МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
.
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический
университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации
самостоятельной работы по линейной алгебре
и аналитической геометрии для студентов
специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»
(специализация № 1 Экономико–правовое обеспечение
экономической безопасности») очной формы обучения

1 семестр

Воронеж 2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук А. А. Катрахова,
канд. физ.-мат. наук В. С. Купцов

Математика: методические указания к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по линейной алгебре и аналитической геометрии для студентов специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» (специализация № 1 «Экономико–правовое обеспечение экономической безопасности») очной формы обучения. 1 семестр / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. А. Катрахова, В. С. Купцов. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022. 37 с.

Методические указания содержат теоретический материал, примеры решения задач, а также задания для самостоятельной работы.

Предназначены для студентов 1 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле Met-Alg+Geom.pdf.

Ил. 9. Библиогр.: 3 назв.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Рецензент – О. А. Соколова, канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Высшая математика для будущих инженеров данного профиля является не только основой фундаментальной подготовки, но и обязательной базой для изучения остальных общетехнических специальных дисциплин и успешности всей последующей практической деятельности.

При организации изучения курса высшей математики ряд тем выделяется студентам на самостоятельное изучение, при этом предусматриваются консультации и руководство самостоятельной работой студентов со стороны преподавателей и систематическая, в соответствии с установленным графиком, отчетность студентов по этой работе.

В настоящих методических указаниях приводятся темы курса, выносимые на самостоятельное изучение, необходимая литература, а также контрольные вопросы и задания для оценки усвоения изучаемого материала и формы отчетности.

ЗАНЯТИЕ № 1

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ 2-ГО, 3-ГО, n-ГО ПОРЯДКОВ. МИНОРЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Литература: [1], гл. I, §2;[3], п. 1,с. 3-8.

Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляется определитель 2-го порядка?
2. Как вычисляется определитель 3-го порядка?
3. Какие вы знаете свойства определителей?
4. Как вычисляется определитель n-го порядка?
5. В чем заключается правило Крамера?
6. Для каких задач применятся правило Крамера?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot3 + 2\cdot5\cdot(-2) + (-3)\cdot(-1)\cdot0 -$$

$$-2\cdot4\cdot0 - 1\cdot(-1)\cdot(-2) - \cdot3\cdot5\cdot(-3) = 35.$$

Пример 2. Вычислить определитель 3-его порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам второй строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(15-16) + 2(10-12) - (8-9) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

Пример 3. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение. Разлагая определитель по элементам первой строки, приведем его к сумме определителей 3-го порядка, причем таких определителей будет только два, поскольку два элемента первой строки являются нулями и их алгебраические дополнения вычислять не нужно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-24-4+8)+3(-4-9-6+12) = -43.$$

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, преобразуя его к треугольному виду, т.е. чтобы элементы по одну сторону главной диагонали стали равны нулю. Тогда определитель будет равен произведению элементов главной диагонали.

Решение. На основании свойства 5 первую строку умножим на (-1) и сложим со второй строкой, затем – с четвертой. Далее, умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой. Величина определителя при этом не изменится. Этот способ называется «делать нули».

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Вторую строку умножаем на (-7) и складываем с третьей. Далее, третью строку – на (-1/3) и складываем с четвертой.

$$= -6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \end{vmatrix} = -6\cdot3\cdot(4/3) = -24.$$

Пример 5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\,, \\ 3x_1 + x_3 = 7\,, \\ 4x_2 - x_3 = -1\,. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов перед неизвестными системы :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0\,.$$

Заменим каждый из столбцов определителя Δ столбцом свободных членов и вычислим три вспомогательных определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -20\,;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -10\,.$$

По формулам Крамера получим $x_1 = \Delta_1/\Delta = 2$; $x_2 = \Delta_2/\Delta = 0$; $x_3 = \Delta_3/\Delta = 1$.

Самостоятельное изучение: РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Литература: [1],гл, I, , §4 (п. 4.3); [3], п. 1,с. 27-28.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2], №№ 1.2.14, 1.2.16, 1.2.94, 1.2.96, 1.2.98, 2.2.8, 2.2.10, .2.2.11

Форма отчетности: краткий реферат с решением задач, который представляется по ходу изучения программы курса

ЗАНЯТИЕ № 2

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Литература: [1], гл, I, §1, §4 (п. 4.3).

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется матрицей, размерностью матрицы?
2. Какие операции можно выполнять с матрицами?
3. Какие матрицы можно складывать, перемножать?
4. Как вычислить обратную матрицу ?
5. Что такое ранг матрицы?
6. Как находится ранг матрицы методом окаймляющих миноров, методом элементарных преобразований?
7. Какие методы решения инженерных задач используют матрицы ?
8. Как с помощью ранга матрицы выяснить совместность системы?
9. Объяснить теорему Кронекера-Капелли.
10. Как исследовать систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса (в матричном виде)?
11. Какая система линейных уравнений называется однородной?
12. Может ли однородная система быть несовместной?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение . $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3\neq 2$).

Пример 3. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы A, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A–невырожденная, т.к.

$\det A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=11\neq 0$. Следовательно, существует A^{-1}.

Находим присоединенную матрицу $A^{\vee}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, где

$A_{11}=4; \quad A_{22}=2; \quad A_{12}=-1; \quad A_{21}=3;$

Затем подставляем в формулу $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{\vee}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Методом Гаусса исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$$

Решение. Меняем местами первое и второе уравнения и записываем расширенную матрицу системы. Затем под 1 в первом столбце делаем нули. Для этого первую строку умножаем на –6 и прибавляем ко второй строке (складываются соответствующие элементы), первую строку умножаем на 7 и прибавляем к третьей строке, первую строку умножаем на 3 и прибавляем к четвертой строке:Делаем нули под –15 во втором столбце. Для этого прибавляем вторую строку к третьей и четвертой. Так как третья и четвертая строки состоят из нулей, то

вычеркиваем их. Получим: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \end{array}\right)$.

Таким образом, расширенная матрица системы приведена к треугольному виду. Производим обратный ход метода Гаусса. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases}.$$

Будем считать базисными переменными x_1 и x_2, а свободными x_3 и x_4. Из второго уравнения выражаем x_2:

$$x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4,$$

подставляем в первое уравнение и выражаем x_1:

$$x_1 = 1 - 2\left(1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4\right) - 2x_3 - 3x_4 = -1 - \frac{7}{15}x_4.$$

Обозначая свободные переменные $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, получаем общее решение системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{15}c_2 \\ 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{c} \textit{умножим первое уравнение} \\ \textit{на } -6,\ 7,\ 3 \textit{ и прибавим} \\ \textit{последовательно} \\ \textit{ко } 2,\ 3,\ 4 \textit{ уравнению} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{matrix} \text{\textit{умножим второе уравнение}} \\ \text{\textit{на } 1} \\ \text{\textit{и прибавим последовательно}} \\ \text{\textit{к } 3, 4 \textit{ уравнению}} \end{matrix} \right| \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{или} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица коэффициентов имеет ранг $r = 2$. Записываем систему уравнений с новыми коэффициентами

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

Так как ранг системы $r = 2 < n = 4$ - числа переменных, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве главных переменных можно выбрать x_1 и x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных – x_3 и x_4. Из второго уравнения системы получим $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим:

$$x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2x_3 - 3x_4 = -\frac{7}{15}x_4 .$$

Обозначаем свободные переменные через произвольные постоянные $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и записываем

$$x_1 = -\frac{7}{15}c_2, \qquad x_2 = -c_1 - \frac{19}{15}c_2 .$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{7}{15}c_2 \\ -c_1-\frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot c_1-\frac{7}{15}c_2 \\ -c_1-\frac{19}{15}c_2 \\ c_1+0\cdot c_2 \\ 0\cdot c_1+c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -\frac{7}{15} \\ -\frac{19}{15} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений: $E_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.

С использованием фундаментальной системы решений общее решение может быть записано в виде $X=c_1E_1+\overline{c}_2E_2$, где $\overline{c}_2=c_2/15$.

Самостоятельное изучение: РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Литература: [1], гл.I, §4 (п. 4.4.).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2[, №№ 1.1.37, 31.1.39, 1.1.45, 1.3.18, 1.3.21, 1.4.10, 1.4.16,2.1.34, 2.1.37, 2.1.44 (Последние три номера решить методом Гаусса).

Форма отчетности: краткий реферат с решением задач, который представляется по ходу изучения программы курса высшей математики.

ЗАНЯТИЕ № 3

ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ. ПРИЛОЖЕНИЕ

Литература: [1], гл.II, §5, §6, §7.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение скалярного и векторного произведения.
2. Дайте определение смешанного произведения векторов.
3. Каковы свойства смешанного произведения векторов?
4. Каково необходимое и достаточное условие Компланарности векторов?
5. Как выражаются векторное и смешанное произведения через координаты перемножаемых векторов (с доказательством)?
6. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов?

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$(рис.1). Если $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$; $A_4(3;4;5)$.

Решение. Объем тетраэдра равен 1/6 части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Объем соответствующего параллелепипеда вычисляется через смешанное произведение векторов, совпадающих с ребрами тетраэдра, сходящимися в вершине A_1(рис.1):

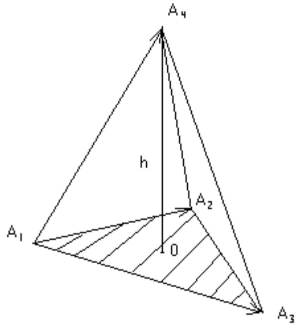

Рис. 1

$V_{тетраэдра} = (1/6)\left|\ \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}\right.$

Найдем координаты векторов и их смешанное произведение: $\overline{A_1A_2} = (5,-3,3)$, $\overline{A_1A_3} = (3,-1,1)$, $\overline{A_1A_4} = (4,2,8)$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 30$$

Откуда $V_{тетраэдра} = (1/6) \cdot 30 = 5$ (куб. ед.)

б) Искомую высоту h найдем из формулы: $V_{тетраэдра} = (1/3)S_{основания}h$, где $S_{основания}$ равна площади треугольника $A_1\ A_2\ A_3$.

Площадь треугольника $A_1\ A_2\ A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$

Поэтому находим векторное произведение

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot i + 4j + 4k$$

Следовательно, Sоснования= $S_\Delta = (1/2)\left|\ \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}\right. =$

$=(1/2)\sqrt{0^2+4^2+4^2}=2\sqrt{2}$ (кв.ед.) Таким образом

$h=3V_{тетраэдра}/S_{основания}=3\cdot 5/(2\sqrt{2})=15\sqrt{2}/4$

Ответ: $V_{тетраэдра}=5$ *(куб. ед.)*, $h=15\sqrt{2}/4$*(ед. длины)*

Пример 2. Даны векторы $\overline{a}=(2,-3,1)$, $\overline{b}=(-3,1,2)$ и $\overline{c}=(1,2,3)$. Вычислить $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$.

Решение. 1-й способ. Вычисляем сначала векторное произведение, стоящее в скобках:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-7\overline{i}-7\overline{j}-7\overline{k}\cdot$$

Полученный результат умножаем векторно на $\overline{c}$:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -7 & -7 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-7\overline{i}+14\overline{j}-7\overline{k}\cdot$$

2-й способ. Воспользуемся формулой:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c})-\overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})=\overline{b}(2-6+3)-\overline{a}(-3+2+6)=$$

$$=-\overline{b}-5\overline{a}=(3-10,-1+15,-2-5)=(-7,14,-7).$$

Самостоятельное изучение: СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ, ПРИЛОЖЕНИЕ

Литература: [1], гл.II, , §8.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2], №№ 3.2.2, 3.2.6, 3.3.2,3.3.7, 3.4.5, 3.4.7, 3.4.16, 3.4.18.

Форма отчетности: устный опрос.

ЗАНЯТИЕ № 4

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Литература: [1], гл. III, §9 (п. 9.1; 9.2);§10 (п. 10.2; 10.3).

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет общее уравнение прямой на плоскости?
2. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках ?
3. Как записать каноническое уравнение прямой?
4. С помощью какой формулы можно вычислить угол между двумя прямыми?
5. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
6. Как вычислить расстояние между двумя прямыми?

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение прямой 4x-3y+12=0 представить в различных видах: с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения.

Решение. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим данное уравнение относительно y, получим $y=\frac{4}{3}x+4$ - это уравнение прямой с угловым коэффициентом $k\frac{4}{3}$, b = 4 – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Для получения уравнения прямой в отрезках перепишем его в виде $4x-3y=-12$ и разделим обе части уравнения

На -12, в результате получим $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$ - уравнение прямой в отрезках, где a = -3,b = 4 – координаты пересечения прямой с осью Ox и Oy соответственно.

Приведём исходное уравнение к нормальному виду $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0.$. Для этого умножим обе части данного уравнения на нормирующий множитель $\mu=-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{5}$

(μ<0, так как C=12>0). В итоге получим нормальное уравнение $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$, где $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $p=\frac{12}{5}$- расстояние от точки O(0, 0) до прямой.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A(0 , 2) и B(-3, 7).

Решение. Используем уравнение $.\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}..$

Полагая в нем $x_1= 0$, $x_2 = -3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, т.е. -3y + 6 = 5x или 5x + 3y – 6 = 0.

Пример 3. Найти угол между прямыми $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $tg\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$,

подставив в нее $A_1= 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$, получим $tg\varphi=\left|\frac{2\cdot(-1)-5\cdot(-3)}{2\cdot5+(-3)\cdot(-1)}\right|=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Через точку пересечения прямых 3x-2y+5=0 и x+2y-9=0 проведена прямая, параллельная прямой 2x+y+6=0. Составить ее уравнение.

Решение. Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-4=0 \\ x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Получаем M(1,4) – точка пересечения этих прямых. Угловой коэффициент прямой 2x+y+6=0 k_1 = -2, следовательно угловой коэффициент прямой, параллельно данной $k_2 = k_1$ = -2. Запишем уравнение искомой прямой. По формуле $y-y_0=k(x-x_0)$ получаем y-4=-2(x-1), т.е. 2x+y-6=0.

Пример 5. Найти расстояние между параллельными прямыми 3x+4y-20=0 и 6x+8y+5=0.

Решение. Возьмём на первой прямой произвольную точку A. Пусть, например, x=0, тогда y=5, т.е. A(0,5).

По формуле $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. найдем расстояние от точки до второй прямой, получим: $d=\left|\dfrac{6\cdot 0+8\cdot 5+5}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|=\dfrac{45}{10}=4{,}5.$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2], №№ 4.2.1, 4.2.2, 4.2.6, 4.2.10, 4.2.15, 4.2.28.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 5

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [1], гл, IV, §12 (п. 12.1 – 12.3).

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?
2. Какой вид имеет уравнение плоскости в отрезках?
3. Какой вид имеет нормальное уравнение плоскости?
4. Как записать каноническое уравнение прямой в пространстве?
5. С помощью какой формулы можно вычислить угол между плоскостью и прямой в пространстве?
6. Как найти точку пересечения плоскости и прямой в пространстве
7. С помощью какой формулы можно вычислить угол между двумя прямыми в пространстве?
8. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
9. Как вычислить расстояние между двумя прямыми и двумя плоскостями в пространстве?

Примеры решения задач

Пример 1. Найти расстояние d от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3. Если $M_1(1;0;2); M_2(1;2;-1); M_3(2;-2;1); M_0(-5;-9;1)$. Требуется найти: d (рис.2)

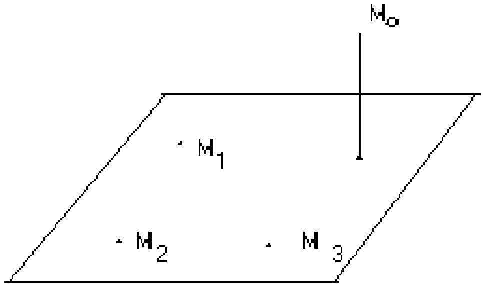

Рис. 2

Решение. Находим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3, по формуле

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1-1 & 2-0 & -1-2 \\ 2-1 & -2-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив определитель по первой строке и, приводя подобные члены, имеем уравнение плоскости: $8x+3y+2z-12=0$
Расстояние dот данной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|8x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 12|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|8(-5) + 3(-9) + 2 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{(-8)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{77} \text{ (ед. длины).}$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

Дано: $A(-1;2;-2)$, $B(13;14;1)$, $C(14;15;2)$.

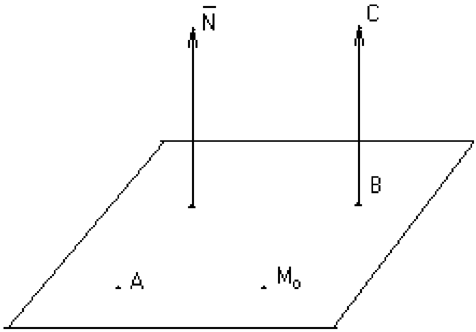

Рис. 3

Решение. Искомое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору нормали – $\overline{N}=(A,B,C)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Найдем координаты вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC}=(14-13;15-14;2-1)=(1;1;1).$$

Т.к. $\overline{BC}$ искомой плоскости(рис 3), то его можно взять в качестве вектора – нормали $\overline{N}$, точка A принадлежит плоскости по условию, то можно ее взять в качестве M_0. Поэтому уравнение искомой плоскости будет иметь вид:

$1(x-(-1))+1(y-2)+(z-(-2))=0$, или

$x+y+z+1=0$

Ответ: $x+y+z+1=0$

Пример 3. Найти угол между плоскостями.

Дано: $x-3y-2z-8=0$; $x+y-z+3=0$.

Решение. Угол между плоскостями φ находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ - вектора нормали.

Из условия задачи имеем: $\overline{N}_1$ *(1;-3;-2),* $\overline{N}_2$ *(1;1;-1).* Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = 0$$

Значит, $\varphi = \pi/2$.

Пример 4. Найти координаты точки*A*, равноудаленной от точек*B* и*C*.

Дано: *A(x;0;0),B(4;0;5,C(5;4;2).*

Решение. По условию задачи $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right|$. Найдем $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}$ *=(4-x,0,5),* $\overline{AC}$ *=(5-x,4,2)* и

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(4-x)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 41};$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(5-x)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 45}.$$

Приравняем модули этих векторов

$\sqrt{x^2 - 8x + 41} = \sqrt{x^2 - 10x + 45}$ или *x=2*. Значит, координаты токи *A(2;0;0)*.

Ответ:*A(2;0;0)*.

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой.

Дано: *x+5y+2z+11=0, x-y-z-1=0.*

Решение. Каноническое уравнение прямой (содержащую точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$) имеют вид: $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$,

где $\overline{S}$ *=(m,n,p)* – направляющий вектор прямой.

Прямая *l* (рис.4), задана как линия перемещения двух плоскостей.

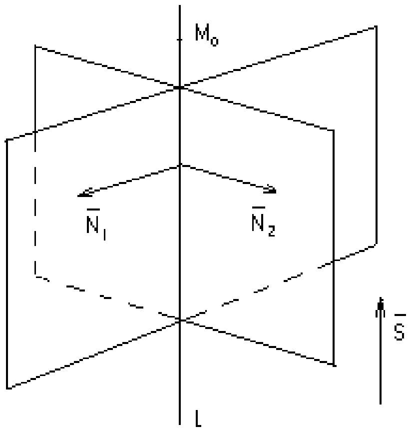

Рис. 4

<u>Способ 1</u>. Найдем вектор $\overline{S}=mi+nj+pk$, параллельный по определению искомой прямой l(рис. 4), т.к. $\overline{S}\perp\overline{N}_1$ и $\overline{S}\perp\overline{N}_2$, где $\overline{N}_1=(1;5;2)$ и $\overline{N}_2=(1;-1;-1)$ – векторы нормали к данным пересекающимся плоскостям соответственно, то

$$\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3i+3j-6k.$$

Значит. $m=-3,\ n=3,\ p=-6.$

В качестве точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ можно взять точку пересечения прямой с любой из координатных плоскостей. Например, с плоскостью XOY. Так как при этом $z_0=0$, то координаты x_0 и y_0 можно найти из уравнений плоскостей (положив в них $z=0$):

$$\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

Решая систему, получим x_0=-1, y_0=-2.Итак нашли точку M_0(-1,-2,0).

Таким образом, каноническое уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-6} \text{ или } \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$$

<u>Способ 2</u>. Исключим сначала *x,* затем *y* из данной системы уравнений плоскостей: $\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

Вычтем из первого уравнения второе, то получим: *6y+3z+12=0.* $\begin{cases} x+5y+11=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$

Сложив первое уравнения и второе, получим: *6x-3z+6=0.*

Находим *z* из этих уравнений *z=-2y-4* и *z=2x+2.*

Приравниваем эти равенства:

z=-2y-4 =2x+2 или, разделив на 2, окончательно получаем:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$$

Ответ: $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$

Пример 6. Требуется найти точку пересечения *M*(*x,y,z)*, принадлежащую прямой l и плоскости π (рис. 5), если такая есть.

Решение. Сначала проверим, пересекаются ли данные прямая l и плоскость π. По условию $\overline{S}$ *=(1;0;-1),* $\overline{N}$ *=(3;-2;-4)*.(Если $l // \pi$, то векторы $\overline{S} \perp \overline{N}$ и, значит, скалярное произведение $\overline{S}\ \overline{N}$ *=0)*. Вычислим $\overline{S}\ \overline{N}$ *=3+4=7.* Следовательно, векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ не перпендикулярны. Значит, прямая l и плоскость π пересекается в точке *M*.

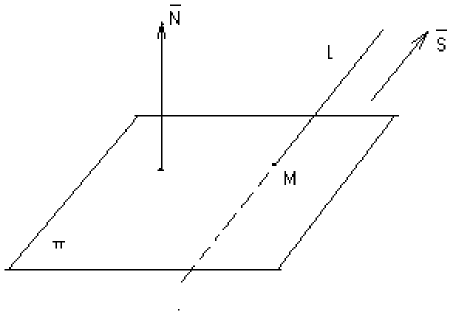

Рис. 5

Найдем теперь координаты этой точки *M*. Для этого запишем данное уравнение прямой l в параметрическом виде, приравняв равенства параметру *t*:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}=t\,.$$ Откуда получаем

$$\frac{x-1}{1}=t, \qquad \frac{y+1}{0}=t\ , \qquad \frac{z-1}{-1}=t \text{ или } \begin{cases} x=t+1 \\ y=-1 \\ z=-t+1 \end{cases}$$ - параметрические уравнения прямой l.

Подставим эти выражения для *x,y,z* в данное уравнение плоскости и найдем значение *t*:

3(t+1)-2(-1)-4(-t+1)-8=0, или *7t-7=0,* откуда*t=1*.

Найденное значение параметра *t=1* подставим в уравнение прямой, записанное в параметрическом виде:

x=1+1=2; y=-1; z=-1+1=0; получим координаты точки *M(1;-1;0)* пересечения прямой с плоскостью.

Ответ:*M(1;-1;0)*

Пример 7. Дано: M(1;0;-1). Требуется найти точку $M^{/}(x_1^{1},y_1^{1},z_1^{1})$, симметричную точке M относительно прямой l (рис. 6).

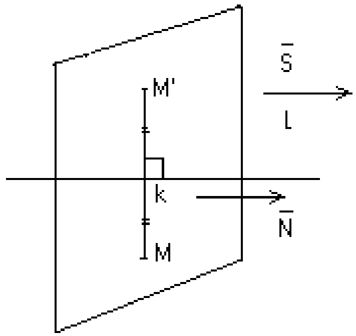

Рис. 6

Решение. Запишем уравнение любой плоскости, проходящей через точку$M(1;0;-1)$ перпендикулярно заданной прямой l:$A(x-1)+B(y-0)+C(z+1)=0$,где $\overline{N}=(A,B,C)$ – нормали к плоскости. Так как $\overline{N}\,//\,\overline{S}$, где $\overline{S}=(2;2;0)$ –направляющий вектор данной прямой l и, следовательно, $\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{0}$, то заменим координаты A,B,C вектора $\overline{N}$ на соответствующие координаты вектора $\overline{S}$, тогда уравнение этой плоскости запишем в виде:$2(x-1)+2(y-0)-0(z+1)=0$,или $2x+2y-2=0$.

Найдем точку K, являющуюся проекцией точки Mна данную прямую l, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} 2x+2y-2=0 \\ \dfrac{x-0{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0} \end{cases}$$

Для этого запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x-0{,}5}{2}=\frac{y-1{,}5}{2}=\frac{z}{0}=t \text{ или } \begin{cases} x=2t+0{,}5 \\ y=2t+1{,}5 \\ z=0 \end{cases}$$

И подставим эти выражения для *x, y, z*в уравнение плоскости $2(2t+0,5)+2(2t+1,5)-2=0$, или $8t+2=0$. Откуда $t=0,25$.

Тогда получим координаты точки K:

$$\begin{cases} x_k = 2(-0,25)+0,5=0 \\ y_k = 2(-0,25)+1,5=1 \\ z_k = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $K(0;1;0)$ – точка пересечения прямой l и плоскости, и она является серединой отрезка M^1M(рис.7), т.е. $M^1K=MK$ (ибо точка M^1 симметрична точке M по условию).

Координаты точки M^1 найдем из формул «деление отрезка пополам»:

$$x_k = \frac{x_{M^/}+x_M}{2},\ y_k = \frac{y_{M^/}+y_M}{2}, z_k = \frac{z_{M^/}+z_M}{2}$$ и

$$0=(1+x_{M^/})/2,\ 1=(0+y_{M^/})/2, 0=(-1+z_{M^/})/2.$$

Откуда $x_{M^/}=-1,\ y_{M^/}=2, z_{M^/}=1$.

Следовательно, $M^1(-1;2;1)$.

Ответ:$M^1(-1;2;1)$.

Пример 8. Найти точку M^1,симметричную точке M относительно плоскости π (рис. 7).

Дано: M(1;1;1), x+y-2z-6=0.

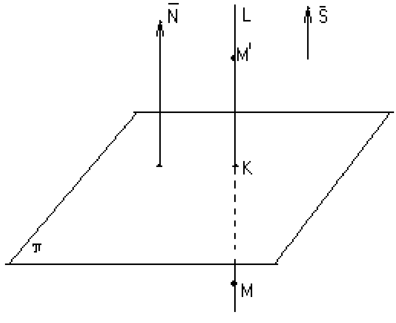

Рис.7

Решение: Запишем уравнение любой прямой l, проходящей через точку *M(1;1;1):*

$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}$, где $\overline{S}$ =*(m,n,p)* -направляющий вектор прямой l.

Т.к. $\overline{N}//\overline{S}$, где $\overline{N}$ =(1,1,-2) -нормаль к данной плоскости, то заменим координаты *m,n,p* вектора $\overline{S}$ на соответствующие координаты вектора $\overline{N}$. Тогда уравнение этой прямой l запишется в виде: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

Найдем точку*К*, являющейся проекцией точки *М* на данную плоскость π, решив совместно

уравнения $\begin{cases} x+y-2z-6=0 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0-2} \end{cases}$.

Уравнения прямой представим в параметрической форме

$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=-2t+1 \end{cases}$, где t - параметр и, подставляя эти выражения для *x,y,z* в уравнение плоскости), (t+*1)+(t+1)-2(-2t+1)-6=0*,найдем *t=1.* Откуда координаты точки *К* будут: $x_k=1+1=2$, $y_k=1+1=2$, $z_k=-2+1=1$. Точка *К(2;2;-1)* является серединой отрезка M^1M (рис.7), т.к. точка M^1 симметрична точке *М* относительно плоскости по условию задачи. Используя формулы деления отрезка пополам, имеем:

$x_k=\frac{x_{M^/}+x_M}{2}$, $y_k=\frac{y_{M^/}+y_M}{2}$, $z_k=\frac{z_{M^/}+z_M}{2}$

$$2=\frac{1+x_{M^/}}{2},\ 2=\frac{1+y_{M^/}}{2},-1=\frac{1+z_{M^/}}{2}.$$

Найдем координаты точки M^1 ,т.е. $x_{M^/}=3$, $y_{M^/}=3$, $z_{M^/}=-3$.

Ответ: $M^1(3;3;-3)$.

Самостоятельное изучение: УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ И ПРЯМЫМИ. УСЛОВИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ И ДО ПРЯМОЙ

Литература: [1], гл, IV, §12 (п.12.4-12.6).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2], №№ 5.2.20, 5.2.27, 5.2.33, 5.2.42, 5.2.46, 5.3.16, 5.3.26, 5.4.19,5.4.21.

Форма отчетности: устный опрос, типовой расчет, контрольная работа.

ЗАНЯТИЕ № 6

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ. ИХ ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], гл, III, §11 (п.11.1-11 5).

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет общее уравнение кривой второго порядка?

2. Какой вид имеют канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы, параболы?

3. Запишите преобразование координат при повороте системы координат на угол α.

4. Запишите преобразование координат при параллельном переносе системы координат.

5. Каков алгоритм приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью преобразования системы координат?

6. Классификация поверхностей второго порядка. Какие канонические уравнения и вид имеют эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды?

7. Как записать уравнение сферы радиуса R с центром в точке (a, b, c)? Как связано оно с уравнением эллипсоида?

8. Какие канонические уравнения и вид имеют эллиптический и гиперболический параболоиды?

9. Какие канонические уравнения и вид имеют цилиндрические поверхности?

10. Какое каноническое уравнение и вид имеет конус второго порядка?

11. Как определяется вид поверхности методом параллельных сечений?

Примеры решения задач

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$, изобразить на чертеже оси координатных систем и геометрический образ, определяемый данным уравнением.

Решение. Записываем формулы преобразования координат, соответствующего повороту осей на угол α

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

и подставляем их в исходное уравнение. После перегруппировки слагаемых получаем

$$x'^2\left(29\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha+36\sin^2\alpha\right)+$$
$$+y'^2\left(29\sin^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+36\cos^2\alpha\right)+$$
$$+x'y'\left(-24\cos^2\alpha+24\sin^2\alpha+14\sin\alpha\cos\alpha\right)+$$
$$+x'\left(82\cos\alpha-96\sin\alpha\right)-y'\left(82\sin\alpha+96\cos\alpha\right)-91=0\,.$$

Находим угол поворота α из условия равенства нулю коэффициента при $x'y'$, т.е.

$$12\sin^2\alpha+7\sin\alpha\cos\alpha-12\cos^2\alpha=0\,.$$

Разделив это уравнение на $\cos^2\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$. Решая его, находим

$$\mathrm{tg}\alpha_1=-\frac{4}{3}\quad\text{и}\quad\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{3}{4}\,.$$

Выбираем значение $\alpha_2=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}\approx 37^\circ$. Этому значению соответствуют $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Подставляем их в полученное выше уравнение и выделяем полные квадраты. Тогда уравнение примет вид $\frac{\left(x'+1/5\right)^2}{9}+\frac{\left(y-7/5\right)^2}{4}=1$.

Производим замену переменных, соответствующую параллельному переносу осей координат x' и y': $\tilde{x}=x'+\frac{1}{5}$, $\tilde{y}=y'-\frac{7}{5}$. Таким образом исходное уравнение принимает вид

$$\frac{\tilde{x}^2}{9}+\frac{\tilde{y}^2}{4}=1\,.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$ (рис. 8).

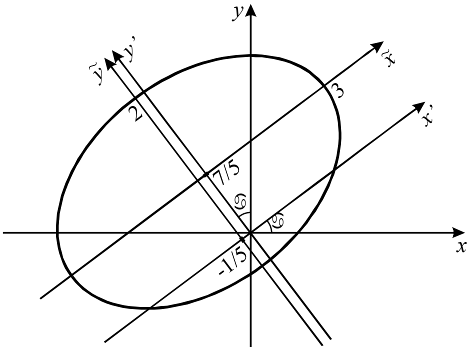

Рис. 8

Пример 2. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением $x^2+2yz=1$.

Решение.

1) В сечении поверхности плоскостью $z=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

2) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0>0$ имеем семейство парабол $y=\frac{1}{2z_0}-\frac{x^2}{2z_0}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении z_0.

3) В сечении поверхности плоскостями $z=z_0<0$ имеем семейство парабол $y=-\frac{1}{2|z_0|}+\frac{x^2}{2|z_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oz при увеличении $|z_0|$.

4) В сечении поверхности плоскостью $y=0$ имеем две параллельные прямые $x=\pm 1$.

5) В сечении поверхности плоскостями $y = y_0 > 0$ имеем семейство парабол $z = \frac{1}{2y_0} - \frac{x^2}{2y_0}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении y_0.

6) В сечении поверхности плоскостями $y = y_0 < 0$ имеем семейство парабол $z = -\frac{1}{2|y_0|} + \frac{x^2}{2|y_0|}$, вершины которых приближаются к оси Oy при увеличении $|y_0|$.

7) В сечении поверхности плоскостями $x = x_0$ имеем семейство гипербол $z = \frac{1 - x_0^2}{2y}$ при $|x_0| < 1$ и $z = -\frac{x_0^2 - 1}{2y}$ при $|x_0| > 1$ (сопряженные гиперболы). В случае $|x_0| = 1$ получается $z = 0$, что совпадает с 1).

Замечаем симметричность сечений поверхности относительно прямой $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$. Поэтому дальнейшее исследование проводим с учетом этого обстоятельства.

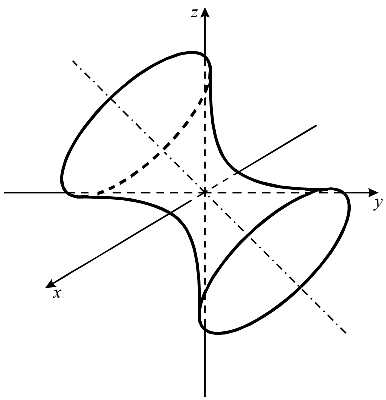

Рис. 9

8) В сечении поверхности плоскостями $z=-y+z_0$ имеем семейство гипербол $x^2-2\left(y-\frac{z_0}{2}\right)^2=1-\frac{z_0^2}{2}>0$ при $|z_0|<\sqrt{2}$ и $2\left(y-\frac{z_0}{2}\right)^2-x^2=\frac{z_0^2}{2}-1>0$ при $|z_0|>\sqrt{2}$ (сопряженные гиперболы). В случае $|z_0|=\sqrt{2}$ получаем две пересекающиеся прямые $x=\pm\sqrt{2}\left(y-\frac{z_0}{2}\right)$.

9) Сечения поверхности плоскостями $z=y+z_0$ имеют проекции на плоскость xOy, описываемые уравнениями $x^2+2\left(y+\frac{z_0}{2}\right)^2=1+\frac{z_0^2}{2}$, т.е. эллипсы, у которых полуоси увеличиваются с увеличением $|z_0|$. Отношение полуосей этих эллипсов равно $\sqrt{2}$, а плоскости $z=y+z_0$ составляют угол 45° с плоскостью xOy, поэтому сами сечения имеют форму окружностей.Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 9). Этой поверхностью является однополостный гиперболоид, ось которого – прямая $\begin{cases} x=0 \\ z=-y \end{cases}$.

Самостоятельное изучение: ПОВЕРХНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

Литература:[1], гл, III, §12 (п.12.9).

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Решить задачи: [2], №№ 4.3.1,4.3.4, 4.3.30, 4.3.32, 4.3.1, 4.3.1, 4.3.1, 4.3.1, 4.3.1.

Методом сечений исследовать форму и построить поверхности, заданные уравнениями:1) $z = xy$; 2) $z^2 = xy$.

Форма отчетности: устный опрос. При отчете по теме занятия уметь определять вид поверхности 2-го порядка по виду канонического уравнения и строить поверхность методом параллельных сечений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам самостоятельно изучать теоретические вопросы вышеуказанных тем курса математики, а также предоставят студентам широкие возможности для самостоятельного изучения и практической части .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс.

2. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т. Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике, 1 курс -М.: Айрис –пресс. 2004,

3. Катрахова А.А., Купцов В.С., Купцов Е.В. Курс лекций по дисциплине «Математика» [Электронный ресурс]: Учеб.пособие.- Электрон.текстовые, граф. Дан. (6,17 Мб).- Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий и организации самостоятельной работы по линейной алгебре и аналитической геометрии для студентов специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» (специализация № 1 «Экономико–правовое обеспечение экономической безопасности») всех форм обучения

1 семестр

Составители:
Катрахова Алла Анатольевна
Купцов Валерий Семенович

В авторской редакции

Подписано к изданию 25.05.2022.
Уч.-изд. л. 2,0.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84