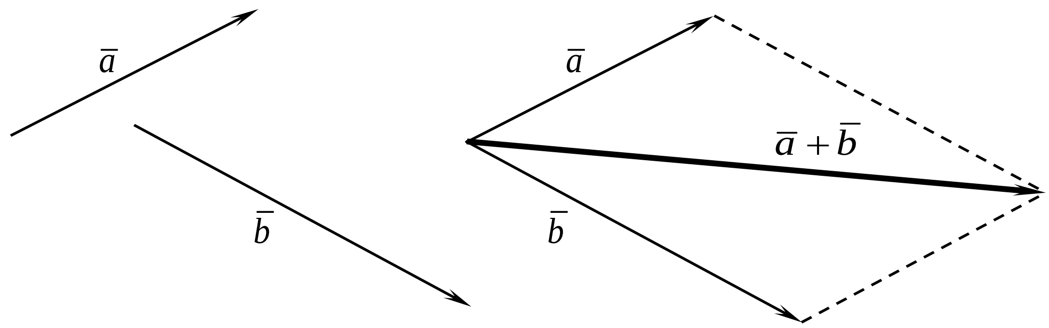


Рис. 1.3. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Как видно из рисунка 1.3. сумма векторов $\bar{a}+\bar{b}$ есть вектор, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Если же требуется *сложить несколько векторов*, например $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, то *пользуются правилом многоугольника*: конец первого вектора совмещают с началом второго, конец второго – с началом третьего и т.д. После этого начало первого вектора с концом последнего соединяют вектором, который и будет являться суммой исходных векторов (рис. 1.4).

Под **разностью** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимают вектор $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ такой, что $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$ (рис. 1.5). Такое определение не удобно для применения на практике, так как в нем используется сложение с неизвестным вектором $\bar{c}$. Ниже мы опишем каким образом можно вычитание векторов выполнить напрямую через сложение.

Умножить вектор $\bar{a}\neq 0$ **на число** $\lambda\neq 0$ означает построить вектор $\lambda\bar{a}$, *модуль* которого получается умножением модуля вектора $\bar{a}$ на число $|\lambda|$, а *направление* совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и является противоположным направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$. Если $\bar{a}=0$ или $\lambda=0$, то $\lambda\bar{a}=0$.

Из определения действий вычитания и умножения на число получаем, что

$\overline{0}-\overline{a}=(-1)\cdot\overline{a}$. Построенный вектор называется **противоположным** вектору $\overline{a}$ ии обозначается $-\overline{a}$. Теперь, используя введенный вектор, можем операцию вычитания векторов заменить операцией сложения.

$$\overline{a}+(-\overline{b})=\overline{c}+\overline{b}+(-\overline{b})=\overline{c}+\overline{0}=\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}. \qquad (1.0,5)$$

Полученное равенство показывает, что *разность векторов равна сумме первого вектора с вектором, противоположнным второму*.
Заметим, что введенные обозначение и название полностью согласуется с аналогичными операция для чисел.

Например, если дан вектор $\overline{a}$, то векторы $2\overline{a}$ и «$-\frac{1}{2}\overline{a}$», будут иметь вид, изображенный на рис. 1.6.

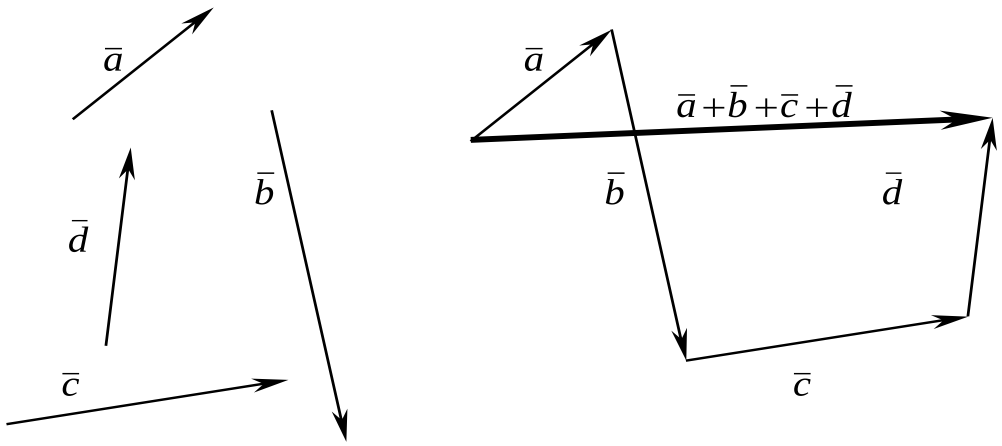


Рис. 1.4. Сложение векторов по правилу многоугольника

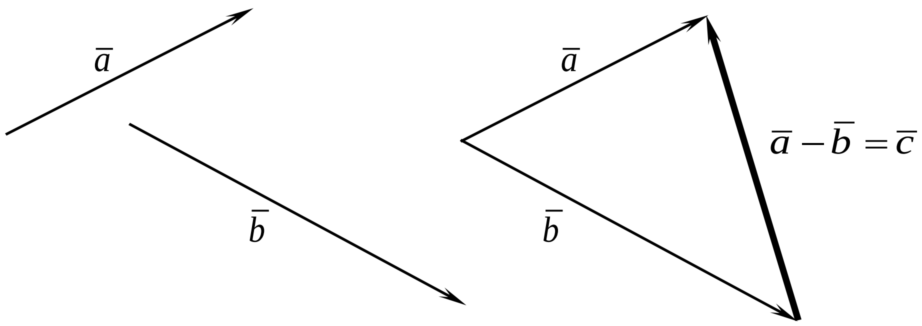


Рис. 1.5. Разность векторов

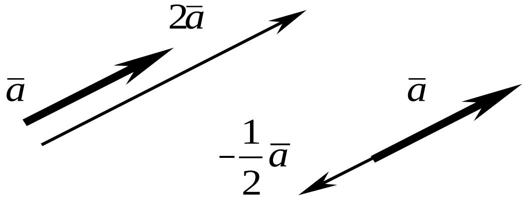


Рис. 1.6. Умножение вектора на число

Из приведенных выше определений следует, что коллинеарность ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равносильна равенству $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$. При этом $\lambda > 0$ в случае $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $\lambda < 0$ в случае $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Свойства действий над векторами.

1) *переместительный закон*: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

2) *сочетательный закон по сложению*: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;

3) *распределительный закон*: $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$,

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a};$$

4) *сочетательный закон по умножению*: $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$.

Пример 1.0,5. Покажем, как раскрываются скобки при вычитании векторов:

$$\overline{a} - (\lambda\overline{b} + \mu\overline{c}) = (\textit{см.}1.0,5) = \overline{a} + (-1)(\lambda\overline{b} + \mu\overline{c}) = (\textit{по свойству}\, 3) =$$

$$= \overline{a} + (-1)(\lambda\overline{b}) + (-1)(\mu\overline{c}) = \overline{a} + (-1)(\lambda\overline{b}) + (-1)(\mu\overline{c}) =$$

$$= (\textit{по свойству}\, 4) = \overline{a} + (-\lambda\overline{b}) + (-\mu\overline{c}) = (\textit{см.}1.0,5) = \overline{a} - \lambda\overline{b} - \mu\overline{c}$$

1.1.2. Проекция вектора на ось

Осью *называется прямая, на которой выбрано направление.* Выбор направления означает, что двигаясь от одной точки к другой, мы знаем в каком направление (положительном или отрицательном) происходит это движение. Если посмотреть на рис. 1.7, то движение от A' к B' происходит в положительном направлении, а движение от B' к A' происходит в отрицательном накправлении.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ **на ось** l называется ***длина*** отрезка $A'B'$ этой оси (рис. 1.7), заключенного между проекциями A' и B' его начальной точки *A* и конечной точки *B*, ***взятая*** *со знаком* "+", если направление вектора $\overline{A'B'}$ совпадает с направлением оси, и *со знаком* "−", если эти направления противоположны.

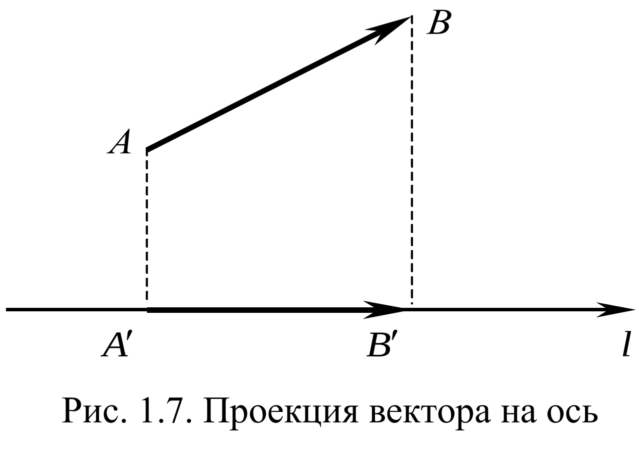


Рис. 1.7. Проекция вектора на ось

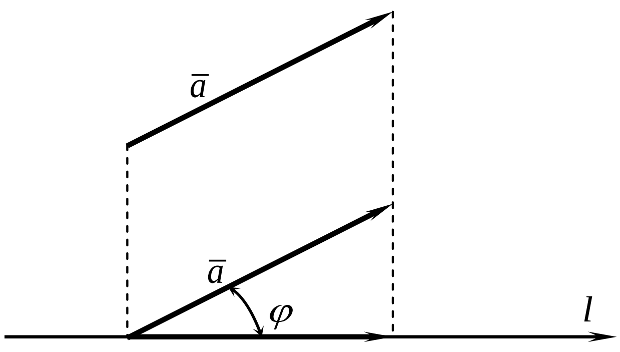


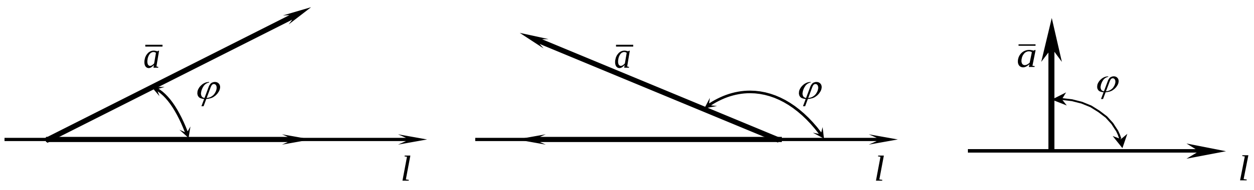
Рис. 1.8. Иллюстрация к теореме 1.1.

Теорема 1.1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l (см. рис. 1.8) равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е.

$$\text{Ï ð}_l\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{1.1}$$

Следствие 1.1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l

- положительна (рис. 1.9, а), если вектор $\bar{a}$ образует с осью l острый угол ($\cos\varphi > 0$);
- отрицательна (рис. 1.9, б), если вектор $\bar{a}$ образует с осью l тупой угол ($\cos\varphi < 0$);
- равна нулю (рис. 1.9, в), если этот угол – прямой ($\cos\varphi = 0$).



а) б) в)

Рис. 1.9. Различные варианты проекции вектора на ось

Следствие 1.2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Теорема 1.2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось

$$\text{Ï ð}_l\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right) = \text{Ï ð}_l\bar{a} + \text{Ï ð}_l\bar{b} + \text{Ï ð}_l\bar{c}.$$

Теорема 1.3. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число, т.е.

$$\text{Ï ð}_l\left(\lambda \cdot \bar{a}\right) = \lambda \cdot \text{Ï ð}_l\bar{a}.$$

1.1.3. Декартова прямоугольная система координат на плоскости.

Декартова прямоугольная система координат Oxy **на плоскости** задается:

1) двумя осями Ox и Oy, пересекающимися под прямым углом в точке O;

2) определением единицы измерения длины.

Далее мы будем считать, что кратчайший поворот оси Ox к оси Oy, совмещающий направления этих осей, осуществляется против часовой стрелки. Точка O называется началом координат. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy называется осью ординат.

Если на плоскости задана декартова прямоугольная система координат, то каждую точку M_0 этой плоскости можно задать двумя координатами $M_0(x_0; y_0)$, где число x_0 является проекцией вектора $\overline{OM_0}$ на ось Ox и называется **абсциссой** точки M_0, а число y_0 является проекцией вектора $\overline{OM_0}$ на ось Oy и называется **ординатой** точки M_0. Таким образом, задание точки в системе координат Oxy будет означать, что в этой системе координат определены координаты этой точки по описанным выше правилам.

Рассмотрим две важные задачи на плоскости.

1. Нахождение расстояния между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Из рис. 1.9,5 по теореме Пифагора

$$|M_1M_2| = \sqrt{M_1M_0^{\,2} + M_2M_0^{\,2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти координаты точки $M_0(x_0; y_0)$, лежащей на отрезке M_1M_2 таким образом, что выполнено соотношение $\dfrac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda$. В этом случае говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от M_1.

Из рис. 1.9,5 по теореме Фалеса

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda, \quad \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|} = \lambda.$$

Отсюда получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Перейдем теперь к определению координат вектора в системе координат Oxy. Пусть в системе координат Oxy заданы точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Числа x_2-x_1 и y_2-y_1 называются координатами вектора $\overline{M_1M_2}$ в системе координат Oxy. Это обозначается $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$. Так как длина вектора по определению равна длине соответствующего отрезка, получаем, что

$$\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве задается:

1) тремя попарно перпендикулярными осями Ox, Oy и Oz, пересекающимися в точке O;

2) определением единицы измерения длины.

Далее мы будем считать, что кратчайший поворот оси Ox к оси Oy, совмещающий направления этих осей, виден с положительного направления оси Oz против часовой стрелки. Ось Oz называется осью аппликат.

Так же как и для системы координат Oxy получаем:

- координаты точки $M(x;y;z)$ в системе координат $Oxyz$ определяются равенствами $x=\text{Пр}_{Ox}\,OM$, $y=\text{Пр}_{Oy}\,OM$, $z=\text{Пр}_{Oz}\,OM$ (см. рис. 1.10);
- расстояние между точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле $|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$;
- если точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от M_1, то $x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_0=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

1.1.3. Разложение вектора по компонентам

В предыдущем разделе мы определили числовые характеристики (координаты) любой точки в пространстве. Теперь зададим числовые характеристики каждого вектора пространства. Возьмем вектор $\overline{M_1M_2}$ с началом $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и концом $M_2(x_2;y_2;z_2)$. На координатных осях Ox, Oy и Oz построим **единичные векторы**, обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (рис. 1.10). Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются ортами координатных осей. Построим вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\overline{M_1M_2}$. Пусть числа $x;y;z$ являются координатами точки M. Проекции точки $M(x;y;z)$ на координатные оси соответственно обозначим M_1, M_2 и M_3. Рассмотрим векторы $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2$ и $\overline{OM}_3$. Из рис. 1.10 видно, что

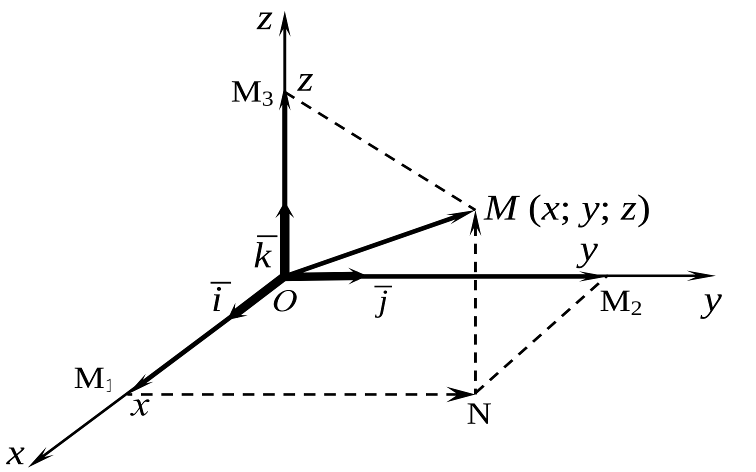


Рис. 1.10. Разложение вектора по ортам координатных осей

$$\overline{OM}_1 = x\cdot\bar{i}\,,\quad \overline{OM}_2 = y\cdot\bar{j}\,,\quad \overline{OM}_3 = z\cdot\bar{k}\,. \tag{1.2}$$

Выразим вектор $\overline{OM}$ через векторы $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2$ и $\overline{OM}_3$. По правилу многоугольника имеем

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}\,.$$

Так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, а $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \tag{1.3}$$

Подставляя равенства (1.2) в (1.3), получим

$$\boxed{\overline{OM} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}}\,,$$

Аналогично получаем равенства

$$\overline{OM}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}\,,\ \overline{OM}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\,.$$

Так как $\overline{M_1M_2} = \overline{OM}$, то по правилу параллелограмма

$\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2}$. Значит,

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (см.\ 1.0,5) =$$

$$= x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k} + (-1)(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}) = (по\, свойству\, 4\ действий\ над\ векторами) =$$

$$= x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k} + (-x_1\overline{i}) + (-y_1\overline{j}) + (-z_1\overline{k}) = (по\, свойству\, 3\ действий\ над\ векторами) =$$

$$= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$$

Окончательно получаем

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k} \tag{1.4}$$

Числа $x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1$ называются **координатами вектора** в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Будем записывать этот факт в виде $\overline{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Из приведенных рассуждений видно, что каждый вектор имеет единственную тройку координат. *Равенство* (1.4) *называется* ***разложением вектора по ортам координатных осей***.

• Покажем, что равные векторы имеют одинаковый набор координат. Пусть

$$\overline{M_1M_2}\{x'; y'; z'\} = \overline{M_3M_4}\{x''; y''; z''\}.$$

Это означает, что $\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = \overline{0}$ и

$$\overline{M_1M_2} = x'\overline{i} + y'\overline{j} + z'\overline{k},\ \overline{M_3M_4} = x''\overline{i} + y''\overline{j} + z''\overline{k}$$

Так же как при выводе формулы (1.4) получаем равенсто

$$\overline{0} = \overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = (x' - x'')\overline{i} + (y' - y'')\overline{j} + (z' - z'')\overline{k},$$

Вектор $(y' - y'')\overline{j} + (z' - z'')\overline{k}$ по построению лежит в плоскости Oxy. Предположим, что $x' - x'' \neq 0$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4}$ будет лежать выше Oxy, если $x' - x'' > 0$ и ниже Oxy, если $x' - x'' < 0$. Это противоречит равенству $\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = \overline{0}$. Таким образом, доказано равенство $x' = x''$. Остальные равенства доказываются аналогично.

• Покажем, что одинаковый набор координат определяет равные векторы. Пусть

$$\overline{M_1M_2}\{x'; y'; z'\},\ \overline{M_3M_4}\{x''; y''; z''\} \text{ и}$$

$$x' = x'; y' = y''; z' = z''.$$

Тогда

$$\overline{M_1M_2} - \overline{M_3M_4} = (x' - x'')\overline{i} + (y' - y'')\overline{j} + (z' - z'')\overline{k} = 0\cdot\overline{i} + 0\cdot\overline{j} + 0\cdot\overline{k} = \overline{0}.$$

1.1.4. Действия над векторами в системе координат

Теперь мы опишем правила, по которым определяются координаты вектора, получающегося в результате сложения векторов, вычитания векторов или умножения вектора на число. Справедливость проводимых ниже действий прямо вытекает из свойств 1-4 действий над векторами.

Пусть в прямоугольной системе координат *Oxyz* заданы вектора $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ и $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$.

Координаты вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ равны сумме соответствующих координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е.

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2)\overline{i} + (y_1 + y_2)\overline{j} + (z_1 + z_2)\overline{k} \ .$$

Координаты вектора $\overline{d} = \lambda \cdot \overline{a}$ равны произведению координат вектора $\overline{a}$ на число λ, т.е.

$$\overline{d} = \lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot x_1\overline{i} + \lambda \cdot y_1\overline{j} + \lambda \cdot z_1\overline{k} \ .$$

Так как для коллинеарность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равносильна выполнению равенства $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$, а координаты равных векторов соответственно равны, то

$$x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k} = \lambda\left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = \lambda x_2\overline{i} + \lambda y_2\overline{j} + \lambda z_2\overline{k} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x_1 = \lambda x_2, \ y_1 = \lambda y_2, \ z_1 = \lambda z_2 \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2}, \ \lambda = \frac{y_1}{y_2}, \ \lambda = \frac{z_1}{z_2} \text{ или } \boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}. \qquad (1.6)$$

Следовательно, **коллинеарность векторов равносильна пропорциональности их координат.**

1.1.5. Скалярное произведение векторов и его применение

Скалярным произведением *двух ненулевых векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ (рис. 1.12) *называется* **число**, *равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.*

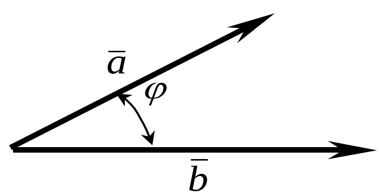


Рис. 1.12. Вектора, пересекающиеся под углом φ

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается символом $\overline{a} \cdot \overline{b}$. По определению имеем

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi}, \tag{1.7}$$

где $\varphi=\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)$.

В случае, если хотя бы один из множителей является нулевым вектором, считается, что скалярное произведение равно нулю.

Если **вектора** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **заданы** своими **координатами**: $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$, то их **скалярное произведение** будет **равно сумме произведений соответствующих координат**, т.е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}. \tag{1.8}$$

Действительно,

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=$$
$$=-0,5((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2))=$$
$$=-0,5(|\bar{a}-\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2).$$

Начало вектора $\bar{a}-\bar{b}$ совпадает с концов вектора $\bar{b}$, а конец вектора $\bar{a}-\bar{b}$ совпадает с концов вектора $\bar{a}$. Поэтому по теореме косинусов (см. рис. 1.12) получаем равенство

$$-0,5(|\bar{a}-\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2)=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Таким образом, равенство (1.8) доказано. Полученное представление скалярного произведения векторов через их координаты позволит легко доказать следующие свойства.

Свойства скалярного произведения.

1. *Переместительный закон*: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

Доказательство.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1=\bar{b}\cdot\bar{a}.$$

2. *Сочетательный закон:* $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$, $\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доказательство. Докажем первое равество:

$$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2+\lambda z_1z_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

3. *Распределительный закон*: $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$, $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.

Доказательство. Пусть $\bar{c}\{c_1;c_2;c_3\}$. Тогда

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)+z_1(z_2+z_3)=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Заметим, что рассмотренные свойства могли быть доказаны исключительно геометрическими методами на основе равенства (1.7). Однако переход к координатному представлению векторов сделал доказательства этих свойств практически устными. Таким образом, была наглядно продемонстрирована эффективность использование метода координат при решении геометрических задач.

Геометрический смысл скалярного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда *равенство* $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ *равносильно тому, что векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *ортогональны.* Действительно,

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\cos\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)=0\Leftrightarrow|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)=0\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$$

Пример 1.1. Даны $\bar{a}\{-2;1;3\}$ и $\bar{b}\{1;-5;4\}$. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Решение. Так как вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами, то для вычисления их скалярного произведения применим формулу (1.8):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-2)\cdot1+1\cdot(-5)+3\cdot4=-2-5+12=5$$

С помощью скалярного произведения можно решать такие задачи, как: определение длины вектора; вычисление проекции одного вектора на направление другого; нахождение угла между векторами.

Определение длины вектора

Дан вектор $\bar{a}\{x;y;z\}$. Необходимо найти его длину $|\bar{a}|$. Для этого воспользуемся определением скалярного произведения (см. формулу 1.7):

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos0^0=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot1=|\bar{a}|^2.$$

С другой стороны

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z=x^2+y^2+z^2.$$

Из этих равенств видно, что

$$|\bar{a}|^2=x^2+y^2+z^2,$$

и, извлекая квадратный корень, получим

$$\boxed{|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (1.9)$$

Вычисление проекции одного вектора на направление другого

Даны два вектора $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$. Необходимо найти проекцию вектора $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ на направление вектора $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ и, наоборот, проекцию вектора $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ на направление вектора $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$. Для вычисления проекции одного вектора на направление другого снова используем определение скалярного произведения (формула 1.7)

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot\left(\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi\right)=\left|\bar{b}\right|\cdot\left(|\bar{a}|\cdot\cos\varphi\right).$$

Вспоминая формулу (1.1), предыдущее равенство перепишем в виде

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot\text{Ï ð}_{\bar{a}}\bar{b}=\left|\bar{b}\right|\cdot\text{Ï ð}_{\bar{b}}\bar{a}\,.$$

Из последнего выражения следует, что **проекция одного вектора на направление другого равна скалярному произведению этих векторов, деленному на модуль того вектора, на который проецируем**:

$$\boxed{\text{Ï ð}_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}$$ (проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$),

$$\boxed{\text{Ï ð}_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}}$$ (проекция вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$). (1.10)

Нахождение угла между векторами

Из формулы (1.7) определяется косинус угла φ между векторами $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}\,. \qquad (1.11)$$

1.1.5. Векторное произведение векторов и его применение

Пусть дана тройка векторов $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$. Если с конца вектора третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$, совмещающий эти направления, виден против часовой стрелки, то тройка $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ называется **правой тройкой**. Если указанный поворот виден по часовой стрелке, то $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ называется **левой тройкой**.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет условиям (рис. 1.12,5):

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\angle(\bar{a},\bar{b})$;

3) тройка векторов $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ является правой.

Условия 1-3 определяют единственный вектор, так как первые два условия задают два вектора определенной длины, которые ортогональны плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а третье условие позволяет выбрать из этих двух векторов единственный.

Рис. 1.12,5. Векторное произведение

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a}\times\bar{b}$.

Так же как и в случае скалярного произведения мы начнем с вычисления векторного произведения через координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Обратим внимание, что в этом разделе часто будут использоваться свойства определителей и методы решения систем линейных уравнений. Пусть даны векторы $\bar{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\bar{b}\{x_2;y_2;z_2\}$. Требуется найти вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$. Обозначим $\bar{c}\{x;y;z\}$. Из свойства 1, равенства (1.8) и геометрического смысла скалярного произведения получаем

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0; \\ b_1x+b_2y+b_3z=0. \end{cases}$$

Перепишем систему в эквивалентном виде

$$\begin{cases} a_1x+a_2y=-a_3z; \\ b_1x+b_2y=-b_3z \end{cases}$$

и применим правило Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 z & a_2 \\ -b_3 z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 z \\ b_1 & -b_3 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$z = z \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Заметим, что применение правила Крамера обосновано тем, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарные, а значит их координаты не пропорциональны и хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Не ограничивая общности, мы посчитали, что не равен нулю первый определитель.

Теперь воспользуемся свойством 2:

$$|\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \angle(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\bar{a}, \bar{b})) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

С другой стороны

$$|\bar{c}|^2 = \frac{z^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2} \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right).$$

Следовательно, $z = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Покажем, что в соответствии с условием 3 выбирается знак «+». Для сначала возьмем правую тройку векторов, в которой

Окончательно получаем

$$\bar{c} = (x; y; z) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Последнее равенство символически записывается в виде

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Покажем, что в соответствии с условием 3 выбирается знак «+». Для сначала возьмем правую тройку векторов, в которой

Свойства скалярного произведения. $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

1. *Переместительный закон*: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

Доказательство.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

2. *Сочетательный закон:* $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda (\bar{a} \cdot \bar{b})$, $\bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Доказательство. Докажем первое равество:

$$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 + \lambda z_1 z_2 = \lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = \lambda (\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

3. *Распределительный закон*: $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Доказательство. Пусть $\bar{c}\{c_1; c_2; c_3\}$. Тогда

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = x_1 (x_2 + x_3) + y_1 (y_2 + y_3) + z_1 (z_2 + z_3) =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Заметим, что рассмотренные свойства могли быть доказаны исключительно геометрическими методами на основе равенства (1.7). Однако переход к координатному представлению векторов сделал доказательства этих свойств практически устными. Таким образом, была наглядно продемонстрирована эффективность использование метода координат при решении геометрических задач.

Геометрический смысл скалярного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда *равенство* $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ *равносильно тому, что векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *ортогональны.* Действительно,

$$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\cos\left(\dot{\overline{a};\overline{b}}\right)=0\Leftrightarrow\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\dot{\overline{a};\overline{b}}\right)=0\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0.$$

Пример 1.1. Даны $\overline{a}\{-2;1;3\}$ и $\overline{b}\{1;-5;4\}$. Найти $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Решение. Так как вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами, то для вычисления их скалярного произведения применим формулу (1.8):

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(-2)\cdot1+1\cdot(-5)+3\cdot4=-2-5+12=5$$

С помощью скалярного произведения можно решать такие задачи, как:

- определение длины вектора;
- вычисление проекции одного вектора на направление другого;
- нахождение угла между векторами.

1.2. Аналитическая геометрия на плоскости

Главным объектом изучения аналитической геометрии на плоскости являются линии. Эти линии аналитическая геометрия изучает алгебраическими методами.

Как известно, в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой такой паре чисел соответствует определенная точка плоскости. Линии на плоскости соответствует уравнение с двумя переменными.

Уравнение, связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней, называется ***уравнением*** *данной* ***линии****.*

1.1.5. Скалярное произведение векторов и его применение

Скалярным произведением *двух ненулевых векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ (рис. 1.12) *называется* **число**, *равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.*

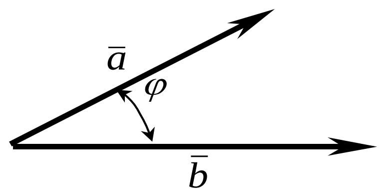


Рис. 1.12. Вектора, пересекающиеся под углом φ

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается как $\bar{a}\cdot\bar{b}$. По определению имеем

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi}, \tag{1.7}$$

где $\varphi=\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)$.

В случае, если хотя бы один из множителей является нулевым вектором, считается, что скалярное произведение равно нулю.

Если **вектора** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **заданы** своими **координатами**: $\bar{a}\left\{x_1;y_1;z_1\right\}$ и $\bar{b}\left\{x_2;y_2;z_2\right\}$, то их **скалярное произведение** будет **равно сумме произведений соответствующих координат**, т.е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}. \tag{1.8}$$

Действительно,

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=$$
$$=-0,5((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2))=$$
$$=-0,5(|\bar{a}-\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2).$$

Начало вектора $\bar{a}-\bar{b}$ совпадает с концов вектора $\bar{b}$, а конец вектора $\bar{a}-\bar{b}$ совпадает с концов вектора $\bar{a}$. Поэтому по теореме косинусов (см. рис. 1.12) получаем равенство

$$-0,5(|\bar{a}-\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2)=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Таким образом, равенство (1.8) доказано. Полученное представление скалярного произведения векторов через их координаты позволит легко доказать следующие свойства.

Свойства скалярного произведения.

1. *Переместительный закон*: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$.

Доказательство.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1=\bar{b}\cdot\bar{a}.$$

2. *Сочетательный закон:* $\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$, $\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доказательство. Докажем первое равество:

$$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2+\lambda z_1z_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}).$$

3. *Распределительный закон*: $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$, $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.

Доказательство. Пусть $\bar{c}\{c_1;c_2;c_3\}$. Тогда

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)+z_1(z_2+z_3)=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Заметим, что рассмотренные свойства могли быть доказаны исключительно геометрическими методами на основе равенства (1.7). Однако переход к координатному представлению векторов сделал доказательства этих свойств практически устными. Таким образом, была наглядно продемонстрирована эффективность использование метода координат при решении геометрических задач.

Геометрический смысл скалярного произведения.

Пусть даны ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда *равенство* $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ *равносильно тому, что векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *ортогональны.* Действительно,

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\cos\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)=0\Leftrightarrow|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\left(\dot{\bar{a}};\bar{b}\right)=0\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0.$$

Пример 1.1. Даны $\bar{a}\{-2;1;3\}$ и $\bar{b}\{1;-5;4\}$. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Решение. Так как вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами, то для вычисления их скалярного произведения применим формулу (1.8):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-2)\cdot1+1\cdot(-5)+3\cdot4=-2-5+12=5$$

С помощью скалярного произведения можно решать такие задачи, как:

- определение длины вектора;
- вычисление проекции одного вектора на направление другого;
- нахождение угла между векторами.

1.2.1. Уравнения прямой на плоскости

В зависимости от исходных данных уравнение прямой на плоскости может иметь различный вид.

Векторное уравнение прямой

Положение прямой L на плоскости будет определено, если задать на прямой какую-либо точку $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\bar{S}\{m;n\}$, параллельный этой прямой (см. рис. 1.13). ***Вектор*** $\bar{S}$ ***называется*** **направляющим вектором**

прямой.

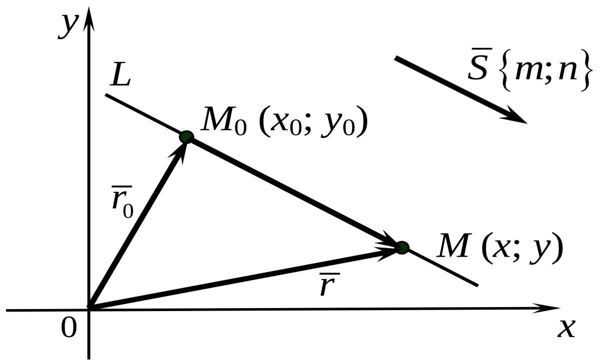


Рис. 1.13. Вывод векторного уравнения прямой

Составим уравнение прямой *L*. Для этого возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и проведем векторы $\overline{OM_0}$ и $\overline{OM}$, соответственно обозначив их через $\overline{r}_0$ и $\overline{r}$. Из рис. 1.13 видно, что, складывая векторы $\overline{r}_0$ и $\overline{M_0M}$ по правилу треугольника, получим вектор $\overline{r}$

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{M_0M}\,. \tag{1.12}$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой *L*, коллинеарен направляющему вектору $\overline{S}$, поэтому

$$\overline{M_0M} = t\overline{S}\,, \tag{1.13}$$

где *t* – скалярный множитель, называемый ***параметром***, может принимать различные значения в зависимости от положения точки $M(x;y)$ на прямой.

Учитывая равенство (1.13), перепишем соотношение (1.12) в виде

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{S}}\,. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Используя векторное уравнение (1.14) прямой *L*, запишем ее параметрические уравнения.

Зная координаты векторов $\overline{r}\{x;y\}$, $\overline{r}_0\{x_0;y_0\}$, $\overline{S}\{m;n\}$ и $t\overline{S}\{tm;tn\}$, разложим их по компонентам и подставим векторы в уравнение (1.14)

$$x\bar{i}+y\bar{j}=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}+tm\bar{i}+tn\bar{j} \quad \text{или} \quad x\bar{i}+y\bar{j}=\left(x_0+tm\right)\bar{i}+\left(y_0+tn\right)\bar{j}\ .$$

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты. Следовательно, из последнего выражения имеем

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn. \end{cases}} \tag{1.15}$$

Равенства (1.15) называются ***параметрическими уравнениями прямой.***

Уравнение прямой, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ ортогонально (перпендикулярно) данному вектору $\bar{N}\{A;B\}$, который ***называ-ется*** **нормальным вектором** ***этой прямой*** (рис. 1.14).

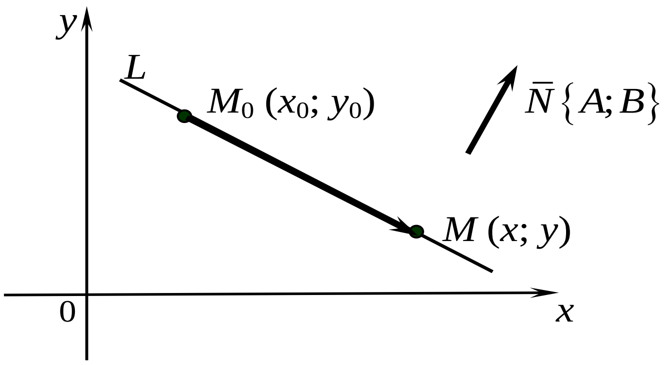


Рис. 1.14. Вывод уравнения прямой, проходящей через заданную точку ортогонально данному вектору

Возьмем на прямой произвольную точку $M\left(x;y\right)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}\left\{x-x_0;y-y_0\right\}$ (см. рис. 1.14). Поскольку векторы $\bar{N}$ и $\overline{M_0M}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{N}\cdot\overline{M_0M}=0$ или, учитывая формулу (1.8), получим

$$\boxed{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0}\ . \tag{1.16}$$

Равенство (1.16) называется ***уравнением прямой, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору.***

Общее уравнение прямой

Раскрыв скобки в уравнении (1.16): $Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$, получим ***общее уравнение прямой на плоскости***

$$\boxed{Ax + By + C = 0}, \tag{1.17}$$

где $C = -By_0 - Ax_0$.

Используя общее уравнение прямой (1.17) рассмотрим частные случаи положения прямой на плоскости, когда один или два коэффициента уравнения (1.17) обращаются в нуль.

1. Если $C = 0$, то $Ax + By = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{A}{B}x$. Координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют полученному уравнению, т.е. прямая L проходит через начало координат (рис 1.15).

2. Если $A = 0$, то $By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{C}{B} \quad \Rightarrow \quad y = \text{const}$. Следовательно прямая L параллельна оси Ox (рис 1.16).

3. Если $B = 0$, то $Ax + C = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{C}{A} \quad \Rightarrow \quad x = \text{const}$. Таким образом, прямая L параллельна оси Oy (рис 1.17).

4. Если $A = C = 0$, то $By = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ – ось Ox.

5. Если $B = C = 0$, то $Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ – ось Oy.

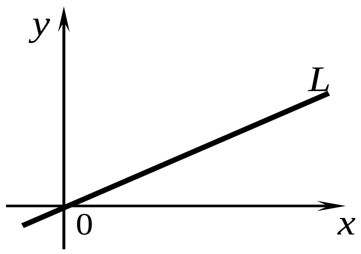


Рис. 1.15.
Прямая, проходящая через начало координат

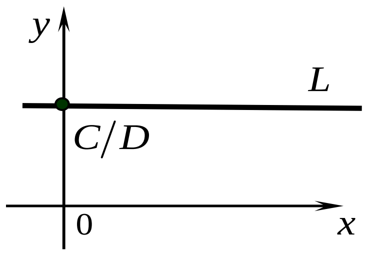


Рис. 1.16.
Прямая параллельная оси Ox

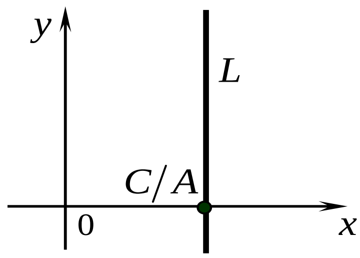


Рис. 1.17.
Прямая параллельная оси Oy

Каноническое (простейшее) уравнение прямой

Воспользуемся параметрическими уравнениями прямой (1.15) и исключим из них параметр t:

$$\frac{x-x_0}{m}=t\ ,\quad \frac{y-y_0}{n}=t\ .$$

Приравняв левые части полученных равенств, имеем ***каноническое уравнение прямой***

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}\ . \qquad (1.18)$$

Следовательно, чтобы составить каноническое уравнение прямой, необходимо знать координаты направляющего вектора $\bar{S}\{m;n\}$ *и координаты хотя бы одной точки, лежащей на прямой.*

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ (рис. 1.18). Воспользуемся каноническим уравнением (1.18). В качестве направляющего вектора $\bar{S}\{m;n\}$ прямой возьмем вектор $\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$, а в качестве точки, лежащей на прямой, возьмем любую из двух точек $M_1(x_1;y_1)$ или $M_2(x_2;y_2)$, например $M_1(x_1;y_1)$.

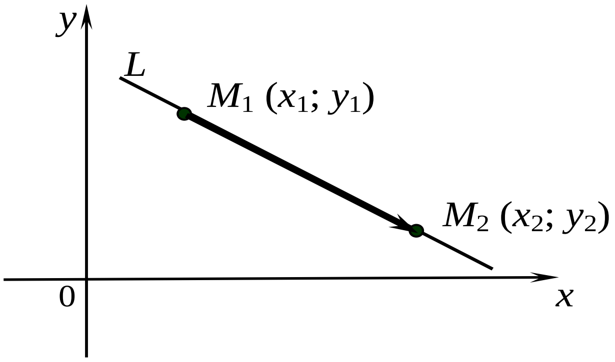


Рис. 1.18. Прямая, проходящая через две данные точки

Таким образом, ***уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*** будет иметь вид

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}\ . \qquad (1.19)$$

Пример 1.2. Составить уравнение стороны *BC* треугольника *ABC*, если известны координаты его вершин: $A(1;2)$, $B(-2;3)$ и $C(2;-5)$. Определить координаты направляющего $\bar{S}$ и нормального $\bar{N}$ векторов прямой *BC*.

Решение. Так как известны координаты двух точек, через которые проходит прямая *BC*, то воспользуемся уравнением (1.19):

$$\frac{x-(-2)}{2-(-2)}=\frac{y-3}{-5-3}.$$

Складывая числа в знаменателях дробей, получим *каноническое уравнение* прямой:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-8},$$

из которого найдем координаты направляющего вектора прямой – $\bar{S}\{4;-8\}$. Координаты нормального вектора $\bar{N}\{A;B\}$ можно определить из *общего уравнения* прямой, которое получим из *канонического*:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-8} \quad\Rightarrow\quad -2\cdot(x+2)=1\cdot(y-3) \quad\Rightarrow\quad 8x+4y+4=0 \text{ или}$$

$$2x+y+1=0.$$

Таким образом, координаты нормального вектора прямой – $\bar{N}\{2;1\}$.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая не проходит через начало координат и пересекает ось Oy в точке $M_1(0;b)$, а ось Ox – в точке $M_2(a;0)$ (рис. 1.19).

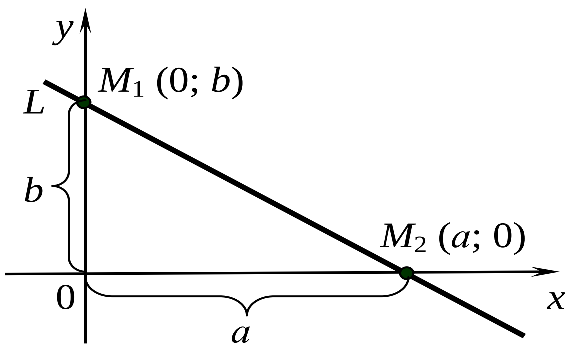


Рис. 1.19. Вывод уравнения прямой в отрезках

В этом случае уравнение (1.19) примет вид

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-b}{0-b} \text{ или } \frac{x}{a}=\frac{y-b}{-b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}. \qquad (1.20)$$

Это уравнение называется ***уравнением прямой в отрезках,*** так как числа a и b указывают, какие отрезки (с учетом знака) отсекает прямая на осях координат (см. рис. 1.19).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая непараллельна оси OY. Тогда первая координата направляющего вектора $\bar{S}\{m;n\}$ не равна нулю ($m \neq 0$). Каноническое уравнение (1.18) перепишем в следующем виде:

$$y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0),$$

или, обозначив величину $\frac{n}{m}$ через k, получим

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}, \qquad (1.21)$$

где $k=\text{tg}\varphi$ – тангенс угла, который составляет прямая с положительным направлением оси Ox (рис. 1.20).

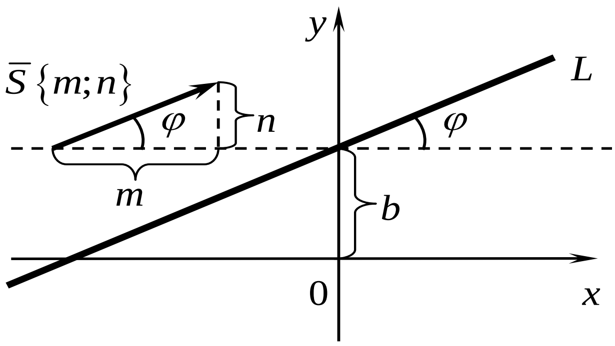


Рис. 1.20. Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом

Величина $k=\text{tg}\varphi$ **называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение** (1.21) **–** ***уравнением прямой, проходящей через данную точку в***

данном направлении.

Рассмотрим частный случай уравнения (1.21), в котором в качестве точки M_0 возьмем точку $M(0;b)$ пересечения прямой с осью Oy. Подставим координаты этой точки в (1.21): $y-b=k(x-0)$ или

$$\boxed{y=kx+b}, \tag{1.22}$$

где b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (см. рис 1.20).

Уравнение (1.22) называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

Заметим, что к виду (1.22) можно привести уравнение любой прямой непараллельной оси Oy.

1.2.2. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L общим уравнением $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0;y_0)$ (рис. 1.21). **Расстояние** d **от точки** M_0 **до прямой** L (см. рис. 1.21) **равно модулю проекции вектора** $\overline{M_1M_0}$**,** где $M_1(x_1;y_1)$ – произвольная точка прямой L, **на направление нормального вектора** $\bar{N}\{A;B\}$. Следовательно,

$$d=\left|\text{Ï ð}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{\left|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1.23}$$

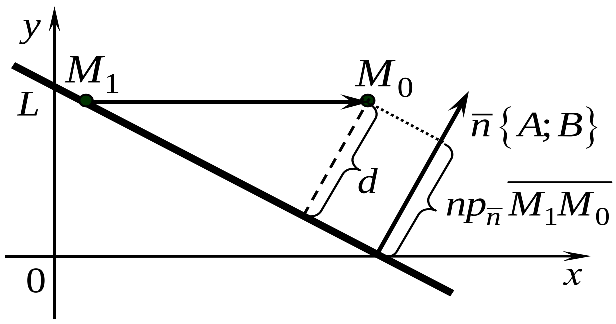


Рис. 1.21. Расстояние от точки до прямой

Так как точка $M_1(x_1;y_1)$ принадлежит прямой L, то ее координаты удовлетворяют ее уравнению, т.е. $Ax_1+By_1+C=0$. Откуда имеем

$$C = -Ax_1 - By_1. \tag{1.24}$$

Подставляя (1.24) в выражение (1.23), получим формулу

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}. \tag{1.25}$$

Пример 1.3. Используя условие *примера 1.2* (см. стр. 21), найти площадь треугольника *ABC*.

Решение. Известно, что площадь треугольника равна половине произведения длины его стороны *a* на длину высоты *h*, опущенной на сторону *a*:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot |h|.$$

Проведем высоту в треугольнике *ABC*, например, из вершины *A* на сторону *BC*. Так как нам известны координаты точек *B* и *C*, то длину стороны *BC* будет искать по формуле

$$|a| = |BC| = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Длину высоты *h* можно найти как расстояние от точки *A* до стороны *BC*. Уравнение прямой *BC* было составлено в *примере 1.2*:

$$2x + y + 1 = 0,$$

поэтому, пользуясь формулой (1.25), получим

$$|h| = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Итак, площадь треугольника *ABC* равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10 \text{ кв.ед.}$$

1.2.3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и ортогональности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ (рис. 1.22). **Углом между двумя прямыми L_1 и L_2 называется угол α, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения против часовой стрелки прямую L_1 до совмещения с прямой L_2.**

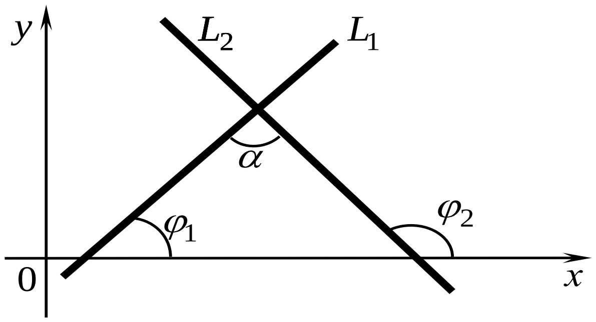


Рис. 1.22. Угол между прямыми

По теореме о внешнем угле треугольника имеем $\varphi_2 = \alpha + \varphi_1$ или $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_2 \cdot \mathrm{tg}\varphi_1}.$$

Так как $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1$ и $\mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$ получим

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}}. \qquad (1.26)$$

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\alpha = 0$ и $\mathrm{tg}\alpha = 0$. Из формулы (1.26) следует $k_2 - k_1 = 0$, т.е.

$$\boxed{k_2 = k_1}. \qquad (1.27)$$

Таким образом, ***условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов***.

Если же прямые L_1 и L_2 ортогональны, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 + k_2 \cdot k_1}{k_2 - k_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + k_2 \cdot k_1 = 0\text{, т.е.}$$

$$\boxed{k_2 \cdot k_1 = -1} \text{ или } \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}. \tag{1.28}$$

Таким образом, ***у ортогональных прямых угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку***.

Пример 1.4. Используя условие *примера 1.2*, составить уравнение высоты h треугольника ABC, проведенной из вершины A на сторону BC и найти угол между этой высотой и стороной AC.

Решение. Уравнение прямой BC нам известно (см. *пример 1.2*):

$$2x + y + 1 = 0.$$

Перепишем его в виде (1.22):

$$y = -2x - 1.$$

Откуда видно, что угловой коэффициент прямой BC равен

$$k_{BC} = -2.$$

Так как угловые коэффициенты у ортогональных прямых (h и BC) удовлетворяют равенству (1.28), то

$$k_h = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (1.21), составим уравнение высоты h:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ или } x - 2y + 3 = 0.$$

Угол между высотой h и стороной AC можно найти по формуле (1.26). Определим угловые коэффициенты высоты h и прямой AC. Угловой коэффициент высоты h найден ранее ($k_h = \frac{1}{2}$).

Для нахождения углового коэффициента прямой AC составим ее уравнение, воспользовавшись уравнением прямой проходящей через две точки (1.19):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-5-2} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-7} \Rightarrow -7(x-1) = 1\cdot(y-2) \Rightarrow y = -7x+9.$$

Таким образом,

$$k_{AC} = -7.$$

Итак

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_{AC}-k_h}{1+k_{AC}\cdot k_h} = \frac{-7-\frac{1}{2}}{1+(-7)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}} = 3 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}3 \approx 71{,}57^\circ.$$

1.2.4. Кривые второго порядка

Общий вид *уравнения второго порядка в заданной прямоугольной системе координат следующий*:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

причем среди коэффициентов A, B или C должен быть хотя бы один ненулевой.

Кривыми второго порядка являются: *окружность, эллипс*, *гипербола и парабола*.

В этом параграфе рассмотрим уравнение, в котором отсутствует произведение переменных, т.е. $B=0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Такое уравнение задает либо кривую второго порядка, либо пару прямых, либо точку, либо пустое множество.

Окружность

Окружностью *называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.*

Пусть центром окружности является точка $M_0(x_0;y_0)$, а радиус равен $R=\left|\overline{M_0M}\right|$, где $M(x;y)$ – произвольная точка окружности (рис. 1.23). Тогда по формуле (1.9) имеем

$$R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2} \qquad (1.29)$$

Уравнение (1.29) называется **уравнением окружности с радиусом R и центром в точке** $M_0(x_0;y_0)$.

Частным случаем уравнения (1.29) является уравнение

$$\boxed{x^2+y^2=R^2}, \qquad (1.30)$$

описывающее окружность с центром в начале координат (рис. 1.24).

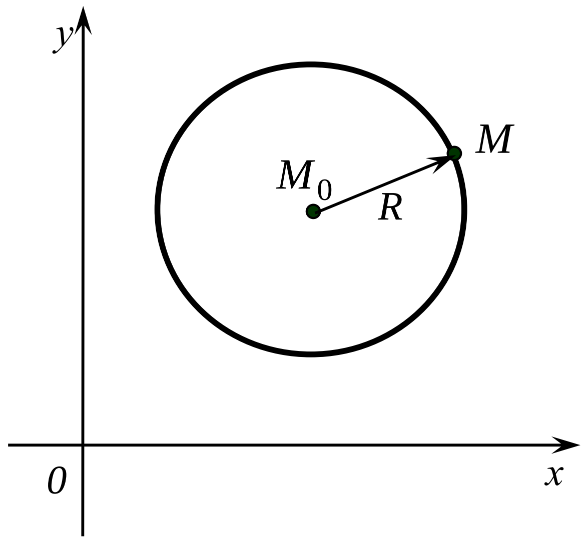


Рис. 1.23. Окружность с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$

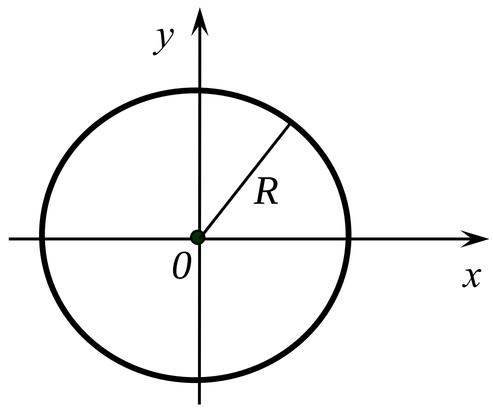


Рис. 1.24. Окружность с центром в начале координат

Эллипс

Эллипсом *называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек* F_1 *и* F_2, *называемых фокусами, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.*

Если выбрать систему координат, у которой начало расположено в середине отрезка F_1F_2 и ось OX сонаправлена вектору $\overline{OF_2}$, то уравнение эллипса имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \tag{1.31}$$

где a и b – **большая и малая полуоси эллипса** соответственно.

Уравнение (1.31) называется **каноническим уравнением эллипса**.

Исследуем форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Отметим, что координаты x и y входят в уравнение (1.31) только в четных степенях. Поэтому, если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y)$, $(-x;y)$ и $(-x;-y)$. Таким образом, эллипс – кривая, которая симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют **центром эллипса**.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y=0$ в уравнении (1.31), находим две точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс (рис. 1.25). Положив $x=0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$. Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 называются **вершинами эллипса**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно **большой и малой осями эллипса**.

3. Из уравнения (1.31) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т.е. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ и $\frac{y^2}{b^2}\le 1$ или $-a\le x\le a$ и $-b\le y\le b$. Таким образом, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x=\pm a$ и $y=\pm b$.

4. В уравнении (1.31) сумма неотрицательных слагаемых $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна единице. Следовательно, при возрастании одного слагаемого другое будет уменьшаться, т.е. если $|x|$ возрастает, то $|y|$ уменьшается и наоборот.

Из выше сказанного следует, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 1.25

На рис. 1.25 фокусы эллипса обозначены через F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, где

$$\boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$$

называется **фокусным расстоянием**.

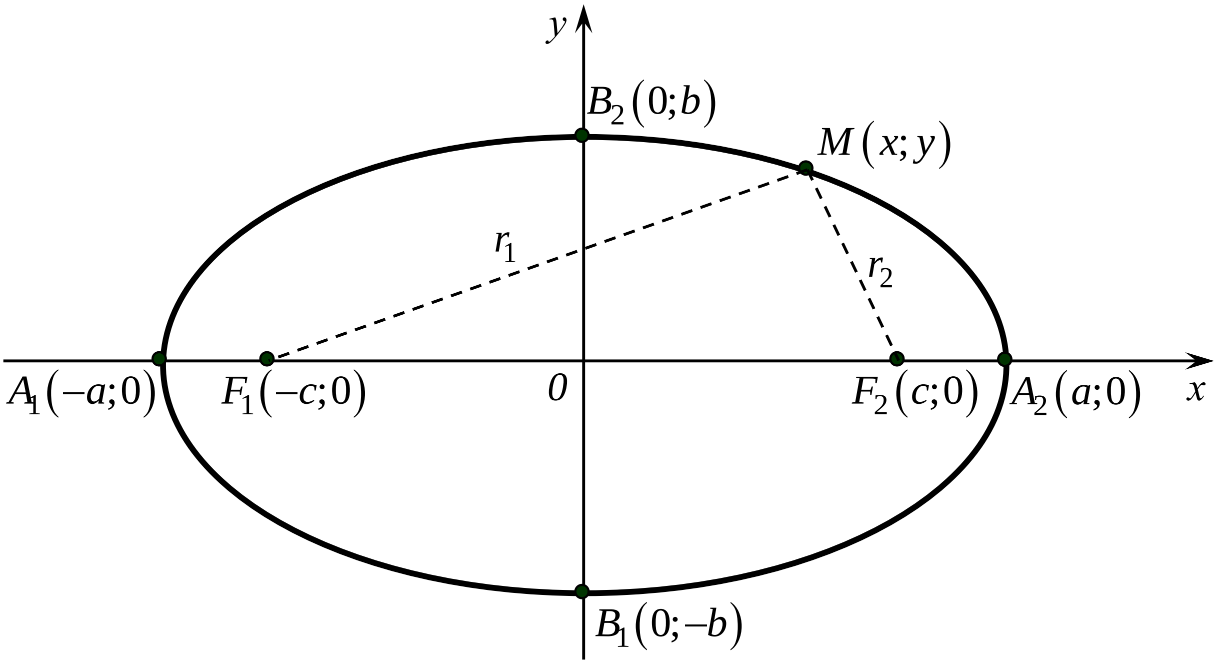


Рис. 1.25. Эллипс

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса (см. рис. 1.25). Длины отрезков $|F_1M| = r_1$ и $|F_2M| = r_2$ называются **фокальными радиусами** точки $M(x;y)$. Из определения эллипса следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a > 2c.$$

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. Если $\frac{b}{a} = 1$, т.е. $a = b$, то из (1.31) следует $x^2 + y^2 = a^2$ – уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$. Таким образом, окружность является частным случаем эллипса, у которого фокусы F_1 *и* F_2 совпадают (точка *O*).

В качестве характеристики формы эллипса *чаще* используется отношение

$$\boxed{\frac{c}{a} = \varepsilon}, \qquad (1.32)$$

называемое **эксцентриситетом эллипса,** причем $0 \le \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$.

Чем больше величина ε, тем больше форма эллипса отличается от формы окружности. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность (рис. 1.26).

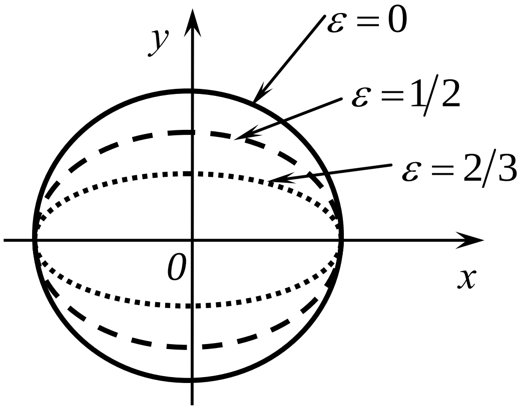


Рис. 1.26. Зависимость формы эллипса от эксцентриситета

Если оси симметрии эллипса параллельны координатным осям Ox и Oy, то его уравнение имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

где x_0 и y_0 координаты центра эллипса.

Гипербола

Гиперболой *называется геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек* F_1 *и* F_2*, называемых* фокусами, *есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Если выбрать систему координат, у которой начало расположено в середине отрезка F_1F_2, и ось OX сонаправлена вектору $\overline{OF_2}$, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (1.33)$$

где a и b – **действительная и мнимая полуоси гиперболы** соответственно.

Уравнение (1.33) называется **каноническим уравнением гиперболы**.

Исследуем форму гиперболы, пользуясь его каноническим уравнением.

1. Уравнение (1.33) содержит координаты x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола – кривая, которая симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют **центром гиперболы**.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y=0$ в уравнении (1.33), находим две точки $A_2(-a;0)$ и $A_1(a;0)$, в которых ось Ox пересекает гиперболу. Положив $x=0$ в (1.33), получаем $y^2=-b^2$. Так как квадратный корень из отрицательного числа в области действительных чисел не извлекается, то можно сделать вывод: **гипербола, описываемая уравнением** (1.33)**, ось** Oy **не пересекает**.

Точки A_1 и A_2 называются **вершинами гиперболы,** отрезок $A_1A_2=2a$ – **действительной осью,** а отрезок $OA_1=OA_2=a$ – **действительной полуосью гиперболы.**

Отрезок $B_1B_2=2b$, соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется **мнимой осью,** а число b – **мнимой полуосью.** Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется **основным прямоугольником гиперболы.**

3. Из уравнения (1.33) следует, что слагаемое $\dfrac{x^2}{a^2}\ge 1$, т.е. $|x|\ge a$ или $-a\ge x\ge a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x=a$ (**правая ветвь гиперболы**) и слева от прямой $x=-a$ (**левая ветвь гиперболы**).

4. Разность $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ сохраняет постоянное значение, равное единице. Следовательно, при возрастании $|x|$ возрастает и $|y|$.

5. Чтобы более ясно представить себе вид гиперболы необходимо рассмотреть *две прямые*, связанные с нею – так называемые *асимптоты*.

***Асимптотой** кривой называется прямая, расстояние до которой от точки $M(x;y)$, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.*

Покажем, что гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ имеет две асимптоты

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x} \quad \text{и} \quad \boxed{y=-\frac{b}{a}x}. \tag{1.34}$$

Так как прямые (1.34) и гипербола (1.33) симметричны относительно координатных осей, то достаточно рассмотреть только те точки указанных линий, которые расположены в первой четверти. Возьмем на прямой $y=\frac{b}{a}x$ точку N, имеющую ту же абсциссу x, что и точка $M(x;y)$ на гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 1.27).

Выразим ординату y из уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$ или $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, и найдем разность MN между ординатами прямой и ветви гиперболы:

$$MN=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

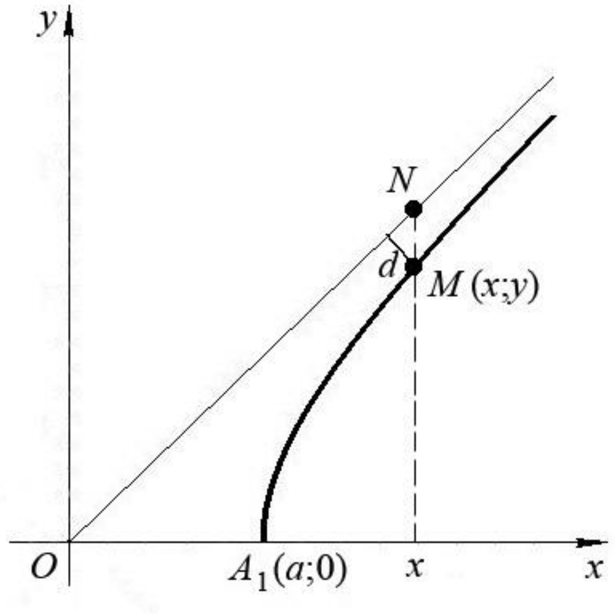


Рис. 1.27. Асимптота гиперболы в I координатной четверти

Из последней формулы видно, что при неограниченном возрастании абсциссы x расстояние MN убывает и стремится к нулю. Так как MN больше расстояния d от точки M до прямой $y=\frac{b}{a}x$, то d тем более стремится к нулю. Таким образом, прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Из выше сказанного следует, что гипербола, описываемая уравнением (1.33), имеет форму, изображенную на рис. 1.28.

При построении гиперболы (1.33) обычно сначала строят ее *вершины* A_1 и A_2 и ее *основной прямоугольник*, а затем проводят прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника – *асимптоты гиперболы*.

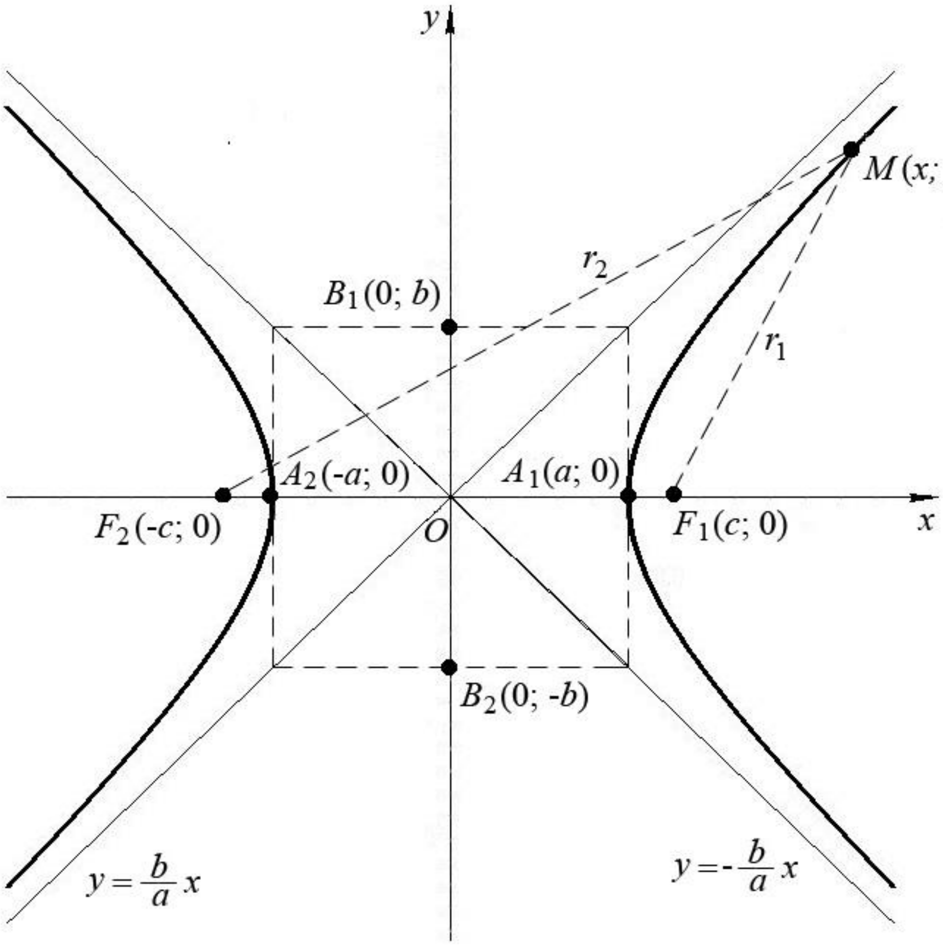


Рис. 1.28. Гипербола

Также как и у эллипса, фокусы гиперболы обозначены через F_1 и F_2 (рис. 1.28), расстояние между которыми равно $2c$, где **фокусное расстояние** c определяется по следующей формуле

$$\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы (см. рис. 1.28). Длины отрезков $|F_1M| = r_1$ и $|F_2M| = r_2$ также как и у эллипса называются **фокальными радиусами** точки $M(x;y)$. Из определения гиперболы следует, что

$$|r_2 - r_1| = 2a < 2c.$$

Форму гиперболы характеризует отношение

$$\boxed{\frac{c}{a} = \varepsilon},$$

называемое **эксцентриситетом,** причем у гиперболы $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. Чем меньше величина ε, тем более вытянут основной прямоугольник гиперболы.

Если $a = b$, получаем **равнобочную гиперболу**: $x^2 - y^2 = a^2$. Ее асимптотами будут прямые $y = \pm x$, т.е. биссектрисы координатных углов.

Если оси симметрии гиперболы параллельны координатным осям Ox и Oy, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

где x_0 и y_0 координаты центра гиперболы.

Парабола

Параболой *называется геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки плоскости, называемой* фокусом*, и некоторой прямой, называемой* директрисой**.**

Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось Ox прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, и будем считать ось Ox направленной от директрисы к фокусу. За начало координат возьмем середину O отрезка от точки F до данной прямой. *Расстояние от фокуса F до директрисы называется* ***параметром параболы*** *и обозначается через p (* $p > 0$*)*. Координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 1.29).

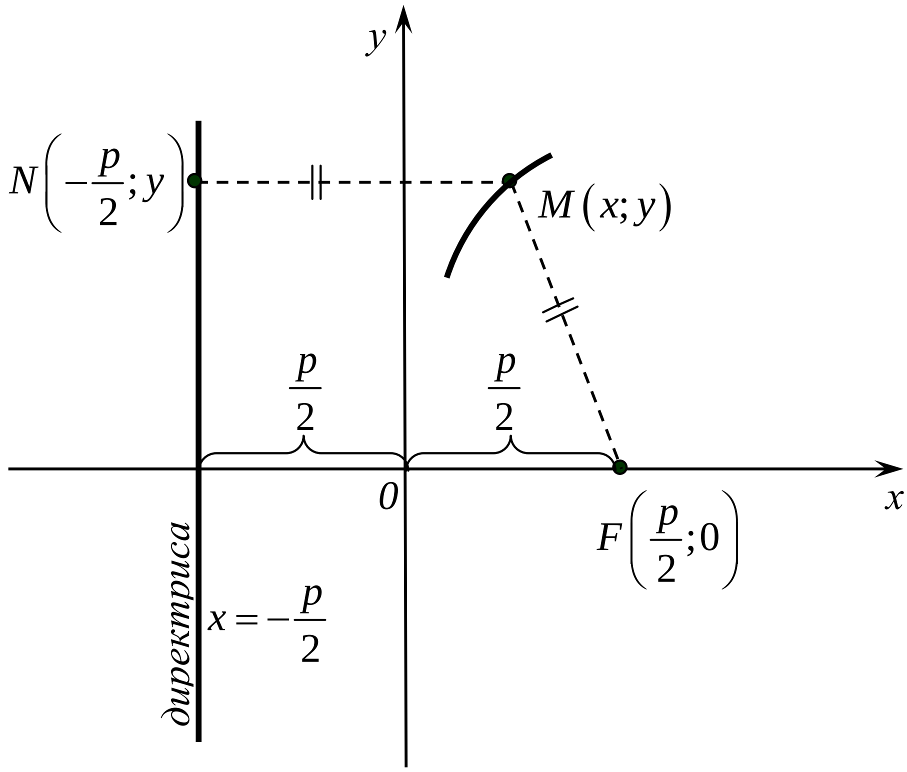


Рис. 1.29. Вывод уравнения параболы

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка параболы. Соединим точку M с F и проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе (см. рис. 1.29). По определению параболы имеем $|MN|=|MF|$. Применяя формулу расстояния между двумя точками, находим

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \quad \text{и} \quad |MN|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получим уравнение параболы в выбранной системе координат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$\boxed{y^2 = 2px}. \tag{1.35}$$

Уравнение (1.35) называется **каноническим уравнением параболы**.

Исследуем форму параболы, пользуясь его каноническим уравнением.

1. В уравнение (1.35) координата y входит в четной степени. Значит, парабола – кривая, которая *симметрична относительно оси* Ox, а ось Ox является **осью симметрии параболы**.

2. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. Точка $O(0;0)$ называется **вершиной параболы** (1.35).

3. Так как $p > 0$, то из уравнения (1.35) следует, что $x \geq 0$. Это означает, что парабола расположена справа от оси Oy.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает.

Из выше сказанного следует, что парабола, описываемая уравнением (1.35), имеет форму, изображенную на рис. 1.30.

Отрезок $|MF| = r$ (рис. 1.30) называется **фокальным радиусом** точки $M(x;y)$.

Уравнения

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = -2py \quad \text{и} \quad x^2 = 2py \quad (p > 0)$$

также определяют параболы, вид которых изображен на рис.1.31 – 1.33.

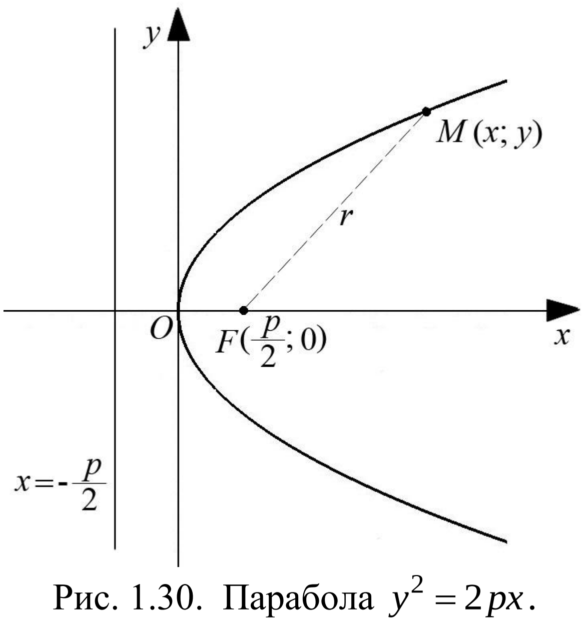


Рис. 1.30. Парабола $y^2 = 2px$.

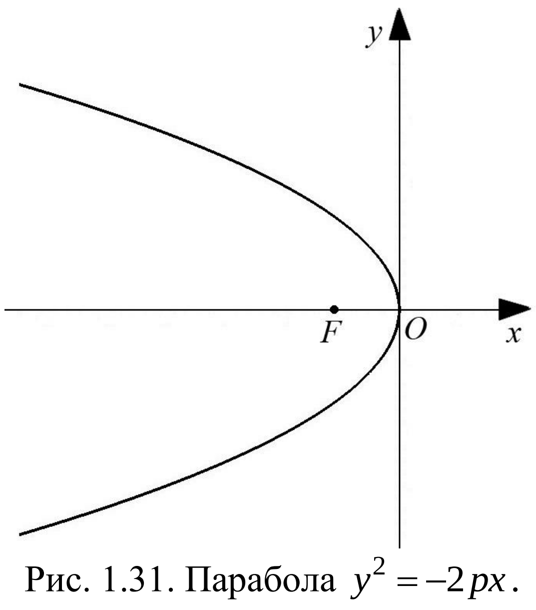


Рис. 1.31. Парабола $y^2 = -2px$.

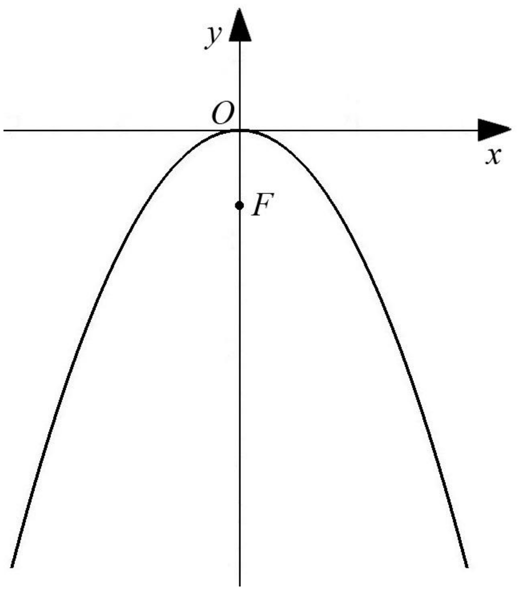


Рис. 1.32. Парабола $x^2 = -2py$.

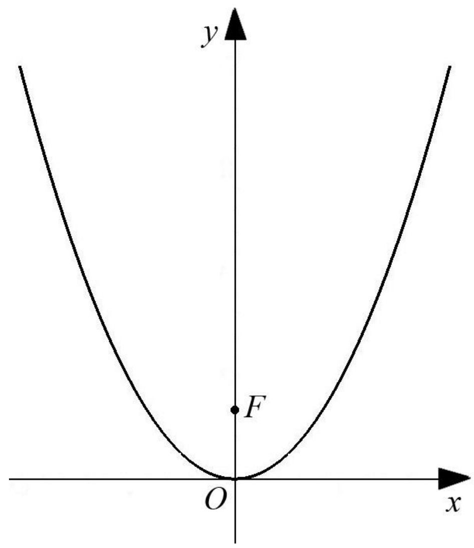


Рис. 1.33. Парабола $x^2 = 2py$.

Если ось симметрии параболы параллельна координатной оси Ox, то ее уравнение будет иметь вид

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0),$$

где x_0 и y_0 координаты вершины параболы.

Если же ось симметрии параболы параллельна координатной оси Oy, то уравнение такой параболы имеет вид

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

Теперь видно, что если оси симметрии кривой второго порядка параллельны координатным осям Ox и Oy, то эта кривая описывается уравнением

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пример 1.5. Уравнение кривой второго порядка $4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0$ привести к каноническому виду.

Решение. Для приведения уравнения кривой второго порядка $4x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 37 = 0$ к каноническому виду выделим полные квадраты в его левой части:

$$4x^2+9y^2-32x+18y+37=4\left(x^2-8x\right)+9\left(y^2+2y\right)+37=$$
$$=4\left(x^2-2x\cdot4+4^2-4^2\right)+9\left(y^2+2y\cdot1+1^2-1^2\right)+37=$$
$$=4\left(\left(x-4\right)^2-4^2\right)+9\left(\left(y+1\right)^2-1^2\right)+37=4\left(x-4\right)^2-64+9\left(y+1\right)^2-9+37=0.$$

и окончательно

$$4\left(x-4\right)^2+9\left(y+1\right)^2=36.$$

Разделив полученное уравнение на 36, и обозначив $x-4=X$ и $y+1=Y$, получим

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1.$$

Следовательно, исходная кривая второго порядка является ***эллипсом***, полуоси которого равны $a=3$ и $b=2$. Центр эллипса находится в точке $\tilde{O}\left(4;-1\right)$ (рис. 1.34)

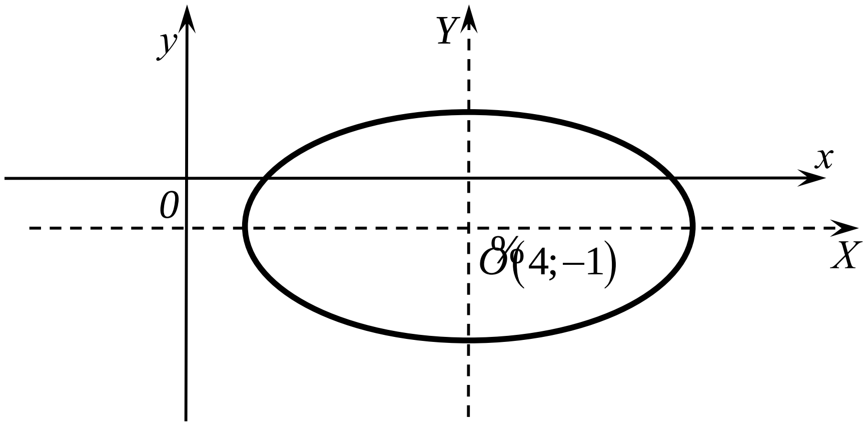


Рис. 1.34. Эллипс

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнением поверхности (рис. 1.35) *в прямоугольной системе координат Oxyz называется такое уравнение* $F\left(x;y;z\right)=0$ *с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки* $M\left(x;y;z\right)$, *лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.*

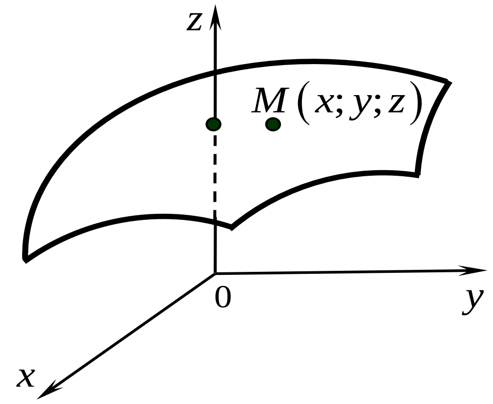


Рис. 1.35. Поверхность $F(x;y;z)=0$

Простейшей поверхностью является плоскость. Она является *поверхностью первого порядка*. В пространстве плоскость можно задать различными способами и каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

1.3.1. Уравнения плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору

Пусть в пространстве плоскость Q задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектором $\bar{N}\{A;B;C\}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 1.36). *Вектор* $\bar{N}\{A;B;C\}$ *называется* ***нормальным вектором плоскости***.

Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x;y;z)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ (см. рис. 1.36). При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{N}$ и $\overline{M_0M}$ ортогональны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{N}\cdot\overline{M_0M}=0$ или, применив формулу (1.8), получим

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}. \tag{1.36}$$

Уравнение (1.36) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***ортогонально данному вектору*** $\bar{N}\{A;B;C\}$**.**

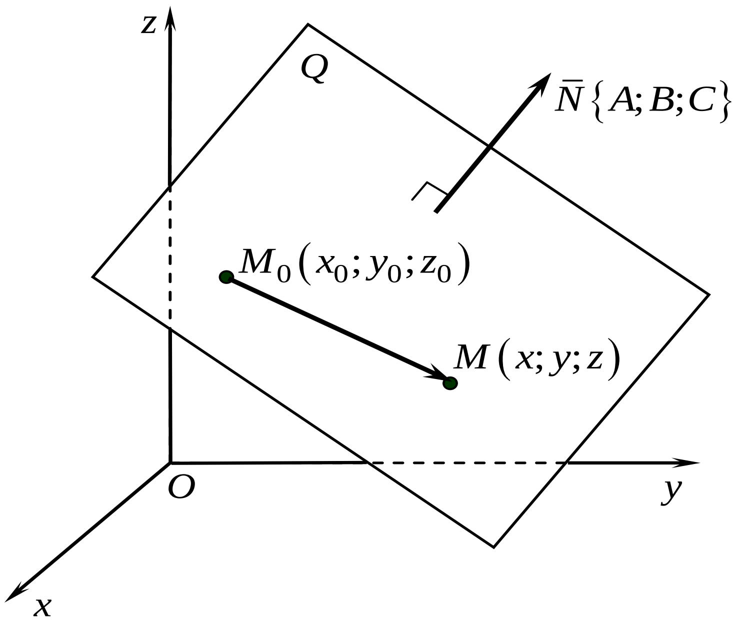


Рис. 1.36. Плоскость, проходящая через данную точку ортогонально данному вектору

Общее уравнение плоскости

Раскрыв скобки в уравнении (1.36): $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$, получим ***общее уравнение плоскости в пространстве***

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \tag{1.37}$$

где $D = -Cz_0 - By_0 - Ax_0$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1.37) и соответствующие им расположения плоскости в пространстве.

1. Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$. Полученному уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0;0;0)$. Следовательно, **плоскость** Q **проходит через начало координат** (рис 1.37).

2. Если $A = 0$, то $By + Cz + D = 0$. Так как проекция нормального вектора $\bar{N}\{A;B;C\}$ на ось Ox равна нулю, то $\bar{N} \perp Ox$ и, следовательно, **плоскость** Q **перпендикулярна плоскости** yOz или**,** что тоже самое, **плоскость** Q **параллельна оси** Ox (рис 1.38). Таким образом, *если в уравнении плоскости отсутствует какая-нибудь переменная, то плоскость будет параллельна координатной оси того же названия, что и отсутствующая переменная*.

3. Если $A = D = 0$, то $By + Cz = 0$. Плоскость Q проходит через точку $O(0;0;0)$ и перпендикулярна плоскости yOz. Следовательно, **плоскость**

$By + Cz = 0$ **проходит через ось** Ox (рис 1.39). Аналогично, уравнения $Ax + Cz = 0$ (при $B = D = 0$) и $Ax + By = 0$ (при $C = D = 0$) описывают плоскости, проходящие соответственно через оси Oy и Oz.

4. Если $A = B = 0$, то $Cz + D = 0 \;\Rightarrow\; z = -\dfrac{D}{C} = \text{const}$. **Плоскость** Q **параллельна плоскости** xOy (рис. 1.40). Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ (при $B = C = 0$) и $By + D = 0$ (при $A = C = 0$) отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям yOz и xOz.

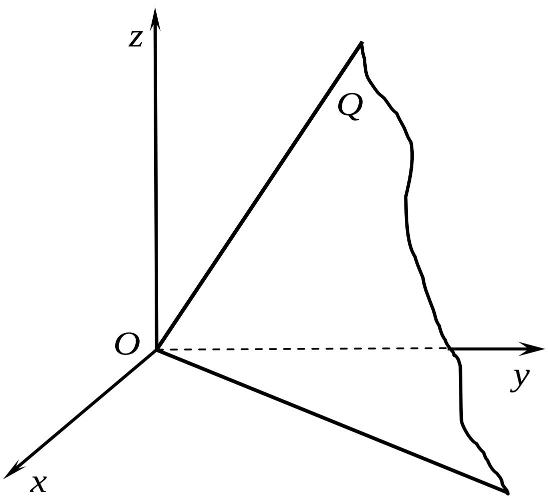


Рис. 1.37. Плоскость, проходящая через начало координат

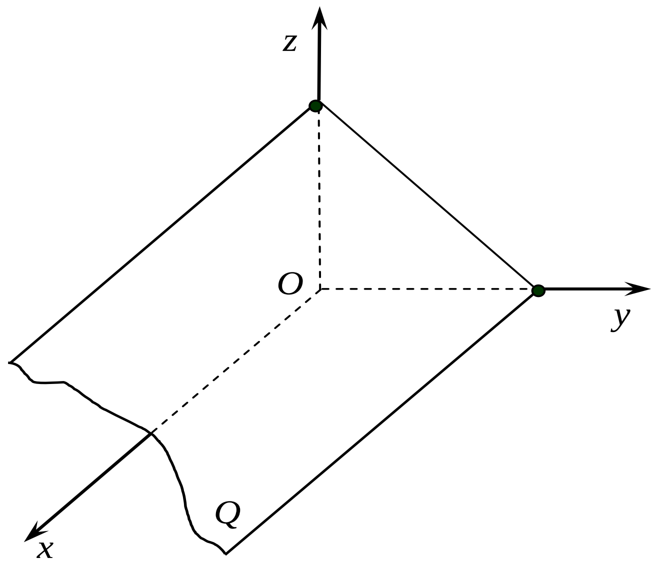


Рис. 1.38. Плоскость, параллельная оси Ox

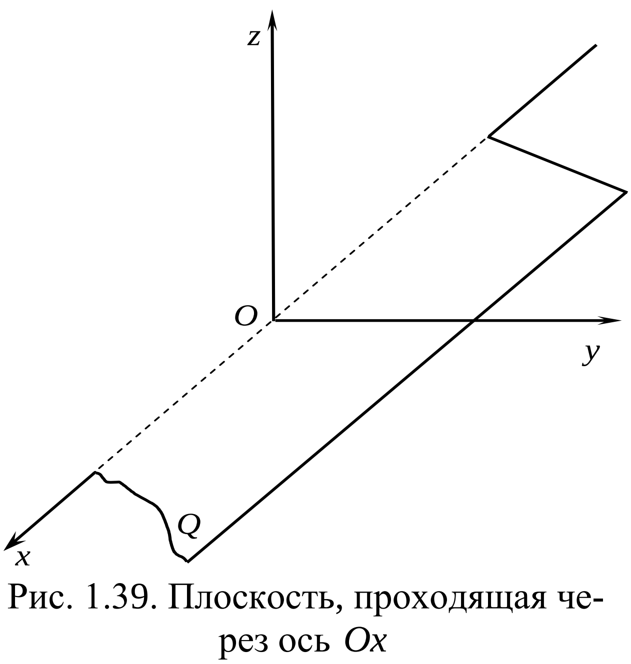


Рис. 1.39. Плоскость, проходящая через ось Ox

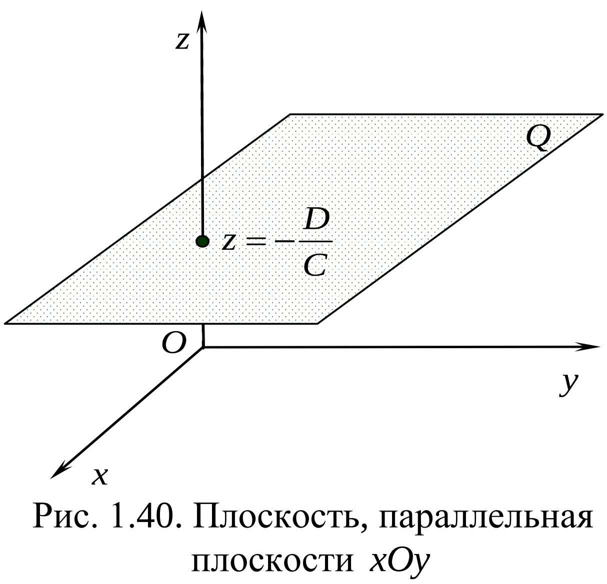


Рис. 1.40. Плоскость, параллельная плоскости xOy

5. Если $A = B = D = 0$, то $Cz = 0$, т.е. $z = 0$. В этом случае **плоскость** Q **совпадает с плоскостью** xOy (рис. 1.41). Аналогично: плоскости $y = 0$ и $x = 0$ совпадают с плоскостями xOz и yOz соответственно.

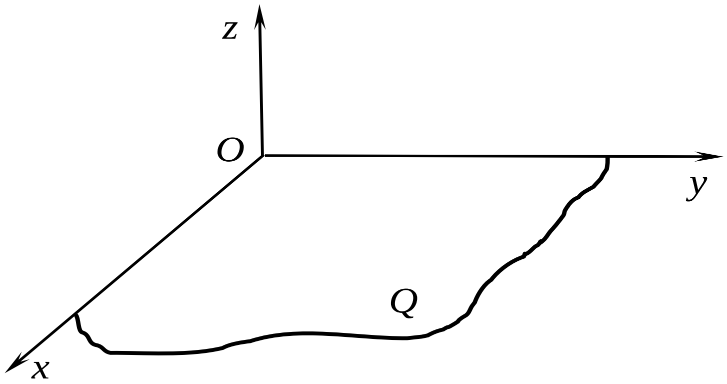


Рис. 1.41. Плоскость, совпадающая с плоскостью xOy

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Если заданы три точки, не лежащие на одной прямой, то через них можно провести *единственную* плоскость.

Запишем уравнение плоскости Q, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 1.42):

$$\boxed{\begin{gathered}(x-x_1)\cdot\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix} - (y-y_1)\cdot\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix} + \\ +(z-z_1)\cdot\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix} = 0.\end{gathered}} \tag{1.38}$$

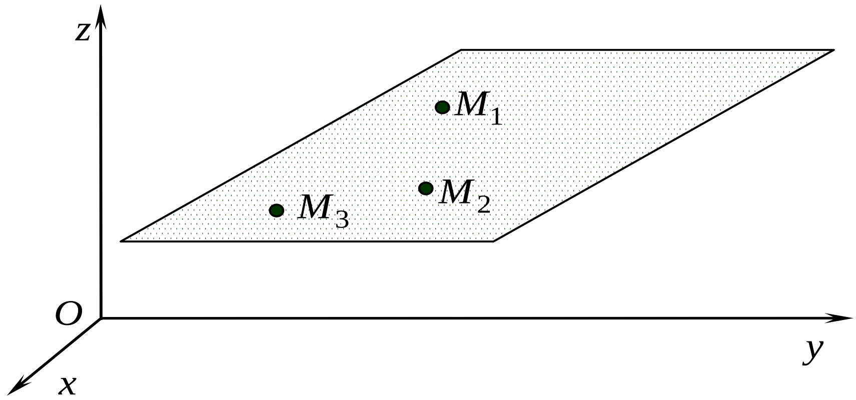


Рис. 1.42. Плоскость, проходящей через три данные точки

В уравнении (1.38) выражения, стоящие в квадратных скобках: $\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$, есть определители второго порядка.

Определителем второго порядка называется ***число****, вычисляемое по формуле*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Если сравнить уравнение (1.38) с уравнением (1.36), то становится ясно, что данные определители второго порядка являются координатами нормального вектора $\bar{N}\{A;B;C\}$ плоскости:

$$A = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ B = -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \text{ и } C = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.6. Составить уравнение грани *ABD* пирамиды *ABCD*, если известны координаты ее вершин: $A(1;2;-3)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-5;-1)$ и $D(-2;0;5)$.

Решение. Так как грань в пирамиде представляет собой плоскость, то нам необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через *три точки* $A(1;2;-3)$, $B(2;-4;1)$ и $D(-2;0;5)$. Для этого воспользуемся уравнением (1.38):

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -4-2 & 1+3 \\ 0-2 & 5+3 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 2-1 & 1+3 \\ -2-1 & 5+3 \end{vmatrix} + (z+3)\cdot\begin{vmatrix} 2-1 & -4-2 \\ -2-1 & 0-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + (z+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\cdot(-6\cdot 8 - 4\cdot(-2)) - (y-2)\cdot(1\cdot 8 - 4\cdot(-3)) + (z+3)\cdot(1\cdot(-2) - (-6)\cdot(-3)) = 0,$$

$$-40\cdot(x-1) - 20\cdot(y-2) - 20\cdot(z+3) = 0 \text{ или } 2\cdot(x-1) + (y-2) + (z+3) = 0.$$

Окончательно уравнение плоскости *ABD* (грани *ABD*) примет вид

$$2x + y + z - 1 = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки *a*, *b* и *c* не равные нулю, т.е. проходит через **три** точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (рис. 1.43).

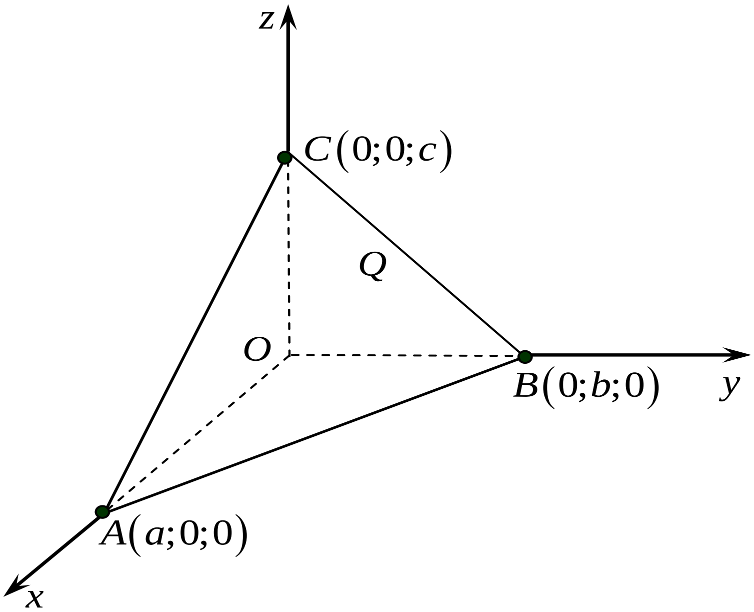


Рис. 1.43. Вывод уравнения плоскости в отрезках

Запишем уравнение плоскости Q, проходящей через данные три заданные точки. Подставим координаты точек $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ в уравнение (1.38):

$$(x-a)\cdot\begin{vmatrix} b-0 & 0-0 \\ 0-0 & c-0 \end{vmatrix} - (y-0)\cdot\begin{vmatrix} 0-a & 0-0 \\ 0-a & c-0 \end{vmatrix} + (z-0)\cdot\begin{vmatrix} 0-a & b-0 \\ 0-a & 0-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определители

$$(x-a)bc - y(-ac) + zba = 0 \quad \text{или} \quad xbc + yac + zba = abc,$$

и разделив последнее равенство на $abc \neq 0$, получим

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}. \qquad (1.39)$$

Уравнение (1.39) *называется* ***уравнением плоскости в отрезках на осях***. Этим уравнением удобно пользоваться при построении плоскости.

1.3.2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана плоскость Q общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис. 1.44). **Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$,** где $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – произвольная точка плоскости Q, **на направление нормального вектора** $\bar{N}\{A;B;C\}$ (см. рис. 1.44). Следовательно,

$$d=\left|\text{Ï ð}_{\bar{N}}\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{N}}{\left|\bar{N}\right|}\right|=\frac{\left|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (1.40)$$

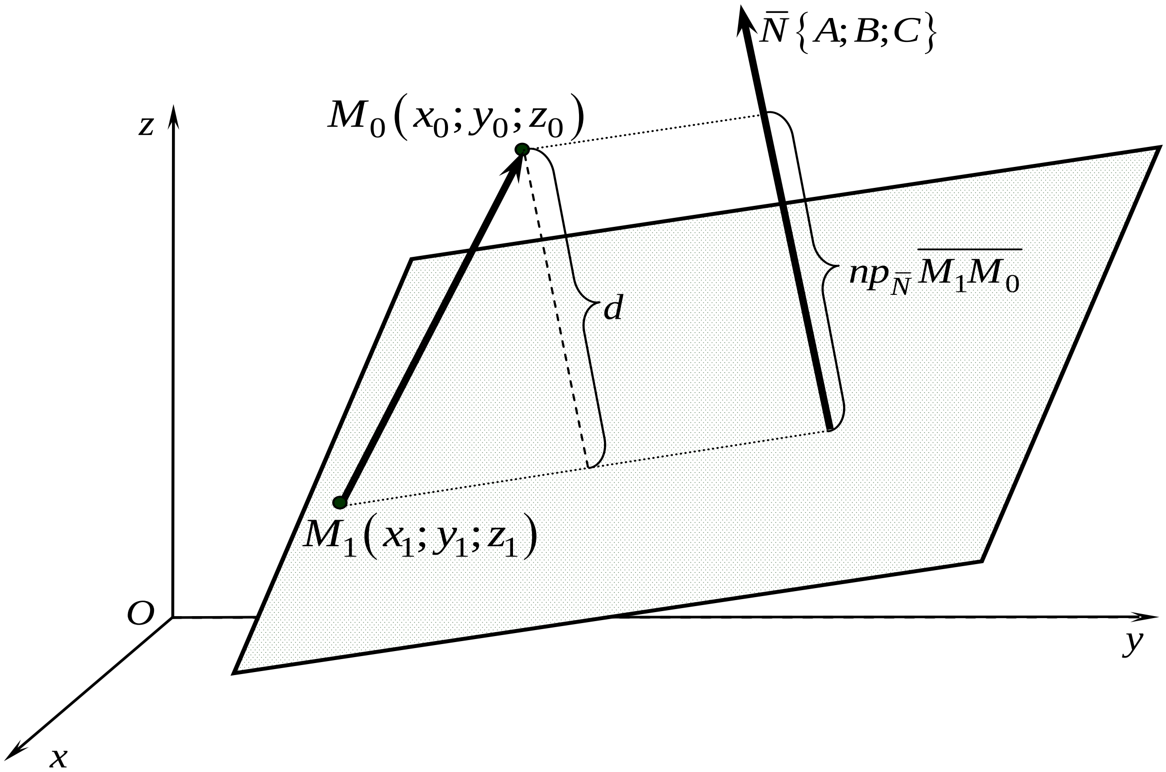


Рис. 1.44. Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ принадлежит плоскости Q, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Откуда имеем

$$D=-Ax_1-By_1-Cz_1. \qquad (1.41)$$

Подставляя (1.41) в выражение (1.40), получим искомую формулу

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}. \qquad (1.42)$$

Пример 1.7. Используя условие *примера 1.6,* найти длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенной из точки C на грань ABD.

Решение. Так как высота H пересекает грань ABD под прямым углом, то длину высоты можно найти как расстояние от точки C до плоскости ABD, воспользовавшись формулой (1.42). Из *примера 1.6* известно, что уравнение плоскости ABD имеет вид

$$2x+y+z-1=0.$$

Значит

$$H=\frac{\left|2\cdot(-3)+1\cdot(-5)+1\cdot(-1)-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{\left|-6-5-1-1\right|}{\sqrt{6}}=\frac{13}{\sqrt{6}}.$$

Пример 1.8. Используя условие *примера 1.6* (см. стр. 40), найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение. Известно, что объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}S_{OCH.}\cdot H,$$

где $S_{OCH.}$ – площадь основания пирамиды, т.е. площадь какой-либо ее грани, а H – длина высоты пирамиды, опущенной на эту грань.

В качестве основания пирамиды возьмем, например, грань ABD. Таким образом, высота H должна быть опущена на эту грань из вершины C. Длина данной высоты была найдена ранее, в *примере 1.7* $\left(H=\frac{13}{\sqrt{6}}\right)$.

Так как грань в пирамиде представляет собой треугольник, то площадь грани ABD можно найти по формуле

$$S_{OCH.}=S_{ABD}=\frac{1}{2}\left|AB\right|\cdot\left|AD\right|\cdot\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

Определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\{1;-6;4\},\ \overline{AD}\{-3;-2;8\}$$

и воспользуемся формулой (1.11):

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|} = \frac{1\cdot(-3)+(-6)\cdot(-2)+4\cdot 8}{\sqrt{1^2+(-6)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+8^2}} = \frac{41}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{77}}.$$

Искомый $\sin\alpha$ равен

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{41}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{77}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4081-1681}{53\cdot 77}} = \sqrt{\frac{2400}{53\cdot 77}} = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{77}}.$$

Учитывая длины сторон AB и AD:

$$|AB| = \sqrt{1^2+(-6)^2+4^2} = \sqrt{53},\ |AD| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2+8^2} = \sqrt{77},$$

находим площадь грани ABD

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{53}\cdot\sqrt{77}\cdot\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{77}} = 10\sqrt{6}\ \text{кв.ед.}$$

Следовательно, объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\sqrt{6}\cdot\frac{13}{\sqrt{6}} = \frac{130}{3}\ \text{(куб.ед.)}$$

1.3.3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Даны две плоскости Q_1 и Q_2, заданные общими уравнениями: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ соответственно (рис. 1.45).

Под* углом между двумя плоскостями Q_1 *и* Q_2*, понимается один из двухгранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\overline{N}_1\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\overline{N}_2\{A_2;B_2;C_2\}$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 1.45), так как это углы со взаимноперпендикулярными сторонами. Таким образом, для нахождения угла φ достаточно найти угол между соответствующими нормальными векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{\left|\bar{N}_1\right| \cdot \left|\bar{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}. \qquad (1.43)$$

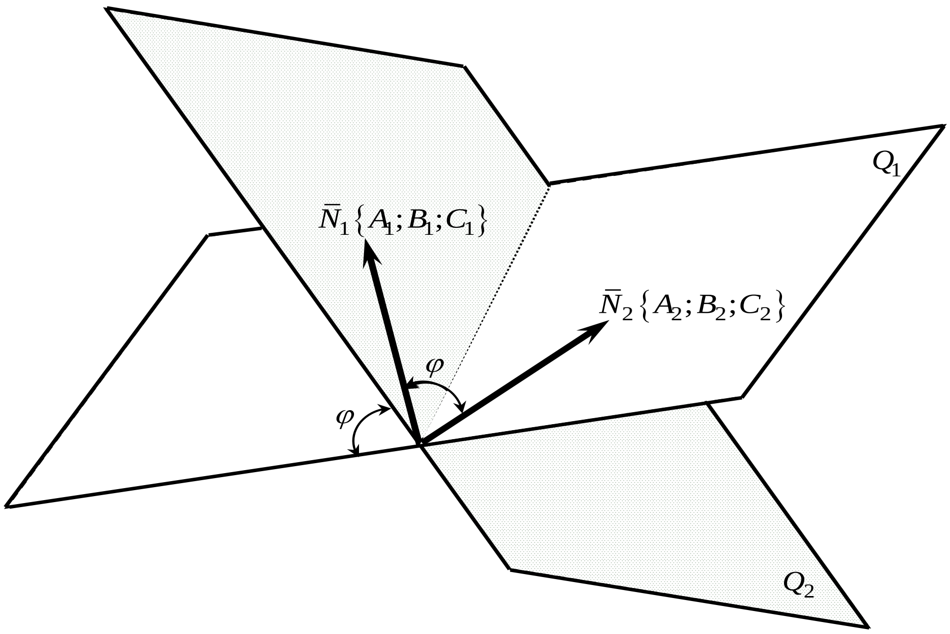


Рис. 1.45. Угол между плоскостями

Если две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора также перпендикулярны, т.е $\bar{N}_1 \perp \bar{N}_2$ (и наоборот). Тогда $\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$ или

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}. \qquad (1.44)$$

Уравнение (1.44) *является* ***условием перпендикулярности двух плоскостей*** Q_1 *и* Q_2.

Если же две плоскости параллельны, то будут коллинеарны и их нормальные вектора, т.е. $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$ (и наоборот). Условием параллельности векторов является пропорциональность их координат

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}. \qquad (1.45)$$

Это равенство и есть ***условие параллельности двух плоскостей*** Q_1 *и* Q_2.

1.3.4. Поверхности второго порядка

Общий вид *уравнения второго порядка в заданной прямоугольной системе координат следующий*:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

причем среди коэффициентов *A, B, C, D, E, F* хотя бы один ненулевой.

Поверхностями второго порядка являются: *сфера*, *эллипсоид*, однополостный и двуполостный *гиперболоиды*, эллиптический и гиперболический *параболоиды*, *конус*, а также эллиптический, гиперболический и параболический *цилиндры*.

В этом параграфе рассмотрим уравнение, в котором отсутствуют попарные произведения переменных:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Сфера

Сферой *называется геометрическое место всех точек пространства, находящихся на одинаковом расстоянии R (радиусе сферы) от данной точки (центра сферы).*

Найдем уравнение сферы радиуса *R* с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $M_0(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу *R*, т.е. $M_0M = R$. Так как $M_0M = \left|\overline{M_0M}\right|$, где $\overline{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, то получим

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

или

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}. \qquad (1.46)$$

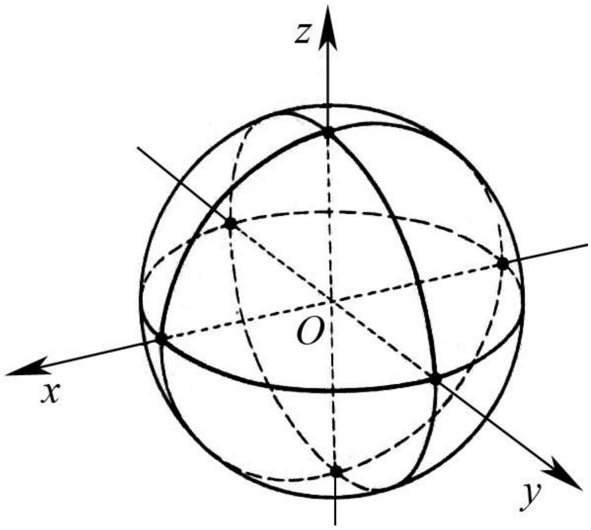


Рис. 1.46. Сфера

Итак, **уравнение** (1.46) **определяет сферу радиуса** R **с центром в точке** $M_0(x_0;y_0;z_0)$. *Если же центр сферы совпадает с началом координат* $O(0;0;0)$ (рис. 1.46), *то уравнение сферы принимает вид*:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}. \qquad (1.47)$$

Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}, \qquad (1.48)$$

где a, b и c – полуоси эллипсоида.

Исследуем форму эллипсоида по его уравнению (1.48). Для этого *применим* ***метод сечений****, который заключается в том, что изучают линии пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельным.*

Рассмотрим сечения эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскости xOy, т.е. с плоскостями $z=h$, где h – любое число. Линия, получаемая в сечении, будет определяться двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \qquad (1.49)$$

Исследуем линию (1.49), придавая h различные значения.

1. Если в уравнениях (1.49) $|h|>c$, ($c>0$), то имеем $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$. В этом случае точек пересечения поверхности (1.48) с плоскостью $z=h$ не существует.

2. Если $|h|=c$, т.е. $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Линия пересечения (1.49) вырождается в две точки $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$, а плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются данной поверхности.

3. Если $|h|<c$, то уравнения (1.49) перепишем в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

В данном случае линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. Причем с уменьшением $|h|$, полуоси a_1 и b_1 увеличиваются и при $h=0$ они достигают своих максимальных значений: $a_1=a$ и $b_1=b$. Уравнения (1.49) примут вид:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

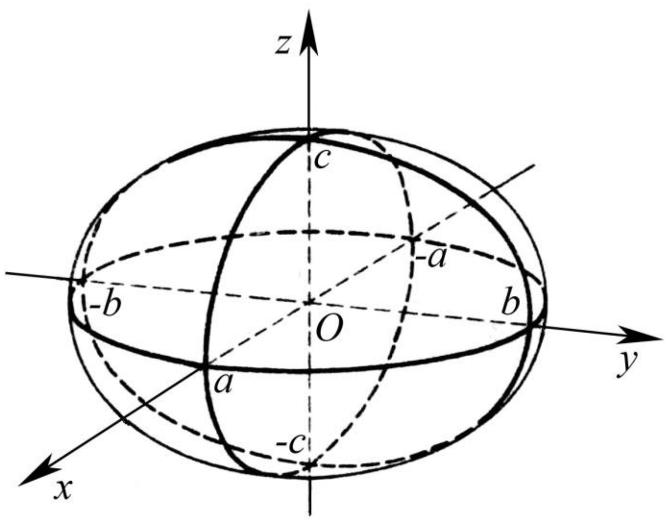


Рис. 1.47. Эллипсоид

Аналогичные результаты получим при рассмотрении сечений поверхности (1.48) плоскостями $x=h$ и $y=h$.

Таким образом, ***эллипсоид*** *имеет форму сплющенной по трем направлениям сферы* (рис. 1.47).

Эллипсоид, имеющий каноническое уравнение (1.48), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.47) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Если все полуоси эллипсоида различны, то его называют ***трехосный.*** Если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в ***эллипсоид вращения***. Например, при $a=b$ имеем

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Здесь в сечении эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости xOy, т.е. плоскостями $z=\text{const}$, будут получаться окружности.

Если же все полуоси эллипсоида равны $a=b=c$, то он вырождается в *сферу* радиуса a:

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Гиперболоиды

Различают два вида гиперболоидов: однополостный и двуполостный.

1. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}, \tag{1.50}$$

При сечении однополостного гиперболоида плоскостями $z=h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

Как видно, линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1=a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b_1=b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$. Полуоси a_1 и b_1 достигают своего наименьшего значения при $h=0$: $a_1=a$ и $b_1=b$. При возрастании $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

Если пересекать однополостный гиперболоид плоскостями $x = h$ или $y = h$ в сечении будем получать гиперболы. Например, при $x = 0$ гипербола описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

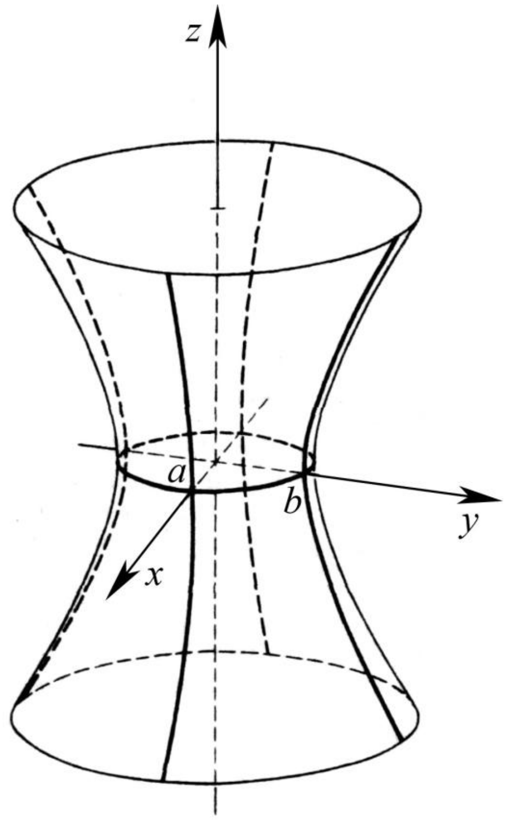


Рис. 1.48. Однополостный гиперболоид

Анализируя полученные сечения, можно сделать вывод: ***однополостный гиперболоид*** *представляет собой бесконечную расширяющуюся «трубку» переменного сечения* (рис. 1.48).

Однополостный гиперболоид, имеющий каноническое уравнение (1.50), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.48) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Если $a = b$, то имеем ***однополостный гиперболоид вращения***.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь в сечении гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости xOy, т.е. плоскостями $z = \mathrm{const}$, будут получаться окружности, а сама поверхность образуется вращением вокруг оси Oz гиперболы $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}, \qquad (1.51)$$

Следует обратить **внимание**, что в уравнениях (1.50) и (1.51) правые части одинаковые и равны *единице*, а левые части различные: для *однополостного гиперболоида* левая часть (1.50) содержит ***одно*** слагаемое со знаком «$-$», а для *двуполостного гиперболоида* ***два*** слагаемых в левой части (1.51) имеют знак «$-$».

При сечении двуполостного гиперболоида плоскостями $z=h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{cases} \tag{1.52}$$

Из уравнений (1.52) можно сделать следующие выводы.

а). Если в $|h|<c$, то имеем $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<0$. Точек пересечения поверхности (1.51) с плоскостью $z=h$ не существует.

б). Если $|h|=c$, то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$. Плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются данной поверхности в точках $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$.

в). Если $|h|>c$, то уравнения (1.52) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}=1, \\ z=h. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

Линией пересечения является эллипс с полуосями $a_1=a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$ и $b_1=b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$. Причем с увеличением $|h|$, полуоси a_1 и b_1 возрастают.

Если пересекать двуполостный гиперболоид плоскостями $x=h$ или $y=h$ в сечении будем получать гиперболы. Так, например, при $x=0$ и $y=0$, соответственно, гиперболы описываются уравнениями

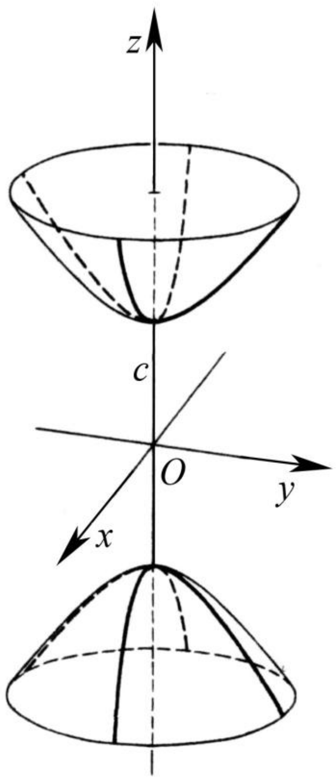


Рис. 1.49. Двуполостный гиперболоид

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

У обеих гипербол вершины находятся на оси Oz.

Из анализа полученных сечений можно сделать вывод: ***двуполостный гиперболоид*** *представляет собой поверхность, состоящую из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш* (рис. 1.49).

Двуполостный гиперболоид, имеющий каноническое уравнение (1.51), симметричный относительно координатных осей (рис. 1.49) имеет три плоскости симметрии, которые совпадают с координатными плоскостями и центр симметрии – начало координат $O(0;0;0)$.

Если $a = b$, то имеем ***двуполостный гиперболоид вращения***.

$$\frac{-x^2 - y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь в сечении гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости xOy, т.е. плоскостями $z = h$ $\left(|h| > c\right)$, будут получаться окружности.

Параболоиды

Различают два вида параболоидов: эллиптический и гиперболический.

1. Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}, \tag{1.53}$$

где $p>0$ и $q>0$.

При сечении эллиптического параболоида плоскостями $z=h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h. \end{cases}$$

Если $h<0$, то $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}<0$. Следовательно, плоскости $z=h$ параболоид не пересекают.

Если $h=0$, то $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=0$. Значит, плоскость $z=0$ касается параболоида в точке $O(0;0;0)$.

Если же $h>0$, то в сечении получаем эллипс, уравнения которого имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp}+\dfrac{y^2}{2hq}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

С увеличением h полуоси эллипса возрастают.

При пересечении поверхности (1.53) плоскостями $x=h$ и $y=h$ будут получаться параболы. В частности, пересекая параболоид (1.53) координатными плоскостями xOz ($y=0$) и yOz ($x=0$) соответственно получим параболы

$$z=\frac{x^2}{2p} \quad \text{и} \quad z=\frac{y^2}{2q}.$$

Таким образом, ***эллиптический параболоид*** *имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши* (рис. 1.50).

Эллиптический параболоид, заданный каноническим уравнением (1.53), *в отличие от сферы, эллипсоида и гиперболоидов, имеет только* ***две плоскости симметрии:*** *xOz и yOz* (рис. 1.50).

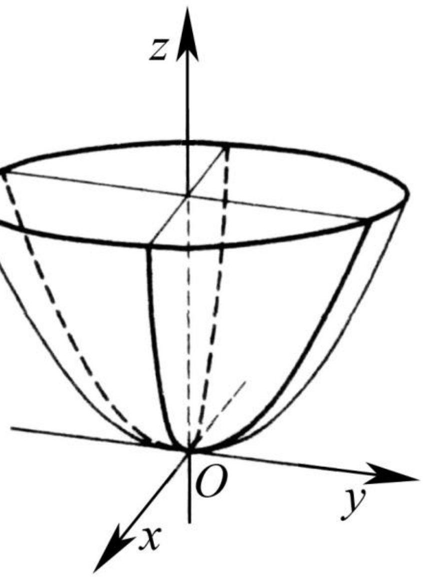


Рис. 1.50. Эллиптический параболоид

При $p = q$ будем иметь ***параболоид вращения***

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

в сечениях которого получаются окружности.

2. Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z}, \tag{1.54}$$

где $p > 0$ и $q > 0$.

При сечении гиперболического параболоида плоскостями $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2hp} - \dfrac{y^2}{2hq} = 1, \\ z = h. \end{cases} \tag{1.55}$$

Кривая (1.55) при всех значениях $h \neq 0$ является *гиперболой*. При $h > 0$ ее фокусы лежат на оси Ox. При $h < 0$ – фокусы лежат на оси Oy, а при $h = 0$ линия пересечения $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых $\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$ и $\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

При пересечении поверхности (1.54) плоскостями $y = h$ будут получаться *параболы*

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх. Так, например, при $y = 0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая гиперболический параболоид плоскостями $x = h$, получим *параболы*

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right), \\ x = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вниз. При $x = 0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Следовательно, ***гиперболический параболоид*** *имеет вид седла* (рис. 1.51).

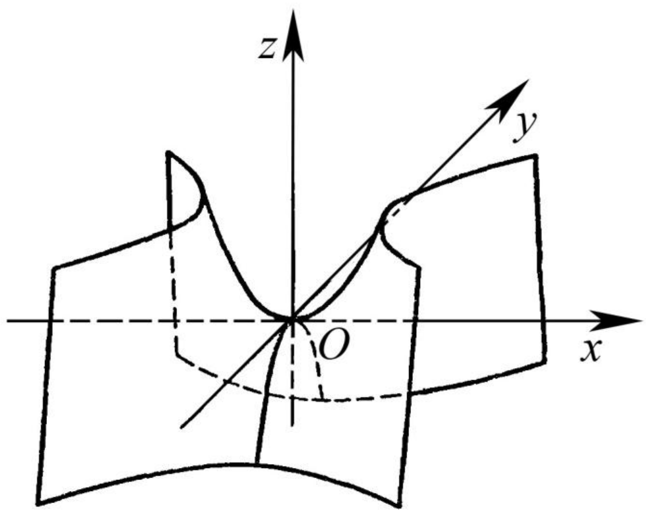


Рис. 1.51. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид, заданный каноническим уравнением (1.54), *также как и эллиптический параболоид, имеет только* ***две плоскости симметрии****: xOz и yOz* (рис. 1.51).

Конус второго порядка

Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}. \qquad (1.56)$$

Пересечем конус плоскостями $z = h$. Уравнения линии пересечения следующие

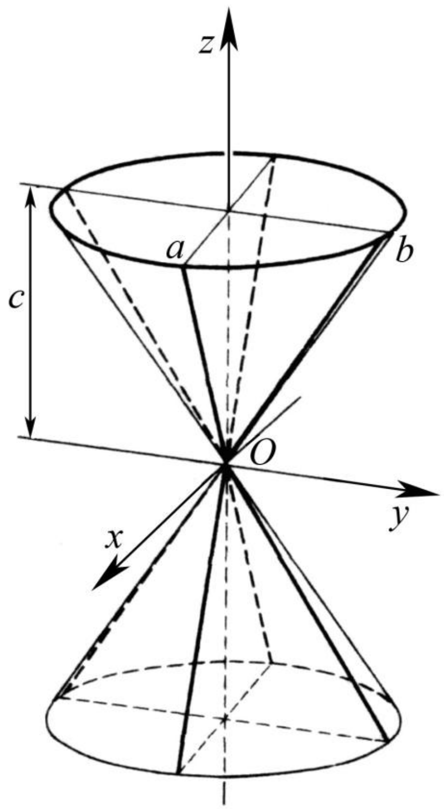


Рис. 1.52. Конус второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

При $h=0$ линия вырождается в точку $O(0;0;0)$, а при $h\neq 0$ в сечении будем иметь *эллипсы*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2c^2}{h^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{h^2}}=1, \\ z=h, \end{cases}$$

полуоси которых будут возрастать при увеличении $|h|$.

Если рассекать конус плоскостями $x=h$ и $y=h$, то в сечении получаться *гиперболы*, а при пересечении координатными плоскостями yOz $(x=0)$ и xOz $(y=0)$ эти гиперболы вырождаются в *пару пересекающихся прямых*.

Так, в случае, пересечения плоскостью $x=0$ линия пересечения

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ x=0, \end{cases}$$

распадается на следующие пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \text{ и } \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

А при пересечении плоскостью $y=0$ получим линию

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=0, \end{cases}$$

распадающуюся на прямые

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \text{ и } \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$$

Таким образом, ***конус второго порядка*** *имеет вид, изображенный* на рис. 1.52.

Конус второго порядка симметричен относительно трех плоскостей и центра симметрии. Для конуса, имеющего каноническое уравнение (1.56), этими плоскостями являются xOy, xOz, yOz, *а центр симметрии – точка* $O(0;0;0)$.

При $a=b$ получим круговой конус

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

в сечениях которого плоскостями $z=h$ будут окружности.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью *или* ***цилиндром*** *называется поверхность, образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве параллельно самой себе и пересекая каждый раз некоторую кривую K* (рис. 1.53). При этом кривая *K* называется ***направляющей*** цилиндра, а прямая *L* – его ***образующей***.

Рассмотрим такие цилиндрические поверхности, *направляющие* которых лежат в одной из координатных плоскостей, а *образующие* параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости. ***Уравнениями этих цилиндров являются уравнения их направляющих.***

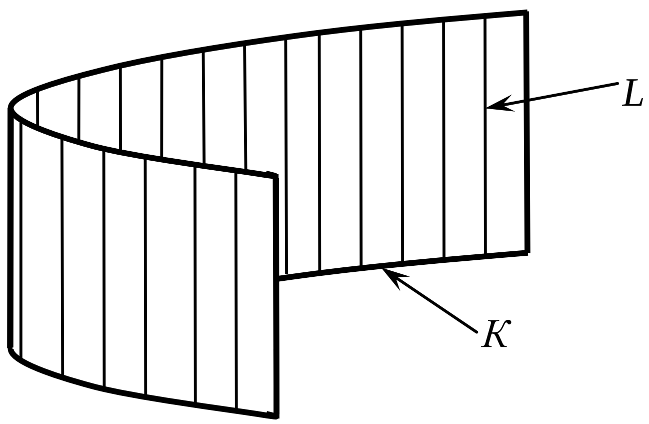


Рис. 1.53. Цилиндрическая поверхность

Так, если направляющая K лежит в плоскости xOy, а образующая L параллельна оси Oz, то уравнение цилиндра, в общем случае, записывается в виде

$$F(x;y)=0.$$

Если направляющая K лежит в плоскости xOz, а образующая L параллельна оси Oy, то уравнение цилиндра следующее

$$F(x;z)=0.$$

Если же направляющая K лежит в плоскости yOz, а образующая L параллельна оси Ox, то уравнением цилиндрической поверхности будет являться

$$F(y;z)=0.$$

Название цилиндра определяется названием направляющей.

Если *направляющей* служит *эллипс* в плоскости xOy

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \tag{1.57}$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***эллиптическим цилиндром*** (рис. 1.54), который описывается уравнением (1.57).

Частным случаем (при $a=b$) эллиптического цилиндра является ***круговой цилиндр.*** Его уравнением является

$$x^2+y^2=R^2,$$

где $R=a$.

Если *направляющей* служит *гипербола*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}, \tag{1.58}$$

то цилиндрическая поверхность называется ***гиперболическим цилиндром*** (рис. 1.55). Он описывается уравнением (1.58).

Если *направляющая – парабола* в плоскости xOy

$$\boxed{y^2 = 2px}, \tag{1.59}$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***параболическим цилиндром*** (рис. 1.56) и уравнение (1.59) описывает этот цилиндр.

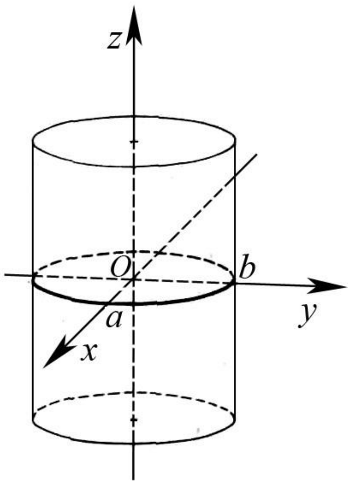


Рис. 1.54. Эллиптический цилиндр

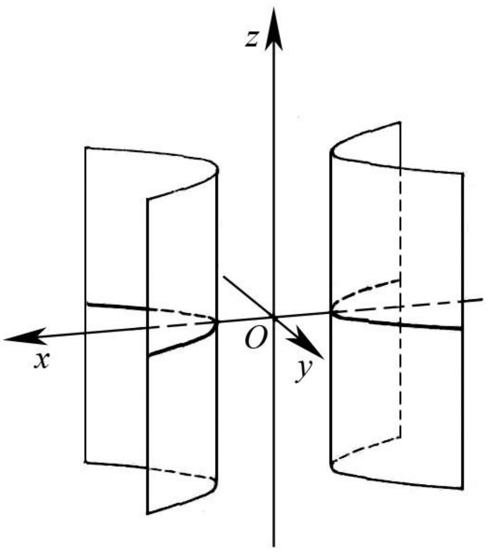


Рис. 1.55. Гиперболический цилиндр

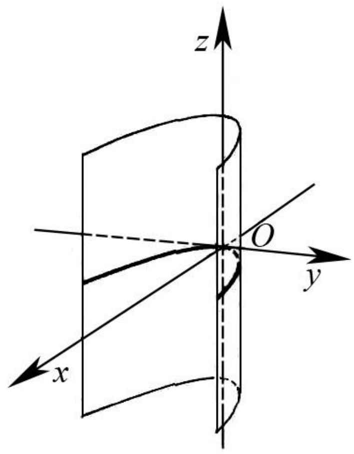


Рис. 1.56. Параболический цилиндр

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Определение производной. Таблица производных

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и некоторую точку $x = x_0$ внутри области определения функции.

Производной *функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *называется предел*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}, \qquad (2.1)$$

где Δx *– приращение аргумента, а* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *– приращение функции в точке* $x = x_0$.

Пример 2.1. Найти производную функции $y = x^2$, используя определение производной.

Решение. Аргументу x дадим приращение Δx. Тогда функция $y = x^2$ получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$y'(x) = \left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Аналогичную операцию по нахождению производной на основании определения можно произвести со всеми элементарными функциями. Производные основных элементарных функций приведем в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№	Функция	Производная
1	$y = \text{const}$	$y' = 0$
Степенная функция и ее частные случаи		
2	$y = x^n$, где n – любое число	$y' = nx^{n-1}$
3	$y = x$	$y' = 1$

Окончание табл. 2.1

№	Функция	Производная
4	$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$
Показательная функция и ее частный случай		
6	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$, где $\ln a=\log_e a$ – натуральный логарифм; $e\approx 2{,}72\ldots$ – число Эйлера
7	$y=e^x$	$y'=e^x$
Логарифмическая функция и ее частный случай		
8	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
9	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
Тригонометрические функции		
10	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
11	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
12	$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
13	$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
Обратные тригонометрические функции		
14	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
17	$y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2.2. Правила дифференцирования

Если функция $y=f\left(x\right)$ имеет производную в точке $x=x_0$, то функция называется дифференцируемой в этой точке. Если же функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция называется дифференцируемой в этом интервале. *Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.*

Пусть функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a;b)$ функции. Сформулируем для них правила дифференцирования.

1. *Производная **суммы (разности)** двух функций равна сумме (разности) производных этих функций*

$$\boxed{(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'}. \tag{2.2}$$

Данное правило справедливо для любого числа функций.

2. *Производная **произведения** двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго*

$$\boxed{(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'}. \tag{2.3}$$

3. *Формулу* (2.3) *можно распространить на любое число множителей. Например, для произведения трех функций получим*

$$\boxed{(u \cdot \upsilon \cdot w)' = u' \cdot \upsilon \cdot w + u \cdot \upsilon' \cdot w + u \cdot \upsilon \cdot w'}. \tag{2.4}$$

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*

$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot (u')}, \tag{2.5}$$

где C – константа.

5. *Производная **частного** двух функций* $\frac{u(x)}{\upsilon(x)}$, *если* $\upsilon(x) \neq 0$ *равна дроби, у которой **знаменатель** есть квадрат знаменателя данной дроби, а **числитель** равен разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя дроби на производную знаменателя,*

$$\boxed{\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\cdot\upsilon - u\cdot\upsilon'}{\upsilon^2}}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. Найти производную функции $y=\dfrac{2x-5}{x^2-3x+6}$.

Решение. Так как данная функция является дробью, то для определения ее производной применим правило дифференцирования (2.6):

$$y'=\frac{(2x-5)'\left(x^2-3x+6\right)-(2x-5)\left(x^2-3x+6\right)'}{\left(x^2-3x+6\right)^2}=\frac{2\left(x^2-3x+6\right)-(2x-5)(2x-3)}{\left(x^2-3x+6\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-6x+12-\left(4x^2-10x-6x+15\right)}{\left(x^2-3x+6\right)^2}=\frac{-2x^2+10x-3}{\left(x^2-3x+6\right)^2}.$$

2.3. Производная сложной функции

Если $y=f(u)$ есть некоторая функция переменной u, а $u=\varphi(x)$ – некоторая функция переменной x, то $y=f(\varphi(x))$ является функцией переменной x, которая называется ***сложной функцией***.

Переменную $u=\varphi(x)$ называют ***промежуточным аргументом*** *сложной функции*, а x является ***независимым аргументом***.

Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов. Например,

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x)\quad\Rightarrow\quad y=f\left(\varphi\left(\psi(x)\right)\right)=F(x).$$

Пример 2.3. Например, функции $y=\sin x^2$ и $y=\operatorname{arctg}2^{3x-1}$ являются сложными, так как

1). $y=\sin x^2 \quad\Rightarrow\quad y=\sin u,\quad u=x^2$.

2). $y=\operatorname{arctg}2^{3x-1} \quad\Rightarrow\quad y=\operatorname{arctg}u,\quad u=2^v,\quad v=3x-1$. То есть функция $y=\operatorname{arctg}2^{3x-1}$ имеет два промежуточных аргумента u и v.

Пусть нам дана сложная функция $y=f(\varphi(x))$, у которой $u=\varphi(x)$ промежуточный аргумент, а x независимый аргумент. Тогда ***производная сложной функции*** $y=f(\varphi(x))$ ***равна*** **произведению** ***производной данной функции по***

промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента, т.е.

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}. \qquad (2.7)$$

Это правило дифференцирования справедливо и в том случае, когда у сложной функции промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Пример 2.4. Найти производные функций $y = \sin x^2$ и $y = \operatorname{arctg} 2^{3x-1}$.

Решение. Данные функции являются сложными (см. *пример 2.3*.). Применим правило дифференцирования (2.7).

$$1).\ y = \sin x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\sin x^2\right)' = \cos x^2 \cdot \left(x^2\right)' = \cos x^2 \cdot 2x.$$

$$2).\ y = \operatorname{arctg} 2^{3x-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\operatorname{arctg} 2^{3x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(2^{3x-1}\right)^2} \cdot \left(2^{3x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(2^{3x-1}\right)^2} \cdot 2^{3x-1} \ln 2 \cdot (3x-1)' = \frac{1}{1+\left(2^{3x-1}\right)^2} \cdot 2^{3x-1} \ln 2 \cdot 3.$$

2.4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой

Дадим сначала определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (рис. 2.1). Прямая MM_1, проходящая через эти точки, называется ***секущей***. Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Если секущая, поворачиваясь вокруг точки M, стремится к некоторому предельному положению MP, то прямую MP называют ***касательной*** к кривой L в точке M (при этом точка M_1 может приближаться по кривой L к точке M любым способом).

Рассмотрим теперь график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке $M(x; y)$ касательную, непараллельную оси Oy. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси Ox (рис. 2.2).

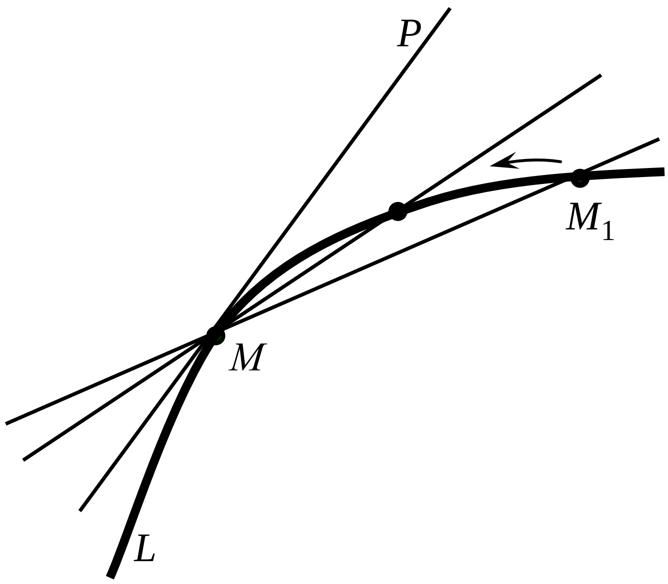


Рис. 2.1. Определение касательной

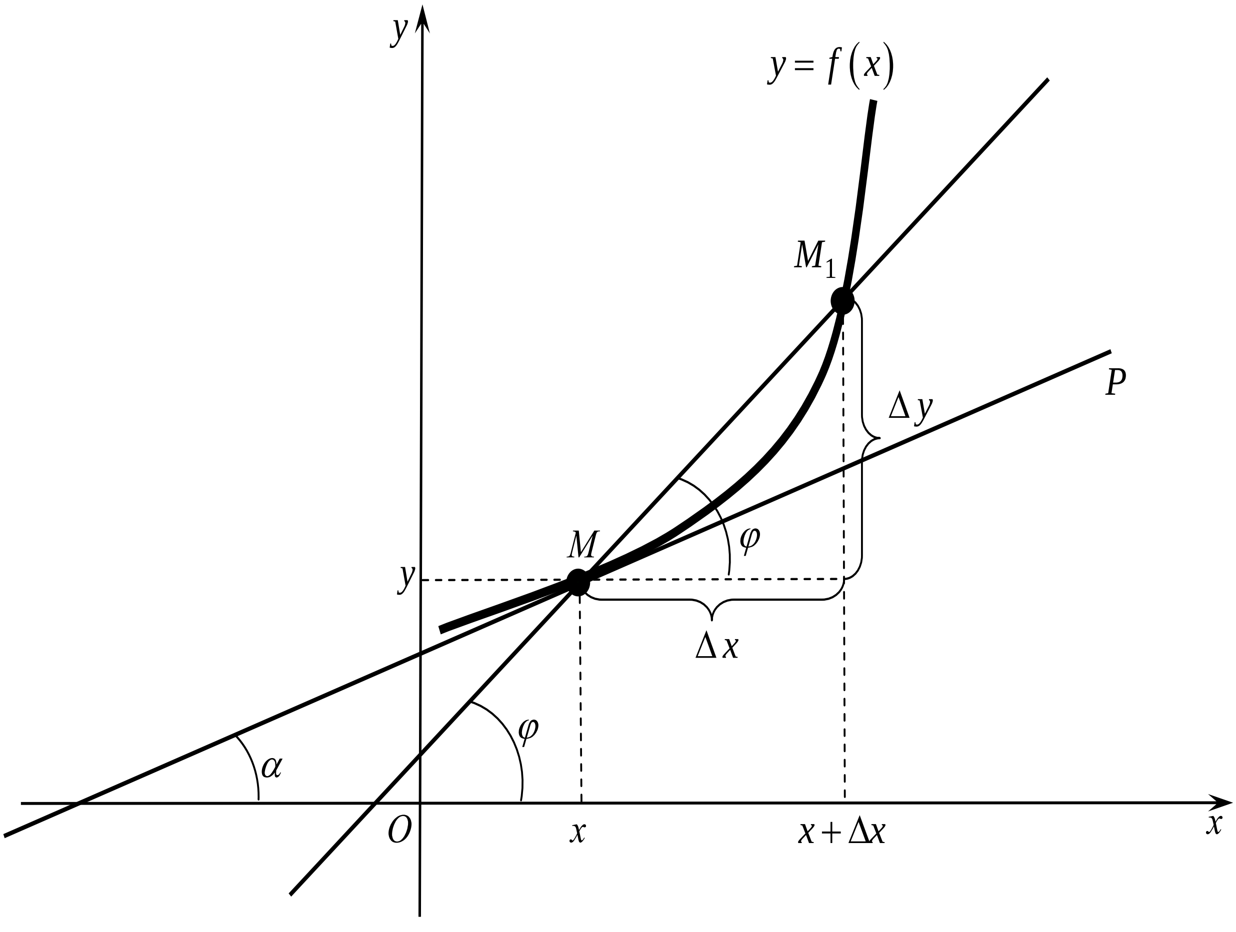


Рис. 2.2. Геометрический смысл производной

Возьмем на графике точку M_1 с абсциссой $x+\Delta x$ и проведем через точки M и M_1 секущую MM_1. Обозначим через φ – угол между секущей MM_1 и осью Ox. Из чертежа видно, что угловой коэффициент секущей MM_1 равен

$$k_{\text{ceê}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.8}$$

Будем неограниченно приближать по кривой точку M_1 к точке M (т.е. устремим Δx к нулю), при этом секущая MM_1, поворачиваясь вокруг точки M, переходит в касательную. Следовательно, угол φ стремится к углу α ($\varphi \to \alpha$), а в пределе при $\Delta x \to 0$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому, учитывая равенство (2.8), угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'(x).$$

Таким образом, ***геометрический смысл производной*** состоит в том, что ***производная*** $y'(x)$ ***функции*** $y = f(x)$ ***равна угловому коэффициенту*** ($k = \operatorname{tg}\alpha$) ***касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой*** x

$$\boxed{y'(x) = k = \operatorname{tg}\alpha}.$$

Пусть точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (рис. 2.3). Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении составим *уравнение касательной* в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

Следовательно, **уравнение касательной** можно записать как:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}. \tag{2.9}$$

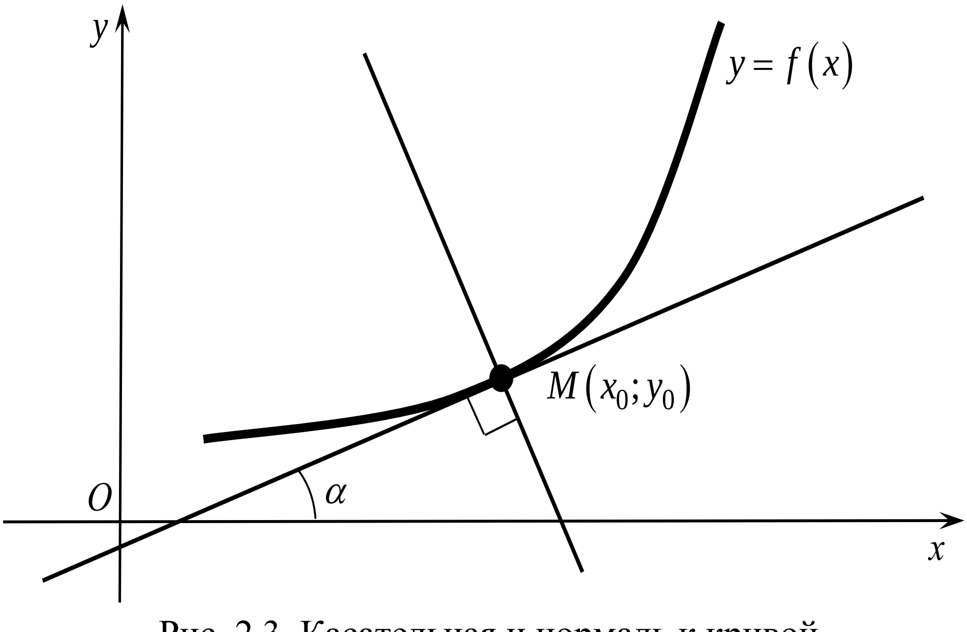


Рис. 2.3. Касательная и нормаль к кривой

Нормалью *к кривой называется прямая, которая перпендикулярна касательной в точке касания.*

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент будет равен

$$k_{\text{íîðì}} = -\frac{1}{k_{\text{êàñ}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{если } f'(x_0) \neq 0).$$

Поэтому **уравнение нормали** примет вид:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}. \tag{2.10}$$

2.5. Механический смысл производной

Рассмотрим *прямолинейное неравномерное движение* материальной точки. Пусть материальная точка M движется по прямой. За время t точка прошла расстояние $OM = S$ (рис. 2.4). Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. путь есть функция от времени

$$S = S(t). \tag{2.11}$$

Равенство (2.11) называется законом движения точки.

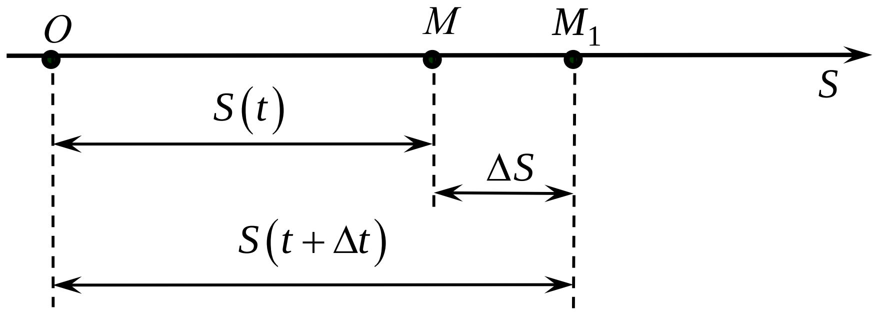


Рис. 2.4. Прямолинейное движение материальной точки

За время Δt (Δt – приращение времени) точка пройдет путь от точки M до точки M_1:

$$MM_1 = S(t+\Delta t) - S(t) = \Delta S,$$

где ΔS – приращение пути.

Если бы движение было равномерным, то точка бы двигалась с постоянной скоростью $V = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. При неравномерном движении скорость в каждый момент времени меняется и в этом случае вводят понятие мгновенной скорости движения или скорости в данный момент, т.е. $V = V(t)$:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t). \qquad (2.12)$$

Формула (2.12) справедлива и для равномерного движения.

Итак, ***механический смысл производной*** *состоит в том,* ***что скорость есть производной пути по времени.***

2.6. Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' или $f''(x)$. Таким образом $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется ***производной третьего порядка*** и обозначается y''' или $f'''(x)$. Следовательно, $y''' = \left(y''\right)'$.

Производной n–го порядка называется производная от производной $\left(n-1\right)$–го порядка (если все $\left(n-1\right)$ производная функции $y = f\left(x\right)$ существуют), т.е.

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.}$$

Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков***.

Замечание 2.1. Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках. Например, y^{VI} или $y^{(6)}$ – производные шестого порядка.

2.7. Дифференциал функции

Дифференциалом *функции* $y = f\left(x\right)$ *называется произведение производной функции* $f'\left(x\right)$ *на приращение независимой переменной* Δx *и обозначается*

$$\mathrm{d}y = f'\left(x\right)\Delta x \text{ или } \mathrm{d}f\left(x\right) = f'\left(x\right)\Delta x. \qquad (2.13)$$

Рассмотрим функцию $y = x$. Применяя формулу (2.13), найдем ее дифференциал

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = x'\Delta x = 1\cdot\Delta x.$$

Следовательно, дифференциал независимой переменной и приращение независимой переменной совпадают, поэтому формулу дифференциала (2.13) записывают в виде:

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'\left(x\right)\mathrm{d}x}. \qquad (2.14)$$

Из равенства (2.14) следует, что *производная функции равна отношению дифференциалов* $\mathrm{d}y$ *и* $\mathrm{d}x$

$$f'\left(x\right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента, т.е.

$$\mathrm{d}y = y'_u \mathrm{d}u .$$

Пример 2.5. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. Для нахождения дифференциала применим формулу (2.13). Сначала вычислим производную функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$:

$$y' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},$$

а потом подставим ее в равенство (2.13)

$$\mathrm{d}y = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\mathrm{d}x \quad \text{или} \quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\mathrm{d}x .$$

В соответствии с таблицей производных (см. табл. 2.1), напишем таблицу дифференциалов (табл. 2.2).

Таблица 2.2

№	Функция	Дифференциал
1	$y = \mathrm{const}$	$\mathrm{d}y = 0$
Степенная функция и ее частные случаи		
2	$y = x^n$	$\mathrm{d}y = nx^{n-1}\cdot\mathrm{d}x$
3	$y = x$	$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$
4	$y = \sqrt{x}$	$\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5	$y = \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
Показательная функция и ее частный случай		
6	$y = a^x$	$\mathrm{d}y = a^x \ln a\cdot\mathrm{d}x$
7	$y = e^x$	$\mathrm{d}y = e^x\cdot\mathrm{d}x$
Логарифмическая функция и ее частный случай		
8	$y = \log_a x$	$\mathrm{d}y = \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

Окончание табл. 2.2

№	Функция	Дифференциал
9	$y=\ln x$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
Тригонометрические функции		
10	$y=\sin x$	$\mathrm{d}y=\cos x\cdot\mathrm{d}x$
11	$y=\cos x$	$\mathrm{d}y=-\sin x\cdot\mathrm{d}x$
12	$y=\mathrm{tg}\,x$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
13	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
Обратные тригонометрические функции		
14	$y=\arcsin x$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
15	$y=\arccos x$	$\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
16	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
17	$y=\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2.8. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Если производная функции в каждой точке некоторого интервала $(a;b)$ равна нулю, то функция будет ***постоянной*** в каждой точке этого интервала, т.е.

$$y'=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=C \text{ для всех } x\in(a;b).$$

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на некотором интервале $(a;b)$, если на этом интервале большему значению аргумента соответствует *большее (меньшее)* значение функции, т.е. для $x_1,x_2\in(a;b)$,

если $x_2>x_1$ и $f(x_2)>f(x_1)$, то $y=f(x)$ – возрастающая функция;

если $x_2>x_1$ и $f(x_2)<f(x_1)$, то $y=f(x)$ – убывающая функция.

Теорема 2.1 *(достаточное условие возрастания и убывания функции).* Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $(a;b)$ и *производная функции положительна* $f'(x)>0$ (*отрицательна* $f'(x)<0$) для всех $x\in(a;b)$, то *функция будет возрастающей* (*убывающей*) на этом интервале.

Пример 2.6. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=x^2$.

Решение. Производная функции $y=x^2$ равна $y'=2x$.

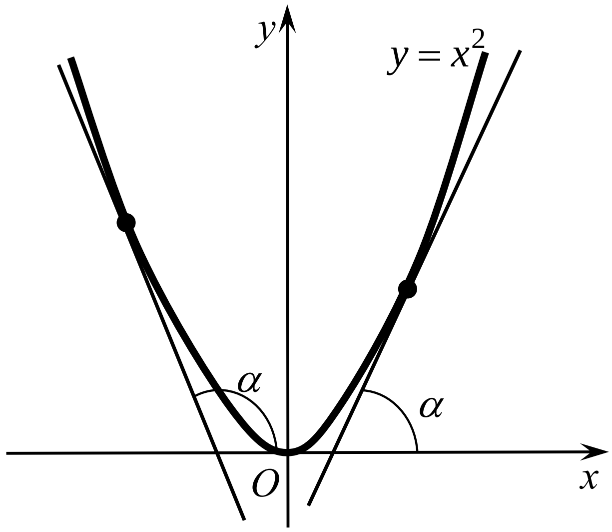


Рис. 2.5. Чертеж к примеру 2.6.

Если $x>0$, то $y'>0$ $\Rightarrow$ функция $y=x^2$ возрастает на интервале $(0;\infty)$.

Если же $x<0$, то $y'<0$ $\Rightarrow$ функция $y=x^2$ убывает на интервале $(-\infty;0)$.

Из геометрического смысла производной следует, что если касательная составляет острый угол с осью Ox, то функция возрастает, а если тупой, то функция убывает (рис. 2.5).

2.9. Экстремумы функции

Пусть точка $x=x_0$ лежит внутри области определения функции $y=f(x)$.

Точка $x=x_0$ называется ***точкой максимума*** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Точка $x=x_0$ называется ***точкой минимума*** функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

Значение функции $f(x_0)$ в точке максимума (минимума) называется ***максимумом (минимумом)*** функции (рис. 2.6 и 2.7).

Максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами*** функции.

Экстремумы функции имеют *локальный* характер: отдельные минимумы могут быть больше отдельных максимумов той же функции (рис. 2.8).

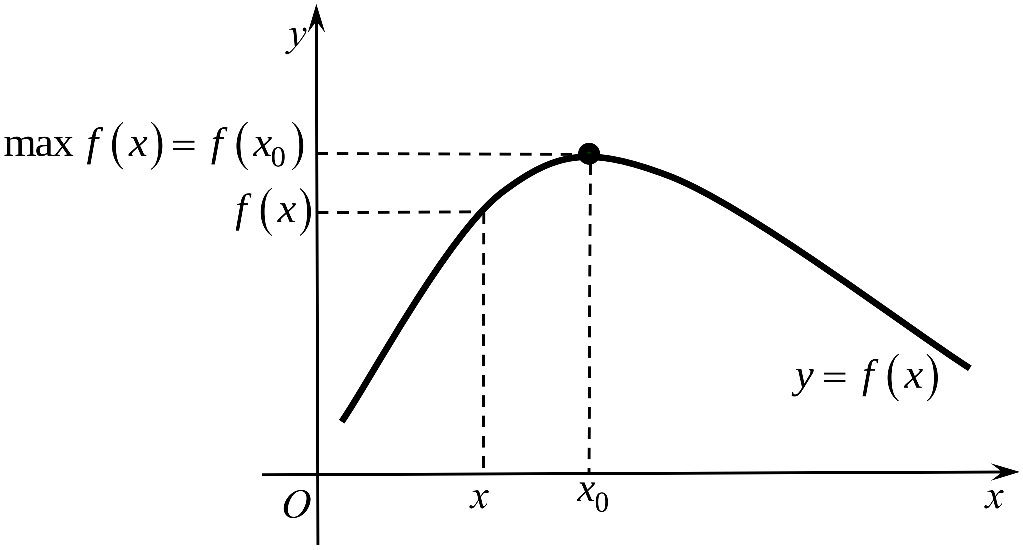


Рис. 2.6. Максимум функции $y = f(x)$

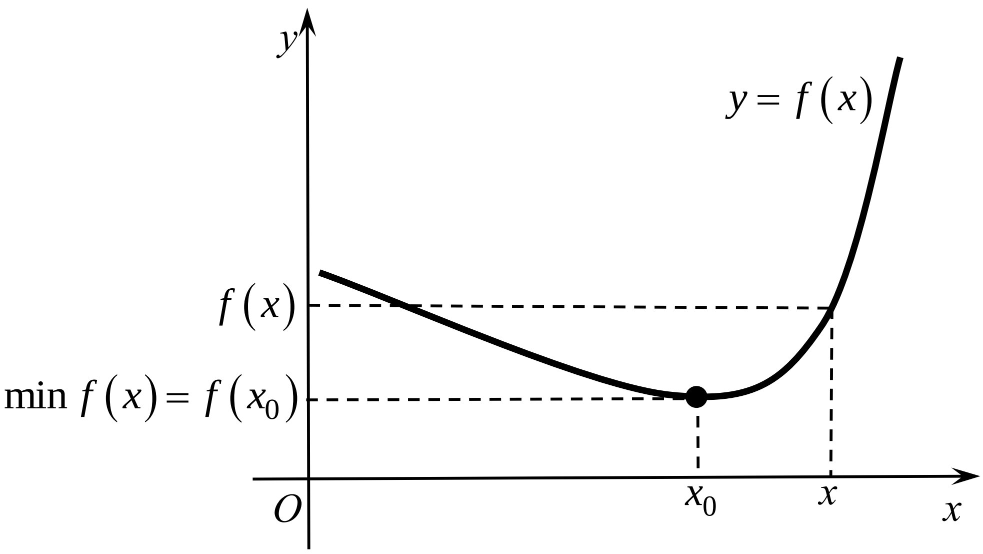


Рис. 2.7. Минимум функции $y = f(x)$

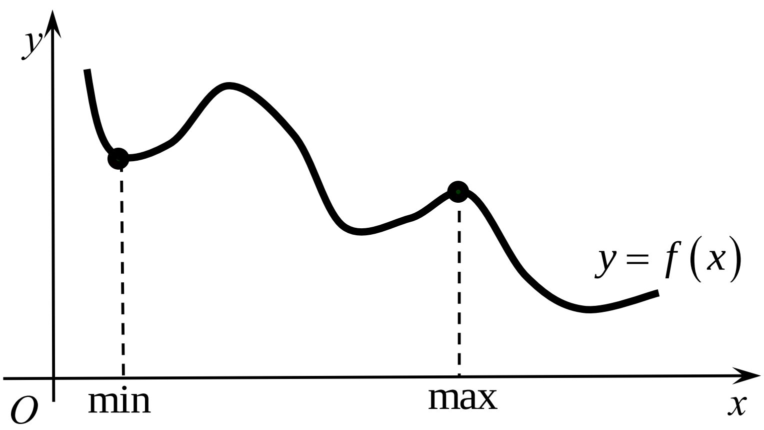


Рис. 2.8. Локальный характер экстремумов

Теорема 2.2 (*необходимое условие существования экстремума*). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то ее производная равна нулю в этой точке:

$$f'(x_0) = 0. \tag{2.14}$$

Геометрически равенство (2.14) означает, что если x_0 точка экстремума, то касательная к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ параллельна оси Ox (рис. 2.9).

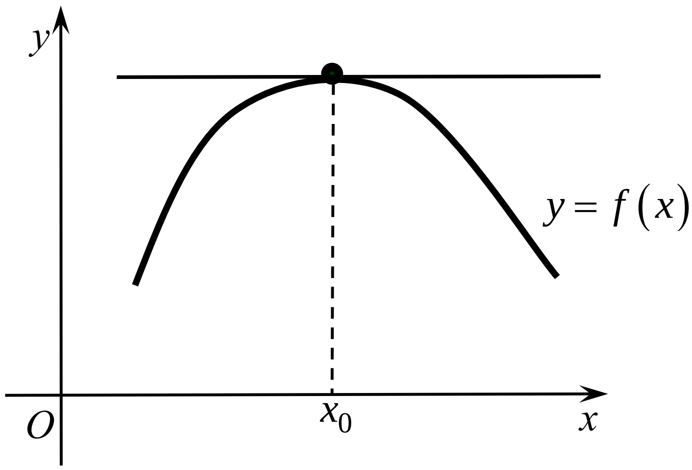


Рис. 2.9. Геометрическая интерпретация равенства (2.14)

Отметим, что **обратное утверждение (если $f'(x_0) = 0$, то $x = x_0$ – точка экстремума) неверно.** Например, для функции $y = x^3$ ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой экстремума (рис. 2.10).

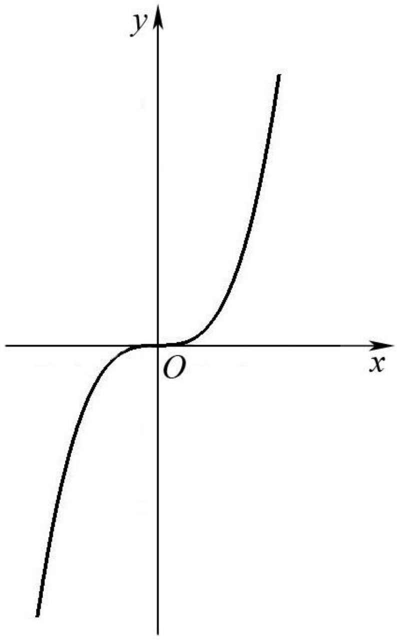


Рис. 2.10. График функции $y = x^3$

Есть функции, у которых в точках экстремума производная не существует. Такими точками являются угловые точки и точки, в которых производная обращается в бесконечность. Например, функция $y = |x|$ (рис. 2.11) в точке $x = 0$ производной не имеет (касательная в точке $O(0;0)$ не существует), но $x = 0$ – точка минимума функции $y = |x|$.

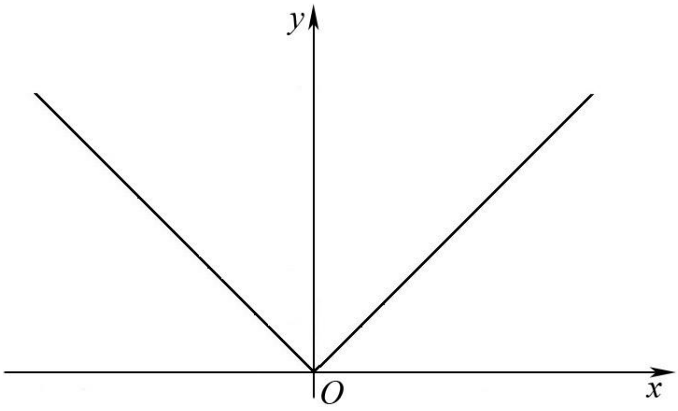


Рис. 2.11. График функции $y = |x|$

Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$, график которой изображен на рис. 2.12, в точке $O(0;0)$ имеет экстремум (минимум), однако в этой точке производная не существует, так как в точке $O(0;0)$ касательная не имеет углового коэффициента.

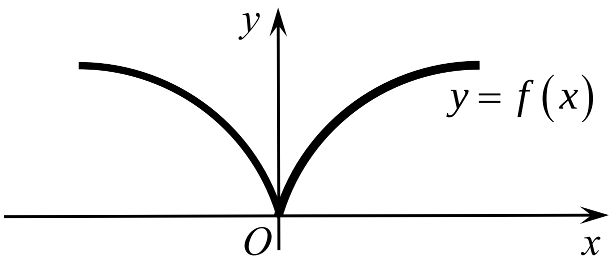


Рис. 2.12. График функции $y = \sqrt[3]{x^2}$

Точка, в которой производная функции равна нулю, называется ***стационарной*** точкой. *Стационарные точки, а также точки, в которых производная не существует или бесконечна, называются* ***критическими.***

Точки экстремума следует искать именно среди критических точек.

Теорема 2.3 (*достаточное условие существования экстремума*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале, содержащем *критическую точку* x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, *и при переходе через нее слева направо* **производная** $f'(x)$ **меняет знак *с плюса на минус, то*** x_0 ***есть точка максимума****; если же производная* $f'(x)$ *меняет знак* ***с минуса на плюс, то*** x_0 ***есть точка минимума***.

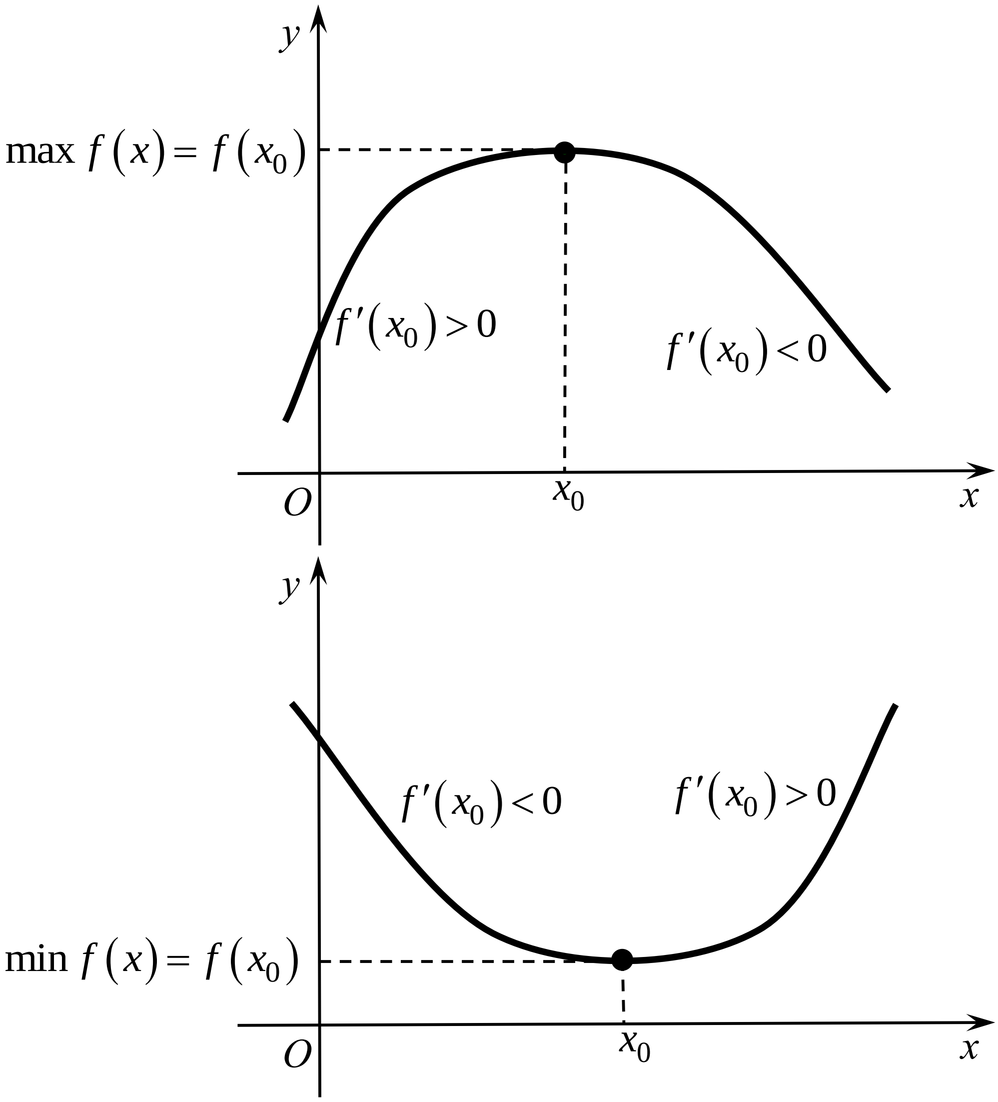


Рис. 2.13. Геометрическая интерпретация теоремы 2.3.

2.9. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, называются ***глобальными экстремумами*** *на этом отрезке.*

Нахождение глобальных экстремумов проводят по следующей схеме:

1. Находят критические точки функцию, принадлежащие интервалу $(a;b)$.

2. Вычисляют значение функции на границах отрезка $[a;b]$ и в критических точках, принадлежащих интервалу $(a;b)$.

3. Среди точек экстремума и значений на границах отрезка $[a;b]$ находят наименьшее ($m=\min f(x),\ x\in[a;b]$) и наибольшее ($M=\max f(x),\ x\in[a;b]$). Эти значения и будут глобальными экстремумами.

Пример 2.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $x\in\left[-8;\frac{1}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдем критические точки функцию. Сначала найдем ее производную

$$y'=\left((x-1)x^{\frac{2}{3}}\right)'=(x-1)'x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\frac{(x-1)}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{x+\frac{2}{3}(x-1)}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Теперь приравняем производную к нулю и найдем *стационарные точки*

$$y'=\frac{\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x}}=0.$$

Так как производная представляет собой дробь, то она равна нулю тогда, когда ее числитель равен нулю

$$\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{2}{5}.$$

Теперь найдем точки, в которых производная не существует. Для этого приравняем знаменатель дроби к нулю (так как на ноль делить нельзя)

$$\sqrt[3]{x}=0\quad\Rightarrow\quad x=0.$$

Таким образом, мы имеем две *критические точки*: $x_1=\frac{2}{5}$ и $x_2=0$.

2. Вычислим значение функции $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ на границах отрезка $\left[-8;\frac{1}{2}\right]$ и в критических точках:

$$y_{\min} = y\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}, \quad y_{\max} = y(0) = 0, \quad y(-8) = -36, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}.$$

3. Выберем среди $y_{\min} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$, $y_{\max} = 0$, $y(-8) = -36$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$ наименьшее и наибольшее. Как видно наименьшим значением функции $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $\left[-8; \frac{1}{2}\right]$ является $m = y(-8) = -36$, а наибольшим $M = y(0) = 0$.

2.10. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

График кривой называется ***выпуклым*** на некотором интервале $(a;b)$, если он расположен под касательной, проведенной в произвольной точке этого интервала; в противном случае график кривой называется ***вогнутым*** (рис. 2.14).

Точкой перегиба *функции* $y = f(x)$ *называется такая точка графика функции, которая разделяет интервалы выпуклости и вогнутости этого графика (рис. 2.14).*

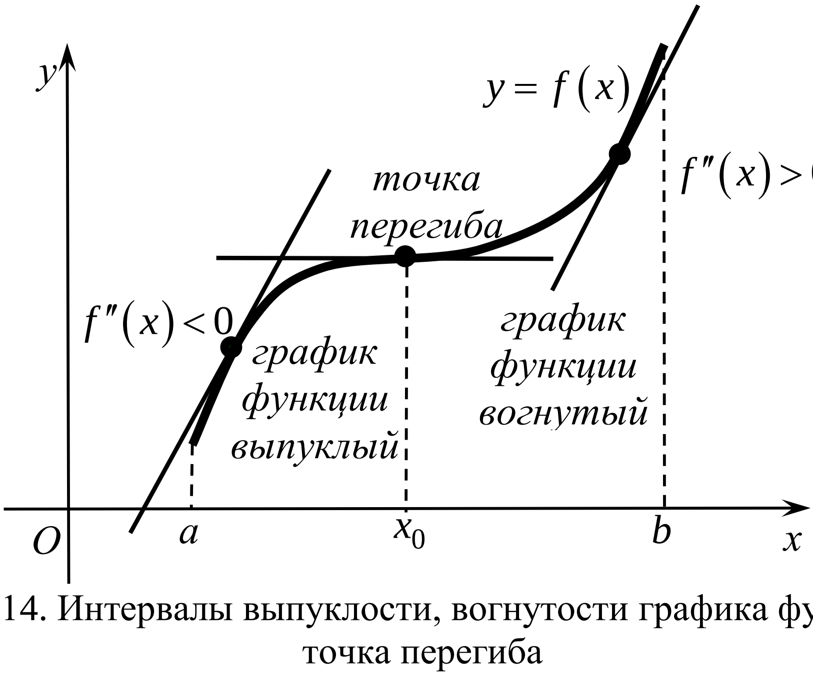


Рис. 2.14. Интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точка перегиба

Интервалы выпуклости и вогнутости находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.4 *(достаточное условие выпуклости и вогнутости графика функции).*

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет ***отрицательную вторую производную***, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале ***выпуклый***. Если же во всех точках интервала $(a;b)$ ***вторая производная положительна***, т.е. $f''(x) > 0$, то график функции ***вогнутый***.

Для нахождения точек перегиба используется теорема:

Теорема 2.5 *(достаточное условие существования точек перегиба).*

В абсциссе точки перегиба **вторая производная** $f''(x)$ **функции** $y = f(x)$ **обращается в ноль или не существует и меняет знак при переходе через эту точку**.

Точки, в которых $f''(x)$ не существует или равна нулю *называются критическими точками второго рода*. Таким образом, точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

Пример 2.8. Исследовать функцию $y = x^3$ (рис. 2.10) на вогнутость и выпуклость и найти точки перегиба.

Решение.

Найдем вторую производную функции $y = x^3$

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y'' = \left(y'\right)' = \left(3x^2\right)' = 6x.$$

Теперь приравняем ее к нулю и найдем *критические точки второго рода*

$$y'' = 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Точка $x = 0$ разбивает область определения функции $y = x^3$ на промежутки $(-\infty;0)$ и $(0;\infty)$. Определим в каждом из них знак второй производной. Для этого любое значение переменной *x* из соответствующего интервала подставим в $y'' = 6x$. Результаты исследования представим в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3

x	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;\infty)$
y''	–	0	+
y	$\cap$	0	$\cup$

Из *теоремы 2.4.* следует, что график функции $y = x^3$ на интервале $(-\infty;0)$

выпуклый, а на интервале $(0;\infty)$ вогнутый. При переходе через точку $x=0$ вторая производная меняет знак. Следовательно, по *теореме 2.5.*, точка $O(0;0)$ является точкой перегиба.

2.11. Общая схема исследования функции

Для изучения функции и построения ее графика проводят исследование по следующей схеме:

1. Находят область определения функции $D(f)$.

2. Находят точки пересечения графика с осями координат.

3. Исследуют функцию на экстремум и определяют интервалы возрастания и убывания функции.

4. Находят точки перегиба и исследуют функцию на выпуклость и вогнутость.

5. Находят асимптоты графика функции.

6. Исследуют функцию на четность (нечетность) и периодичность.

Напомним, что функция $y=f(x)$ называется *четной*, если ее значения не меняются при изменении знака аргумента (при условии, что $x\in D(f)$ и $-x\in D(f)$), т.е.

$$f(-x)=f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy, поэтому, построение графика четной функции упрощается: достаточно построить график для $x\geq 0$ и использовать зеркальное отражение через ось Oy. Примером четной функции может служить $y=|x|$ (см. рис. 2.11).

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если она меняет знак при изменении знака аргумента (при условии, что $x\in D(f)$ и $-x\in D(f)$), т.е.

$$f(-x)=-f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Примером нечетной функции является $y=x^3$ (см. рис. 2.10).

7. На основании результатов первых шести пунктов строят график исследуемой функции

Пример 2.9. Исследовать функцию $y=6x^2-9x-x^3$ и построить ее график.

Решение.

1. Данная функция существует при всех значениях переменной *x*. Значит, ее область определения $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Найдем точки пересечения графика функции $y=6x^2-9x-x^3$ с осями координат.

а). Если $x=0$, то $y=0$.

б). При $y=0$ имеем $6x^2-9x-x^3=0 \Rightarrow -x\left(x^2-6x+9\right)=0$. Следовательно, или $x_1=0$ или $6x-9-x^2=0$. Решаем квадратное уравнение $6x-9-x^2=0$:

$$6x-9-x^2=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x_{2,3}=3$$

Итак, функция $y=6x^2-9x-x^3$ пересекает ось Ox в точках $O(0;0)$ и $A(3;0)$.

3. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума. Для этого вычислим первую производную

$$y'=\left(6x^2-9x-x^3\right)'=12x-9-3x^2=-3\left(x^2-4x+3\right).$$

Используя необходимое условие существования экстремума *(теорема 2.2.)*, найдем точки, в которых производная равна нулю:

$$-3\left(x^2-4x+3\right)=0 \Rightarrow x_1=3 \text{ è } x_2=1.$$

Точки $x_1=3$ и $x_2=1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;1)$, $(1;3)$ и $(3;\infty)$.

Чтобы определить, возрастает или убывает функция на каждом из перечисленных интервалов, воспользуемся достаточным условием возрастания и убывания функции *(теорема 2.1)*.

Найдем знак первой производной в каждом из интервалов. Для этого возьмем любое значение переменой *x* из соответственного интервала и, подставим его в выражение для y' и определим знак первой производной при выбранном значении *x*. Так, в интервале $(-\infty;1)$ $y'(x)<0$, значит, функция на этом интервале убывает. В интервале $(1;3)$ $y'(x)>0$, т. е. функция на этом интервале возрастает. На интервале $(3;\infty)$, $y'(x)<0$ следовательно, функция убывает на этом интервале. Результаты исследования запишем в виде табл. 2.4.

Таблица 2.4

x	$(-\infty;1)$	$x=1$	$(1;3)$	$x=3$	$(3;\infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	]	-4	Z	0	]

Из таблицы видно, что при переходе через критическую точку $x=1$ производная $y'(x)$ меняет знак с «$-$» на «+». Следовательно, по *теореме 2.3* точка $x=1$ является точкой минимума ($y_{\min}=y(1)=-4$). А при переходе через критическую точку $x=3$ производная $y'(x)$ меняет знак с «+» на«$-$». Таким образом, при $x=3$ функция $y=6x^2-9x-x^3$ достигает максимума ($y_{\max}=y(3)=0$).

Таким образом, график функции $y=6x^2-9x-x^3$ проходит через точки $A(3;0)$ и $B(1;-4)$.

4. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба. Для этого вычислим вторую производную функции $y=6x^2-9x-x^3$

$$y''=\left(12x-9-3x^2\right)'=12-6x.$$

Теперь приравняем ее к нулю и найдем *критические точки второго рода*

$$y''=12-6x=0 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

Точка $x=2$ разбивает область определения функции $y=6x^2-9x-x^3$ на промежутки $(-\infty;2)$ и $(2;\infty)$. Определим в каждом из них знак второй производной. Для этого любое значение переменной *x* из соответствующего интервала подставим в $y''=12-6x$. Результаты исследования представим в виде табл. 2.5.

Таблица 2.5

x	$(-\infty;2)$	$x=2$	$(2;\infty)$
y''	+	0	–
y	$\cup$	-2	$\cap$

Из *теоремы 2.4* следует, что график функции $y=6x^2-9x-x^3$ на интервале $(-\infty;2)$ вогнутый, а на интервале $(2;\infty)$ выпуклый. При переходе через точку $x=2$ вторая производная меняет знак. Следовательно, по *теореме 2.5*, точка $C(2;-2)$ является точкой перегиба.

5. Данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, так как

$$y(-x)=6(-x)^2-9(-x)-(-x)^3=6x^2+9x+3x^3\neq y(x)\neq -y(x).$$

Функция $y=6x^2-9x-x^3$ непериодическая.

6. Асимптот функция $y=6x^2-9x-x^3$ не имеет.

7. Строим график функции $y=6x^2-9x-x^3$ (рис. 2.15), отметив вначале на плоскости Oxy точки пересечения функции с осями координат, точки экстремума функции и точку перегиба.

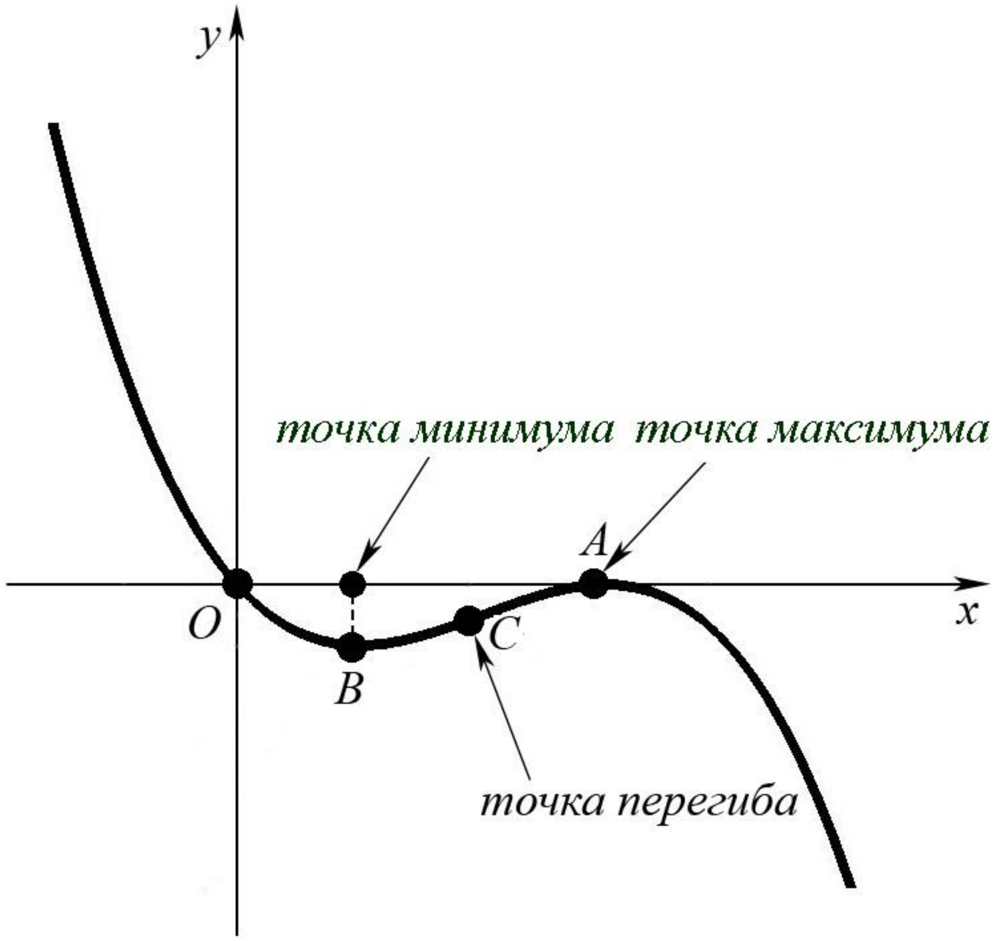


Рис. 2.15. График функции $y=6x^2-9x-x^3$

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл

3.1.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении мы по заданной функции $y = F(x)$ находили ее производную. Эта задача решалась довольно просто (необходимо было использовать таблицу производных, правила дифференцирования и формулу для нахождения производной сложной функции).

В интегральном исчислении мы будем решать **обратную задачу**: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$, т.е. требуется восстановить функцию по ее производной.*

Например, $f(x) = 4x^3$. Значит $F(x) = x^4$ потому что $\left(x^4\right)' = 4x^3$, но $F(x) = x^4 + C$, $C = \text{const}$ – также решение этой задачи, так как $\left(x^4 + C\right)' = 4x^3$. Таким образом поставленная задача имеет бесчисленное множество решений.

К подобным задачам (восстановить функцию по ее производной) приводят многие задачи физики, механики и т.д.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется условие $F'(x) = f(x)$*.

Первообразная определяется с точностью до постоянной, т.е. если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(x) + C$ – тоже ее первообразная. *Таким образом, для функции $f(x)$ существует бесчисленное множество первообразных $F(x) + C$.*

Множество первообразных $F(x) + C$ данной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** *от функции $f(x)$ и обозначается*

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C},$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\mathrm{d}x$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования, $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Нахождение неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

В декартовой системе координат неопределенный интеграл представляет собой совокупность «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует одна кривая из совокупности (рис. 3.1)).

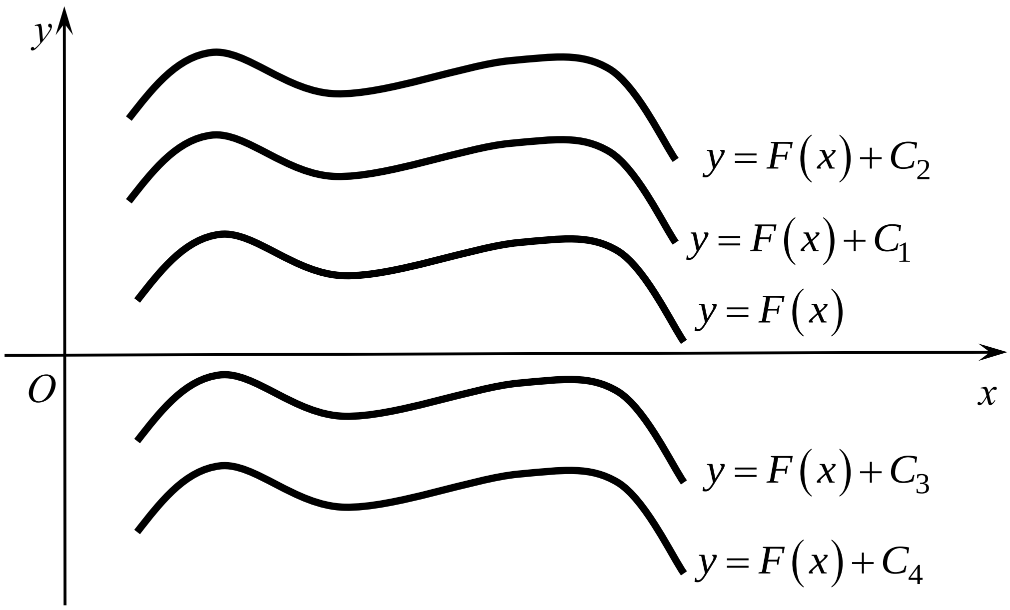


Рис. 3.1. Множество первообразных

3.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x),$$

а дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Если подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции $F(x)$, то

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x,$$

где $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций, в частности для двух функций

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

3.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу дифференциалов (таблица 2.2.) и свойства неопределенного интеграла.

Например, так как $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x \cdot \mathrm{d}x$, то по *второму свойству* неопределенного интеграла имеем

$$\int \cos x \cdot \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(\sin x) = \sin x + C,$$

или если $\mathrm{d}(\mathrm{tg}x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$, то

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \mathrm{d}(\mathrm{tg}x) = \mathrm{tg}x + C.$$

Таким образом, получаем **таблицу основных интегралов**.

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \ \left(\int \mathrm{d}x = x + C \right).$
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$
4. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$
5. $\int \mathrm{tg}\, x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
6. $\int \mathrm{ctg}\, x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
7. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$
8. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$
9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

11. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

12. $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\right)$.

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C\right)$.

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Рассмотрим основные методы интегрирования.

3.1.4. Основные методы интегрирования

Простейший метод интегрирования заключается в том, что данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции или всего подынтегрального выражения и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам. Кроме этого используют элементарные преобразования дифференциала (*операция «внесения под знак дифференциала»*). К элементарным преобразованиям дифференциала относят:

$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b), \quad a \ne 0 = \mathrm{const}$ и $b = \mathrm{const}$,

$x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2\right), \quad \cos x \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x), \quad \sin x \cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$,

$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln x), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}(\mathrm{tg}x)$ и другие.

Вообще, для любой функции $f(u)$ справедливо равенство

$$\boxed{f'(u)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(f(u))}, \tag{3.1}$$

причем в этом равенстве u – это либо независимая переменная, либо любая дифференцируемая функция от другой переменной.

Формула (3.1) часто используется при вычислении интегралов.

Пример 3.1. Найти $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+6}$.

Решение.

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+6} = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+6)}{x^2+6} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+6)}{x^2+6} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6\right| + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Иногда путем перехода к новой переменной подынтегральное выражение может значительно упроститься.

Пусть задан интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$. Сделаем подстановку

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – монотонная, дифференцируемая функция.

Тогда $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ и получим формулу

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \psi(t)\mathrm{d}t}, \tag{3.2}$$

где в найденном интеграле в правой части равенства (3.2) **возвращаются от новой переменной интегрирования *t* к переменной *x*.**

Иногда удобнее в качестве замены выбирать новую переменную $t = g(x)$.

Пример 3.2. Найти $\int \sin(3x-2)\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \sin(3x-2)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} 3x-2=t \\ x = \frac{1}{3}(t+2) \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-2) + C.$$

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда дифференциал произведения функций u и υ равен

$$\mathrm{d}(u\upsilon) = u\mathrm{d}\upsilon + \upsilon\mathrm{d}u. \qquad (3.3)$$

Интегрируя обе части формулы (3.3), получим

$$\int \mathrm{d}(u\upsilon) = \int (u\mathrm{d}\upsilon + \upsilon\mathrm{d}u). \qquad (3.4)$$

Используя свойства неопределенного интеграла, перепишем формулу (3.4) в виде

$$u\upsilon = \int u\mathrm{d}\upsilon + \int \upsilon\mathrm{d}u. \qquad (3.5)$$

Представив равенство (3.5) в виде

$$\boxed{\int u \cdot \mathrm{d}\upsilon = u \cdot \upsilon - \int \upsilon \cdot \mathrm{d}u}. \qquad (3.6)$$

получим формулу, которая называется ***формулой интегрирования по частям***.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и $\mathrm{d}\upsilon$. Затем, после нахождения υ и $\mathrm{d}u$, используется формула (3.6). Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз при нахождении одного интеграла.

Пример 3.3. Найти $\int x \sin x \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}\upsilon = \sin x\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \upsilon = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

3.1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$ и $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+px+q}}$. Они интегрируются по следующей схеме:

● в знаменателе дроби в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат;

● производится замена переменной, после которой интеграл становится табличным.

Пример 3.4. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+12x+9}$.

Решение.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+12x+9} = \left| \begin{array}{l} 4x^2+12x+9 = 4\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right) = 4\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right) = \\ = 4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right) = 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{4\left(x+\frac{3}{2}\right)}+C.$$

.

3.1.6. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических выражений.

1. Интегралы типа

$$\int \cos mx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x,\ \int \sin mx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x \text{ и } \int \sin mx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

где m и n – действительные числа, вычисляются при помощи известных тригонометрических формул, превращающих произведение в сумму.

$$\cos mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right],$$
$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(m-n\right)x + \sin\left(m+n\right)x\right].$$

Пример 3.5. Найти $\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left[-\sin 3x + \sin 7x\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sin 3x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin 7x \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \sin 3x \, \mathrm{d}(3x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int \sin 7x \, \mathrm{d}(7x) = \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

2. Для вычисления интегралов типа
$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, \mathrm{d}x$$
применяются различные приемы в зависимости от того, в какой степени (четной или нечетной) находятся тригонометрические функции.

Рассмотрим два случая:

а). Если хотя бы одно из чисел m **или** n – нечетное положительное число, то необходимо *«отделить»* соответствующую тригонометрическую функцию ($\sin x$ или $\cos x$) и внести ее под знак дифференциала.

Пример 3.6. Найти $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int \sin^2 x \, \mathrm{d}(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x) = \left|u = \cos x\right| =$$
$$= -\int (1-u^2)\mathrm{d}u = -\int \mathrm{d}u + \int u^2 \mathrm{d}u = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

б). Если m **и** n – четные положительные числа, то используются тригонометрические формулы понижения степени:
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример 3.7. Найти $\int \cos^2 3x \, \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int \cos^2 3x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 6x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 6x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C.$$

Если производная полученного результата совпадает с подынтегральной функцией, то неопределенный интеграл найден верно.

3.1.7. «Неберущиеся» интегралы

Основная теорема интегрального исчисления утверждает, что *если подынтегральная функция непрерывна, то неопределенный интеграл существует, т.е. всегда существует первообразная.* Однако первообразная не всегда является элементарной функцией.

Интегралы, первообразные которых не выражаются через элементарные функции, называются *«неберущимися».*

К числу «неберущихся» интегралов относятся, например,

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\ \text{и другие.}$$

На практике для вычисления интегралов можно пользоваться справочниками, где существуют обширные таблицы интегралов от элементарных функций. Например, «Таблицы неопределенных интегралов» М.Л. Смолянского.

3.2. Определенный интеграл

3.2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Путь, пройденный телом

Рассмотрим задачу, обратную той, которая привела нас к механическому смыслу производной (см. параграф 2.5.). Будем считать, что нам *известен закон изменения мгновенной скорости* $V = V(t)$ *при движении точки* и теперь *нас интересует путь, пройденный материальной точкой за некоторый промежуток времени от* $t = T_1$ *до* $t = T_2$.

Так как движение не предполагается равномерным, то мы **не можем** вычислить путь как произведение скорости на истекшее время

$$S = V(T_2 - T_1).$$

Поэтому для вычисления пути поступим следующим образом. Разобьем точками $T_1 = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T_2$ весь промежуток времени на большое число малых, не обязательно равных друг другу интервалов времени $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, …, $[t_{n-1}; t_n]$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ – некоторые промежуточные произвольно выбранные моменты времени (рис. 3.2).

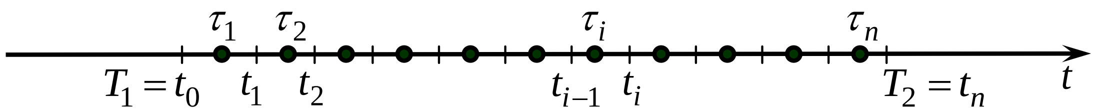


Рис. 3.2. Вычисление пути, пройденного телом

Пусть τ_i – какой-либо момент времени из промежутка $[t_{i-1}; t_i]$. Величина $V(\tau_i)$ есть скорость движения точки в момент τ_i. Тогда произведение

$$V(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – продолжительность i-ого промежутка времени, выражает приближенно путь, пройденный точкой за i-ый промежуток времени. Следовательно, сумма

$$S \approx S_n = V(\tau_1)\Delta t_1 + V(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + V(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} V(\tau_i)\Delta t_i \qquad (3.7)$$

приближенно выражает путь, пройденный точкой за все время.

Формула (3.7) тем точнее, чем мельче будет разбиение основного промежутка времени. Пусть $d = \max \Delta t_i$ – продолжительность наибольшего промежутка времени. Тогда точное значение пути S получаем, переходя к пределу суммы (3.7) при $d = \max \Delta t_i \to 0$ (при этом $n \to \infty$)

$$S = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} V(\tau_i)\Delta t_i. \qquad (3.8)$$

Масса неоднородного стержня

Под неоднородным стержнем понимается тело, размеры которого учитываются только в одном направлении (например, только вдоль оси *OX*). Таким образом, поперечным сечением такого тела можно пренебречь, а массой пренебречь нельзя.

Если бы стержень был однородным, то его плотность измерялась бы отношением массы к его длине. Если же стержень неоднороден, то его плотность в разных точках различная. Поэтому вводится понятие линейной плотности.

Расположим стержень на оси *OX*. Под линейной плотностью стержня в точке с абсциссой *x* понимают скорость изменения его массы по длине, т.е.

$$\rho = \rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Линейная плотность $\rho = \rho(x)$ является непрерывной функцией координаты *x* и $\rho(x) \geq 0$.

Пусть нам известна линейная плотность $\rho = \rho(x)$ ***неоднородного*** стержня. Требуется найти его массу.

Так как стержень *неоднородный* ($\rho \neq \text{const}$), то его массу M нельзя вычислить по формуле

$$M = (b - a) \cdot \rho,$$

где a и b – границы стержня.

Для вычисления массы стержня поступим следующим образом. Разобьем весь стержень произвольными точками $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на большое число малых, не обязательно равных друг другу участков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$ (рис. 3.3).

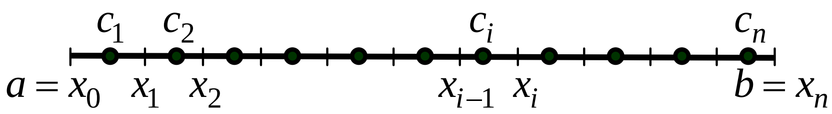


Рис. 3.3. Вычисление массы неоднородного стержня

В каждом участке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим в ней значение линейной плотности $\rho(c_i)$.

Так как длины участков $[x_{i-1}; x_i]$ малы, то изменение плотности на каждом из них незначительно, и масса каждого участка приближенно будет равна произведению

$$m_i \approx \rho(c_i) \cdot \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина соответствующего участка стержня.

Массу всего стержня приближенно можно посчитать по формуле

$$M \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) \cdot \Delta x_i. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) тем точнее, чем мельче будет разбиение стержня на участки. Пусть $d = \max \Delta x_i$ – длина наибольшего участка стержня. Тогда точное значение массы стержня получаем, переходя к пределу суммы (3.9) при $d = \max \Delta x_i \to 0$ (при этом $n \to \infty$)

$$M = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) \cdot \Delta x_i . \tag{3.10}$$

3.2.2. Определение определенного интеграла

Выражения (3.8) и (3.10), получающиеся при решении различных задач, имеют одинаковую структуру. Аналогичные выражения получаются и во многих других задачах, что дает основание для следующего определения.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, где $a < b$. Выполним следующие действия.

С помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ разобьем произвольным образом отрезок $[a;b]$ на n **частичных отрезков** $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$ (рис. 3.4).

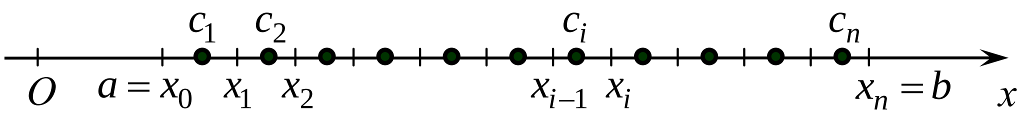


Рис. 3.4. Определение определенного интеграла

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(c_i)$.

Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка:

$$f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Составим сумму S_n всех произведений $f(c_i) \cdot \Delta x_i$:

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i . \tag{3.11}$$

Сумма вида (3.11) называется ***интегральной суммой*** *функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$.

Таким образом, суммы (3.7) и (3.9) являются интегральными.

Сумма (3.11) зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от способа выбора в них точек c_i. Обозначим через d длину наибольшего частичного отрезка $[x_{i-1};x_i]$, т.е. $d=\max\Delta x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Рассмотрим **различные разбиения** отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1};x_i]$ такие, что $d=\max\Delta x_i\to 0$. Очевидно, что при этом число частичных отрезков стремится к бесконечности. Для каждого разбиения, выбрав соответствующие точки $c_i\in[x_{i-1};x_i]$, можно составить интегральную сумму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i .$$

Рассмотрим последовательность разбиений при $d=\max\Delta x_i\to 0$ $(n\to\infty)$ и найдем предел

$$\lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i . \qquad (3.12)$$

Если предел *(3.12)* ***существует и не зависит*** *от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от способа выбора в них точек c_i*, ***то этот предел называется*** **определенным интегралом** ***от функции*** $y=f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ *и обозначается* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, т.е.

$$\boxed{\lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}, \qquad (3.13)$$

где числа a и b – называются соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***; отрезок $[a;b]$ – областью (отрезком) интегрирования.

С учетом (3.13) равенства (3.8) и (3.10) соответственно будут иметь вид

$$S=\int_{T_1}^{T_2} V(t)\mathrm{d}t \qquad (3.8')$$

и

$$M=\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x . \qquad (3.10')$$

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл (3.9), называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

Можно показать, что *для непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $y = f(x)$ *определенный интеграл существует*.

Из определения следует, что определенный интеграл – это *число*. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

3.2.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижний предел a зафиксирован (постоянен), а верхний b меняется. Тогда будет меняться и значение определенного интеграла, т.е. в этом случае определенный интеграл есть ***функция верхнего предела***.

Для того чтобы иметь привычные обозначения, верхний предел обозначим через x, а чтобы не смешивать его с переменной интегрирования, последнюю обозначим через t (от обозначения переменной интегрирования значение интеграла не зависит). Получим интеграл

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

который называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом***.

3.2.4. Свойства определенного интеграла

1. Если нижний и верхний пределы определенного интеграла одинаковы, то он равен нулю

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2. При перемене местами пределов интегрирования знак у определенного интеграла изменяется

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, а C – постоянный множитель, то

$$\int_a^b C\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = C\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл от их алгебраической суммы будет равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема в наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема в двух других, и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b и c.

6. Если функция $f(x)$, интегрируемая на отрезке $[a;b]$, неотрицательна и $a<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ ($a<b$) и на $[a;b]$ $f(x)\le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Производная определенного интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right)' = f(x).$$

3.2.5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}. \tag{3.14}$$

Эта формула называется **формулой Ньютона-Лейбница.**

Итак, значение определенного интеграла выражается разностью двух значений любой первообразной подынтегральной функции при $x = b$ и при $x = a$.

Если ввести обозначение

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

то формулу (3.14) можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 3.8. Вычислить интеграл $\int_1^2 5x^4\mathrm{d}x$.

Решение. Сначала найдем какую-нибудь первообразную для функции $5x^4$, т.е. вычислим неопределенный интеграл $\int 5x^4\mathrm{d}x$, а потом применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_1^2 5x^4\mathrm{d}x = 5\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 31.$$

3.2.6. Замена переменных в определенном интеграле

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ от непрерывной функции сделана подстановка

$$x=\varphi(t), \tag{3.15}$$

где $\varphi(t)$ – монотонна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ в промежутке $[t_a;t_b]$, где $\varphi(t_a)=a$, $\varphi(t_b)=b$.

Согласно замене (3.15) исходный интеграл принимает вид:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{t_a}^{t_b} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t}. \tag{3.16}$$

Формула (3.16) называется ***формулой замены переменных в определенном интеграле****.*

Замечание 3.1. При вычислении определенного интеграла методом замены переменных возвращаться к старой переменной x не требуется, так как в интеграле правой части равенства (3.16) пределы интегрирования были изменены и соответствуют новой переменной t.

Пример 3.9. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{5}}^{5}\sqrt[3]{5x+2}\,\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{1}{5}}^{5}\sqrt[3]{5x+2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} 5x+2=t \quad\Rightarrow\quad 5\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}t \\ t_1=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+2=1 \\ t_2=5\cdot5+2=27 \end{array}\right|=\int\limits_1^{27}\sqrt[3]{t}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{5}\int\limits_1^{27}t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\cdot\left.\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_1^{27}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\left[27^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right]=\frac{3}{20}\left[3^4-1\right]=\frac{3}{20}[81-1]=\frac{3}{20}\cdot80=12.$$

3.2.7. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Для $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ имеет место равенство

$$(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'.$$

Следовательно, функция $u \cdot \upsilon$ есть первообразная для непрерывной функции $u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b (u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon')\mathrm{d}x = u \cdot \upsilon\Big|_a^b. \qquad (3.17)$$

Применяя свойство интегралов, перепишем (3.17) в виде

$$\int_a^b u' \cdot \upsilon \mathrm{d}x + \int_a^b u \cdot \upsilon' \mathrm{d}x = u \cdot \upsilon\Big|_a^b. \qquad (3.18)$$

Учитывая, что $u'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, а $\upsilon'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\upsilon$ равенство (3.18) представим в виде

$$\int_a^b \upsilon \mathrm{d}u + \int_a^b u \,\mathrm{d}\upsilon = u \cdot \upsilon\Big|_a^b.$$

В итоге получим ***формулу интегрирования по частям в определенном интеграле***

$$\boxed{\int_a^b u \cdot \mathrm{d}\upsilon = u \cdot \upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon \cdot \mathrm{d}u}, \qquad (3.19)$$

где $u \cdot \upsilon\Big|_a^b = u(b) \cdot \upsilon(b) - u(a) \cdot \upsilon(a)$.

Пример 3.10. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - x)\sin 3x \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l} u=2-x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}\upsilon=\sin 3x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \upsilon=\int\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sin 3x\,\mathrm{d}(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$

$$=(2-x)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x\,\mathrm{d}x=(2-x)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\cos 3\frac{\pi}{6}\right)-(2-0)\left(-\frac{1}{3}\cos(3\cdot 0)\right)-\frac{1}{9}\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{9}\sin(3\cdot 0)=$$

$$=\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cdot 0-2\left(-\frac{1}{3}\cdot 1\right)-\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 0=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

Приложение определенных интегралов к задачам геометрии

3.2.8. Вычисление площадей плоских фигур

Сначала рассмотрим вычисление ***площади криволинейной трапеции*** – фигуры, ограниченной прямыми $x=a$ и $x=b$, снизу осью Ox (прямой $y=0$) и сверху – графиком непрерывной функции $y=f(x)>0$.

Для определения площади этой фигуры отрезок $[a;b]$ разобьем произвольным образом точками $x_0=a$, $x_1,x_2,\ldots,x_n=b$ $(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ (рис. 3.5).

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, $(i=1,2,\ldots,n)$ возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(c_i)$.

Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма S_n всех произведений

$$S_n=f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\cdot\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

равна площади ступенчатой фигуры. Площадь S криволинейной трапеции приближенно равна

$$S\approx S_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

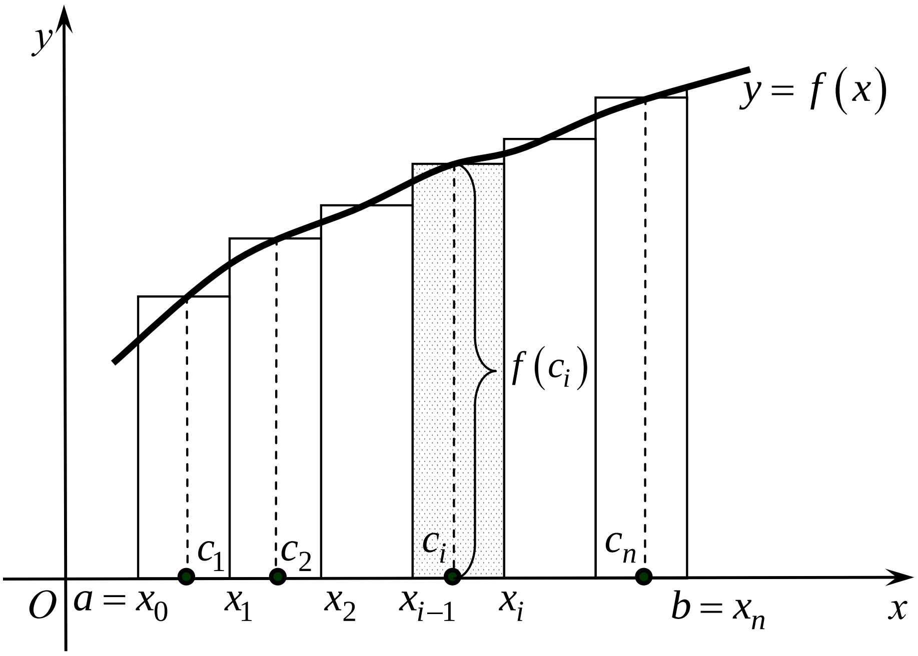


Рис. 3.5. Определение площади криволинейной трапеции

Для того, чтобы найти точное значение S, будем неограниченно увеличивать число разбиений ($n \to \infty$), считая, что $d = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$. Если площадь ступенчатой фигуры S_n будет стремиться к конечному пределу, то этот предел считают равным площади S криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\substack{d\to 0 \\ (n\to\infty)}} S_n = \lim_{\substack{d\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i \text{, т.е. } \boxed{S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (3.20)$$

Таким образом, ***определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции***.

В этом состоит *геометрический смысл* определенного интеграла.

Рассмотрим случай, когда криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox, т.е. ограничена функцией $y = f(x) < 0$ (рис. 3.6).

Так как $f(x) < 0$, тогда «$-f(x) > 0$». Следовательно, формула (3.20) примет вид

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,. \qquad (3.21)$$

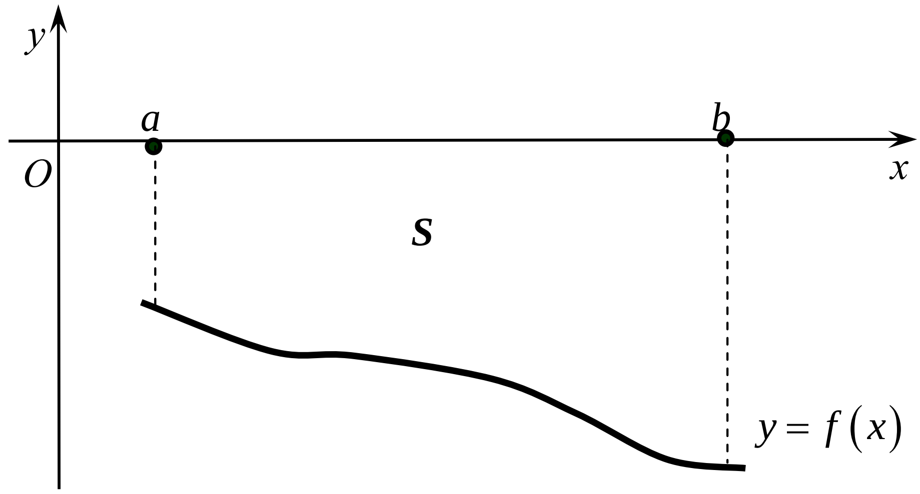


Рис. 3.6. Вид криволинейной трапеции для функции $y = f(x) < 0$

Если плоская фигура ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ соответственно и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 3.7), то для вычисления площади используется следующая формула:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]\mathrm{d}x}. \tag{3.22}$$

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) > 0$ (рис. 3.8), то ее площадь находится по формуле

$$\boxed{S = \int\limits_c^d \varphi(y)\,\mathrm{d}y}. \tag{3.23}$$

Если плоская фигура имеет «сложную форму» (рис. 3.9), то прямыми, параллельными оси Oy или Ox, ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить рассмотренные формулы: (3.20) – (3.23).

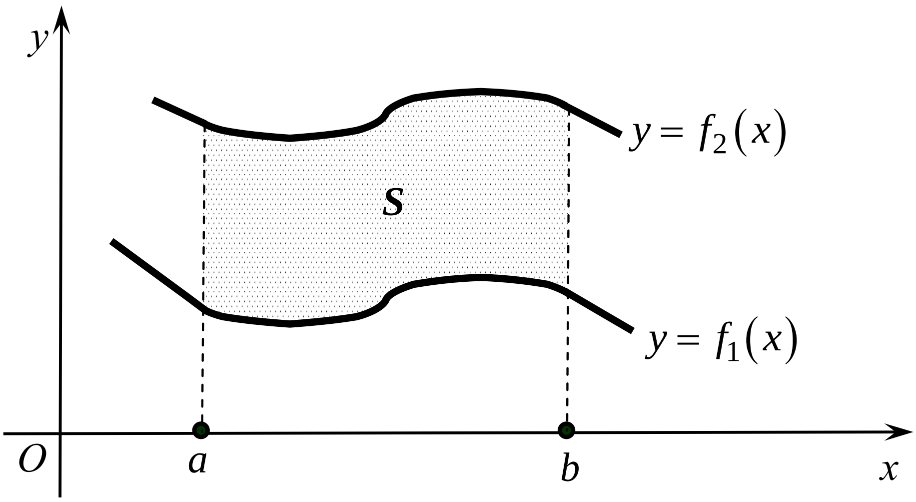


Рис. 3.7. Плоская фигура ограниченная сверху и снизу графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$

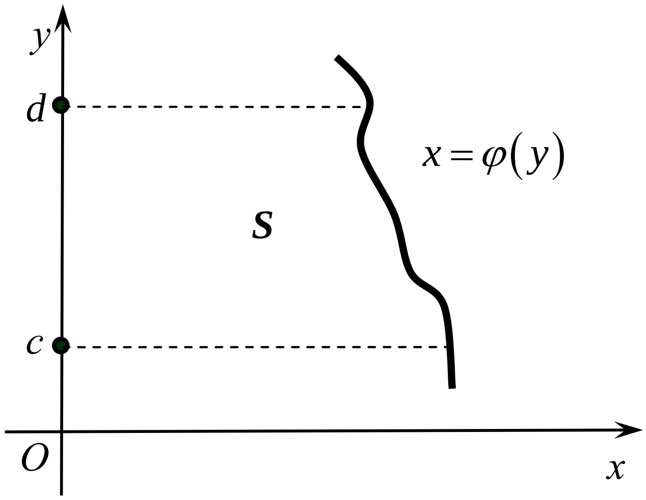


Рис. 3.8. Криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y)$

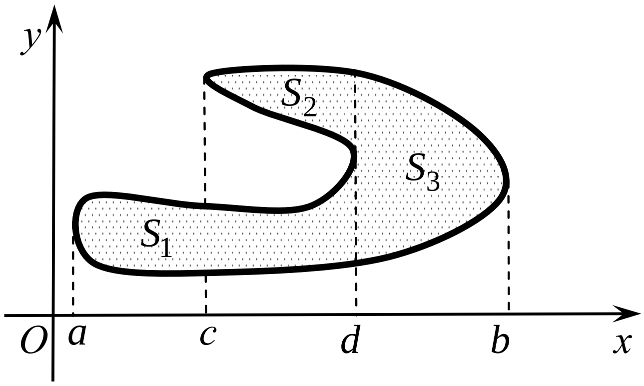


Рис. 3.9. Плоская фигура «сложной формы»

3.2.9. Интегрирование четных и нечетных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$, симметричном относительно точки $x=0$. Покажем, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{åñëè } f(x) - \text{÷åòíàÿ ôóíêöèÿ,} \\ 0, & \text{åñëè } f(x) - \text{íå÷åòíàÿ ôóíêöèÿ.} \end{cases} \qquad (3.24)$$

Для этого разобьем отрезок интегрирования $[-a;a]$ на части $[-a;0]$ и $[0;a]$. Тогда по пятому свойству определенного интеграла имеем

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3.25)$$

В интеграле $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ сделаем замену $x=-t$. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x=-t \Rightarrow t=-x \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ t_a=-(-a)=a \\ t_b=0 \end{array} \right| = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x$$

(определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования).

Возвращаясь к равенству (3.25), получим

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{a} \big(f(-x)+f(x)\big)\,\mathrm{d}x. \qquad (3.26)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ четная, то подынтегральная функция в (3.26) примет вид $f(-x)+f(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$, если же функция $f(x)$ нечетная, то подынтегральная функция в (3.26) будет равна нулю, так как $f(-x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0$. Следовательно, равенство (3.26) принимает вид (3.24).

Геометрический смысл равенства (3.24) очевиден. Если $f(x)$ – четная функция, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy. В этом случае из геометрических соображений (рис. 3.10) получим формулу

$$S=\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Из геометрических соображений (рис. 3.11) ясно, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

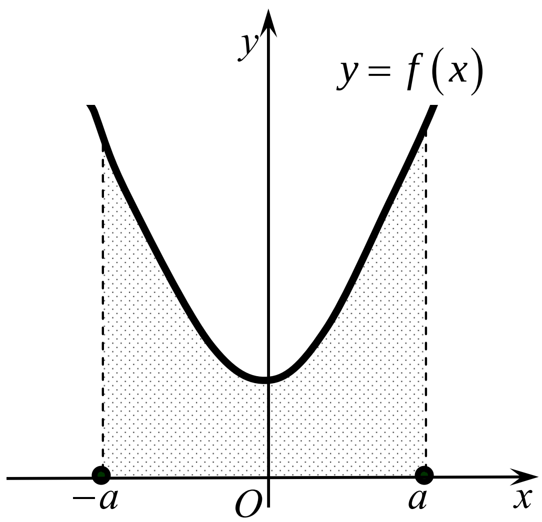


Рис. 3.10. Криволинейная трапеция, ограниченная четной функцией

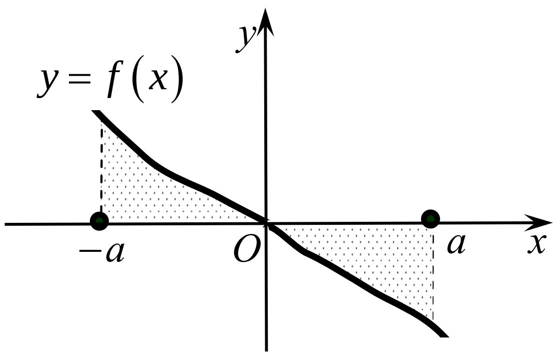


Рис. 3.11. Криволинейная трапеция, ограниченная нечетной функцией

Пример 3.11. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Так как отрезок интегрирования симметричен относительно нуля, а подынтегральная функция нечетная, то, пользуясь (3.24) получим $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,\mathrm{d}x=0$.

3.2.10. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть требуется найти объем некоторого тела *T*, у которого известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси *Ox* (рис. 3.12). Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т.е. будет функцией от *x*: $S = S(x)$, где x – точка оси *OX* через которую проведено сечение.

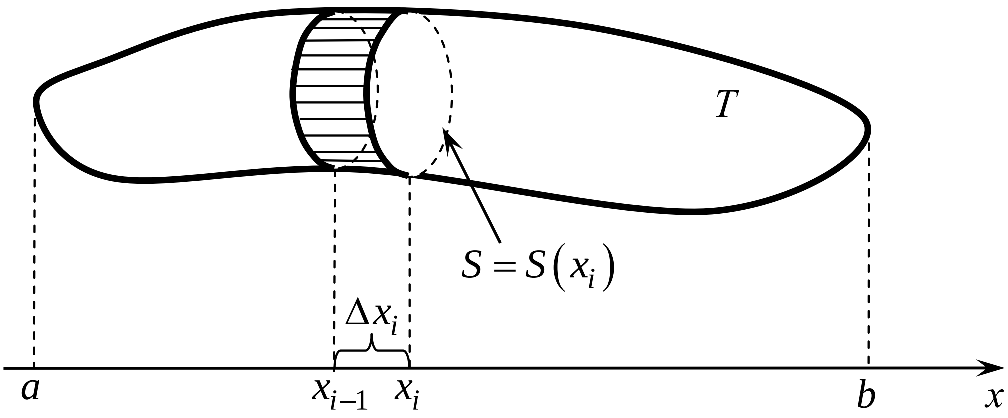


Рис. 3.12. Тело *T* с известными площадями поперечных сечений

Для вычисления объема такого тела разобьем его на n слоев плоскостями $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \ldots,$ $x = x_n = b$. Каждый слой (тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями) можно считать практически цилиндрическим, если толщина его мала. Так как для цилиндрического тела объем равен

$$V = S_{OCH} \cdot h,$$

то объем i – го цилиндра с площадью основания $S(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ равен

$$V_i = S(x_i) \cdot \Delta x_i .$$

Тогда приближенно искомый объем тела *T* составит

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \Delta x_i .$$

Будем неограниченно увеличивать число разбиений ($n \to \infty$), считая, что $d = \max \Delta x_i \to 0$. Если при этом полученная сумма будет стремиться к пределу, то его считают равным объему данного тела

$$V=\lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}S\left(x_i\right)\Delta x_i\text{, т.е. }\boxed{V=\int_a^b S\left(x\right)\mathrm{d}x}. \qquad (3.27)$$

Формула (3.27) называется ***формулой вычисления объема тела по площадям параллельных сечений.***

3.2.11. Вычисление объема тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f\left(x\right)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 3.13).

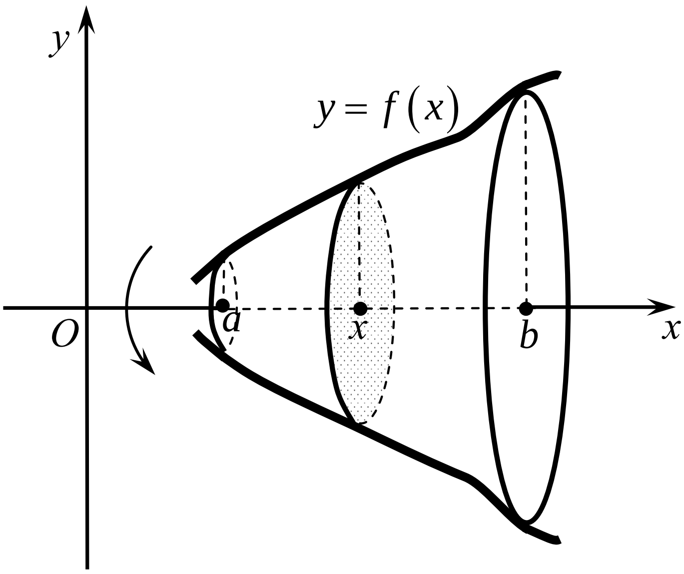


Рис. 3.13. Тело вращения

Тело, полученное от вращения этой фигуры, называется ***телом вращения***. *Сечение этого тела* плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через произвольную точку x оси Ox $\left(x\in\left[a;b\right]\right)$, *есть круг с радиусом* $R=y=f\left(x\right)$. Следовательно, площадь поперечного сечения будет равна

$$S\left(x\right)=\pi R^2=\pi f^2\left(x\right).$$

Применив формулу (3.27) для вычисления объема тела по площадям параллельных сечений, получим ***формулу для вычисления объема тела вращения***

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x}. \qquad (3.28)$$

В случае если вокруг оси Ox вращается фигура, ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ на $[a;b]$ (рис. 3.14) формула (3.28) принимает вид

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right]\mathrm{d}x}. \qquad (3.29)$$

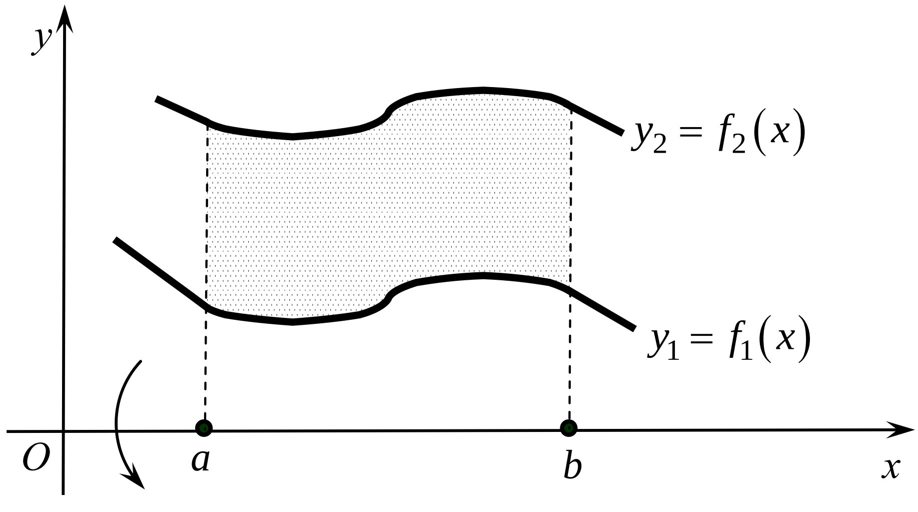


Рис. 3.14. Вращение плоской фигуры вокруг оси Ox

Пример 3.12. Вычислить объем шара.

Решение.

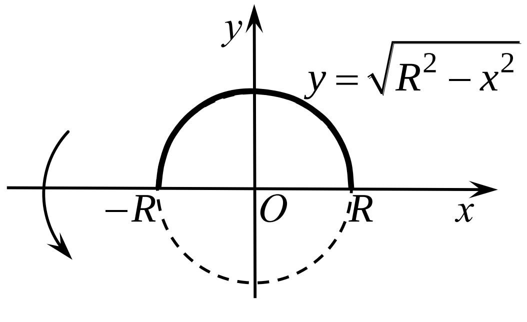


Рис. 3.15. Чертеж к *примеру 3.12.*

Как известно, объем шара можно вычислить по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Этот результат можно получить использовав формулу (3.28). Пусть вокруг оси Ox вращается полуокружность $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда объем, полученного тела вращения будет равен

$$V=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\int\limits_{0}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi\left(R^2\cdot x\Big|_0^R-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^R\right)=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.2.12. Вычисление длины дуги плоской кривой

Под ***длиной плоской кривой*** *понимают предел вписанной в нее ломаной, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает при неограниченном уменьшении длины каждого звена.*

Пусть на плоскости задана кривая $y=f\left(x\right)$. Найдем длину дуги $\overset{\smile}{AB}$ этой кривой. Для этого возьмем на дуге $\overset{\smile}{AB}$ точки $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ (где M_0 – это точка *A*, а M_n – это точка *B*) с абсциссами $x_0=a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ и проведем хорды M_0M_1, $M_1M_2, \ldots,$ $M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно ΔL_1, $\Delta L_2, \ldots,$ ΔL_n. (рис. 3.16).

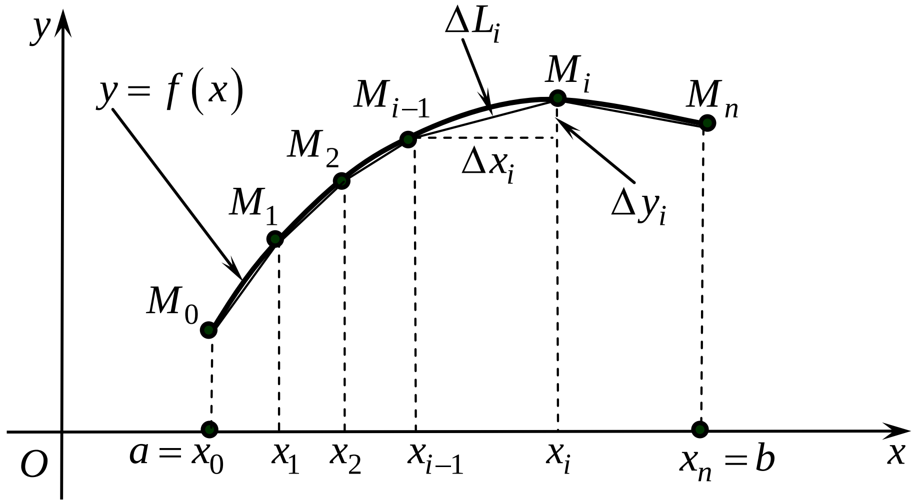


Рис. 3.16. Вывод формулы (3.30)

В результате получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$, вписанную в дугу $\overset{\smile}{AB}$. Длина этой ломаной равна

$$L_n=\Delta L_1+\Delta L_2+\ldots+\Delta L_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i\,.$$

Длину отдельной хорды (звена ломаной) можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и $|\Delta y_i|$ (см. рис. 3.16)

$$\Delta L_i = |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} .$$

Таким образом, длина всей ломаной

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Будем неограниченно увеличивать число звеньев ломаной так, чтобы каждый участок равномерно уменьшался (т.е. максимальная длина звена приближалась к нулю (при этом $d = \max \Delta x_i \to 0$)). В этом случае длина L всей кривой $\overset{\frown}{AB}$ будет равна пределу суммы длин всех звеньев

$$L = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} L_n = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Можно показать, что сумма $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$ является интегральной для функции $\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$, поэтому ее предел при $d = \max \Delta x_i \to 0$ равен определенному интегралу

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2} \cdot \mathrm{d}x} . \qquad (3.30)$$

Пример 3.13. Вычислить длину окружности.

Решение.

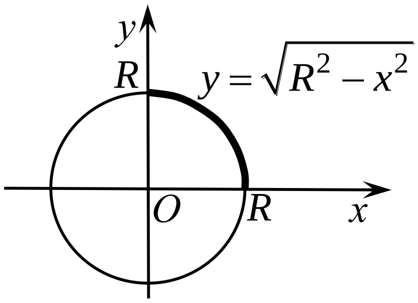


Рис. 3.17. Чертеж к *примеру 3.13.*

Как известно, длина окружности равна $2\pi R$. Такой же результат можно получить использовав **формулу для нахождения длины дуги** (3.30).

Так как окружность симметрична относительно осей координат, то можно найти часть ее длины, например, от точки $(0;R)$ до точки $(R;0)$, т.е. $\frac{1}{4}$ ее длины.

Так как уравнение окружности в этой четверти имеет вид $y=\sqrt{R^2-x^2}$, то

$$\frac{1}{4}L=\int_0^R\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'\right]^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^R\sqrt{1+\left[\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right]^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^R\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^R\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R(\arcsin1-\arcsin0)=R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\frac{1}{4}L=R\cdot\frac{\pi}{2}$, то $L=2\pi R$.

Замечание 3.2. Если менять правый конец *B* дуги $\overset{\frown}{AB}$ и обозначить абсциссу точки *B* через *x*, то длина *L* дуги $\overset{\frown}{AB}$ будет функцией от *x*:

$$L(x)=\int_a^x\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\mathrm{d}x.$$

Используя восьмое свойство определенного интеграла, получим:

$$L'(x)=\left(\int_a^x\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx\right)'=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^2}. \qquad (3.31)$$

Из (3.31) следует

$$\mathrm{d}L = \sqrt{1 + \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

Формула (3.32) называется формулой дифференциала дуги.

3.2.13. Вычисление площади поверхности тела вращения

Если нам дана поверхность тела вращения (см. рис. 3.13), то площадь этой поверхности можно найти по формуле

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \cdot \mathrm{d}x}. \tag{3.33}$$

Пример 3.14. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Решение. Так как поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ вокруг оси Ox (см. рис. 3.15), то по формуле (3.33) вычисляем

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'\right]^2} \cdot \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} \cdot \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} \cdot \mathrm{d}x = 2\pi R \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi R x\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R\left(R - (-R)\right) = 4\pi R^2.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением *называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные, т.е. уравнение вида*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

где x – независимая переменная, $y = y\left(x\right)$ *– искомая функция, а* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ *– ее производные.*

Отметим, что неизвестным в дифференциальном уравнении является не число *y*, а функция $y = y(x)$.

Далее мы будем для краткости заменять слова «дифференциальное уравнение» на ДУ.

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют ***обыкновенным****; в противном случае – ДУ в частных производных.* **Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.**

Решением ДУ *называется функция* $y = \varphi\left(x\right)$*, которая при подстановке ее вместо y в исходное ДУ обращает его в тождество.*

Процесс отыскания решения ДУ называется ***интегрированием ДУ****, а график решения ДУ –* ***интегральной кривой****.*

Простейшим примером дифференциального уравнения может служить уравнение $y' = f\left(x\right)$. В этом уравнении ищется функция, производная которой совпадает с заданной функцией $f\left(x\right)$. Из темы интегрирование нам известен инструмент, который решает такую задачу. Это неопределенный интеграл. Таким образом решением будет любая функция вида $y = \int f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(x\right) + C$, где $F\left(x\right)$ – первообразная функции $f\left(x\right)$, а C – произвольная постоянная.

Например, решениями уравнения $y'\left(x\right) = \sin x$ являются функции $y = -\cos x + C$ – первообразные для функции $y = \sin x$.

Наивысшей порядок производной, входящей в ДУ, называется ***порядком ДУ.***

Например, уравнение $3y''' - y''\arcsin x = 0$ есть обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $y' - y''\sqrt{x} = \left(y\right)^2$ - ДУ второго порядка.

4.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Дифференциальные уравнения часто возникают при решении геометрических и физических задач. Так, например, с ДУ приходится иметь дело при решении задач на движение, ибо скорость это первая производная пути по времени, а ускорение – это вторая производная пути по времени.

1. Рассмотрим задачу о колебании груза, подвешенного на вертикальной пружине.

Пусть груз массой m, подвешенный на пружине, движется по вертикальной прямой. Если пружину с грузом оттянуть или сжать, то груз начнет совершать колебания около положения равновесия. Установим закон движения груза, т.е. найдем формулу, выражающую отклонение груза от положения равновесия в любой момент времени t.

Совместим начало координат с положением равновесия груза, а ось Oy направим вертикально вверх. Обозначим через l_0 расстояние от конца нерастянутой пружины без груза до положения равновесия груза, а через y - отклонение груза от положения равновесия в момент времени t (рис. 4.1).

Согласно второму закону Ньютона имеем

$$ma(t)=\sum_i F_i(t),$$

где $a(t)$ – ускорение груза в момент времени t, $\sum\limits_i F_i(t)$ – сумма всех сил действующих на груз в момент времени t.

Так как скорость $\upsilon(t)=y'(t)$, а ускорение $a(t)=\upsilon'(t)=y''(t)$ мы получаем

$$my''(t)=\sum_i F_i(t).$$

Рассмотрим все силы, которые могут действовать на груз. Итак, на груз действуют следующие четыре силы:

- сила тяжести груза mg, направленная вниз;
- сила сопротивления среды, направленная в сторону, противоположную движению груза, и по величине пропорциональная скорости движения груза, т.е. равная $\mu\cdot y'(t)$, где μ – коэффициент сопротивления;
- упругая сила пружины, направленная вверх (т.е. в положительном направлении оси Oy), величина которой, по закону Гука, пропорциональна деформации, т.е. равна $k\left(l_0-y(t)\right)$, где k – коэффициент упругости пружины (масса пружины не учитывается);

● внешняя вынуждающая сила, направленная вертикально (вдоль оси Oy), величина которой $\Psi(t)$ зависит от времени *t*.

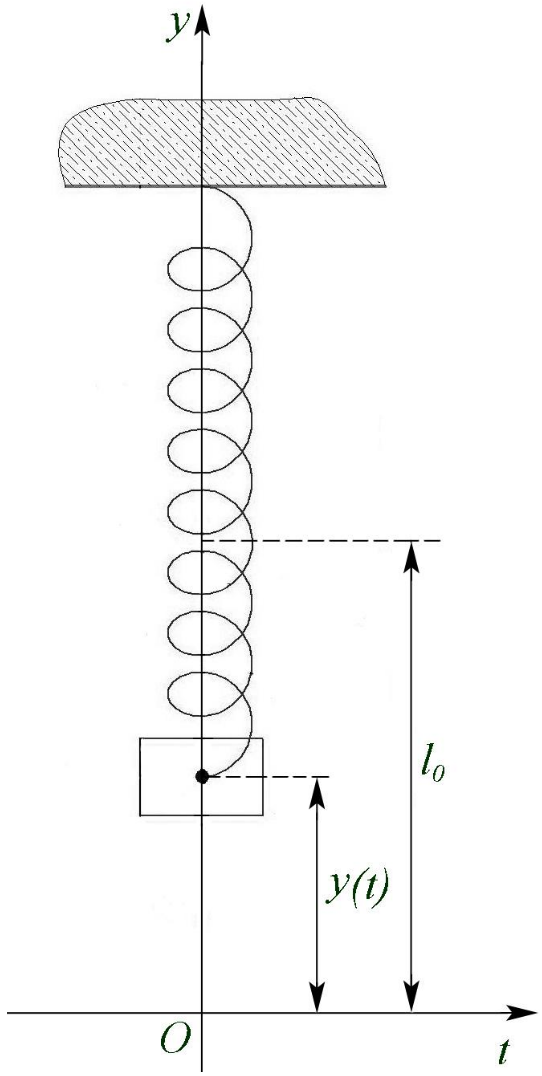


Рис. 4.1. Груз, подвешенный на вертикальной пружине

Таким образом, по второму закону Ньютона имеем

$$my''(t)=k\left(l_0-y(t)\right)-mg-\mu y'(t)+\Psi(t)$$

или

$$my''(t)=kl_0-ky(t)-mg-\mu y'(t)+\Psi(t).$$

Так как в положении равновесия ($y(t)=0$) вес груза mg уравновешивается упругой силой пружины, то $kl_0=mg$. Поэтому

$$my''(t)=-ky(t)-\mu y'(t)+\Psi(t) \quad \text{или} \quad my''(t)+\mu y'(t)+ky(t)=\Psi(t),$$

или, разделив последнее уравнение на $m>0$, получим

$$\boxed{y''(t)+2\lambda y'(t)+\omega^2 y(t)=\psi(t)}, \tag{4.2}$$

где $2\lambda=\dfrac{\mu}{m}$, $\psi(t)=\dfrac{\Psi(t)}{m}$, $\omega^2=\dfrac{k}{m}$, а $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний.

Уравнение (4.2) называется ***дифференциальным уравнением вынужденных колебаний*** груза, подвешенного на пружине.

Если внешняя вынуждающая сила отсутствует, т.е. $\Psi(t)=0$, то уравнение (4.2) принимает вид

$$\boxed{y''(t)+2\lambda y'(t)+\omega^2 y(t)=0}, \tag{4.3}$$

и называется ***дифференциальным уравнением свободных колебаний*** груза, подвешенного на пружине.

Решение $y=y(t)$ уравнения (4.2) описывает все возможные колебания груза, подвешенного на пружине. Чтобы выделить то единственное решение $y(t)$, которое будет описывать истинное движение *конкретного* груза надо дополнить ДУ (4.2) начальными условиями: задать начальное положение груза $y(0)=y_0$ и его начальную скорость $y'(0)=\upsilon_0$. Также можно доказать, что существует только одна функция $y=\varphi(t)$, удовлетворяющая ДУ (4.2) и начальным условиям, которая и описывает закон движения груза при заданных начальных условиях.

2. Найдем кривую, проходящую через точку $M(x;y)$, отрезок любой касательной к которой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Изобразим условие задачи на чертеже. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка кривой $y=f(x)$, и $y=f(x)$ расположена в первой четверти (рис. 4.2).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $y'=\text{tg}\alpha$.

Из ∇MBC (рис.4.2) видно, что $\text{tg}(\angle MBC)=\dfrac{MC}{BC}$. Здесь $MC=y$. Определим BC. По условию задачи $AM=MB$, следовательно, $OC=CB=x$. Таким образом,

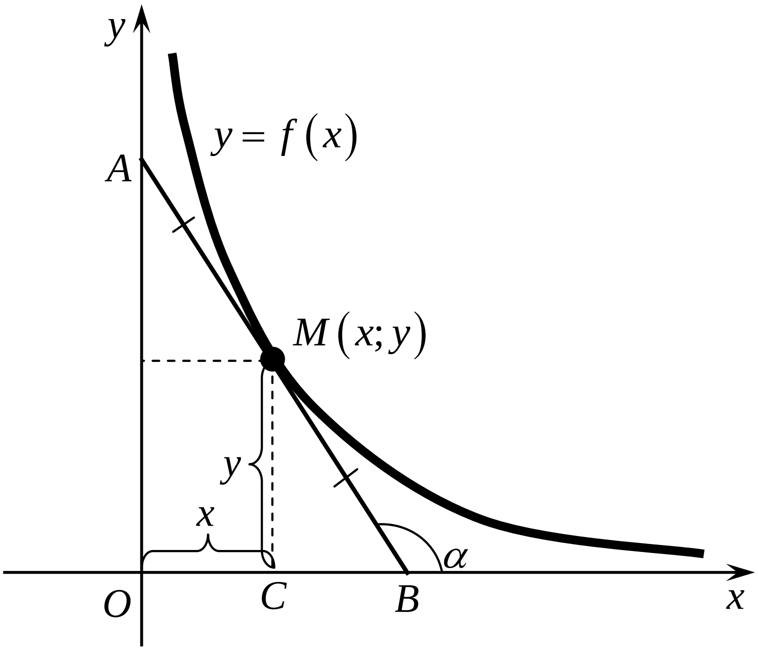


Рис. 4.2. Составление дифференциального уравнения (4.6)

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \frac{y}{x}. \tag{4.4}$$

С другой стороны

$$\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}\left(180^{\circ} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{4.5}$$

Приравнивая (4.4) и (4.5), получим

$$-\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad y' = -\frac{y}{x}. \tag{4.6}$$

Легко проверить, что решением полученного дифференциального уравнения (4.6) является функция $y = \dfrac{C}{x}$, где C – произвольная постоянная. Уравнение $y = \dfrac{C}{x}$ описывает семейство гипербол.

Мы видим, что дифференциальное уравнение (4.6), имеет не одно, а бесчисленное множество решений, как и в предыдущей задаче о колебаниях груза. Если дополнить ДУ (4.6) начальным условием: задать координаты точки $M_0(x_0; y_0)$, через которую проходит кривая, то мы сможем выделить единственное решение $y(x)$, которое описывает кривую, проходящую через эту конкретную точку.

4.3. Дифференциальные уравнения первого порядка

4.3.1. Основные определения

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x,y,y'\right)=0. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) связывает независимую переменную *x,* искомую функцию *y* и ее производную y'. Если из уравнения (4.7) можно выразить y' через *x* и *y,* то ДУ принимает вид

$$y'=f\left(x,y\right), \tag{4.8}$$

и называется ДУ *первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Также ДУ, может быть записано через *дифференциалы* в следующем виде:

$$P\left(x,y\right)\mathrm{d}x+Q\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0, \tag{4.9}$$

где $P\left(x,y\right)$ и $Q\left(x,y\right)$ - известные функции.

Отметим, что часто от одного вида записи ДУ можно перейти к другому. Так, разделив обе части ДУ (4.9) на $\mathrm{d}x$ и заменив $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ на y' мы снова приходим к ДУ первого порядка вида (4.7) или (4.8)

$$P\left(x,y\right)+Q\left(x,y\right)y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{P\left(x,y\right)}{Q\left(x,y\right)}=f\left(x,y\right)$$

Задача «о кривой», рассмотренная в *п. 4.2.*, показывает, что ДУ первого порядка имеет не одно, а *бесчисленное множество* решений, зависящих от произвольной постоянной *C*.

Чтобы выделить одно решение, ДУ дополняют начальным условием.

Начальное условие для ДУ первого порядка задается следующим образом:

$$y\left(x_0\right)=y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0}=y_0. \tag{4.10}$$

Условие (4.10) означает, что при $x=x_0$ искомая функция *y* должна быть равна заданному числу y_0.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (4.8), *удовлетворяющего* *заданному начальному условию* (4.10)*, называется* ***задачей Коши.***

Иными словами *задача Коши* имеет вид

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

При этом точка (x_0, y_0) должна принадлежать области D определения функции $f(x,y)$, так как в противном случае задача Коши становится противоречивой.

Общим решением *дифференциального уравнения первого порядка называется функция* $y=\varphi(x,C)$*, содержащая* ***одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям****:*

1). Функция $y=\varphi(x,C)$ *является решением ДУ при каждом фиксированномзначении С;*

2). Каково бы ни было начальное условие (4.10), можно найти такое значение постоянной $C=C_0$*, что функция* $y=\varphi(x,C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию (4.10).*

Частным решением *ДУ первого порядка называется любая функция* $y=\varphi(x,C_0)$*, полученная из общего решения* $y=\varphi(x,C)$ *при конкретном значении постоянной* $C=C_0$.

Найти решение ДУ в виде $y=\varphi(x,C)$ (явно) удается не всегда. Иногда при нахождении $y=y(x)$ удается перейти от дифференциального уравнения к эквивалентному недифференциальному уравнению $\Phi(x,y,C)=0$ – т.е. задать y неявно. В этом случае считается, что ДУ решено и общее решение найдено в неявном виде $\Phi(x,y,C)=0$. *Уравнение* $\Phi(x,y,C)=0$ *называется* ***общим интегралом*** *ДУ, а уравнение* $\Phi(x,y,C_0)=0$ *называется* ***частным интегралом*** *дифференциального уравнения.*

С геометрической точки зрения формула $y=\varphi(x,C)$ общего решения ДУ определяет **семейство интегральных кривых** на плоскости *Oxy*. Частное решение ДУ $y=\varphi(x,C_0)$, **удовлетворяющее начальному условию** (4.10) задает (определяет) ту кривую из этого семейства, которая проходит через точку (x_0, y_0).

Чтобы придать *геометрический смысл* самому *ДУ первого порядка* (4.8) рассмотрим плоскость *Oxy*. В каждой точке $M(x,y)$ плоскости *Oxy* проведем маленький отрезок с угловым коэффициентом $k(x,y)=\text{tg}\alpha = f(x,y)=y'(x)$ (рис. 4.3). Полученная картина называется ***полем направлений*** на плоскости, заданным ДУ $y'=f(x,y)$. Если $y=y(x)$ - решение ДУ (4.8), то $y'(x)\equiv f(x,y(x))=k(x,y(x))$. Отсюда ясно, что *график решения* (*интегральная кривая* $y=y(x)$) *в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с полем направлений в этой точке.*

Итак, **с геометрической точки зрения уравнение** $y'=f(x,y)$ **определяет на плоскости** *Oxy* ***поле направлений*, а любая интегральная кривая касается поля направлений в каждой своей точке** (рис. 4.4).

Приведенное выше геометрическое описание ДУ первого порядка хорошо иллюстрируется на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют *поле направлений*, а интегральными линиями этого поля служат так называемые магнитные силовые линии.

Одной из главных теорем в теории дифференциальных уравнений является **теорема о существовании и единственности решения задачи Коши**. В этой теореме даются ограничения на правую часть уравнения (4.8), при выполнении которых можно утверждать, что в некоторой открытой области *D* на плоскости *Oxy,* содержащей точку (x_0, y_0), существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (4.10).

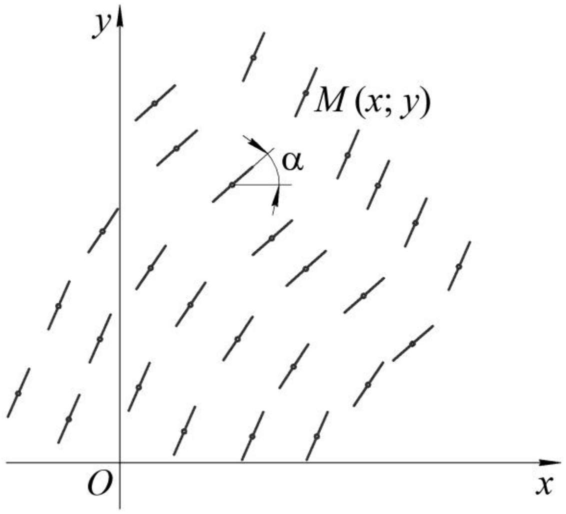


Рис. 4.3. Поле направлений

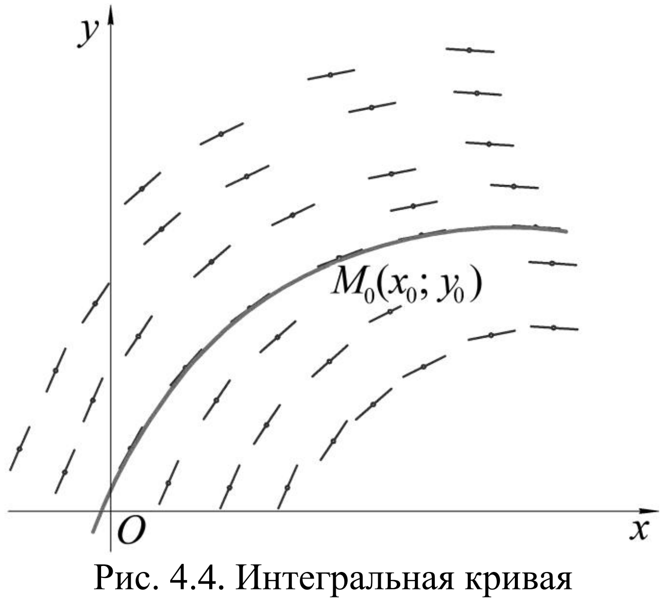


Рис. 4.4. Интегральная кривая

Геометрически теорема утверждает, что *через каждую внутренюю точку* $M_0(x_0, y_0)$ *области D проходит единственная интегральная кривая* (рис. 4.4).

Существует несколько типов уравнений первого порядка, общее решение которых можно получить с помощью интегрирования. Рассмотрим некоторые из них.

4.3.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение $y' = f(x, y)$ *называется* ***уравнением с разделяющимися переменными****, если его правую часть можно разложить на множители так, чтобы каждый множитель зависел только от одной переменной. То есть*

$$\boxed{y' = f(x) \cdot \varphi(y)} \tag{4.11}$$

Для решения ДУ с разделяющимися переменными необходимо выполнить следующие действия:

1. Заменить в формуле (4.11) y' **на** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$**.** В результате получаем

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\varphi(y).$$

2. Разделить переменные (собрать все, что содержит y в левой части, а то, что содержит x в правой). Для этого надо сначала умножить обе части на $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}y = f(x)\varphi(y)\mathrm{d}x,$$

а затем разделить обе части уравнения на $\varphi(y) \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

3. Проинтегрировать каждую часть последнего уравнения:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Пусть первообразная в левой части равна $\Phi(y)$, а в правой части – $F(x)$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\Phi(y) = F(x) + C. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12), связывающее x и y, является *общим интегралом* исходного дифференциального уравнения.

Если из (4.12) удастся выразить y через x: $y = \varphi(x, C)$, *то получится формула общего решения исходного дифференциального уравнения* $y' = f(x)\varphi(y)$.

Замечание 4.1. Если ДУ изначально было записано в дифференциальной форме (4.9) и имело вид

$$\boxed{P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0}. \tag{4.13}$$

то оно также является ДУ с разделяющимися переменными.

Особенность уравнения (4.13) *состоит в том, что коэффициенты при* dx *и* dy *представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, другая* - *только от y.*

Решение ДУ вида (4.13) **начинаем с** выполнения почленного деление на $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. Проинтегрировав получившееся после этого выражение, получаем общий интеграл уравнения (4.11) в виде

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\mathrm{d}y = C.$$

Пример 4.1. Требуется найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$.

Решение. Определяем тип ДУ. Уравнение уже записано в виде (4.8) (разрешено относительно производной). Кроме того, видно, что оно с разделяющимися переменными, так как правая часть есть произведение функций $\left(1+y^2\right)$ и $\dfrac{1}{1-x^2}$, каждая из которых зависит только от одной переменной.

1. Заменяя y' на $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ имеем $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$.

2. Разделяем переменные: для этого обе части умножим на dx и разделим на $1+y^2 \neq 0$. Получаем $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ уравнение с разделенными переменными.

3. Интегрируем каждую часть: $\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$. После интегрирования имеем $\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \ln|C|$ (произвольная постоянная C для удобства формально заменена на $\ln|C|$). **Это так называемый *общий интеграл*, и если из него выразить y через x, то получим формулу *общего решения.***

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y = \operatorname{tg}\left(\ln C\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\right)$.

4.3.3. Линейные уравнения первого порядка

Если правая часть уравнения $y' = f(x,y)$ линейна по y, т.е. имеет вид $P(x)y + Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - заданные функции, зависящие только от x, или просто константы, то такое уравнение называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

Таким образом, линейное ДУ первого порядка имеет вид

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x)}. \tag{4.14}$$

Перенесем все члены ДУ (4.14) содержащие y в левую часть. Тогда уравнение примет вид

$$\boxed{y' - P(x)y = Q(x)}. \tag{4.15}$$

Если в ДУ (4.15) $Q(x) \equiv 0$, то такое уравнение называется *линейным* ***однородным*** *ДУ первого порядка*, а если $Q(x) \neq 0$ – *линейным* ***неоднородным*** *ДУ первого порядка*.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка можно решить ***методом Бернулли***.

Будем искать решение дифференциального уравнения (4.15) в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки

$$y = u \cdot \upsilon, \tag{4.16}$$

где $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ – новые неизвестные функции от x, причем одну из них можно взять произвольной, но не равной нулю, а другая в таком случае определится на основании уравнения (4.15).

Дифференцируя (4.16) находим

$$y' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'. \tag{4.17}$$

Подставляя выражения для y из (4.16) и y' из (4.17) в ДУ (4.15) получим:

$$u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon' - P(x) u\upsilon = Q(x).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем за скобку общий множитель – u. В результате получится уравнение

$$u'\upsilon + u\left[\upsilon' - P(x)\upsilon\right] = Q(x). \tag{4.18}$$

Подберем функцию $\upsilon = \upsilon(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю. Для этого надо решить дифференциальное уравнение

$$\upsilon' - P(x)\upsilon = 0, \tag{4.19}$$

которое, является уравнением с разделяющимися переменными.

Очевидно $\upsilon(x) \neq 0$. Подставляя найденное значение $\upsilon(x)$ в (4.18) и учитывая, что $\upsilon' - P(x)\upsilon = 0$ получим ДУ с разделяющимися переменными

$$u'\upsilon(x) = Q(x).$$

Следовательно

$$u = \int \frac{Q(x)}{\upsilon(x)} \mathrm{d}x.$$

Возвращаясь к искомой функции y, подставляем найденные функции u и υ в формулу (4.16) и записываем общее решение исходного линейного ДУ первого порядка.

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

Решение. Это уравнение вида $y' - P(x)y = Q(x)$, то есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решать заменой $y=u\cdot\upsilon$. Подставим $y=u\cdot\upsilon$ и $y'=u'\cdot\upsilon+u\cdot\upsilon'$ в исходное ДУ: $u'\upsilon+u\upsilon'+u\upsilon\operatorname{tg}x=\cos^2 x$, $u'\upsilon+u\left(\upsilon'+\upsilon\operatorname{tg}x\right)=\cos^2 x$. Найдем функцию υ, приравнивая нулю выражение в скобках: $\upsilon'+\upsilon\operatorname{tg}x=0$. Относительно функции υ это уравнение *с разделяющимися переменными*. Решаем его:

1. Запишем в нем υ' в виде $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$. Имеем $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}+\upsilon\operatorname{tg}x=0$.

2. Разделяем переменные: $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}=-\upsilon\operatorname{tg}x$, $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}=-\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$ $\left(\upsilon\neq 0\right)$.

3. Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}=-\int\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$, $\ln|\upsilon|=\ln|\cos x|+\ln|C_1|$.

Примем $C_1=1$ и окончательно получим $\ln|\upsilon|=\ln|\cos x|$.

Выразим функцию υ: $e^{\ln|\upsilon|}=e^{\ln|\cos x|}$ и $\upsilon=\cos x$.

Далее подставляем найденное значение $\upsilon=\cos x$ в исходное ДУ и учитывая, что $\upsilon'+\upsilon\operatorname{tg}x=0$ получим ДУ *с разделяющимися переменными* $u'\cos x=\cos^2 x$ или $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos x$. Откуда $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$, $\int\mathrm{d}u=\int\cos x\,\mathrm{d}x$ или $u=\sin x+C$.

Так как $y=u\cdot\upsilon$, то окончательно получаем $y=\left(\sin x+C\right)\cos x$. Это и есть общее решение уравнения.

4.4. Дифференциальные уравнения высших порядков

4.4.1. Основные определения

Дифференциальными уравнениями высших порядков *называются ДУ порядка выше первого.*

Как отмечалось ранее (см. *п. 4.1.*), ДУ n – го порядка в общем виде записывается так

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0, \tag{4.20}$$

или, если его можно разрешить относительно старшей производной,

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right). \tag{4.21}$$

Начальные условия для ДУ n – го порядка записывается в виде

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (4.22)$$

Задача Коши для ДУ n – го порядка ставится следующим образом: найти решение ДУ(4.21), удовлетворяющее заданным начальным условиям (4.22).

Общим решением *дифференциального уравнения n – го порядка* (4.21) *называется функция*

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n), \qquad (4.23)$$

зависящая от **n** *произвольных постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$ *и такая, что:*

- *она удовлетворяет уравнению* (4.21) *при любых значениях постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$*;*
- *при заданных начальных условиях* (4.22) *существуют единственные значения постоянных* $C_1=C_1^0,\ C_2=C_2^0,\ldots,\ C_n=C_n^0$ *такие, что функция* $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0\right)$ *является решением ДУ* (4.21) *и удовлетворяет начальным условиям* (4.22).

Всякая функция $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0\right)$*, получающаяся из общего решения* (4.23) *при конкретных значениях постоянных* $C_1=C_1^0,\ C_2=C_2^0,\ldots,\ C_n=C_n^0$*, называется* ***частным решением.***

Уравнения вида $\Phi(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$ или $\Phi\left(x,y,C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0\right)=0$, неявно определяющие решение, соответственно называются ***общим или частным интегралом*** ДУ n – го порядка.

Задача нахождения решения ДУ n – го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков, в основном, сконцентрировав внимание на ДУ второго порядка $F(x,y,y',y'')=0$ или

$$y''=f(x,y,y'). \qquad (4.24)$$

Исходя из сформулированных основных определений для ДУ n – го порядка, можно записать аналогичные понятия и определения и для ДУ второго порядка. Например: *общим решением* ДУ второго порядка (4.24) является функция, зависящая от **двух** произвольных постоянных C_1 и C_2; *начальные условия* (4.22) для ДУ второго порядка (4.24) включают **два** равенства – $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$ и т.д.

4.4.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка.* Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) исходное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Уравнения, допускающие непосредственное интегрирование

Рассмотрим ДУ второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, вида

$$\boxed{y'' = f(x)}. \tag{4.25}$$

Порядок уравнения (4.25) **понижается** непосредственно **путем последовательного *двукратного* интегрирования**.

Так как $y'' = (y')' = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$, уравнение (4.25) можно записать в виде $\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = f(x)$ или, разделив переменные, получим – $\mathrm{d}y' = f(x)\mathrm{d}x$.

Тогда, интегрируя уравнение $\mathrm{d}y' = f(x)\mathrm{d}x$, имеем: $\int \mathrm{d}y' = \int f(x)\mathrm{d}x$, $y' = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$ или

$$y' = \varphi_1(x) + C_1, \tag{4.26}$$

где $\varphi_1(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Далее, представляем $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и ДУ (4.26) принимает вид $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi_1(x) + C_1$. Разделяя переменные в последнем уравнении – $\mathrm{d}y = (\varphi_1(x) + C_1)\mathrm{d}x$ и интегрируя полученное равенство – $\int \mathrm{d}y = \int(\varphi_1(x) + C_1)\mathrm{d}x$, находим общее решение исходного уравнения (4.25):

$$y = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

где $\varphi_2(x)$ – первообразная функции $\varphi_1(x)$.

Общим случаем ДУ (4.25) является уравнение вида

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x\right)}, \qquad (4.27)$$

которое решается аналогично ДУ (4.25) при помощи последовательного ***n* – кратного** интегрирования.

Пример 4.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(4)} = \sin x$.

Решение. Данное уравнение имеет вид (4.27). Следовательно, для отыскания общего решения его необходимо четырежды проинтегрировать по переменной *x*:

$$y''' = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C_1,$$

$$y'' = \int \left(-\cos x + C_1\right) \mathrm{d}x = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int \left(-\sin x + C_1 x + C_2\right) \mathrm{d}x = \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int \left(\cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) \mathrm{d}x = \sin x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения *четвертого* порядка $y = \sin x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$ зависит от *четырех* произвольных постоянных.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции

Пусть дано уравнение второго порядка вида

$$\boxed{y'' = f\left(x, y'\right)}, \qquad (4.28)$$

не содержащее искомую функцию $y\left(x\right)$ *явно*.

Такое уравнение следует решать с помощью замены

$$\boxed{y' = P,\ y'' = P'}, \qquad (4.29)$$

где $P=P(x)$ – новая неизвестная функция, зависящая от x.

В результате замены (4.32) получаем ДУ *первого порядка*

$$P'=f(x,P), \tag{4.30}$$

из которого следует искать $P=P(x)$.

Если уравнение (4.30) известного нам типа (с разделяющимися переменными, линейное или др.), то мы сможем найти его общее решение – функцию $P=\varphi(x,C_1)$, где C_1 произвольная постоянная.

Далее, вспоминая формулу замены, $y'=P$ снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y'=\varphi(x,C_1)$, *в котором переменные всегда будут разделяться.*

После разделения переменных $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$, $\mathrm{d}y=\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x$ и интегрирования $\int\mathrm{d}y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x$ получаем общее решение исходного ДУ (4.28)

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x=\Phi(x,C_1)+C_2,$$

где $\Phi(x,C_1)$ – первообразная функции $\varphi(x,C_1)$.

Пример 4.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''x=y'$.

Решение. *Определяем тип* исходного ДУ. Данное уравнение второго порядка и не содержит явно искомую функцию $y(x)$. Значит, оно допускает понижение порядка. Приведем его к виду (4.28): $y''=\dfrac{y'}{x}$ и сделаем замену $y'=P(x)$, $y''=P'(x)$. Тогда ДУ примет вид $P'=\dfrac{P}{x}$. *Определим тип*, полученного ДУ первого порядка: оно разрешено относительно производной и функция в правой части ДУ $f(P,x)$ имеет вид произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Значит $P'=\dfrac{P}{x}$ – ДУ с разделяющимися переменными. Заменяя P' на $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ имеем $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\dfrac{P}{x}$. Разделяем переменные $\dfrac{\mathrm{d}P}{P}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, интегрируем $\int\dfrac{\mathrm{d}P}{P}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ и находим общий интеграл

$\ln|P| = \ln|x| + \ln|C_1|$ или $\ln|P| = \ln|xC_1|$. Теперь выразим из общего интеграла функцию $P(x)$: $e^{\ln|P|} = e^{\ln|xC_1|}$ и $P = xC_1$.

Вспоминая, что $y' = P(x)$ возвращаемся к исходной функции $y' = P = xC_1$. Как говорилось выше, в этом ДУ переменные разделяются: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xC_1$ и $\mathrm{d}y = xC_1\mathrm{d}x$. Интегрируем $\int \mathrm{d}y = C_1 \int x\mathrm{d}x$ и получаем общее решение исходного ДУ: $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной

Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(y, y')}, \tag{4.31}$$

которое *не содержит* явно *независимую переменную x*.

Для понижения порядка уравнения (4.31) введем новую функцию $P = P(y)$, зависящую от переменной *y*. Обозначим $y' = P(y)$ и продифференцируем это равенство по *x*, учитывая, что $P = P(y(x))$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P(y)}{\mathrm{d}y} \cdot P.$$

Итак, *ДУ вида (4.31) можно решить с помощью замены*

$$\boxed{y' = P,\ y'' = P' \cdot P}. \tag{4.32}$$

После подстановки (4.32) из уравнения (4.31) получим ДУ *первого порядка*

$$P' \cdot P = f(y, P), \tag{4.33}$$

из которого будем искать функцию $P = P(y)$.

Пусть $P = \varphi(y, C_1)$ является общим решением ДУ (4.33). Заменяя функцию $P(y)$ на y', снова получаем дифференциальное уравнение *первого порядка* $y' = \varphi(y, C_1)$ – *с разделяющимися переменными*. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (4.31):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = \int \mathrm{d}x \text{ или } \int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 4.5. Решить задачу Коши $\begin{cases} 2yy'' - (y')^2 = 1, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Это уравнение не содержит явно независимую переменную x. Произведя замену $y' = P(y),\ y'' = P'(y) \cdot P$, получим уравнение $2yP'P - P^2 = 1$. *Определим тип*, полученного ДУ первого порядка. Для этого выразим из него P':

$$P' = \frac{1 + P^2}{P} \cdot \frac{1}{2y}. \tag{4.34}$$

Видим, что ДУ (4.34) является уравнением с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{1 + P^2}{P} \cdot \frac{1}{2y},\ \frac{P\mathrm{d}P}{1 + P^2} = \frac{\mathrm{d}y}{2y},\ \int \frac{P\mathrm{d}P}{1 + P^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Интегрируя, найдем общее решение:

$$\frac{1}{2} \ln\left|P^2 + 1\right| = \frac{1}{2} \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|C_1| \text{ или } \ln\left|P^2 + 1\right| = \ln|y| + \ln|C_1|.$$

Выразим $P(y)$:

$$\ln\left|P^2 + 1\right| = \ln|yC_1|,\ P^2 + 1 = yC_1,\ P = \pm\sqrt{yC_1 - 1}.$$

Так как $P(y) = y'(x)$, то

$$y' = \pm\sqrt{yC_1 - 1}. \tag{4.35}$$

Найдем константу C_1. Из начальных условий $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ видно, что $y' = 0$ когда $y = 1$. Подставив эти значения в (4.35), получим

$$0 = \pm\sqrt{1 \cdot C_1 - 1},\ 0 = 1 \cdot C_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Следовательно, $y' = \pm\sqrt{y-1}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{y-1}$ и $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}} = \pm\mathrm{d}x$. Интегрируя $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y-1}} = \pm\int\mathrm{d}x$, получаем $2\sqrt{y-1} = \pm x + C_2$. Теперь определим константу C_2 из условия $y(0)=1$: $2\sqrt{1-1} = \pm 0 + C_2 \;\;\Rightarrow\;\; C_2 = 0$ и найдем частный интеграл исходного уравнения $2\sqrt{y-1} = \pm x$ или $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$.

4.4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Многие задачи математики, механики, физики и различных технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Дифференциальное уравнение второго порядка называется ***линейным,*** *если оно имеет вид*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{4.36}$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ *– заданные функции.*

Функции $a_1(x), a_2(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (4.36), а функция $f(x)$ – его *правой частью*.

Если $f(x) \equiv 0$, то ДУ (4.36) называется ***линейным однородным*** уравнением; если $f(x) \neq 0$, то ДУ (4.36) называется ***неоднородным.***

Частным случаем ДУ (4.36) являются *линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*.

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) ***второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида***

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}, \tag{4.37}$$

где p и q – действительные числа.

Решение уравнения (4.37) будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \tag{4.38}$$

где $k = \text{const}$.

Дифференцируя эту функцию два раза

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}$$

и подставляя выражения для y, y' и y'' в ЛОДУ (4.38), получим: $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0}. \tag{4.39}$$

Уравнение (4.39) *называется* ***характеристическим уравнением*** *ЛОДУ* (4.37). Если k будет являться решением уравнения (4.39), то e^{kx} будет решением ЛОДУ (4.37). Следовательно, чтобы проинтегрировать ЛОДУ (4.37) необходимо решить его *характеристическое уравнение*, которое является квадратным уравнением. Как известно, квадратное уравнение всегда имеет два корня: обозначим их k_1 и k_2. Тогда

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении (4.37) **заменить** y''**,** y' **и** y **соответственно на** k^2**,** k **и** 1**.**

При решении характеристического уравнения (4.37) возможны три случая.

1. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ ***различные*** действительные числа**.** В этом случае общее решение уравнения (4.37) имеет вид

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}. \tag{4.40}$$

2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ ***равные*** действительные числа**.** В этом случае общее решение уравнения (4.37) имеет вид

$$\boxed{y = e^{k_1 x}\left(C_1 + xC_2\right)}. \tag{4.41}$$

3. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ ***комплексные*** числа: $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. Общее решение уравнения (4.37) может быть найдено по формуле

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)}. \tag{4.42}$$

Пример 4.6. Найти общее решение ЛОДУ $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Решаем его:

$$k_1 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = 1,\ k_2 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = -4.$$

Корни характеристического уравнения получились *различные действительные числа.* Поэтому, записываем общее решение данного уравнения, пользуясь формулой (4.40):

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}.$$

Пример 4.7. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 16 = 0.$$

Решаем его:

$$k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4.$$

Так как корни характеристического уравнения получились *равные действительные числа*, то, используя формулу (4.41), запишем общее решение исходного ЛОДУ в виде

$$y = e^{4x}\left(C_1 + xC_2\right).$$

Пример 4.8. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Решение. Записываем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Решаем его:

$$k_1 = \frac{2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+\sqrt{-1\cdot 4}}{2} = \frac{2+\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i\,.$$

Как известно, если квадратный трехчлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $k_1 = \alpha + i\beta$, то он имеет и сопряженный корень $k_2 = \alpha - i\beta$. Поэтому второй корень характеристического уравнения можно не вычислять, а написать сразу

$$k_2 = 1 - i\,.$$

Корни характеристического уравнения получились *комплексные.* Значит, по формуле (4.42) получаем общее решение данного ЛОДУ

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

Таким образом, *нахождение общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами* (4.37) *сводится к нахождению корней характеристического уравнения* (4.39) *и использованию формул* (4.40), (4.41), (4.42) *общего решения уравнения (не прибегая к вычислению интегралов).*

4.4.4. Исследование дифференциального уравнения свободных колебаний

Ранее, в *п. 4.2*, было выведено уравнение свободных колебаний (4.3):

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0\,.$$

ДУ (4.3) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Найдем решение этого уравнения.

I. Предположим, что отсутствует сила трения, т.е. $\mu = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = 0$. Таким образом, уравнение (4.3) принимает вид

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0\,. \qquad (4.43)$$

Для решения ДУ (4.43) составим характеристическое уравнение

$$p^2 + \omega^2 = 0\,.$$

Его корнями являются комплексные числа $p_1 = i\omega$ и $p_2 = -i\omega$. Следовательно, применяя формулу (4.42), получим решение ДУ (4.43)

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{4.44}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Запишем функцию (4.44) в более компактной форме. Для этого введем новые постоянные A и φ_0, а C_1 и C_2 будут связаны с A и φ_0 соотношениями:

$$C_1 = A\sin\varphi_0,\ C_2 = A\cos\varphi_0. \tag{4.45}$$

Тогда постоянные A и φ_0 через C_1 и C_2 определяются следующим образом:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ и } \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 из (4.45) в уравнение (4.44), получим

$$y = A\sin\varphi_0 \cos\omega t + A\cos\varphi_0 \sin\omega t$$

или

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right). \tag{4.46}$$

Колебания, описываемые уравнением (4.46), называются ***гармоническими***. Интегральными кривыми в этом случае являются синусоиды. График функции (4.46) изображен на рис. 4.5.

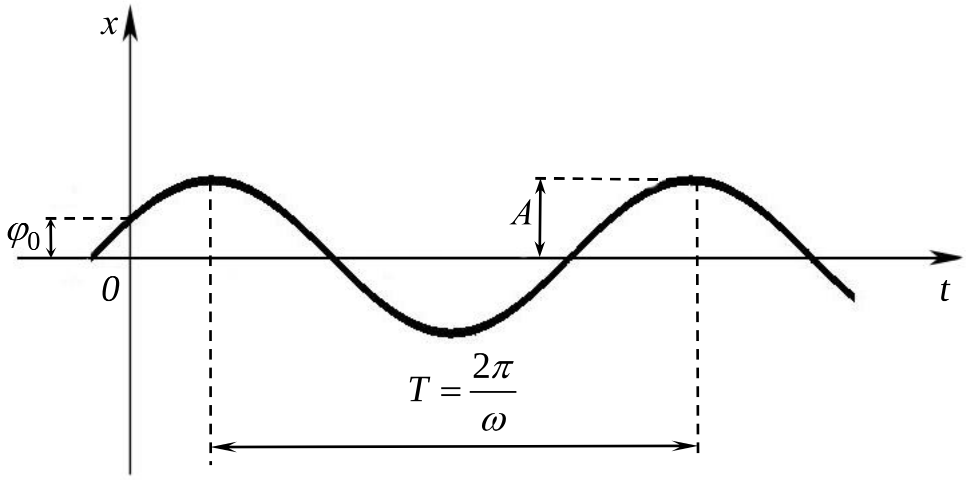


Рис. 4.5. График функции (4.46)

Периодом колебаний называется промежуток времени T, за который аргумент синуса изменяется на 2π (в данном случае $T = \frac{2\pi}{\omega}$).

Частотой колебаний называется число колебаний за время 2π (в нашем случае частота равна ω).

Амплитудой колебаний называется величина наибольшего отклонения от положения равновесия (в данном случае амплитудой является величина A).

Число φ_0 называется ***начальной фазой***.

II. Теперь рассмотрим решение ДУ (4.3) для случая, когда сила трения присутствует, т.е. $\mu \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda \neq 0$. Характеристическое уравнение для (4.3) имеет вид

$$p^2 + 2\lambda p + \omega^2 = 0. \tag{4.47}$$

Корнями уравнения (4.47) являются числа

$$p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = -\lambda \pm \tilde{\lambda},$$

где $\tilde{\lambda} < \lambda$.

В зависимости от соотношения между λ и ω могут возникнуть три случая:

1. При $\lambda = \omega$ имеем $p_1 = p_2 = -\lambda$ ($p_{1,2} < 0$). Таким образом, применив формулу (4.41), запишем решение ДУ (4.3) в виде

$$y = e^{-\lambda t}\left(C_1 + C_2 t\right). \tag{4.48}$$

Из уравнения (4.48) следует, что отклонение y при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t \to \infty$. В этом случае колебаний груза не будет, так как сила сопротивления велика по сравнению с коэффициентом упругости пружины k и в зависимости от начальных условий может наблюдаться один из видов апериодического движения (рис. 4.6).

2. При $\lambda > \omega$ имеем $p_1 = -\lambda + \tilde{\lambda}$ и $p_2 = -\lambda - \tilde{\lambda}$ ($p_{1,2} < 0$). Значит, используя формулу (4.40), получим

$$y = C_1 e^{\left(-\lambda + \tilde{\lambda}\right)t} + C_2 e^{\left(-\lambda - \tilde{\lambda}\right)t}. \tag{4.49}$$

Здесь отклонение y также как и в первом случае будет асимптотически стремится к нулю при $t \to \infty$, но, в отличие от предыдущего случая, гораздо быстрее.

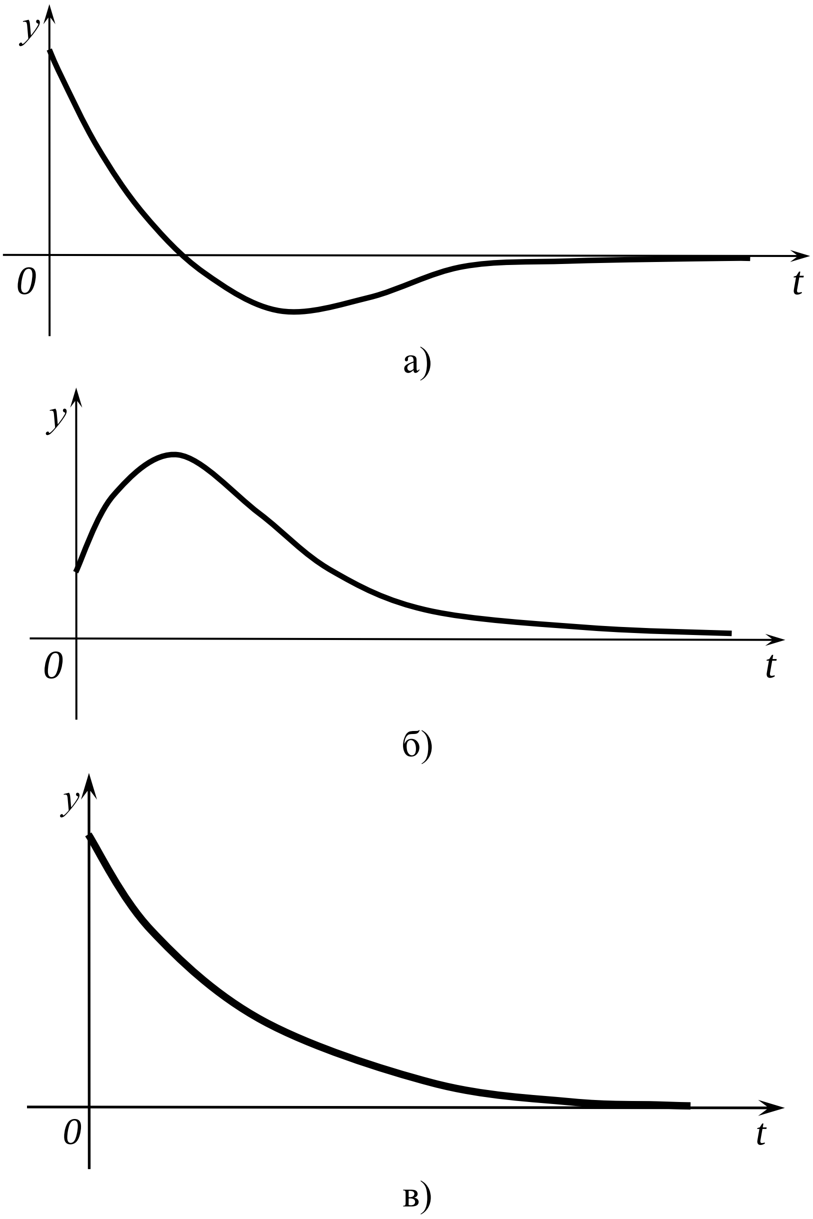


Рис. 4.6. Виды апериодического движения

3. При $\lambda < \omega$ имеем комплексные корни $p_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\tilde{\omega}$. Тогда, используя формулу (4.42), получим

$$y = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos \tilde{\omega} t + C_2 \sin \tilde{\omega} t\right) \qquad (4.50)$$

или

$$y = Ae^{-\lambda t} \sin\left(\tilde{\omega} t + \varphi_0\right). \qquad (4.51)$$

Здесь в качестве амплитуды нужно рассматривать величину $Ae^{-\lambda t}$, зависящую от времени. Так как «$-\lambda < 0$», то амплитуда $Ae^{-\lambda t}$ будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, т.е. в этом случае мы имеем дело с ***затухающими колеба-***

ниями, период которых равен $T = \dfrac{2\pi}{\tilde{\omega}}$ ($\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ – частота затухающих колебаний). График затухающих колебаний изображен на рис. 4.7.

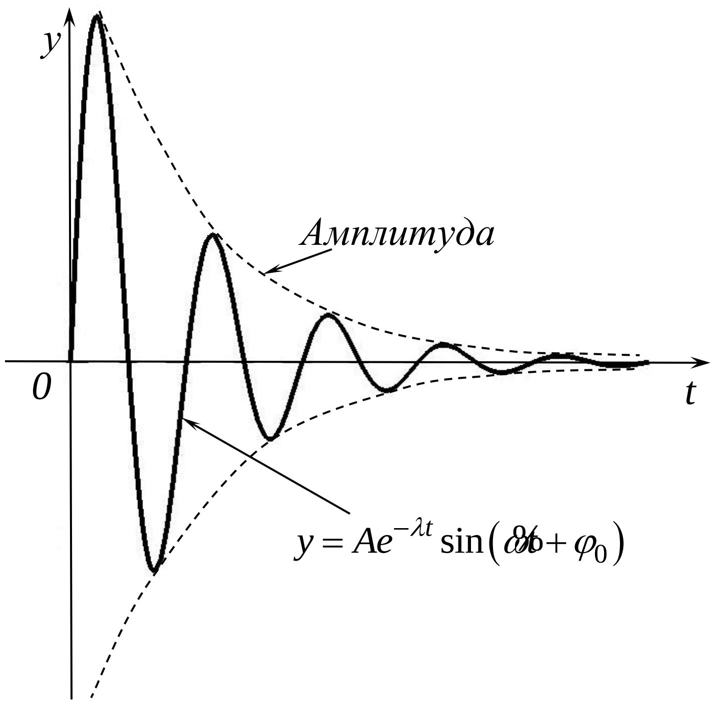


Рис. 4.7. Затухающие колебания

5. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

5.1. Определение кривизны

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности.

Пусть мы имеем кривую, которая не пересекает сама себя и имеет касательную в каждой точке. Проведем касательные к кривой в каких-нибудь двух ее точках A и B и обозначим через $\Delta\alpha$ угол, образованный этими касательными (рис. 5.1).

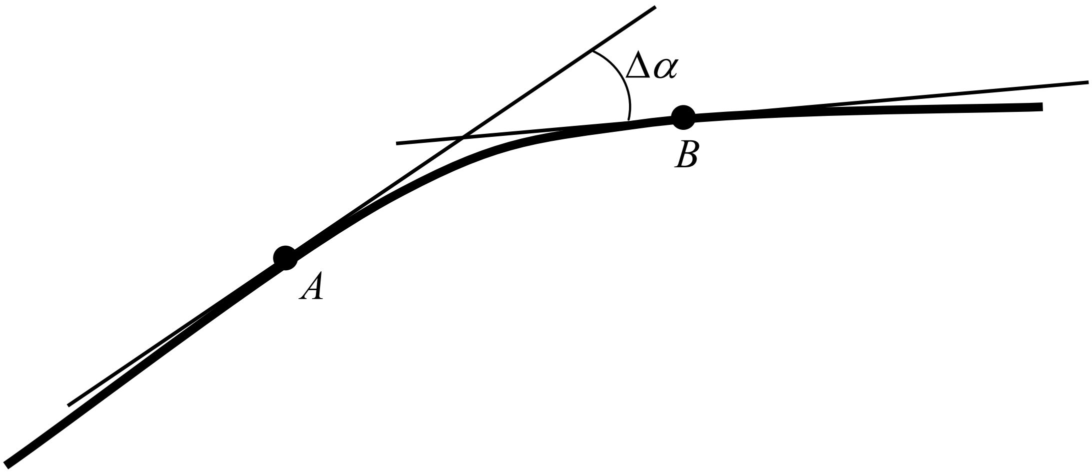


Рис. 5.1. Острый угол смежности

Углом смежности *дуги* $\overset{\frown}{AB}$ *называется угол* $\Delta\alpha$, *на который поворачивается касательная при переходе от точки A к точке B.*

У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности $\Delta\alpha$ *больше* (рис. 5.1 и 5.2). Если длины двух кривых *не равны*, то угол смежности $\Delta\alpha$ **не может служить мерой кривизны**. Поэтому для кривых разной длины вводят понятие *средней кривизны*.

Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ *дуги* $\overset{\frown}{AB}$ *называется отношение ее угла смежности* $\Delta\alpha$ *к длине дуги* ΔL, *т.е.*

$$\boxed{K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta L}}. \tag{5.1}$$

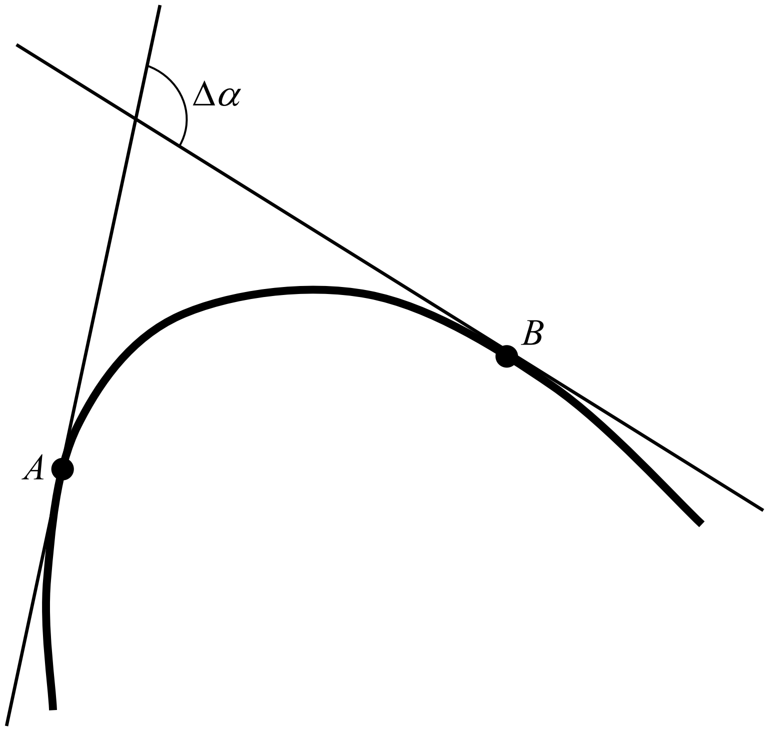


Рис. 5.2. Тупой угол смежности

В то же время, изогнутость разных частей дуги $\overset{\frown}{AB}$ может быть различной. Поэтому *вводят понятие кривизны линии в каждой точке*.

Кривизной *K линии в точке A называется предел средней кривизны дуги* $\overset{\frown}{AB}$, *когда точка B приближается по дуге к точке A, при этом длина* ΔL *этой дуги стремится к нулю*

$$\boxed{K = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta L}}. \qquad (5.2)$$

Найдем кривизну прямой и окружности.

1. Касательная в каждой точке прямой совпадает с самой прямой. Поэтому $\Delta\alpha \equiv 0$**,** а следовательно, $K_{\text{ср}} = K = 0$. Таким образом, **прямая есть линия нулевой кривизны.**

2. Длина ΔL дуги $\overset{\frown}{AB}$ окружности (рис. 5.3) будет равна

$$\Delta L = \overset{\frown}{AB} = \Delta\alpha \cdot R.$$

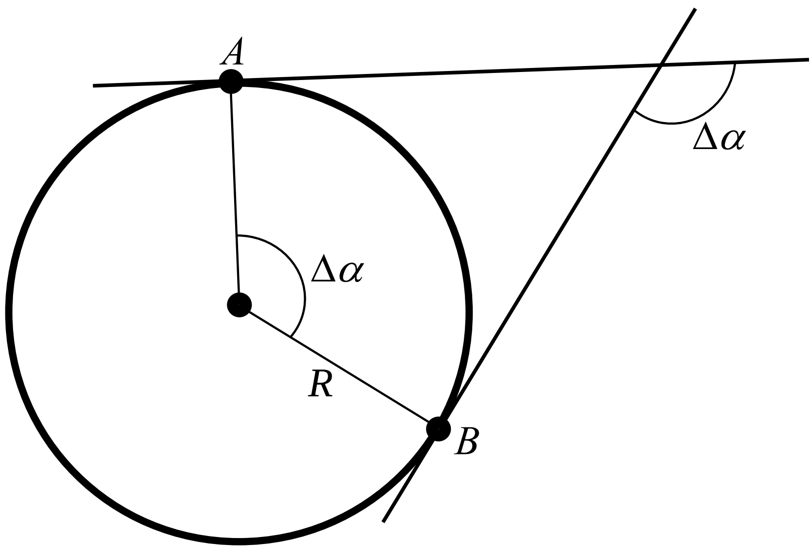


Рис. 5.3. Определение кривизны окружности

Таким образом, средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ у окружности

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta L} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha \cdot R} = \frac{1}{R} = \text{const},$$

а кривизна K окружности в точке A

$$K = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{B \to A} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

Следовательно, **кривизна окружности в каждой точке есть величина постоянная и равная величине, обратной радиусу**.

5.2. Вычисление кривизны графика функции

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, и некоторую произвольную точку $M(x;y)$ на этом графике. Вычислим кривизну график функции в точке M. Предположим, что существует вторая производная $f''(x)$ в точке x и в ее окрестности функция дифференцируема. Чтобы использовать определение кривизны линии в точке рассмотрим на кривой еще одну точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$.

Проведем касательные к кривой в точках M и M_1 с абсциссами x и $x + \Delta x$ и обозначим через α и $\alpha + \Delta\alpha$ углы наклона этих касательных к оси Ox

(рис. 5.4).

Длину дуги $\overset{\smile}{M_0M}$, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки M_0, обозначим через L; тогда $\Delta L = \left|\overset{\smile}{M_0M_1}\right| - \left|\overset{\smile}{M_0M}\right|$, а $\Delta L = \left|\overset{\smile}{MM_1}\right|$.

Из рис. 5.4 видно, что угол смежности, соответствующий дуге $\overset{\smile}{MM_1}$, равен абсолютной величине разности углов α и $\alpha + \Delta\alpha$, т.е. равен $|\Delta\alpha|$.

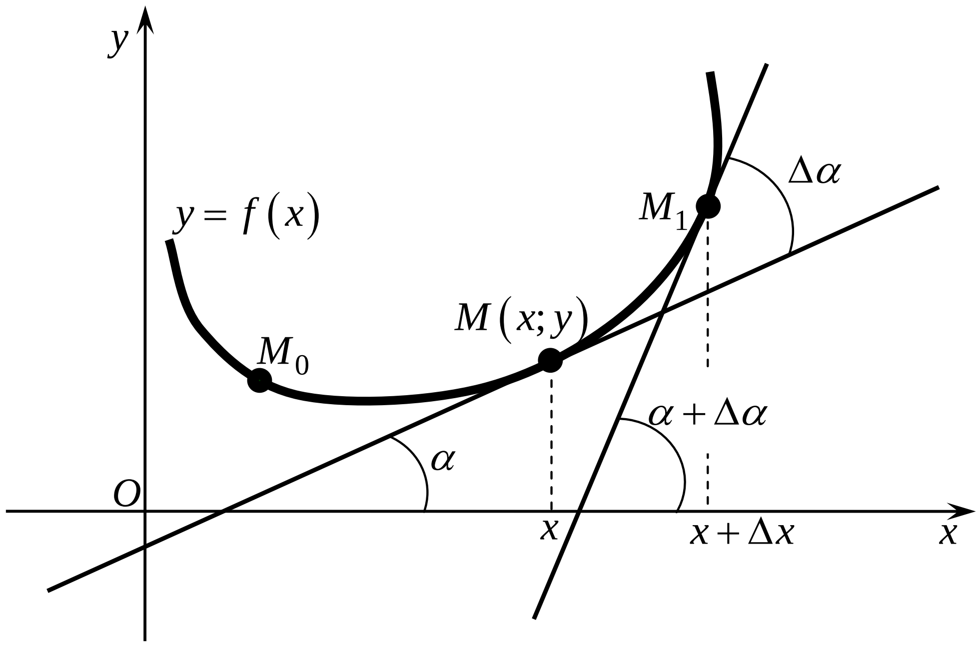


Рис. 5.4. Вывод формулы (5.4)

По определению средней кривизны дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ имеем

$$K_{\text{ср}} = \frac{|\Delta\alpha|}{\left|\overset{\smile}{MM_1}\right|} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta L}\right|.$$

Чтобы вычислить кривизну в точке $M(x; y)$, нужно найти предел полученного выражения при условии, что точка M_1 стремиться по кривой к точке M, т.е.

$$K = \lim_{\Delta L \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta L}\right|.$$

Очевидно, что из $\Delta L \to 0$ следует, что и $\Delta x \to 0$, поэтому

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta L}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta L}{\Delta x}}\right|. \tag{5.3}$$

Из геометрического смысла производной имеем $\mathrm{tg}\,\alpha=y'$. Следовательно $\alpha=\mathrm{arctg}\,y'$, поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\left(\mathrm{arctg}\,y'\right)'\right|=\left|\frac{1}{1+\left(y'\right)^2}\cdot y''\right|.$$

Кроме того,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta L}{\Delta x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right|=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\neq 0 \text{ (см. формулу (3.31)).}$$

Таким образом, равенства (5.3) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta L}{\Delta x}}\right|=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta L}{\Delta x}\right|}=\frac{\left|\dfrac{1}{1+\left(y'\right)^2}\cdot y''\right|}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}.$$

И, окончательно, получим **формулу для вычисления кривизны кривой** $y=f\left(x\right)$ **в любой ее точке** $M\left(x;y\right)$

$$\boxed{K=\frac{\left|y''\right|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}. \tag{5.4}$$

Таким образом, *в любой точке кривой, где существует вторая производная* y'', *можно вычислить кривизну*.

Приведем здесь без вывода формулы кривизны кривой, заданной параметрически и в полярных координатах. Если линия задана параметрическими уравнениями $x=x\left(t\right)$ и $y=y\left(t\right)$, то

$$K = \frac{\left| x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t \right|}{\left[\left(x'_t \right)^2 + \left(y'_t \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (5.5)$$

Если линия задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$K = \frac{\left| \rho^2 + 2\left(\rho'_\varphi \right)^2 - \rho\rho''_{\varphi^2} \right|}{\left[\rho^2 + \left(\rho'_\varphi \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (5.6)$$

5.3. Радиус и центр кривизны. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Величина R, обратная кривизне K линии в данной точке M, называется ***радиусом кривизны*** *этой линии в рассматриваемой точке*

$$R = \frac{1}{K} = \frac{\left[1 + \left(y' \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| y'' \right|}. \qquad (5.7)$$

Отметим, что для окружности радиус кривизны совпадает с ее радиусом.

Проведем в точке *M* нормаль к кривой $y = f(x)$, направленную в сторону вогнутости кривой, и отложим на этой нормали отрезок MO, равный радиусу *R* кривизны кривой $y = f(x)$ в точке *M* (рис. 5.5).

Точка O называется ***центром кривизны*** *данной кривой в точке M, а круг радиуса R с центром в точке O, проходящий через точку M, называется* ***кругом кривизны*** *данной кривой в точке M.*

Совокупность всех центров кривизны точек данной линии образует новую линию, называемую ***эволютой*** данной линии.

По отношению к своей эволюте исходная кривая называется ***эвольвентой*** (в переводе с лат. «развертка»).

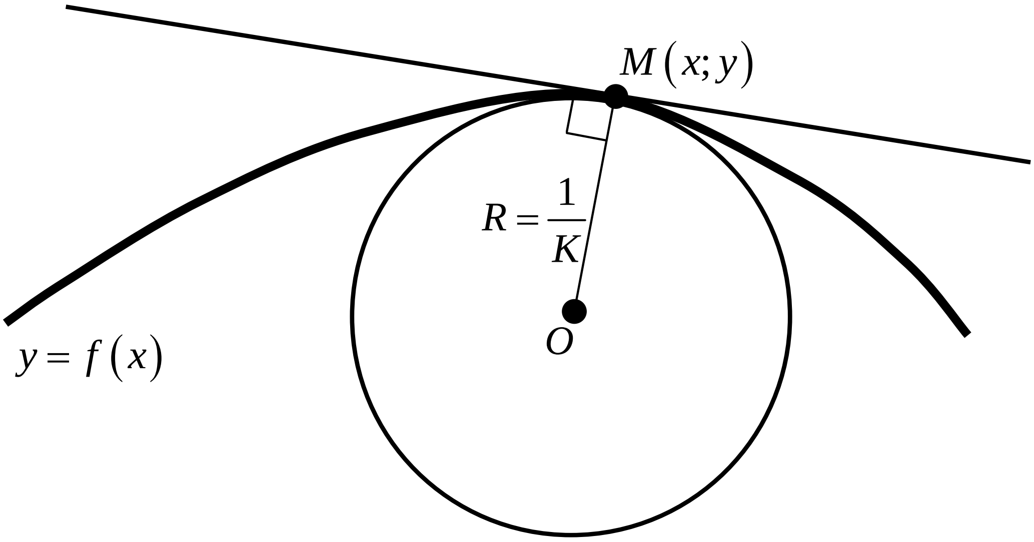


Рис. 5.5. Радиус, центр и круг кривизны линии в точке M графика функции $y=f(x)$

6. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

6.1. Расчетно-графическая работа 1 «аналитическая геометрия»

В РГР 1 входят три задачи с общими для всех 30 вариантов условиями, но разными исходными данными.

Задача 1. Для треугольника ΔABC определить:

- уравнения сторон *AB, AC, BC*;
- углы в треугольнике;
- периметр ΔABC;
- уравнение и длину высоты *AH*, опущенной из вершины *A*;
- площадь треугольника.

Варианты:

1.	$A(4;-3)$,	$B(2;4)$,	$C(-1;2)$;
2.	$A(-3;-2)$,	$B(5;1)$,	$C(1;-4)$;
3.	$A(1;5)$,	$B(-3;2)$,	$C(1;3)$;
4.	$A(-3;-2)$,	$B(-1;4)$,	$C(4;2)$;
5.	$A(-5;1)$,	$B(-1;2)$,	$C(-3;-2)$;
6.	$A(1;-4)$,	$B(5;-1)$,	$C(-2;3)$;
7.	$A(1;-2)$,	$B(4;1)$,	$C(0;4)$;
8.	$A(-1;-4)$,	$B(4;1)$,	$C(-1;2)$;
9.	$A(-3;2)$,	$B(2;3)$,	$C(-1;-4)$;
10.	$A(-1;3)$,	$B(4;1)$,	$C(0;-3)$;
11.	$A(4;0)$,	$B(-1;-3)$,	$C(-2;-6)$;
12.	$A(-4;0)$,	$B(2;3)$,	$C(1;-2)$;
13.	$A(-3;1)$,	$B(2;2)$,	$C(0;-2)$;
14.	$A(4;2)$,	$B(-2;3)$,	$C(1;-2)$;
15.	$A(5;1)$,	$B(1;6)$,	$C(-2;0)$;
16.	$A(-6;2)$,	$B(2;3)$,	$C(1;-4)$;
17.	$A(-3;-4)$,	$B(-1;3)$,	$C(4;1)$;
18.	$A(-1;-3)$,	$B(-6;2)$,	$C(2;3)$;
19.	$A(5;3)$,	$B(-4;2)$,	$C(3;-4)$;
20.	$A(4;-3)$,	$B(-3;-4)$,	$C(-1;4)$;
21.	$A(-4;-4)$,	$B(3;3)$,	$C(5;-2)$;
22.	$A(-6;-1)$,	$B(5;2)$,	$C(-1;1)$;
23.	$A(-1;-5)$,	$B(1;-3)$,	$C(-2;6)$;

24.	$A(-4;1)$,	$B(4;-1)$,	$C(1;-2)$;
25.	$A(-1;5)$,	$B(6;1)$,	$C(1;-1)$;
26.	$A(-6;-2)$,	$B(-1;8)$,	$C(6;1)$;
27.	$A(-3;3)$,	$B(5;6)$,	$C(1;-4)$;
28.	$A(-4;4)$,	$B(-1;-5)$,	$C(4;-2)$;
29.	$A(2;2)$,	$B(-4;3)$,	$C(-1;-6)$;
30.	$A(-3;-4)$,	$B(6;1)$,	$C(2;-6)$.

Задача 2. Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду. Сделать чертеж в системе координат xOy. Определить координаты вершин и фокусов.

Варианты:

1. $3x^2+4y^2-12x+16y=0$.

2. $5x^2-6y^2+20x-12y=0$.

3. $-8x^2+2y^2+16x-10y=0$.

4. $12x^2-8y^2+24y-36x=0$.

5. $4x^2+12y^2-8x+24y=0$.

6. $-x^2+4y^2+4x-16y=8$.

7. $x^2+8y^2-12x-16y+2=0$.

8. $2x^2-8y^2-6x+16y=0$.

9. $-8x^2+6y^2-16x+12y=0$.

10. $6x^2-8y^2-24x+16y=0$.

11. $2x^2-6y^2-12x-12y+4=0$.

12. $-3x^2-6y^2+12x+24y=0$.

13. $4x^2+6y^2+8x-24y=0$.

14. $3x^2-y^2-12x+2y=0$.

15. $x^2+3y^2-6x+12y=1$.

16. $2x^2-4y^2+16x-25=0$.

17. $-2x^2+4y^2+8x-8y=0$.

18. $x^2+4y^2-8x+8y+2=0$.

19. $3x^2+6x-y^2+2y+4=0$.

20. $4x^2-y^2-4x-6y=6$.

21. $y^2-6x^2+18x+2y=0$.

22. $x^2-y^2+4x-6y=0$.

23. $4x^2+y^2+12x-4y=0$.

24. $x^2+4y^2-6x+4y=0$.

25. $6x^2-8y^2+12x+24y=6$.

26. $-4x^2-8y^2+8x-16y=0$.

27. $2x^2-4y^2-6x+8y=5$.

28. $-x^2+4y^2-2x+16y=4$.

29. $-4x^2-y^2+8x-2y=0$.

30. $2x^2-6y^2+6x-12y=6$.

Задача 3. Для пирамиды $ABCD$ определить:

- уравнения граней;
- угол между гранями ABC и ABD;
- объем.

Варианты:

1.	$A(4,2,5)$,	$B\ (0,7,2)$,	$C\ (0,2,7)$,	$D\ (1,5,0)$;

2.	A (4,4,10),	B (4,10,2),	C (2,8,4),	D (9,6,4);
3.	A (4,6,5),	B (6,9,4),	C (2,10,10),	D (7,5,9);
4.	A (3,5,4),	B (8,7,4),	C (5,10,4),	D (4,7,8);
5.	A (10,6,6),	B (–2,8,2),	C (6,8,9;),	D (7,10,3);
6.	A (1,8,2),	B (5,2,6),	C (5,7,4),	D (4,10,9);
7.	A (6,6,5),	B (4,9,5),	C (4,6,11),	D (6,9,4);
8.	A (7,2,2),	B (5,7,7),	C (5,6,8),	D (8,10,7);
9.	A (8,6,4),	B (10,5,5),	C (5,3,1),	D (2,3,7);
10.	A (7,7,3),	B (6,5,8),	C (3,5,8),	D (8,4,1);
11.	A (3,5,4),	B (5,8,3;),	C (1,9,9),	D (6,4,8);
12.	A (9,5,5),	B (–3,7,1),	C (5,7,8),	D (6,9,2);
13.	A (0,7,1),	B (4,1,5),	C (4,6,3),	D (3,9,8);
14.	A (6,1,1),	B (4,6,6),	C (4,2,0),	D (1,2,6);
15.	A (2,4,3),	B (4,7,2),	C (0,8,8),	D (5,6,11);
16.	A (8,4,4),	B (– 4,6,0),	C (4,6,7),	D (5,8,1);
17.	A (–1,6,0),	B (3,0,4),	C (3,5,2),	D (0,1,5);
18.	A (5,0,1),	B (3,5,5),	C (3,1,–1),	D (2,8,7);
19.	A (1,–1,2),	B (–3,4,–1),	C (–3,–1,4),	D (–2,2,3);
20.	A (1,3,2),	B (3,6,1),	C (–1,7,7),	D (4,2,6);
21.	A (–2,5,–1),	B (2,4,4),	C (2,4,1),	D (1,7,6);
22.	A (4,–1,1),	B (2,1,3),	C (2,4,1),	D (4,7,0);
23.	A (0,2,1),	B (2,5,0),	C (–2,6,6),	D (3,1,5);
24.	A (6,2,2),	B (– 6,4,2),	C (2,4,5),	D (3,6,–1);
25.	A (–3,4,–2),	B (1,–2,2),	C (1,3,0),	D (0,6,5);
26.	A (1,4,7),	B (–2,4,1),	C (– 4,0,2),	D (8,–1,5);
27.	A (1,5,0),	B (0,2,7),	C (0,7,2),	D (4,2,5);
28.	A (9,6,4),	B (2,8,4),	C (4,10,2),	D (3,4,10);
29.	A (7,5,9),	B (2,7,10),	C (6,9,4),	D (4,6,5);
30.	A (4,7,8),	B (5,10,4),	C (8,7,4),	D (3,5,4);

6.2. Расчетно-графическая работа 2 «дифференциальное исчисление»

РГР 2 включает три задачи с общими для всех 30 вариантов условиями, но разными исходными данными.

Задача 1. Продифференцировать функции.

Варианты:

1.

а) $y=\dfrac{x^3-6\sqrt[3]{x^2}+7}{3x-1}$,

б) $y=(\ln 2x+1)e^{-x}$,

в) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 3x$,

г) $y=4-\sqrt[4]{x^2-4x}$,

д) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}$.

2.

а) $y=\dfrac{12\sqrt[4]{x^3}-x^2-4}{x^2+2x}$,

б) $y=\left(e^{2x}-2\right)\ln 3x$,

в) $y=4\sin(3x-1)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

д) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

3.

а) $y=\dfrac{3-3x+x^3}{2x-\sqrt{x}}$,

б) $y=(4-3\ln x)e^{-2x}$,

в) $y=2\cos^2(6x+2)$,

г) $y=6\sqrt[3]{(2x-3)^2}$,

д) $y=\arcsin(x+1)$.

4.

а) $y=\dfrac{3x^2+6\sqrt[3]{x}}{2x^2-5}$,

б) $y=\left(2x+e^{-x}\right)\ln(x-3)$,

в) $y=3\mathrm{ctg}^2(x+3)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2+4x}}$,

д) $y=\mathrm{arctg}(3x-2)$.

5.

а) $y=\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-3\sqrt{x}}$,

б) $y=(\ln 7x+1)e^{3x}$,

в) $y=4\sin\left(x^2+2\right)$,

г) $y=\sqrt[3]{x^2-x+1}$,

д) $y=\arccos x^2$.

6.

а) $y=\dfrac{8\sqrt[4]{x}-x^3+x}{2x^3-7}$,

б) $y=\left(e^{x+1}-4\right)\log_2 3x$,

в) $y=5\sin\left(\sqrt{x}-1\right)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3x^4}}$,

д) $y=\mathrm{arctg}4x^2$.

7.

а) $y=\dfrac{x^4-4\sqrt{x}+1}{(3x-1)^2}$,

б) $y=(2-\log_3 x)e^{-4x}$,

в) $y=2\cos^3(2x+3)$,

г) $y=6\sqrt[3]{x^3-3x+3}$,

8.

а) $y=\dfrac{6-6\sqrt[3]{x^2}+x^2}{(2x-1)^2}$,

б) $y=\left(3-e^{x^2}\right)\ln 5x$,

в) $y=3\mathrm{tg}\left(x^3-3x\right)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+6x}}$,

д) $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$.

9.

а) $y = \dfrac{\sin x - 8\sqrt[4]{x^3}}{x - 2x^3}$,

б) $y = (\ln x - 3)e^{2x+4}$,

в) $y = \frac{1}{3}\sin\left(x^3 + 3\right)$,

г) $y = \dfrac{4}{\sqrt{1 - 4x^3}}$,

д) $y = \operatorname{arctg}\left(-x^2\right)$.

11.

а) $y = \dfrac{2x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$,

б) $y = \ln\left(2x^2 - 1\right)e^{2x^2}$,

в) $y = 3\operatorname{ctg}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)$,

г) $y = \sqrt[3]{\left(2x^2 - 5\right)^2}$,

д) $y = \frac{1}{2}\arcsin\left(1 - x^2\right)$.

13.

а) $y = \dfrac{1 + x^2}{2\left(2 + \sqrt[3]{x} - x^3\right)}$,

б) $y = \left(1 + e^{-x}\right)\ln\left(x^3\right)$,

в) $y = \sqrt{\sin 2x}$,

г) $y = \sqrt[7]{14x - 2x^7}$,

д) $y = \operatorname{arctg} e^x$.

15.

а) $y = \dfrac{10\sqrt[5]{x^2} - 3x^3}{2x - 3\sqrt[3]{x^4}}$,

б) $y = e^{4-x}(\ln 2x + 5)$,

д) $y = \arccos(2x - 1)$.

10.

а) $y = \dfrac{5 - 4\sqrt[4]{x^3} + 3x^2}{2x - x^3}$,

б) $y = \left(e^{\sin x} - 2\right)\ln x$,

в) $y = \cos^2(4x + 2)$,

г) $y = 20\sqrt[5]{x^4 + 3x^2 - 7}$,

д) $y = \operatorname{arctg}\frac{3}{x}$.

12.

а) $y = \dfrac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{1 - x^5}$,

б) $y = \left(2 - e^{-3x}\right)\ln x^2$,

в) $y = \frac{1}{4}\sin\left(1 - 2x^2\right)$,

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6 - 3x + x^3}}$,

д) $y = \frac{1}{4}\arcsin 4x^2$.

14.

а) $y = \dfrac{6x^2 - x^5 + 3}{6\sqrt[3]{x^2} - x}$,

б) $y = \left(1 - \ln\left(x^3\right)\right)e^{-2x+4}$,

в) $y = \frac{1}{2}\cos\left(4x - x^2\right)$,

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2 - 6x}}$,

д) $y = \arcsin(1 - 3x)$.

16.

а) $y = \dfrac{2x^2 - 3x^5 + 7}{8\sqrt[4]{x^5} - 2x}$,

б) $y = \left(e^{x^2} + x^3\right)\ln(1 - 2x)$, *в)* $y=\frac{1}{3}\cos^3(x-3)$,

г) $y=6\sqrt{\left(x^2-6x+1\right)^3}$,

д) $y=\arcsin(1-2x)$.

в) $y=4\operatorname{tg}^3x^2$,

г) $y=\frac{1}{\sqrt{\left(1+2x-3x^3\right)^3}}$,

д) $y=\operatorname{arctg}(2-3x)$.

17.

а) $y=\frac{4x^2-5\sqrt[5]{x^7}}{1-6\sqrt[3]{x}}$,

б) $y=\ln\left(1-2x^2\right)e^{4-3x}$,

в) $y=4\cos^6(2x-4)$,

г) $y=\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,

д) $y=\arccos\frac{1}{x^2}$.

18.

а) $y=\frac{6x-10\sqrt{x}}{(2x-3)^4}$,

б) $y=\left(4x-e^{-8x}\right)\ln(5x-1)$,

в) $y=\ln(\cos 2x)$,

г) $y=\frac{1}{3}\sqrt[4]{\left(x^3-3x\right)^3}$,

д) $y=\operatorname{arctg}\frac{4}{x}$.

19.

а) $y=\frac{12\sqrt[3]{x^4}-2x^4}{3x+15\sqrt[5]{x}}$,

б) $y=(\ln x-3x)e^{3x}$,

в) $y=\cos(\operatorname{tg}3x)$,

г) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x+4}$,

д) $y=\arccos x^3$,

20.

а) $y=\frac{4x-x^7+1}{9\sqrt[3]{x}-x^3}$,

б) $y=e^{1-x^2}\ln\left(2x+x^2\right)$,

в) $y=\ln(\operatorname{tg}2x)$,

г) $y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$,

д) $y=\arcsin\left(1+x^3\right)$.

21.

а) $y=\frac{x^4-20\sqrt[5]{x^4}}{4\sqrt{x}+x^2}$,

б) $y=\left(e^{-3x}+x^3\right)\ln\sqrt[3]{x}$,

в) $y=\sin\left(2e^x\right)$,

г) $y=\sqrt{4\sqrt{x}+x^2}$,

д) $y=\operatorname{arctg}6x^3$.

22.

а) $y=\frac{1-6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{6x}}{x^3-\sqrt{3x}}$,

б) $y=\left(e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\ln\sqrt{x}$,

в) $y=\lg(1-\cos 2x)$,

г) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+5x}}$,

д) $y=\arcsin(2x+1)$.

23.

а) $y=\frac{\sqrt[3]{5x^4}-x^4}{4+6\sqrt[3]{2x}}$,

24.

а) $y=\frac{4x^{\frac{1}{2}}-6\sqrt[3]{x}}{7x^3+3x^7}$, б) $y=\ln x^3\left(x^2-e^{-x}\right)$,

в) $y=\cos\left(\ln(-3x)\right)$,

г) $y=\sqrt{6-\sqrt[3]{4x^2}}$,

д) $y=\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

б) $y=\ln\left(1-x^3\right)\left(e^x-x^3\right)$,

в) $y=\cos(2\sin x)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6-\sqrt{x}}}$,

д) $y=\arccos 3x^2$.

25.

а) $y=\dfrac{6x^2-2x^6}{2\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}}$,

б) $y=\left(2x^2-e^{4x}\right)\ln(1-4x)$,

в) $y=\operatorname{tg}(\ln x)$,

г) $y=\sqrt[3]{e^{3x}+x^3}$,

д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{x^2}$.

26.

а) $y=\dfrac{x^{15}+3x^{10}+15}{10\sqrt[5]{x^2}-5\sqrt[10]{x^9}}$,

б) $y=\ln\left(x^2+3\right)e^{-x^3}$,

в) $y=\ln(4\cos 4x)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-e^{x^2}}}$,

д) $y=\arcsin\sqrt{x}$.

27.

а) $y=\dfrac{16+x^4+\sqrt[3]{x}}{12\sqrt[3]{x^5}-10x^7}$,

б) $y=e^{x^2+2}\ln 5x$,

в) $y=\cos\left(e^{3x}\right)$,

г) $y=\sqrt[3]{e^{x^3}-x^3}$,

д) $y=\operatorname{arctg}5\sqrt{x}$.

28.

а) $y=\dfrac{4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}{\left(x^3-2x^5\right)^2}$,

б) $y=\left(4x^2+e^{-x}\right)\ln 3x$,

в) $y=\operatorname{tg}\left(e^{2x}\right)$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(1-e^{-x}\right)^3}}$,

д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4-x}$.

29.

а) $y=\dfrac{6x^2-9\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt{5x}-5\sqrt[5]{x}}$,

б) $y=\ln\left(4x^3\right)\left(4-e^{-4x}\right)$,

в) $y=\operatorname{tg}^2(4-5x)$,

г) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-x}$,

д) $y=\arcsin 4\sqrt{x}$.

30.

а) $y=\dfrac{14\sqrt[7]{x^3}-3x^2}{\left(2-3x^2\right)^2}$,

б) $y=\left(15x-3e^{5x}\right)\ln(15-5x)$,

в) $y=\cos^4\sqrt{x}$,

г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+4\sqrt{x}}}$,

д) $y=\arccos\sqrt[3]{x^2}$.

Задача 2. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x = x_0$.

Варианты:

1. $y = \dfrac{4x - x^2}{2}$, $x_0 = 2$.

2. $y = 2x^2 + 5x - 2$, $x_0 = -2$.

3. $y = 2x - x^3$, $x_0 = -1$.

4. $y = x^3 - 8\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 1$.

5. $y = 2x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.

6. $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 10$, $x_0 = -8$.

7. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{x}$, $x_0 = 4$.

8. $y = 4\sqrt[4]{x} - 60$, $x_0 = 16$.

9. $y = 1 - 3x + 3x^2$, $x_0 = 1$.

10. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$, $x_0 = 2$.

11. $y = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$, $x_0 = 64$.

12. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 1}$, $x_0 = -2$.

13. $y = 2x^3 - 3x$, $x_0 = -1$.

14. $y = \dfrac{x^2 + 6}{x^4 + 1}$, $x_0 = -1$.

15. $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

16. $y = -\dfrac{x^8 + 3}{1 - 2x}$, $x_0 = 1$.

17. $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$, $x_0 = 2$.

18. $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 2x^5}$, $x_0 = 1$.

19. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$, $x_0 = 1$.

20. $y = \dfrac{1}{2 + 5x}$, $x_0 = 2$.

21. $y = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$, $x_0 = -1$.

22. $y = \dfrac{x^2 + 2}{2x}$, $x_0 = -3$.

23. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $x_0 = 4$.

24. $y = -2\left(3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)$, $x_0 = 1$.

25. $y = \dfrac{x^2 + 3}{1 + 3x}$, $x_0 = 1$.

26. $y = 4\sqrt{x} - 12\sqrt[3]{x} + 1$, $x_0 = 1$.

27. $y = 5\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$.

28. $y = \dfrac{2x^3 - 3x}{3}$, $x_0 = -1$.

29. $y = \dfrac{x^4}{10} + \dfrac{3}{x}$, $x_0 = -2$.

30. $y = \dfrac{16}{3}\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

Задача 3. Провести полное исследование и построить графики функций.

Варианты:

1. *а)* $y = x - 5\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = 13x^2 - x^4 - 36$.

2. *а)* $y = -x + 5\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = 5x^2 - x^4 - 6$.

3. *а)* $y = 5x + \sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

4. *а)* $y = 4x - 2\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

5. *а)* $y = 2x + 4\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^5 - x^3 - 2$.

6. *а)* $y = -x + 3\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = (x-3)^2(x-2)$.

7. *а)* $y = x + 2\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^3 + 12x$.

8. *а)* $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$,

б) $y = x^5 + 12x$.

9. *а)* $y = \ln\left(x^2 + 9\right)$,

б) $y = x^4 - 2x^2$.

10. *а)* $y = (x-2)e^{3-x}$,

б) $y = 3\left(\dfrac{x^4}{2} - x^2\right)$.

11. *а)* $y = 3x + 5\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{8}$.

12. *а)* $y = -5x + 2\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

13. *а)* $y = -2x + 5\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = 16x(x-1)^3$.

14. *а)* $y = 5x - 2\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = \left(1 - x^2\right)\left(1 - x^3\right)$.

15. *а)* $y = 2x + \sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.

16. *а)* $y = -4x + 3\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$.

17. *а)* $y = -3x - 4\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$.

18. *а)* $y = 3x + 4\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

19. *а)* $y = (x+1)e^{-2x}$,

б) $y = x^3(x+2)^2$.

20. *а)* $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = x^2(1-x)$.

21. *а)* $y = 2x + 6\sqrt[3]{x^2}$,

б) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$.

22. *а)* $y = 2 + e^{x-6}$,

б) $y = 1 - 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

23. *а)* $y=(x+4)e^{2x}$,

б) $y=4x-\dfrac{x^3}{3}$.

24. *а)* $y=\ln\left(2x^2+3\right)$,

б) $y=x\left(x^2-1\right)^3$.

25. *а)* $y=e^{-x^2}$,

б) $y=4x-\dfrac{x^2}{2}$.

26. *а)* $y=e^{2x-x^2}$,

б) $y=x^4-2x^2-8$.

27. *а)* $y=xe^x$,

б) $y=2x^3-3x^2$.

28. *а)* $y=e^x-e^{-x}$,

б) $y=\dfrac{1}{6}x^3\left(x^2-5\right)$.

29. *а)* $y=e^x+e^{-x}$,

б) $y=x^4-8x^2-9$.

30. *а)* $y=\ln\left(x^2+4\right)$,

б) $y=(x+4)^2(x-5)$.

6.3. Расчетно-графическая работа 3 «неопределенные интегралы»

РГР 3 включает четыре задачи с общими для всех 30 вариантов условиями, но разными исходными данными.

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы, используя внесение под знак дифференциала.

Варианты:

1. $\int xe^{3x^2}\mathrm{d}x$.

2. $\int \cos x\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\int \dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4. $\int \dfrac{x^4}{x^5+5}\mathrm{d}x$.

5. $\int \dfrac{\ln^3 x}{x}\mathrm{d}x$.

6. $\int \dfrac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

11. $\int \dfrac{\sin\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

12. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

13. $\int \cos \text{õå}^{2\sin x}\mathrm{d}x$.

14. $\int \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$.

15. $\int x2^{-x^2}\mathrm{d}x$.

16. $\int \dfrac{(1+\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$.

21. $\int \dfrac{(\mathrm{arctg}x+1)^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

22. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

23. $\int x^2\cos^2 x^3\mathrm{d}x$.

24. $\int \dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$.

25. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}x\cdot\cos^2 x}$.

26. $\int \dfrac{\sqrt{1-\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$.

8. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x^2}$.

9. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sin^2 x^3}$.

10. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg} x}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

17. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\cos x^3}$.

18. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4x^3+1}}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{x^2}{e^{3x^3}}\mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{2^{\mathrm{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

27. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$.

28. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

29. $\int x\cdot 3^{2x^2-1}\mathrm{d}x$.

30. $\int x^2\sqrt{1-3x^3}\mathrm{d}x$.

Задача 2. Вычислить неопределенные интегралы, используя замену переменных.

Варианты:

1. $\int \sin(2x-1)\mathrm{d}x$.

2. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4-x^2}$.

3. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 3x}$.

5. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{16x^2-1}$.

6. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+16x^2}$.

7. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{25+x^2}}$.

8. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-25}$.

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$.

10. $\int 2^{4x}\mathrm{d}x$.

11. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+9}$.

12. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{36-x^2}}$.

13. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-36x^2}}$.

14. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-36}}$.

15. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4+9x^2}$.

16. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{9-6x^2}$.

17. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3x^2-4}$.

18. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}}$.

19. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{16+9x^2}}$.

20. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+25}}$.

21. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$.

22. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4x^2-3}$.

23. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{6-4x^2}$.

24. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{25x^2+4}$.

25. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4x^2+15}$.

26. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{10x^2+100}$.

27. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{36-25x^2}}$.

28. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-16}}$.

29. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9}}$.

30. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2+16}$.

Задача 3. Проинтегрировать выражения, содержащие квадратный трехчлен.

Варианты:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{4x^2+6x-1}$.

3. $\int \frac{dx}{6-3x+3x^2}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x-3}}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-2x^2}}$.

6. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+7}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x-3}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x-2x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{3x^2+6x-7}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x-7}}$.

11. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$.

12. $\int \frac{dx}{4x^2-8x+2}$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x-5}}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-1}}$.

15. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+3}$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x-4x^2}}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+6x-3x^2}}$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x-16}}$.

19. $\int \frac{dx}{4x^2-8x+2}$.

20. $\int \frac{dx}{6-9x+2x^2}$.

21. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+3}$.

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+5}}$.

23. $\int \frac{dx}{2-8x+7x^2}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-6x-x^2}}$.

25. $\int \frac{dx}{5-6x+3x^2}$.

26. $\int \frac{dx}{2x^2-8x-5}$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+12x+1}}$.

28. $\int \frac{dx}{2x^2-2x-8}$.

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-6x-x^2}}$.

30. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$.

Задача 4. Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям.

Варианты:

1. $\int xe^{-3x}dx$.

2. $\int \mathrm{arctg}2x dx$.

3. $\int 2xe^{3x}dx$.

4. $\int x\cos 2x dx$.

5. $\int x\sin 4x dx$.

6. $\int xe^{5x}dx$.

11. $\int \mathrm{arctg}6x dx$.

12. $\int xe^{-2x}dx$.

13. $\int xe^{-4x}dx$.

14. $\int \mathrm{arctg}3x dx$.

15. $\int \mathrm{arctg}5x dx$.

16. $\int \mathrm{arctg}^2 x dx$.

21. $\int 2x\cos 4x dx$.

22. $\int (-3x)\cos 4x dx$.

23. $\int (x+5)\sin 2x dx$.

24. $\int (2-x)\sin 3x dx$.

25. $\int (x+3)\sin 3x dx$.

26. $\int (x-10)\sin 4x dx$.

7. $\int xe^{2x}\mathrm{d}x$.

8. $\int \ln(x+4)\mathrm{d}x$.

9. $\int \ln(4x+1)\mathrm{d}x$.

10. $\int x\sin 2x\mathrm{d}x$.

17. $\int 5x\cos 2x\mathrm{d}x$.

18. $\int 3x\cos 5x\mathrm{d}x$.

19. $\int x\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x$.

20. $\int 4x\sin\sqrt{3}x\mathrm{d}x$.

27. $\int\left(\sqrt{2}-x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$.

28. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

29. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

30. $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

6.4. Расчетно-графическая работа 4 «дифференциальные уравнения»

РГР 4 включает одну задачу с общим для всех 30 вариантов условием, но разными исходными данными.

Задача 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

Варианты:

1. $(x+1)\mathrm{d}x+(y-1)\mathrm{d}y=0$.
2. $ye^{2x}\mathrm{d}x+\left(1+e^{2x}\right)\mathrm{d}y=0$.
3. $y'-y=e^{2x}$.
4. $xy'-2y=x^3+x$.
5. $y'-2y=e^{-x}$.
6. $y'+\frac{x}{1-x^2}y=1$.
7. $y''=3x^2-4x+1$.
8. $y''=3y'$.
9. $y''+2y'=0$.
10. $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$.
11. $9y''+y=0$.
12. $4y''-y=0$.
13. $y''-6y'+13y=0$.
14. $y''-4y'+5y=0$.
15. $9y''-6y'+y=0$.
16. $y'''=e^{-x}$.
17. $y^{(V)}=120$.
18. $xy'-y=0$.
19. $xy'''=1$.
20. $xy'-y=x^2e^{-x}$.
21. $y'\mathrm{tg}2x-y=4$.
22. $y'=\sqrt{y}\ln x$.
23. $xy'+y=y^2$.
24. $(1+y')e^y=1$.
25. $xy'+y=e^x$.
26. $y'-y\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x}$.
27. $yy''+x=0$.
28. $x^2y''+xy'=1$.
29. $y''-y'+2y=0$
30. $y''=-25y$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие позволит студентам ускоренной формы обучения выполнить контрольные работы и подготовиться к экзамену, так как включает необходимые теоретические сведения по курсу высшей математики и примеры решений задач, входящих в контрольные работы студентов – ускоренников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / *М. Я. Выгодский*. – М.: Наука, 1973. – 870 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / *П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова*.– М.: Издательский дом «ОНИКС 21 Век»: Мир и Образование, 2003. – 720 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / *А.Д. Мышкис*. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 640 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / *Н. С. Пискунов*. – М.: ИНТЕГРАЛ–ПРЕСС, 2002. – 1032 с.

Привалов И. И. Аналитическая геометрия / *И. И. Привалов*.– СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 304 с.

Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / *П.Ф. Фильчаков.* – Киев. Наукова думка, 1972. – 744 с.

Шипачев В. С. Высшая математика / *В. С. Шипачев*. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.