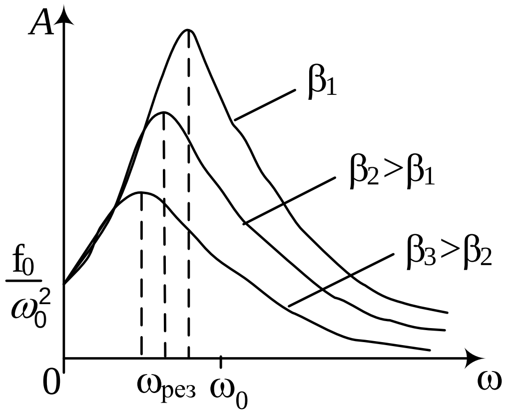
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебно-методическое пособие



Воронеж 2018

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Утверждено учебно-методическим советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2018

УДК 531:530.145(075.8)
ББК 22.317:22.314я7
К602

Авторы:
А. Г. Москаленко, Е. П. Татьянина, И. М. Трегубов, Т. Л. Тураева

Колебания и волны: учеб.-метод. пособие [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые и граф. данные (1 , 6 Мб) / А. Г. Москаленко, Е. П. Татьянина, И. М. Трегубов, Т. Л. Тураева - Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв. – Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows XP; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-0670-8

Учебно-методическое пособие «Колебания и волны» по дисциплине «Физика» предназначено для студентов всех технических направлений очной и заочной форм обучения. В пособии содержатся основной теоретический материал, примеры решения задач, контрольные вопросы, задачи для самостоятельного решения и тесты.

Ил. 36. Библиогр.: 10 назв.

УДК 531:530.145(075.8)
ББК 22.317:22.314я7

Рецензенты: кафедра общей физики Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Клинских);
д-р техн. наук, проф. А. В. Строгонов

ISBN 978-5-7731-0670-8

ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Физика колебаний и волн» является значительным и по содержанию и по объему курса общей физики. Важность этого раздела состоит в том, что полученные здесь закономерности широко используются в других разделах курса, таких как оптика, физика твердого тела, квантовая физика. В квантовой физике, в частности, вводится такое понятие, как «волны вероятности».

Общность уравнений, описывающих колебания и волны различной физической природы, как механической, так и электромагнитной, позволяет их параллельное рассмотрение, что и осуществлено в данном учебно-методическом пособии. Изложение теоретического материала ведется достаточно кратко, в соответствии с программой бакалавриата для технических специальностей, обращая главное внимание на физический смысл основных понятий и уравнений. Главная цель настоящего пособия – оказание помощи студентам в их самостоятельной работе при освоении данного материала. Этому способствует, прежде всего, подробный разбор и анализ решения целого ряда задач по каждой теме, а также наличие контрольных вопросов и тестовых заданий для самопроверки изученного материала. Большой подбор задач, взятых из различных стандартных сборников, позволяет дифференцировать студентам домашние задания.

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Колебаниями называют процессы, характеризующиеся повторяемостью во времени. Простейшими из них являются гармонические колебания, при которых колеблющиеся величины изменяются со временем по закону синуса или косинуса. Колебания будут гармоническими, если возвращающая сила пропорциональна смещению от положения равновесия и амплитуда колебаний мала. Колебания могут происходить только в системах с устойчивым положением равновесия.

Кинематическое уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1.1)$$

где x – смещение системы от своего положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний; φ_0 – начальная фаза; ω_0 - собственная циклическая частота.

График гармонических колебаний представлен на рис.1.1.

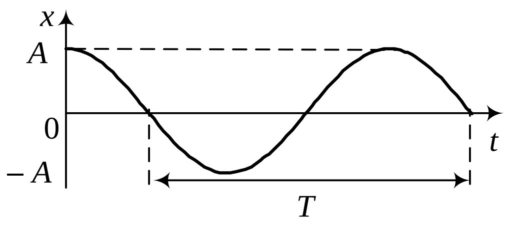


Рис. 1.1

Скорость и ускорение колеблющейся точки определяются через первую и вторую производную соответственно

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1.2)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1.3)$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1.4)$$

решением которого является уравнение (1.1).

1.2. Собственные гармонические колебания. Пружинный, физический и математический маятники

Идеализированные системы, в которых колебания возникают за счёт первоначально сообщённой энергии при последующем отсутствии внешних воздействий и описываются уравнением (1.4), называются гармоническими осцилляторами. Примерами гармонических осцилляторов являются пружинный, физический и математический маятники. Колебания, возникающие в таких системах при отсутствии сил трения, называются собственными гармоническими колебаниями.

1.2.1. Пружинный маятник

Рассмотрим систему, состоящую из пружины с коэффициентом жесткости *k*, к которой прикреплен шарик массой *m*, способный перемещаться вдоль гладкого горизонтального стержня (рис.1.2). При смещении шарика из положения равновесия возникает сила упругости $F_x = -kx$,

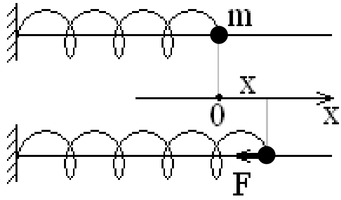


Рис.1.2

стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Это возвращающая сила, она пропорциональна смещению и направлена всегда к положению равновесия.

Если трение в системе отсутствует, то по 2-му закону Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (1.5)$$

Сопоставляя полученное дифференциальное уравнение с дифференциальным уравнением гармонического осциллятора (1.4) находим собственную циклическую частоту и период колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (1.6)$$

1.2.2. Физический маятник

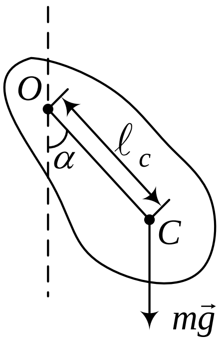


Рис.1.3

Физический маятник – твердое тело, способное совершать под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции (рис.1.3). В положении равновесия центр инерции маятника *C* находится под точкой подвеса *O*, на одной с ней вертикали. При отклонении маятника от положения равновесия на угол α возникает вращательный момент

$$M = -mg\ell_c \sin\alpha\,,$$

стремящийся возвратить маятник в положение равновесия.

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса буквой *I*, на основании основного закона динами при вращательном движении можно написать

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\ell_c \sin\alpha$$

В случае малых колебаний ($\alpha \le 5°$) $\sin\alpha \approx \alpha$, следовательно

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\ell_c \cdot \alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg\ell_c}{I}\cdot\alpha = 0. \qquad (1.7)$$

Из сопоставления полученного уравнения с дифференциальным уравнением гармонического осциллятора (1.4), находим циклическую частоту и период колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_c}{I}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell_c}}. \qquad (1.8)$$

Таким образом, при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с частотой ω_o и периодом T, описываемые уравнением

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (1.9)$$

Величина $L = \dfrac{I}{m\ell_c}$ – называется приведенной длиной физического маятника. С учетом этого, период колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (1.10)$$

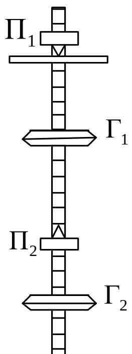


Рис.1.4

Физический маятник используется для определения ускорения свободного падения. Наиболее точные измерения выполняются с помощью оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы (1.8). Физический оборотный маятник представляет собой стержень, на котором укреплены две опорные призмы П и подвижные грузы Г, позволяющие изменять период колебаний (рис.1.4). При совпадении периодов колебаний $T_1 = T_2$ относительно призм $П_1$ и $П_2$, расстояние между призмами определяет приведенную длину L, которую можно измерить с большой точностью.

1.2.3. Математический маятник

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити длиной ℓ, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника. Для математического маятника момент инерции $I = m\ell^2$. Подставив это выражение в формулы для циклической частоты и периода колебания физического маятника (1.8), получим известные выражения для малых колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\ ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ . \qquad (1.11)$$

Из сопоставлений формул (1.8) и (1.11) для периодов физического и математического маятников следует, что приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

1.3. Сложение гармонических колебаний

Результирующее движение точки, одновременно участвующей в нескольких колебаниях, во многих случаях является колебательным. Таким образом, можно говорить о сложении нескольких колебаний в одно результирующее.

1.3.1. Сложение гармонических колебаний одного направления

Это действие осуществляется с помощью вектора амплитуды, позволяющего свести сложение колебаний к сложению векторов. Вектор амплитуды представляет собой вектор, величина которого равна амплитуде гармонических колебаний, а угол между его направлением и осью *Ox* определяется начальной фазой (рис.1.5). Если привести

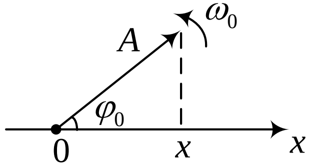


Рис.1.5

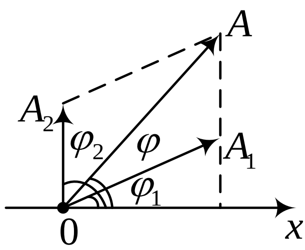


Рис.1.6

вектор во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0, то его проекция на ось *Ox* будет изменяться со временем по гармоническому закону (1.1). Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора амплитуды.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты, описываемых уравнениями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)\,, \tag{1.12}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)\,. \tag{1.13}$$

Представим эти колебания с помощью векторов амплитуды $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ и построим вектор $\vec{A}$, представляющий результирующие колебания (рис.1.6).

Из построения найдём амплитуду и фазу результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\ , \qquad (1.14)$$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\ . \qquad (1.15)$$

Таким образом, результирующее колебание является гармоническим с частотой ω_0, амплитуда которого и его начальная фаза определяются выражениями (1.14) и (1.15)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\ .$$

Результирующее колебание, полученное при сложении двух гармонических колебаний одного направления, но с разными частотами, уже не будет гармоническим. Особый интерес представляет собой случай сложения колебаний с близкими частотами.

Пусть частота одного из колебаний ω, а другого $\omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega << \omega$. Выбрав начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю, а амплитуды одинаковыми, получим их уравнения:

$$x_1 = A\cos\omega t,$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Складывая эти два уравнения и применяя формулу для суммы косинусов, найдем

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos\omega t\ .$$

График, данной функции, представлен на рис. 1.7.

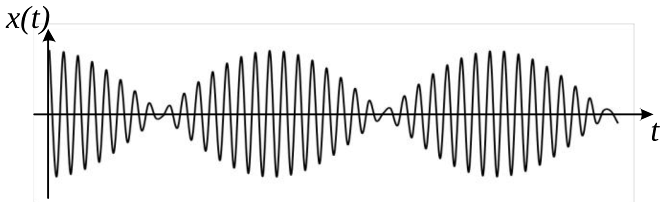


Рис.1.7

Заключенный в скобки множитель изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Такие колебания называются биениями. Амплитуда биений, являющаяся величиной положительной и определяемая выражением

$$A_б = \left|2\mathrm{A}\cos\frac{\Delta\omega \mathrm{t}}{2}\right|,$$

изменяется с частотой $\Delta\omega$, равной разности частот складываемых колебаний.

1.3.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одной частоты

Пусть колебания одинаковой частоты совершаются вдоль взаимно перпендикулярных осей Оx и Оy. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. В этом случае уравнения колебаний запишутся следующим образом

$$x = A\cos\omega_0 t, \tag{1.16}$$

$$y = B\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1.17}$$

где $\Delta\varphi = \varphi$ – разность фаз складываемых колебаний.

Исключив из данных уравнений параметр t**,** получим уравнение траектории результирующего движения точки:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi. \tag{1.18}$$

Уравнение (1.18) представляет собой уравнение эллипса, произвольно ориентированного относительно осей координат.

Рассмотрим частные случаи:

1) При $\Delta\varphi$=0 или $\Delta\varphi = \pm\pi$ результирующее колебание совершается вдоль прямой, описываемой соответствующим уравнением

$$y = \frac{B}{A}x \text{ или } y = -\frac{B}{A}x\,. \qquad (1.19)$$

Видно, что точка колеблется вдоль отрезка прямой, причём расстояние от начала координат изменяется по закону

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\omega_0 t\,. \qquad (1.20)$$

Таким образом, результирующее колебание является также гармоническим.

2) При $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ или $\Delta\varphi = \pm\frac{3\pi}{2}$ уравнение (1.18) становится уравнением эллипса, приведённого к координатным осям:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,. \qquad (1.21)$$

При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

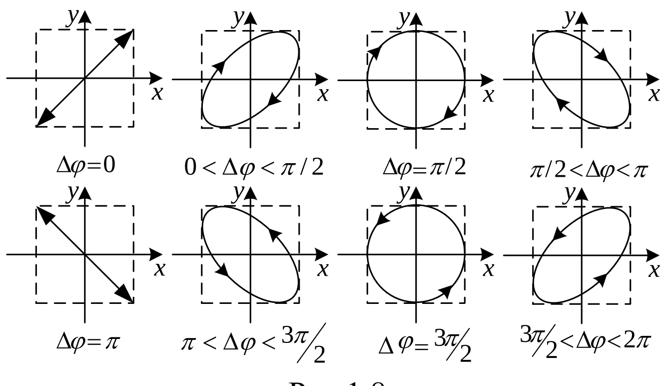


Рис.1.8

На рис.1.8 представлены различные формы траектории и направления движения точки в зависимости от разности фаз складываемых колебаний.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами результирующие траектории имеют более сложный вид, зависящий как от соотношения частот, так и от разности фаз слагаемых колебаний. Эти фигуры получили название фигур Лиссажу и широко используются в измерительной технике. Примеры некоторых из них представлены на рис.1.9

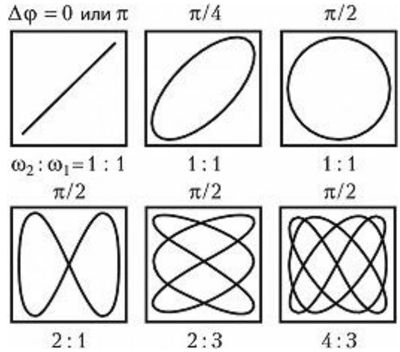


Рис.1.9

1.4. Затухающие колебания и их характеристики

Рассмотрим реальную механическую систему (например, пружинный маятник), в которой действуют силы трения. При малых колебаниях сила вязкого трения пропорциональна скорости $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$. Тогда дифференциальное уравнение пружинного маятника можно записать в следующем виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}, \qquad (1.22)$$

где r – коэффициент сопротивления; k – коэффициент упругости.

Уравнение (1.22) может быть приведено к стандартному виду, называемому дифференциальным уравнением затухающих колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = 0, \qquad (1.23)$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний системы.

Решение уравнения (1.23) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad (1.24)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Период затухающих колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \qquad (1.25)$$

Амплитуда затухающих колебаний убывает по экспоненциальному закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}\,. \qquad (1.26)$$

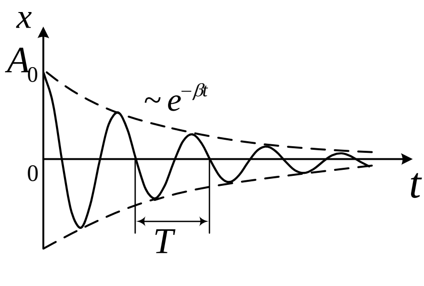


Рис.1.10

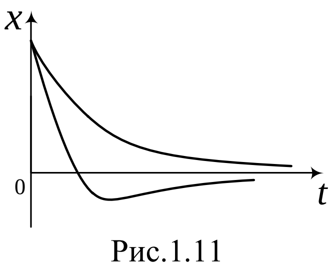


Рис.1.11

График затухающих колебаний показан на рис.1.10.

С ростом коэффициента затухания β период затухающих колебаний увеличивается, стремясь к бесконечности при критическом коэффициенте затухания $\beta_{кр} = \omega_0$. При $\beta \geq \beta_{кр}$ процесс носит апериодический характер. Выведенная из положения равновесия система возвращается к нему, не совершая колебаний (кривая 1 или 2 рис. 1.11).

Основные характеристики затухающих колебаний:

1) время релаксации τ – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta\tau}} = e \Rightarrow \beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta}, \tag{1.27}$$

2) логарифмический декремент затухания, представляющий логарифм отношения двух соседних амплитуд, т.е.

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \tag{1.28}$$

где N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз;

3) добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = \frac{\pi}{\lambda}, \tag{1.29}$$

где E – энергия системы в момент времени t; ΔE – убыль энергии за один последующий период колебаний.

1.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием всякой внешней периодически изменяющейся силы. С учётом вынуждающей силы $F = F_0\cos\omega t$ закон движения пружинного маятника запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t. \tag{1.30}$$

После преобразования получим неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0 x = f_0\cos\omega t\,, \qquad (1.31)$$

где $f_0 = F_0 / m$.

Общее решение данного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega_з t+\varphi)\,, \qquad (1.32)$$

где $\omega_з = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота затухающих колебаний, A_0 и φ – произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения (1.31) имеет вид

$$x = A\cos(\omega t-\varphi)\,, \qquad (1.33)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\,, \qquad (1.34)$$

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\,. \qquad (1.35)$$

Уравнение (1.33) в сумме с (1.32) даёт общее решение уравнения (1.31), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (1.32) играет значительную роль в начальной стадии процесса при установлении колебаний. С течением времени его роль из-за экспоненциального множителя всё больше уменьшается, и им можно пренебречь

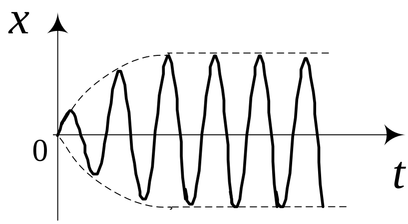


Рис. 1.12

Процесс установления вынужденных колебаний представлен на рис. 1.12.

В установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы и являются гармоническими, амплитуда и отставание фазы которых определяются выражениями (1.34) и (1.35).

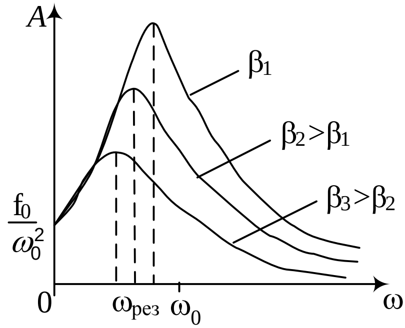


Рис.1.13

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. При некоторой частоте амплитуда достигает максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной частотой.

Резонансные кривые при различных значениях коэффициента затухания представлены на рис.1.13.

Из условия максимума функции (1.34) найдём

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ . \tag{1.36}$$

Амплитуда колебаний при резонансе равна

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ . \tag{1.37}$$

Чем меньше β, тем выше и правее лежит резонансный максимум. Если $\omega \to 0$, то все кривые приходят к одному и тому же значению f_0/ω_0^2, так называемому статическому отклонению.

Резонансная амплитуда связана с добротностью колебательной системы следующим соотношением:

$$A_{рез} = Q\frac{f_0}{\omega_0^2}. \qquad (1.38)$$

Таким образом, добротность характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше *Q*, тем острее и выше резонанс.

1.6. Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими? Какой вид имеет дифференциальное уравнение и его решение для гармонических колебаний?

2. Что называется гармоническим осциллятором? Приведите примеры гармонических осцилляторов.

3. Что называется физическим маятником? Выведите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника.

4. В чем состоит метод определения ускорения свободного падения с помощью физического маятника?

5. Что называется приведенной длинной физического маятника?

6. Какой физический маятник называется оборотным? В чем состоит метод определения приведенной длины оборотного физического маятника?

7. Что представляет собой вектор амплитуды? Как с помощью данного вектора осуществляется сложение однонаправленных гармонических колебаний?

8. При каком условии результирующее колебание, возникающее при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, является гармоническим?

9. Какие фигуры возникают в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами?

10. Как получить фигуры Лиссажу и от чего зависит их вид?

11. Какой вид имеет дифференциальное уравнение и его решение для затухающих колебаний?

12. Каковы основные характеристики затухающих колебаний и их физический смысл?

13. Каковы условия возникновения вынужденных колебаний?

14. Выведите дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний. Какой вид имеет решение дифференциального уравнения для установившихся вынужденных колебаний?

15. Что называется резонансом? Вид резонансных кривых при различных значениях коэффициента затухания.

1.7. Примеры решения задач

1.7.1. Кинематика гармонических колебаний

Задача 1. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси *Ox* около положения равновесия x=0, частота колебания ω_0=4c^{-1}. В некоторый момент времени координата частицы равна x_0=25*см* и ее скорость υ_0=100*см/с*. Найти координату x и скорость υ частицы через t=2,4*с* после этого момента.

Решение

Запишем уравнение гармонических колебаний частицы в виде

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тогда уравнение скорости будет иметь вид

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитуду и начальную фазу колебаний найдем из начальных условий.

При t=0 имеем

$$x_0 = A\cos\varphi_0, \quad \upsilon_0 = -A\omega_0 \sin\varphi_0,$$

откуда

$$tg\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{\omega_0 x_0} = -1 \text{ и } \varphi_0 = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}} = 35 \text{ см.}$$

С учетом численных значений уравнение колебаний и уравнение скорости частицы можно представить в виде

$$x = 35\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right), см;$$

$$\upsilon_x = -140\sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) см/с.$$

В искомый момент времени t=2,4*с* координата x и скорость частицы υ будут иметь соответственно значения

x=-29*см* и υ = -80 см/с.

Задача 2. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом T=0,6*с* и амплитудой A=10*см*. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь A/2: а) из положения равновесия; б) из крайнего положения.

Решение

Выберем за начало отсчета времени момент, когда точка проходит положение равновесия. Тогда уравнение колебаний будет иметь вид

$$x = A\sin\omega_0 t.$$

Исходя из этого уравнения определим момент времени t_1, соответствующий положению точки $x = A/2$. Имеем

$$\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1, \text{ откуда } t_1 = \frac{T}{12}.$$

Значение средней скорости точки при ее движении из положения равновесия определяется из формулы

$$\upsilon_{ср1} = \frac{S}{t} = \frac{A}{2t_1};\ \upsilon_{ср1} = 100 см/с.$$

Время движения точки из крайнего положения до половины амплитуды будет равно $t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{6}$.

С учетом этого $\upsilon_{ср2} = \frac{A}{2t_2}$; $\upsilon_{ср2} = 50 см/с.$

Задача 3. Найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух одинаково направленных колебаний, выражаемых уравнениями:

$$x_1 = 3\cos(\omega t + \pi/3)\ см,$$
$$x_2 = 8\sin(\omega t + \pi/3)\ см.$$

Написать уравнение результирующего колебания.

Решение

Вначале, используя тригонометрические формулы, приведем уравнение второго колебания к виду

$$x_2 = 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\ см.$$

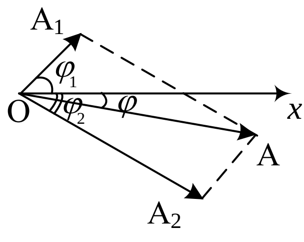


Рис. 1.14

Затем, построим векторную диаграмму сложения однонаправленных колебаний (рис. 1.14). Согласно теореме косинусов получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi},$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Произведя вычисления, найдем: A=8,5 см.

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определится из рис.1.14.

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

$$\varphi = -0{,}2 \text{ } рад.$$

Уравнение результирующего колебания запишете в виде

$$x = 8{,}5\cos(\omega t - 0{,}2) \text{ } см.$$

Задача 4. Точка участвует в двух колебаниях с одинаковыми периодами и начальными фазами. Амплитуды колебаний A_1=3*см* и A_2=4*см*. Найти амплитуду результирующего колебания, если колебания взаимно перпендикулярны.

Решение

Если колебания взаимно перпендикулярны, то уравнение результирующего движения будет:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Так как по условию начальные фазы складываемых колебаний равны, то разность фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$)=0, и, следовательно, cos0=1, sin0=0. С учетом этого уравнение результирующего колебания можно упростить

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0, \text{ или } \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

Результирующим будет колебание точки вдоль прямой (рис. 1.15). Амплитуда этого колебания определится по теореме Пифагора

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5 см.$$

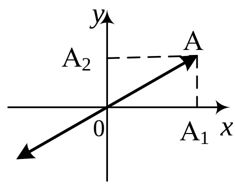


Рис. 1.15

1.7.2. Динамика гармонических колебаний

Задача 1. На концах тонкого стержня длиной ℓ =1*м* и массой m_1=0,4*кг* укреплены шарики малых размеров массами m_2=0,2*кг* и m_3=0,3*кг*. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить период колебаний, совершаемых стержнем.

Решение

Стержень с шариком (рис. 1.16) представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell_c}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; ℓ_c – расстояние от центра масс маятника до оси.

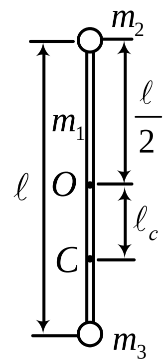


Рис.1.16

Принимая шарики за материальные точки, общий момент инерции маятника определяем выражением

$$I = \frac{1}{12}m_l\ell^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_3\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\ell^2\left(m_1 + 3m_2 + 3m_3\right),$$

$$I = 158 \text{ кг·м}^2.$$

Масса маятника $m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}9$ кг. Расстояние ℓ_c от оси маятника до его центра масс равно

$$\ell_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2\left(-\frac{\ell}{2}\right) + m_3\left(\frac{\ell}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_3 - m_2)\ell}{2m}$$

Произведя вычисления, найдем

ℓ_c = 5,55 см, T= 11,2 с.

Задача 2. Найти частоту малых колебаний системы, показанной на рис.1.17. Известны радиус блока R, его момент инерции I относительно оси вращения, масса тела m и жесткость пружины k.

Решение

В состоянии равновесия $mg = kx_0$, где x_0 – деформация пружины. При отклонении тела на величину x движение данной системы описывается уравнениями:

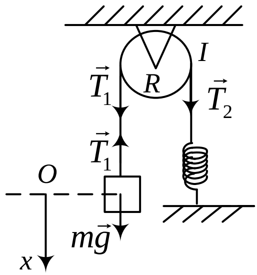


Рис. 1.17

$$mx'' = mg - T_1, \quad I\varphi'' = (T_1 - T_2)R.$$

Учитывая, что $\varphi = x/R$ и $T_2 = k(x_0 + x) = mg + kx$, получим

$$x'' + \frac{k}{m + \frac{I}{R^2}} x = 0.$$

Это равенство представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания данной системы. Сопоставляя его со стандартным видом дифференциального уравнения, найдем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{I}{R^2}}}.$$

Задача 3. Тело массой m упало с высоты h на чашку пружинных весов (рис. 1.18). Массы чашки и пружины пренебрежимо малы, жесткость последней k. Прилипнув к чашке, тело начинает совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. Найти амплитуду колебаний и их энергию.

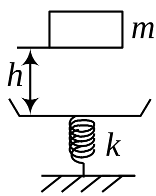


Рис. 1.18

Решение

Учитывая то, что масса чашки мала, закон сохранения механической энергии запишется в виде

$$mgh = \frac{kx^2}{2} - mgx,$$

где x – деформация пружины, после прилипания тела к чашке весов.

Приведя данное уравнение к стандартному виду, и решая его относительно x, найдем

$$x_{\max} = \frac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 2kmgh}}{k}.$$

В состоянии статического равновесия тела на весах выполняется условие

$$mg = kx_0,$$

откуда $x_0 = mg/k$.

Таким образом, амплитуда колебаний груза на пружине определится как разность полученных значений, т.е.

$$A = x_{\max} - x_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{I + \frac{2kh}{mg}}.$$

Энергия колебаний найдется из формулы

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m^2 g^2}{2k} + mgh.$$

Задача 4. Частица массой m=0,01*кг* совершает гармонические колебания с периодом T=2*с*. Полная энергия колеблющейся частицы E=0,1*мДж*. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы $F_{\max}$, действующей на частицу.

Решение

Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

где ω = 2π/T. Отсюда амплитуда

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F=-kx$, где k – коэффициент квазиупругой силы; x – смещение колеблющейся точки. Максимальной сила будет при максимальном смещении x_{max} равном амплитуде:

$$F_{max}=kA.$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2 / T^2.$$

Подставив выражения для A и k в формулу для максимальной силы и произведя упрощения, получим

$$F_{max} = 2\pi\sqrt{2mE} / T.$$

Произведем вычисления:

$$A = 45 мм,\ F_{max} = 4{,}4\ мН.$$

1.7.3. Затухающие и вынужденные колебания

Задача 1. В воде плавает льдина в виде параллелепипеда с площадью основания S и высотой H. Льдину погружают в воду с начальной скоростью υ_0. Определить ее скорость в произвольный момент времени, если сила сопротивления воды пропорциональна скорости льдины.

Решение

До погружения льдина находится в равновесии. На нее действуют две силы (рис.1.19, а): сила тяжести $mg = \rho_л Vg = \rho_л SHg$ (где $\rho_л$ – плотность льда) и выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho_B Shg$ (где ρв – плотность воды; h – глубина погружения льдины в состоянии равновесия).

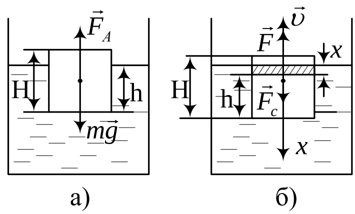


Рис.1.19

При погружении льдины на дополнительную глубину x (рис.1.19,б) появляются дополнительная сила Архимеда $F = -\rho_B Sxg = -\rho_B Sgx$ и сила сопротивления воды $F_c = -r\upsilon$. Под действием этих сил льдина будет совершать затухающие колебания. Применяя второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение этих колебаний

$$mx'' = -rx' - \rho_B Sgx$$

или

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания, а $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\rho_B Sg}{m}} = \sqrt{\dfrac{\rho_B Sg}{\rho_л SH}} = \sqrt{\dfrac{\rho_B g}{\rho_л H}}$ – собственная частота колебаний.

Как известно, решением уравнения (1) является функция

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний.

Скорость υ колебания льдины

$$\upsilon = x' = A_0 e^{-\beta t}\left(\omega\cos(\omega t + \varphi_0) - \beta\sin(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Начальную амплитуду A_0 и начальную фазу φ_0 определим из начальных условий (при t=0, x=0, $x'(0) = \upsilon_0$):

$$0 = A_0 \sin\varphi_0 ,$$

$$\upsilon_0 = -A_0\beta\sin\varphi_0 + A_0\omega\cos\varphi_0 .$$

Откуда $\varphi_0 = 0$, $A_0 = \upsilon_0/\omega$.

Таким образом, колебания льдины происходят по закону

$$x = \frac{\upsilon_0}{\omega} e^{-\beta t}\sin\omega t .$$

Тогда искомая скорость льдины в произвольный момент времени

$$\upsilon = x' = \upsilon_0\left(\cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-\beta t} .$$

Задача 2. Тело массой m=5*г* совершает затухающие колебания. В течение времени t=50*с* тело потеряло 60 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r.

Решение

Энергия тела, совершающего гармонические колебания, определяется по формуле

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} .$$

Учитывая зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$A = A_0 e^{-\beta t} ,$$

получим

$$E = \frac{mA_0^2 e^{-2\beta t}\omega^2}{2} \quad \text{или} \quad E = E_0 e^{-2\beta t} , \qquad (1)$$

где $E_0 = \dfrac{mA_0^2\omega^2}{2}$ – энергия тела в момент времени t=0.

К моменту времени t=50*с* тело потеряло 60% своей первоначальной энергии, следовательно,

$$E = 0{,}4E_0\,. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), сокращая на E_0 и логарифмируя обе части равенства, найдем:

$$\ln 2{,}5 = 2\beta t\,.$$

Отсюда выражаем β:

$$\beta = \frac{\ln 2{,}5}{2t}\,. \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$\beta = \frac{r}{2m}\,. \qquad (4)$$

Из сравнения (3) и (4) получим

$$r = \frac{m\ln 2{,}5}{t}\,.$$

После подстановки числовых значений найдем

$$r = 9{,}16\cdot 10^{-5}\ \text{кг/с}.$$

Задача 3. Тело массой m=10*г* совершает затухающие колебания с максимальным значением амплитуды 7*см*, начальной фазой, равной нулю, коэффициентом затухания, равным 1,6c^{-1}. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x = 5\sin\left(10\pi t \cdot 0{,}75\pi\right)см$. Найти: 1) уравнение свободных колебаний; 2) уравнение внешней периодической силы.

Решение

Уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t\,, \qquad (1)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; ω_0 – собственная частота колебаний: β - коэффициент затухания.

По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен φ=-3π/4, следовательно $tg(-3\pi/4) = 1$.

С другой стороны, $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}$.

Из равенства

$$\frac{2\beta\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = 1$$

следует

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_В{}^2 + 2\beta\omega_B}\,. \qquad (2)$$

У нас ω_B=10π, β=1,6c^{-1} Подставляя эти значения в (2), получим ω_0=10,5π.

С учетом того, что $\beta^2 << \omega^2_0$ частота ω затухающих колебаний равна частоте ω_0 собственных колебаний. Следовательно, уравнение свободных затухающих колебаний примет вид

$$x = 7e^{-1,6t} \sin 10{,}5\pi t\,,\ см.$$

Уравнение внешней периодической силы

$$F = F_0 \sin \omega t\,. \qquad (3)$$

Амплитудное значение вынуждающей силы

$$F_0 = f_0 m = Am\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_B^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}\,. \qquad (4)$$

После подстановки числовых значений получаем

$$F_0 = 72 \text{ мН}.$$

С учетом этого уравнение внешней периодической силы будет иметь вид

$$F = 72\sin 10\pi t \text{ мН}.$$

Задача 4. Сила, действующая на материальную точку, изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \sin \omega t$. В начальный момент времени скорость точки равна нулю. Как с течением времени изменяется скорость и положение точки?

Решение

По второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} \text{ или } F_0 \sin \omega t = m\frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (1)$$

Отсюда $d\upsilon = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \cdot dt$ и скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = \int d\upsilon = \int_0^t \frac{F_0}{m}\sin \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega}\left(1 - \cos \omega t\right). \qquad (2)$$

Обозначая $\frac{F_0}{m\omega} = \upsilon_m$, перепишем (2) в виде

$$\upsilon = \upsilon_m\left(1 - \cos \omega t\right).$$

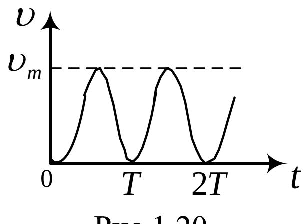


Рис.1.20

График изменения скорости представлен на рис. 1.20.

Если начальное положение точки принять за начало координат, то координата точки в любой момент времени определяется выражением

$$x=\int_0^t \upsilon dt=\upsilon_m\int_0^t(1-\cos\omega t)dt=\upsilon_m t-\frac{\upsilon_m}{\omega}\sin\omega t$$

Таким образом, движение точки под действием периодической силы является поступательным с периодическим возрастанием скорости от 0 до $2\upsilon_m$, а затем снова до нуля

$$x=\int_0^t \upsilon dt=\upsilon_m\int_0^t(1-\cos\omega t)dt=\upsilon_m t-\frac{\upsilon_m}{\omega}\sin\omega t.$$

1.8. Задачи для самостоятельного решения

1.8.1. Кинематика гармонических колебаний

1. Написать уравнение гармонического колебательного движения точки с амплитудой в 0,1 м, периодом 4 с и начальной фазой, равной π/2. Найти максимальную скорость колеблющейся точки и максимальное ускорение. [$x=0{,}1\cos(0{,}5\pi t+\pi/2)$; $\upsilon_{\max}$= 0,157 м/с; $a_{\max}$ = 0,25м /с^2]

2. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой *A*=4*см* и периодом *T*=2*с*. Написать уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения x_0 = 2*см*. [$x=0{,}04\cos(\pi t+\pi/3)$*м*]

3. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки 0,493 м/с^2, период колебаний 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 0,025 м. [$x=0{,}05\sin(\pi t+\pi/6)$*м*]

4. Точка совершает гармонические колебания. Период колебания *T*=2*с*, амплитуда *A*=5*см*, начальная фаза равна нулю. Найти скорость точки в момент времени, когда ее смещение от положения равновесия равно 2,5*см*. [0,136 *м/с*]

5. Через сколько времени от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от

положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний T=24*с*, начальная фаза равна нулю. [t=2*с*]

6. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости? [$t=\frac{T}{6}$]

7. Груз, свободно колеблющийся на пружине, за время t=0,01*с* сместился с расстояния 0,5*см* от положения равновесия до наибольшего, равного 1 см. Каков период его колебаний? [T=0,06*с*]

8. Найти зависимость ускорения гармонического колебания материальной точки от скорости. [$a=-\omega_0\sqrt{\upsilon_{\max}^2-\upsilon^2}$]

9. Найти зависимость скорости гармонического колебания материальной точки от смещения. [$\upsilon=\omega_0\sqrt{A^2-x^2}$]

10. Найти круговую частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если на расстоянии x_1 и x_2 от положения равновесия ее скорость равна соответственно υ_1 и υ_2. [$\omega=\sqrt{(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)(x_2^2-x_1^2)}$; $A=\sqrt{(\upsilon_1^2x_2^2-\upsilon_2^2x_1^2)(\upsilon_1^2-\upsilon_2^2)}$]

11. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами T=1,5*с* и амплитудами A=2*см*. Начальные фазы колебаний $\varphi_1=\pi/2$ и $\varphi_2=\pi/3$. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Записать уравнение результирующего колебания. [A = 3,86*см*; φ=(0,41π)*рад*]

12. Материальная точка участвует сразу в двух колебаниях, происходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями $x_1=\sin t$ см и $x_2=2\cos t$ см. Найти амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу φ. Написать уравнение движения. [A=2,24*см*; ν=0,159*Гц*; φ=(0,353π)*рад*]

13. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одного направления $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega (t + \tau)$, где A_1=A_2=1см; $\omega = \pi$ с$^{-1}$; τ=0,5*с*. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Найти уравнение результирующего колебания. [*А* =1,41*см*; *φ*=π/4 *рад*]

14. Частица одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и выражаемых уравнениями: $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega t,$ где A_1=0,5*см*; A_2=2*см*. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения. [$\frac{x^2}{0{,}25} + \frac{y^2}{4} = 1$]

15. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega (t + \tau)$, где A_1=2*см*, A_2=1*см*; $\omega = \pi$ с$^{-1}$; τ=0,5*с*. Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки. [*y* = -0,5*x*]

16. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = 4 \cos \pi t$ и $y = 8 \cos \pi (t + 1)$. Найти уравнение траектории и построить график ее движения. [*y* = -2*x*]

17. Движение точки задано уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega (t + \tau)$, где A_1=10*см*; A_2=5*см*; $\omega = 2$с$^{-1}$; τ=π/4*с*. Найти уравнение траектории и скорость точки в момент *t*=0,5*с*. [$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1; \upsilon = 13{,}7 см/с$]

1.8.2. Динамика гармонических колебаний

1. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\sin(2\pi t + \pi/6)$. В какой момент времени ее потенциальная энергия равна кинетической? [$t = (1/24)$ с]

2. Материальная точка массой m=0,01*кг* колеблется в соответствии с уравнением $x = 0{,}05\sin(\pi t/5 + \pi/4)$м. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки. [$F_{\max}$=19,7·10^{-5}*Н*, E=4,93·10^{-6}*Дж]*

3. Найти выражения для потенциальной, кинетической и полной энергии материальной точки массой m, совершающей гармонические колебания по закону $x=A\cos\omega t$.

[$E_{кин} = \dfrac{mA^2\omega^2}{4}(1-\cos 2\omega t)$, $E_{пот} = \dfrac{mA^2\omega^2}{4}(1+\cos 2\omega t)$,

$E_{полн} = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$]

4. Частота собственных колебаний тела равна ω_0. Через какое наименьшее время его кинетическая энергия уменьшится вдвое по сравнению со своим наибольшим значением? [$t = \dfrac{\pi}{4\omega_0}$]

5. Шарик массой m = 60 г колеблется с периодом T=2*с*. В начальный момент времени смещение шарика x_0 = 4,0*см* и он обладает энергией E=0,02*Дж*. Записать уравнение гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени. [$\mathrm{x} = 0{,}26\cos(\pi t + 1{,}4)$; $F = -0{,}16\cos(\pi t + 1{,}4)$]

6. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x=A\sin\omega t$, где A=5*см*, ω=2с^{-1}. В момент времени, когда точка обладала потенциальной энергией $E_п$= 0,1*мДж*, на нее действовала возвращающая сила F=5*мН*. Найти этот момент времени t. [0,47*с*]

7. Однородный стержень длиной ℓ совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярно к стержню и проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний. [$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\ell}{3g}}$]

8. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень массой m с укрепленным на нем маленьким шариком массой m (рис. 1.21). Маятник совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку O. Длина стержня ℓ =1*м*. Определить период гармонических колебаний маятника для случаев а, б, в. [$T = \dfrac{8}{3}\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7\ell}{3g}}$; $T = \dfrac{4\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$]

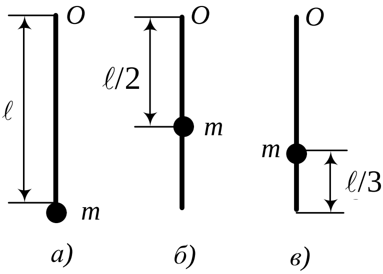


Рис. 1.21

9. Однородный стержень длиной ℓ совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через одну из его точек. Найти расстояние между центром стержня и осью, при котором период колебаний будет наименьшим. Чему он равен? [$x = \dfrac{\ell}{\sqrt{12}}$; $T_{\min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g\sqrt{3}}}$]

10. На стержне длиной ℓ =30*см* укреплены два одинаковых грузика: один - в середине стержня, другой - на одном из его концов. Стержень с грузами колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец

стержня. Определить приведенную длину L и период T гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь. [L=25 *см*, T=1*с*]

11. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R=0,3*м*. Вычислить период колебаний обруча. [$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ =1,55 с]

12. Однородный диск радиусом R=0,3*м* колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний? [$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$]

13. Определить частоту ν гармонических колебаний диска радиусом R=20*см* около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости. [1 Гц]

14. Вычислить период малых колебаний ареометра, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра m=50*г*, радиус его трубки r=3,2*мм*, плотность жидкости ρ=1,0*г/см*^{3}. Сопротивлением жидкости пренебречь. [$T = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}}$ =2,5 с]

15. Определить период малых продольных колебаний тела массой m под действием двух пружинок, жесткости которые равны k_1 и k_2 (рис.1.22). Трением пренебречь. [$T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$]

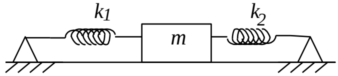


Рис. 1.22

16. Однородный диск массой m и радиусом R подвешен на тонкой проволоке, имеющей модуль кручения с (рис. 1.23) Получить дифференциальное уравнение колебаний диска. Найти период колебаний. [$T = 2\pi R\sqrt{\dfrac{m}{2c}}$]

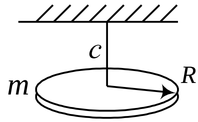


Рис. 1.23

17. Доска с лежащим на ней бруском совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой A=10*см*. Найти коэффициент трения между доской и бруском, если последний начинает скользить по доске, когда ее период колебания меньше T = 1,0*с*. [$k = 4\pi^2 A/gT^2$ = 0,4]

18. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока (рис.1.24). Расстояние между осями блоков ℓ =20*см*, коэффициент трения между стержнем и блоками k=0,18. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания. Найти их период. [$T = \pi\sqrt{\dfrac{2\ell}{kg}} = 1{,}5c$]

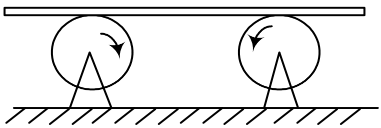


Рис. 1.24

19. Сплошной однородный цилиндр массой m совершает малые колебания под действием двух пружин, суммарная жесткость которых равна k (рис.1.25). Найти период этих колебаний в отсутствие скольжения. [$T = \pi\sqrt{\dfrac{3m}{2k}}$]

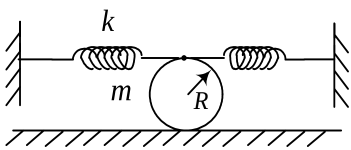


Рис. 1.25

20. Сплошной цилиндр радиусом r катится без скольжения по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом R, совершая малые колебания

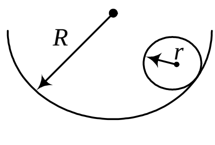


Рис. 1.26

(рис.1.26). Найти их период. [$T = 2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$]

21. На горизонтальной пружине укреплено тело массой M=10*кг*, лежащее на гладком столе (рис.1.27). В это тело попадает и застревает в нем пуля массой m=10*г*, летящая со скоростью 500*м/с*, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой A=10*см*. Найти период колебаний тела. [1,26 с]

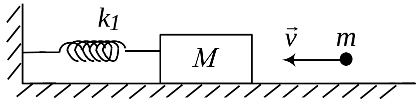


Рис. 1.27

1.8.3. Затухающие и вынужденные колебания

1. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1=5*мин* уменьшилась в 2 раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в 8 раз? [t=15мин]

2. Амплитуда колебаний маятника длиной ℓ=1*м* за время t=10*мин* уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент колебаний λ. [$\lambda = 2{,}31\cdot10^{-3}$]

3. Логарифмический декремент колебаний λ маятника равен 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза. [N = 231]

4. Гиря массой m=500*г* подвешена к спиральной пружине жесткостью k=20*Н/м* и совершает упругие колебания в некоторой среде, логарифмический декремент колебаний λ=0,004. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. За какое время t произойдет это уменьшение? [N = 173; t =2*мин*52*с*]

5. Математический маятник длиной в 24,7*см* совершает затухающие колебания. Через сколько времени энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза, если логарифмический декремент затухания λ = 0,01? [t = 120 с]

6. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в два раза. Логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0{,}01$. [N = 3]

7. Определить период T затухающих колебаний, если период То собственных колебаний системы равен 1с, а логарифмический декремент колебаний $\lambda= 0{,}628$. [$T = 1{,}005c$]

8. Математический маятник длиной 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) - на 4 см. Найти время релаксации, т.е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в е раз, где e - основание натурального логарифма. [τ=6,4c]

9. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на 9,8$см$. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания β, чтобы: а) колебания прекратились через 10c (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1 % от начальной величины); б) груз возвращался апериодически; в) логарифмический декремент затухания $\lambda = 6$? [$\beta = 0{,}46\ c^{-1}$; $\beta = 10$ с$^{-1}$; $\beta = 7{,}2$ с$^{-1}$]

10. За время, в течение которого система совершает N=100 колебаний, амплитуда уменьшается в 5 раз. Найти добротность системы. [Q=195]

11. Добротность некоторой колебательной системы Q=2, частота свободных колебаний ω=100c^{-1}. Определить собственную частоту колебаний системы ω_0. [ω_0= 103c^{-1}]

12. Частота свободных колебаний некоторой системы ω=100c^{-1}, резонансная частота $\omega_{рез.}$=99c^{-1}. Определить добротность этой системы. [Q=4]

13. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний при частотах ω_1= 100c^{-1} и ω_2=300c^{-1} оказывается одинаковой. Найти резонансную частоту. [ω_p=224c^{-1}]

14. Вагон массой m=80т имеет четыре рессоры. Жесткость пружин каждой рессоры, равна k=500$кН/м$. При какой скорости вагон начинает сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина рельса равна ℓ =12,8м? [10,2 $м/с$]

15. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой ν=1000$Гц$. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_р$ = 999$Гц$. [ν_0 =1002$Гц$]

16. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$, колебаний. [$\nu_{рез}$ =1,75$Гц$]

17. Пружинный маятник (жесткость пружины равна k=10$Н/м$, масса m груза равна 100 $г$) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r=2·10^{-2}$кг/с$. Определить коэффициенты затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы F_0=10$мН$. [β = 0,1$с^{-1}$; $A_{рез}$=5$см$]

18. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления r=10^{-3}$кг/с$. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{рез}$=0,5$см$, а частота собственных колебаний ν =10$Гц$. [$F_0 = 2\pi\nu r$; $A_{рез}$=0,314$мН$]

19. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частоте ν_1=400$Гц$ и ν_2=600$Гц$ равны между собой. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$. Затуханием пренебречь. [$\nu_{рез}$ =510$Гц$]

20. К спиральной пружине жесткостью k=10$Н/м$ подвесили грузик массой m=10г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления r равным 0,1кг/с, определить: частоту ν_0, собственных колебаний; резонансную частоту $\nu_{рез}$; резонансную амплитуду $A_{рез}$, если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее

амплитудное значение F_0= 0,02H; отношение резонансной амплитуды к статическому смещению под действием силы F_0. [ν_0 = 5,03 Гц; $\nu_р$ = 4,91 Гц; 3) $A_{рез}$ = 6,4 мм; 4) $A_{рез}/F_0$ = 3,2]

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

2.1. Распространение волн в упругих средах. Уравнение бегущей волны

Процесс распространения колебаний в упругой среде, периодический во времени и в пространстве, называется механической волной. Распространение волн не связано с переносом вещества. Частицы среды, в которой распространяется волна, лишь совершают колебания около своих положений равновесия. От одних участков среды к другим переносятся только энергия и импульс.

Различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей упругостью формы, т.е. способной сопротивляться деформации сдвига. Поэтому поперечные волны могут существовать лишь в твёрдых телах. Продольные волны связаны с объёмной деформацией среды, поэтому они могут распространяться как в твёрдых телах, так и в жидкостях и в газах. Скорости распространения поперечных $\upsilon_\perp$ и продольных $\upsilon_\parallel$ механических волн в твёрдых телах определяются выражениями

$$\upsilon_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}}\,; \quad \upsilon_\parallel = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \qquad (2.1)$$

где G – модуль сдвига; E – модуль Юнга.

В газообразных средах распространяется только продольная волна со скоростью

$$\upsilon = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}\,, \qquad (2.2)$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура, μ – молярная масса газа.

Волна называется синусоидальной, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. График зависимости смещения частиц среды ξ, участвующих в волновом процессе, от расстояния x этих частиц до источника колебаний для какого-то фиксированного момента времени представлен на рис. 2.1.

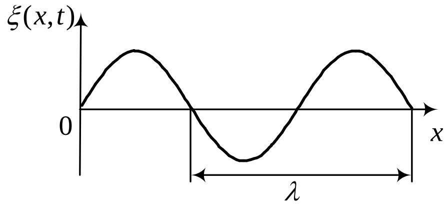


Рис. 2.1

Расстояние между ближайшими частицами в направлении распространения волны, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны. Длина волны λ равна такому расстоянию, на которое распространяется определённая фаза волны за период, т.е.

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}\,. \qquad (2.3)$$

Зависимость смещения колеблющейся частицы среды от координат и времени называется уравнением волны.

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox в отсутствии полощения, уравнение имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) + \varphi_0\right], \tag{2.4}$$

или в стандартной форме

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0), \tag{2.5}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, отличается только знаком члена kx.

Уравнение любой волны является решением некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым. В общем случае волновое уравнение имеет вид

$$\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{2.6}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

2.2. Стоячие волны

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих волн с одинаковыми амплитудами и частотой, распространяющихся навстречу друг другу. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград.

Пусть уравнения бегущей и отражённой волн имеют вид

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx);$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t\,. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания с частотой ω и амплитудой

$$A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|, \tag{2.8}$$

которая является периодической функцией координаты x.

Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны достигает максимального значения, называются пучностями стоячей волны. Значения координат пучностей

$$x_{пучн} = \pm 2m\frac{\lambda}{4}, \quad (m=1,2,3...). \tag{2.9}$$

Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны обращается в ноль, называются узлами стоячей волны. Координаты узлов определяются соотношением

$$x_{узл} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}\,. \tag{2.10}$$

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно

$$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}, \tag{2.11}$$

и называется длиной стоячей волны.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе, все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами (синфазно). Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Графическое изображение стоячей волны для разных моментов времени представлено на рис.2.2.

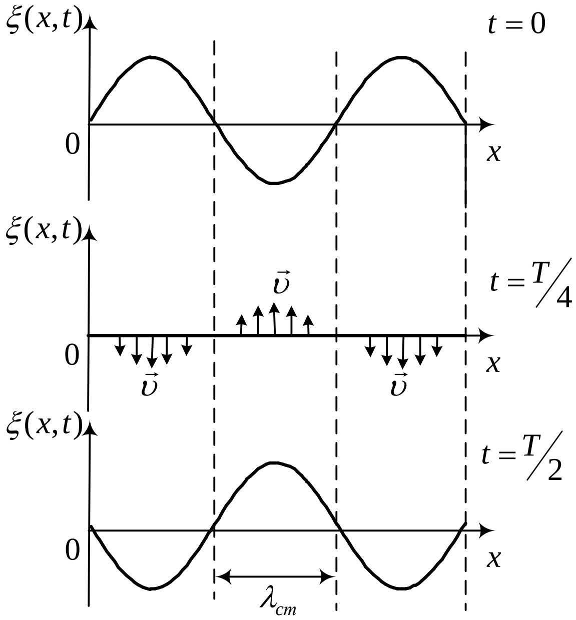


Рис. 2.2

В стоячей волне отсутствует перенос энергии, так как образующие эту волну встречные волны переносят энергию в равных количествах в противоположных направлениях. Полная энергия колебаний каждого элемента объёма среды, ограниченного соседними узлом и пучностью, не зависит от времени: она лишь периодически переходит из кинетической энергии, сосредоточенной вблизи пучностей, в потенциальную - вблизи узлов волны, где деформация среды достигает максимальных значений.

2.3. Эффект Доплера в акустике

Эффектом Доплера называется изменение частоты звуковых волн, регистрируемых приемником, происходящее вследствие движения источника и приемника этих волн.

Предположим, что приемник и источник звука движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорости источника и приемника будем считать положительными, если они направлены друг к другу, в противном случае – отрицательными.

Вначале рассмотрим два частных случая.

1). Пусть приемник звуковых волн неподвижен относительно среды, а источник с частотой ν_0 приближается к приемнику со скоростью $\upsilon_и$. В этом случае за время $T_0 = 1/\nu_0$ источник смещается в среде на расстояние $s = \upsilon_и \mathrm{T}_0 = \upsilon_и/\nu_0$, поэтому длина волны λ отлична от λ_0 и равна

$$\lambda = \lambda_0 - \upsilon_и/\nu_0 = \frac{\upsilon - \upsilon_и}{\nu_0},$$

где $\upsilon -$скорость распространения звуковой волны в воздухе.

Для частоты, регистрируемой приемником, получим

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \nu_0 \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_и}.$$

2). Во втором случае неподвижен источник, а приемник приближается к нему со скоростью $\upsilon_п$. В этом случае длина звуковой волны остается прежней

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{\upsilon_{отн}}{\nu_0},$$

но изменяется скорость распространения волны относительно приемника $\upsilon_{отн} = \upsilon + \upsilon_{пр}$. Следовательно,

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon}.$$

Соединяя результаты, полученные в двух предыдущих случаях, получим

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon + \upsilon_{пр}}{\upsilon - \upsilon_{ист}}.$$

Согласно полученной формуле, если расстояние между источником и приемником сокращается, то $\nu > \nu_0$, а если расстояние между источником и приемником растет, то $\nu < \nu_0$.

2.4. Контрольные вопросы

1. Каковы основные различия между бегущей и стоячей волной?
2. Выведите уравнения бегущей и стоячей плоских волн.
3. Какова зависимость смещения точек стоячей волны от времени?
4. Получите выражения для координат узлов и пучностей стоячей волны.
5. В чем состоит метод сдвига фаз, применяемый для измерения скорости звука?
6. От чего зависит скорость распространения звуковых волн в газах?
7. В чем состоит эффект Доплера в акустике?

2.5. Примеры решения задач

Задача 1. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на расстоянии $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{5}$. Амплитуда волны A=5 см. Определить: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение второй точки в момент времени $t_2 = 2$ с.

Решение

1) Для нахождения длины волны воспользуемся формулой, связывающей разность фаз колебаний двух точек среды с разностью хода волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1),$$

отсюда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1).$$

Подстановка числовых значений дает следующий результат

$$\lambda = 10\,\text{м}.$$

2) Общий вид уравнения плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси x в среде не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

В данном уравнении $A = 0{,}05\text{м} = \text{const}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{\lambda}{\upsilon}$, следовательно $\omega = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

С учетом числовых значений данных величин, получим

$$\xi(x,t) = 0{,}05\cos(2\pi t - \frac{\pi}{5}x),\ \text{м}.$$

3) Смещение точки с координатой x_2=10 м в момент времени $t = 2$ с, найдем, подставляя данные значения в уравнение волны,

$$\xi_2 = 0{,}05\cos(4\pi - \frac{\pi}{5}10) = 0{,}05\,\text{м}\ \text{ или }\ \xi_2 = 5\,\text{см}.$$

Задача 2. Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между: 1) первой и седьмой пучностями равно 15*см*; 2) первым и четвертым узлом равно 15 *см*.

Решение

Стоячая волна образуется в результате наложения двух бегущих волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые частоты и амплитуды. Уравнение стоячей плоское волны описывается уравнением

$$\xi(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)\,.$$

Амплитуда стоячей волны, в отличие от амплитуды A бегущих волн, является периодической функцией координаты x:

$$A_{ст} = 2A\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|,$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, а λ – длина бегущей волны.

Точки, в которых амплитуда стоячей волны $A_{ст} = 0$, называются узлами стоячей волны, а точки, в которых амплитуда максимальна ($A_{ст} = 2A$), называются пучностями стоячей волны. Положение узлов и пучностей находится из условий:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2m+1)\frac{\pi}{2}\ \text{(узлы)},\quad \frac{2\pi}{\lambda}x = 2m\frac{\pi}{2}\ \text{(пучности)},$$

где $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Из данных условий координаты узлов и пучностей соответственно равны:

$$x_{узел} = (2\mathrm{m}+1)\frac{\lambda}{4},\quad x_{пучн} = \mathrm{m}\frac{\lambda}{4}\,.$$

Согласно условию задачи 1) расстояние между первой и седьмой пучностями равно 15 см, т.е

$$x_7 - x_1 = \frac{\lambda}{4}(7-1) = 1{,}5\lambda = 15(см),$$

откуда $\lambda = 10$ см.

Аналогично, согласно условию 2), расстояние между первым и четвертым узлом равно 15 см, т.е.

$$x_4 - x_1 = \frac{\lambda}{4}(9-3) = 1{,}5\lambda = 15(см) \text{ и } \lambda = 10 \text{ см.}$$

Таким образом, независимо от условий эксперимента мы получили один и тот же результат.

Задача 3. Электропоезд проходит со скоростью 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого 300Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определите скачок частоты, воспринимаемый приемником.

Решение

Согласно эффекту Доплера, частота ν звука, воспринимаемая прибором, зависит от скорости $u_{ист}$ источника звука и скорости $u_{пр}$ прибора. Эта зависимость выражается формулой

$$\nu = \frac{\upsilon + u_{пр}}{\upsilon - u_{ист}} \nu_0 .$$

Поскольку приемник неподвижен, то $u_{пр}$=0. В то же время, знак скорости $u_{ист}$ зависит от направления движения источника. Если источник звука приближается к приемнику звука, то величина $u_{ист}$ положительна, в противном случае она отрицательна. Исходя из этого, получаем

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon - u_{ист}} \nu_0 \quad \text{и} \quad \nu_2 = \frac{\upsilon}{\upsilon + u_{ист}} \nu_0 .$$

Скачок частоты, воспринимаемый приемником, определится как разность этих значений

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{2u_{ист}\upsilon\nu_0}{(\upsilon - u_{ист})(\upsilon + \mathrm{u}_{\text{ист}})}.$$

Расчет по данной формуле дает следующий результат

$$\Delta\nu = 35{,}4\,\text{Гц}.$$

2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти скорость распространения звука в двухатомном газе, если известно, что при давлении $p = 10^5$ Па плотность газа $\rho = 1{,}29$ кг/м^3. [330*м/с*]

2. В упругой среде распространяется волна со скоростью 20 *м/с*. Частота колебаний 2 *с*$^{-1}$, амплитуда 0,02 *м*. Определить фазу колебаний, смещение, скорость, ускорение точки, отстоящей на расстоянии 60 *м* от источника в момент времени 4 *с*, и длину волны.

3. Волна распространяется по прямой со скоростью 20 *м/с*. Две точки, находящиеся на расстоянии 12 *м* и 15 *м* от источника колебаний, колеблются по закону синуса с амплитудами, равными 0,1 *м* и с разностью фаз 135^0. Найти длину волны, написать ее уравнение и найти смещение указанных точек в момент времени 1,2 *с*. [$\lambda = 8м$; $\mathrm{x}_1 = 0$; $x_2 = 0{,}07\,м$]

4. Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 72\,км/ч$ $\upsilon_2 = 54\,км/ч$. Первый поезд дает свисток с частотой $\nu = 600\,Гц$. Найти частоту колебаний звука, который услышит пассажир второго поезда: а) перед встречей поездов; б) после встречи. Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с. [666Гц; 542 Гц]

5. Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий на платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука $\nu_1 = 1100$ *Гц*; когда удаляется, кажущаяся

частота $\nu_2 = 900$ Гц. Найти скорость электровоза и частоту звука, издаваемого сиреной. [120 *км/ч* ; 990 *Гц*]

6. Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Расстояние между соседними положениями поршня, при котором наблюдается резонанс на частоте 2500 *Гц*, составляет 6,8 *см* . Определите скорость звука в воздухе. [340 *м/с*]

7. Труба, длина которой $\ell = 1$ *м*, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость звука $\upsilon = 340$ *м/с*, определите, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая волна. 85 *Гц*.

3. ТЕСТЫ ПО МЕХАНИЧЕСКИМ КОЛЕБАНИЯМ И ВОЛНАМ

Вариант 1

1. При гармонических колебаниях вдоль оси Оx координата тела изменяется по закону $x = 0{,}9 \sin 3t$ м. Частота колебаний ускорения равна

1) 3 2) $\dfrac{3}{2\pi}$ 3) $\dfrac{2\pi}{3}$ 4) $\dfrac{3t}{2\pi}$

2. Амплитуда гармонического колебания A = 5 *см*, период T = 4*с*. Максимальная скорость колеблющейся точки

1) $2{,}5\pi$ 2) $\pi/2$ 3) π 4) 2π

3. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях согласно уравнениям $x=2\cos\omega t$ и $y=2\sin\omega t$. Траектория результирующего движения точки представляет собою

1) прямую 2) окружность 3) эллипс 4) параболу

4. Два диска, диаметры которых различаются в 2 раза, совершают малые колебания относительно оси, проходящей через их край. Чему равно отношение периода колебаний большего диска T_1 к периоду колебаний меньшего диска T_2?

5. Амплитуда колебаний математического маятника равна A, максимальная скорость – ℓ. Длина данного математического маятника составляет

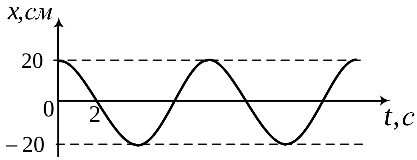
1) $\dfrac{gA^2}{\upsilon^2}$ 2) $\dfrac{2\pi gA^2}{\upsilon^2}$ 3) $\dfrac{gA^2}{\pi\upsilon^2}$ 4) $\dfrac{gA^2}{2\pi\upsilon^2}$

6. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

1) $x'' + \omega_0^2 x = 0$ 2) $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$

3) $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$ 4) $x' = A\omega_0 \cos\omega t$

7. На рисунке показана зависимость смещения точки продольной волны, распространяющейся со скоростью 6 м/с от времени. Определить расстояние между точками, колеблющимися в противофазе



1) 40 м 2) 24 м
3) 0,4 м 4) 12 м

Вариант 2

1. Чему равна максимальная величина ускорения точки, движение которой описывается уравнением

$$x = 5\cos(2t + \pi/4),\ \text{см?}$$

2. Тонкий однородный стержень длиной 90 *см* совершает малые колебания относительно оси, проходящей через его конец. Чему равно отношение периода его

колебаний к периоду колебаний математического маятника длиной 30 *см*?

3. Два одинаково направленных колебания одинакового периода с амплитудами 3 *см* и 4 *см* имеют разность фаз $\pi/2$. Чему равна амплитуда результирующего колебания?

4. Тонкий обруч радиусом 50 *см* подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период его колебаний.

5. Амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в *e* раз за 50 колебаний. Определите логарифмический декремент затухания.

6. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

1) $x'' + \omega_0^2 x = 0$ 2) $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$

3) $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$ 4) $x' = A\omega_0 \cos \omega t$

7. Уравнение стоячей волны имеет вид

1) $\xi(r,t) = \dfrac{A_0}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ 2) $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

3) $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ 4) $\xi(x,t) = 2A\cos(\dfrac{2\pi x}{\lambda})\cos \omega t$

Вариант 3

1. Уравнение движения точки $x = 2\sin(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{4})$. Чему равен период колебания?

2. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $\upsilon(t) = -6\sin 2\pi t$. Зависимость смещения x этой точки от времени имеет вид

1) $-3\sin 2\pi t$ 2) $-\dfrac{3}{\pi}\sin 2\pi t$ 3) $-6\sin(2\pi t + \dfrac{\pi}{2})$ 4) $\dfrac{3}{\pi}\cos 2\pi t$

3. Тело, совершающее гармоническое колебание с периодом T, проходит первую половину пути от среднего положения до крайнего за время, равное

1) $\frac{T}{4}$ 2) $\frac{T}{6}$ 3) $\frac{T}{8}$ 4) $\frac{T}{12}$

4. Два одинаково направленных колебания одинакового периода с амплитудами 3 *см* и 4 *см* имеют разность фаз π. Чему равна амплитуда результирующего колебания ?

5. Тонкий однородный стержень длиной 60 *см* совершает малые колебания относительно оси, проходящей через его конец. Отношение периода его колебаний к периоду колебаний математического маятника длиной 40 *см* равно

1) 1 2) 1,5 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1*мин* уменьшилась в 3 раза. Во сколько раз она уменьшится за 4 *мин* от начала колебаний?

7. Уравнение сферической волны имеет вид

1) $\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ 2) $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

3) $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ 4) $\xi(x,t) = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t$

Вариант 4

1. Уравнение гармонических колебаний $x = 50\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$*мм*. Чему равно смещение точки от положения равновесия в момент времени t = 1,5 *с*?

2. Начальная фаза синусоидального гармонического колебания равна нулю. Скорость точки будет равна половине ее максимального значения через долю периода, равную

1) 1/2 2) 1/3 3) 1/4 4) 1/6

3. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \cos(\pi t)$ и $y = \cos(\frac{\pi}{2}t)$.
Траектория результирующего движения точки

1) прямая 2) окружность 3) эллипс 4) парабола

4. Тонкий однородный стержень и математический маятник, имеющие одинаковую длину, совершают малые колебания относительно оси, проходящей через их конец. Отношение периода колебаний стержня T_1 к периоду колебаний математического маятника T_2 равно

1) 1,5 2) 0,5 3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 4) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

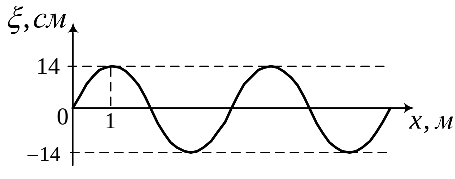
5. Период колебаний обруча радиуса R относительно горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности обруча равен

1) $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ 2) $2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$ 3) $2\pi\sqrt{\frac{R}{5g}}$ 4) $\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

\ 6. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t уменьшилась в n раз. Коэффициент затухания равен

1) $\frac{e^{-n}}{t}$ 2) $e^n t$ 3) $ln(\frac{n}{t})$ 4) $\frac{n}{t}$

7. На рисунке приведен график зависимости смещения точек поперечной волны от их расстояния до источника волны (вибратора), в некоторый фиксированный момент времени. Определить длину волны, излучаемой данным вибратором



1) 4 м 2) 5 м 3) 1 м 4) 0,14 м

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Собственные гармонические колебания в колебательном контуре

Рассмотрим идеализированный колебательный контур без активного сопротивления ($R = 0$), состоящий из конденсатора электроемкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 4.1).

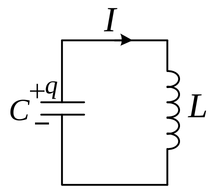


Рис. 4.1

Если зарядить конденсатор до некоторого напряжения $U = q/C$, то в контуре вследствие явления самоиндукции возникают колебания заряда конденсатора и тока в катушке. Получим дифференциальное уравнение для данного процесса. В нашем случае

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (4.1)$$

С учетом того, что

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \; \frac{dI}{dt} = \ddot{q}$$

будем иметь

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ или } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \qquad (4.2)$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Решением данного дифференциального уравнения является функция

$$q = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (4.3)$$

где $q_{\max}$ – максимальный заряд на обкладках конденсатора,

ω_0 – собственная частота колебания,

α – начальная фаза колебания.

Напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в катушке также изменяются по гармоническому закону

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C}. \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= -q_{\max}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= I_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $I_{\max} = q_{\max}\omega_0$ – амплитуда силы тока.

Графики зависимости заряда на конденсаторе и силы тока в катушке представлены на рис. 4.2. Колебания силы тока опережают колебания заряда по фазе на $\pi/2$.

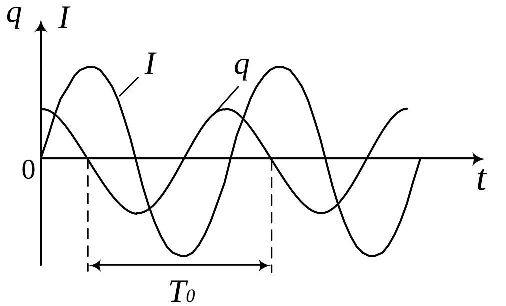


Рис. 4.2

Период собственных колебаний в контуре определяется формулой Томсона

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{4.6}$$

Собственные колебания в LC-контуре сопровождаются периодическим преобразованием энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности, при этом полная энергия электромагнитных колебаний сохраняется с течением времени

$$\frac{q^2}{2C}+\frac{LI^2}{2}=\frac{q_{max}^2}{2C}=\frac{LI_{max}^2}{2}=const \qquad (4.7)$$

4.2. Свободные затухающие колебания в колебательном контуре

Перейдем к рассмотрению реального колебательного контура, обладающего активным сопротивлением (рис. 4.3).

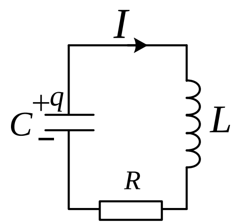


Рис. 4.3

Закон Ома для RLC-контура при разряде конденсатора на сопротивлении и индуктивности запишется так

$$IR=-\frac{q}{C}-L\frac{dI}{dt}, \qquad (4.8)$$

а после преобразования, примет вид

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0. \qquad (4.9)$$

Введя обозначения:

$$\frac{R}{L}=2\beta, \quad \frac{1}{LC}=\omega_0^2, \qquad (4.10)$$

получим стандартное дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний (аналогичное уравнению (1.10))

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=0. \qquad (4.11)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$q=q_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha), \qquad (4.12)$$

где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота затухающих колебаний, $q_{max}(t)=q_0e^{-\beta t}$ – амплитуда заряда, изменяющегося по экспоненциальному закону, $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания колебаний.

График функции (4.12) представлен на рис. 4.4.

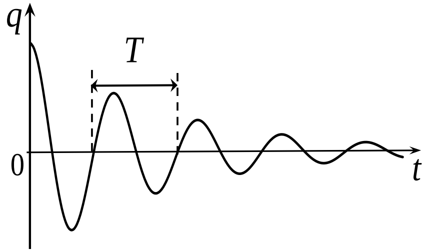


Рис. 4.4

Затухание электромагнитных колебаний, как и механических, принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{q_{\max}(t)}{q_{\max}(t+T)} = \beta T, \qquad (4.13)$$

где $T = \dfrac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ - период затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания (см. 1.28) обратен числу колебаний N_e, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз:

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{N_e}}. \qquad (4.14)$$

Наряду с логарифмическим декрементом затухания, колебательный контур характеризуют его добротностью

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \qquad (4.15)$$

Добротность контура тем выше, чем больше число колебаний N_e, при котором амплитуда уменьшается в e раз. Через параметры контура добротность определяется выражением

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{4.16}$$

Из формулы периода затухающих колебаний следует, что при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ $T \to \infty$, т.е. вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора (рис. 4.5).

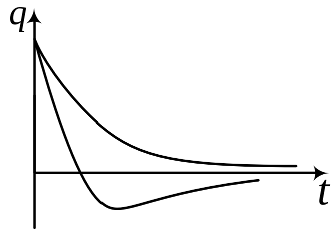


Рис. 4.5

Сопротивление контура, при котором наблюдается переход от колебательного режима к апериодическому, называется критическим. Значение критического сопротивления определяется выражением

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}\,. \tag{4.17}$$

4.3. Вынужденные электрические колебания

Вынужденные электрические колебания в RLC-контуре (рис. 4.6) возникают при наличии в нем переменной ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \cos \omega_в t. \tag{4.18}$$

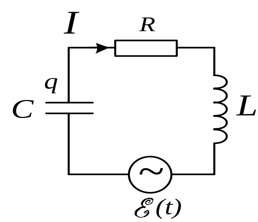


Рис. 4.6

Закон Ома для неоднородного участка цепи $1-R-L-2$ в данном контуре имеет вид

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + \mathscr{E}_0 \cos\omega_в t. \qquad (4.19)$$

Проведя преобразования с использованием ранее принятых обозначений, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в контуре

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathscr{E}'_0}{L}\cos\omega_в t. \qquad (4.20)$$

Частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные гармонические колебания, имеет по аналогии с механическими (1.33) , вид

$$q = q_{\max}\cos(\omega_в t + \varphi_0), \qquad (4.21)$$

где

$$q_{\max} = \frac{\mathscr{E}_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_в^2)^2 + 4\beta^2\omega_в^2}} = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega_в\sqrt{R^2 + (\omega_в L - 1/\omega_в C)^2}},$$

$$tg\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega_в}{\omega_0^2 - \omega_в^2} = \frac{R}{\omega_в L - 1/\omega_в C}. \qquad (4.22)$$

Продифференцировав выражение (4.21) по t, найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_{\max}\omega_в\sin(\omega_в t + \varphi_0) = I_{\max}\cos(\omega_в t - \varphi), \qquad (4.23)$$

где $I_{\max} = q_{\max}\omega_в$ − амплитуда силы тока, $\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ − сдвиг по фазе между током и ЭДС.

Амплитуда силы тока $I_{\max}$ и начальная фаза φ определяются формулами

$$I_{\max} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_в L - 1/\omega_в C)}},$$

$$tg\varphi = \frac{\omega_в L - 1/\omega_в C}{R}. \quad (4.24)$$

Резонансные кривые для силы тока при различных значениях сопротивления R представлены на рис. 4.7.

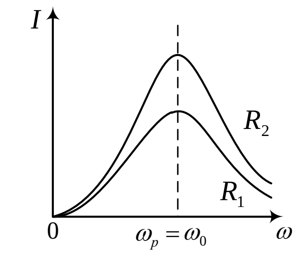


Рис. 4.7

Амплитуда силы тока (см. 4.24) максимальна при условии

$$\omega_в L - \frac{1}{\omega_в C} = 0.$$

Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.25)$$

Резонансные кривые для напряжения на конденсаторе U_C при различных R представлены на рис. 4.8. Точно такой же вид имеют резонансные кривые и для заряда q. Они сходны с резонансными кривыми для механических колебаний (рис. 1.10).

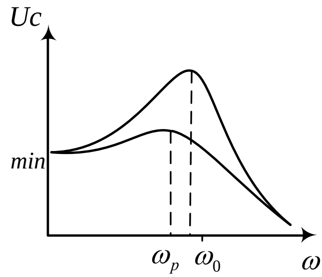


Рис. 4.8

Резонансная частота для напряжения U_C и заряда q определяется формулой

$$\omega_{Uрез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (4.26)$$

Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

4.4. Плоская электромагнитная волна. Скорость распространения и свойства электромагнитной волны

Существование электромагнитных волн непосредственно вытекает из системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \qquad \left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$$

$$(\vec{\nabla},\vec{D})=\rho; \qquad (\vec{\nabla},\vec{B})=0; \qquad (4.27)$$

и системы материальных уравнений

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}; \qquad \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B}=\mu_0\mu\vec{H}. \qquad (4.28)$$

Применяя данную систему к однородной $(\varepsilon=const,\mu=const)$, нейтральной $(\rho=0)$, непроводящей $(\sigma=0)$ среде получим волновые уравнения для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Ox:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \qquad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (4.30)$$

Коэффициент при второй производной по времени в волновом уравнении, есть величина, обратная фазовой скорости волны. Следовательно, уравнения (4.29) и (4.30) указывают на то, что скорость электромагнитной волны определяется выражением

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}. \qquad (4.31)$$

В вакууме ($\varepsilon=1$, $\mu=1$)

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3\cdot10^8\ \text{м/с},$$

скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте c, поэтому фазовая скорость в среде

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (4.32)$$

Решением волновых уравнений (4.29) и (4.30) являются функции, описывающие плоскую электромагнитную волну

$$E_y = E_{\max}\cos(\omega t + kx + \alpha_1), \qquad (4.33)$$

$$H_z = H_{\max}\cos(\omega t + kx + \alpha_2). \qquad (4.34)$$

В этих формулах ω - частота волны, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, $\alpha_1 = \alpha_2$ – начальные фазы колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены вдоль осей y и z, следовательно, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения волны, образуя с вектором скорости $\vec{\upsilon}$ правовинтовую систему. Таким образом, электромагнитные волны поперечны. Колебания напряженностей электрического и магнитного поля в электромагнитной волне происходят синфазно ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$), одновременно достигая максимальных значений и обращаясь в нуль. Амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_{\max} = \sqrt{\mu_0\mu}H_{\max}. \qquad (4.35)$$

Пространственная структура плоской электромагнитной волны для фиксированного момента времени изображена на следующей диаграмме (рис. 4.9):

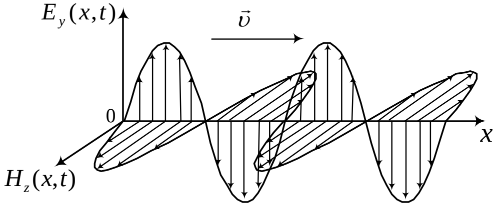


Рис. 4.9

4.5. Энергия электромагнитной волны

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность энергии электромагнитного поля слагается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \qquad (4.36)$$

Поскольку колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ происходят с одинаковой фазой, то из условия (4.35), связывающего амплитудные значения этих векторов, следует аналогичное соотношение для их мгновенных значений

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H . \qquad (4.37)$$

С учетом (4.37) $w_E = w_H$, получим

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} EH . \qquad (4.38)$$

Введем понятие плотности потока энергии, как энергии, переносимой электромагнитной волной в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированной перпендикулярно скорости распространения волны. Модуль плотности потока энергии равен

$$S = w\upsilon = EH \,. \tag{4.39}$$

В векторной форме, с учетом соответствующих направлений векторов $\vec{E},\ \vec{H}$ и $\vec{\upsilon}$, будем иметь

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \tag{4.40}$$

это выражение получило название вектора Пойнтинга. Направление вектора $\vec{S}$ совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен плотности потока энергии электромагнитной волны.

Среднее значение модуля вектора Пойтинга за период его полного колебания определяет интенсивность электромагнитной волны

$$I = \langle \left|\vec{S}\right| \rangle = \langle EH \rangle . \tag{4.41}$$

4.6. Эффект Доплера для электромагнитных волн

При движении источника и приемника электромагнитных волн друг относительно друга, как и в акустике, также наблюдается эффект Доплера. Соотношения, описывающие эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, устанавливаются на основе специальной теории относительности. В случае сближения источника и приемника волн вдоль соединяющей их прямой регистрируемая частота определяется формулой

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} > \nu_0 ,$$

а в случае их взаимного удаления

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} < \nu_0 .$$

В данных формулах $\upsilon << c$ представляет собой относительную скорость движения источника и приемника электромагнитных волн.

4.7. Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет дифференциальное уравнение собственных электромагнитных колебаний в $LC-$контуре?

2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний в $RLC-$контуре и его решение?

3. Что понимается под временем релаксации и от чего оно зависит?

4. Какова зависимость логарифмического декремента от параметров контура?

5. Что характеризует добротность контура? От чего она зависит?

6. При каком сопротивлении контура процесс становится апериодическим?

7. Каковы условия вынужденных электромагнитных колебаний в контуре? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение для установившегося процесса.

8. В чем заключается и как объясняется явление резонанса? Каков вид резонансных кривых для напряжений и токов в контуре?

9. Каковы основные свойства электромагнитной волны? Представьте ее графическое изображение.

10. Запишите волновое уравнение и уравнение плоской электромагнитной волны.

4.8. Примеры решения задач

Задача 1. Омическое сопротивление контура R=100*Ом*, индуктивность L=10^{-2}*Гн*, емкость C=10^{-6}*Ф*. Определить силу тока в контуре в момент времени t=$5\cdot10^{-5}$*с*, если при t=0 заряд на конденсаторе q_0=10^{-5}*Кл*, а начальная сила тока равна нулю.

Решение

Общий вид уравнения затухающих колебаний в контуре запишем в виде

$$q = q_m e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где $\beta = R/2L$ = $5\cdot10^3$ с$^{-1}$,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 8{,}7\cdot10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Начальную фазу φ_0 и амплитудное значение заряда q_m определим из начальных условий. Учитывая, что при t=0 q=q_0, получим

$$q_0 = q_m \sin\varphi_0. \qquad (2)$$

Затем найдем выражение для силы тока

$$I = \dot{q} = q_m\left[-\beta e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) + \omega e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\right]. \qquad (3)$$

Так как при t=0 и I=0, получаем

$$-\beta\sin\varphi_0 + \omega\cos\varphi_0 = 0,$$

отсюда

$$tg\varphi_0 = \omega/\beta \text{ и } \varphi_0 = arctg(\omega/\beta) \approx \pi/3.$$

Наконец, из (2) находим

$$q_m = \frac{q_0}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2q_0}{\sqrt{3}}.$$

С учетом найденных параметров уравнения (3) определим силу тока в контуре в момент времени t=5·10^{-5}c:

$$I=4{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{А}.$$

Задача 2. В цепи, состоящей из последовательно соединённых резистора $R = 20\,\text{Ом}$, катушки индуктивностью $L = 1\,мГн$ и конденсатора ёмкостью C=0,1$мкФ$, действует синусоидальная ЭДС (рис. 4.10). Определите частоту ω ЭДС, при которой в цепи наступит резонанс. Найти действующие значения силы тока I и напряжений U_R, U_L, U_C на всех элементах цепи при резонансе, если при этом действующее значение ЭДС $\mathcal{E}$=30В.

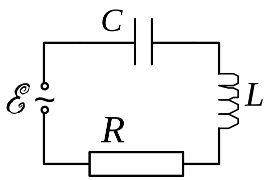


Рис. 4.10

Решение

Под действием переменной ЭДС в цепи установятся вынужденные колебания. При этом амплитудные значения тока I_0 и ЭДС связаны соотношениями

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

В соответствии с формулами, связывающими амплитудные и действующие значения токов и напряжений,

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}},\ \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

данное соотношение имеет аналогичный вид и для действующих значений:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Максимальному току при резонансе $I_{рез}$ соответствует такое значение ω ,при котором выполняется условие

$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, откуда $\omega = \omega_{р} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1 \cdot 10^5\ рад/с$.

При этом сила тока

$$I_{Р} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1{,}5A.$$

Зная силу тока $I_{Р}$, найдём действующие значения напряжения на каждом из элементов контура. В соответствии с законом Ома для каждого из участков получим:

$$U_R = I_R \cdot R = \mathcal{E} = 30B,$$

$$U_{L} = I_{Р} \cdot L\omega = \frac{\mathcal{E}}{R} L\omega = 150B,$$

$$U_{C} = I_{Р} \cdot \frac{1}{C\omega} = U_{L} = 150B.$$

Равенство $U_{L} = U_{c}$ следует из равенства $L\omega = \frac{1}{\omega C}$ при резонансе.

Задача 3. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой $E = 100\ В/м$. Какую энергию переносит эта волна через площадку $S = 50\ см^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за $t = 1 мин$. Период волны $T << t$.

Решение

Энергия, переносимая через площадку S, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени равна

$$\frac{dW}{dt} = wcS\ ,$$

где w - объемная плотность энергии.

Для вакуума

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\ ,$$

или с учетом того, что

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2\ ,\quad w = \varepsilon_0 E^2\ .$$

Напряженность электрического поля волны

$$E = E_0 \sin \omega t\ .$$

Таким образом,

$$\frac{dW}{dt} = cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t\ .$$

Энергия, переносимая волной за время t, будет определяться интегралом

$$W = cS\varepsilon_0 E_0^2 \int_0^t \sin^2 \omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right).$$

По условию задачи $T << t$, поэтому

$$\frac{t}{2} >> \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\ ,$$

и тогда

$$W = \frac{1}{2} cS\varepsilon_0 E_0^2 t = 4\ \text{(Дж).}$$

4.9. Задачи для самостоятельного решения

1. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем дается в виде $I = -0{,}02 \sin 400\pi t$.

Индуктивность контура 1,0 Гн. Найти: 1) период колебаний, 2) емкость контура, 3) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора 4) максимальную энергию магнитного поля, 5) максимальную энергию электрического поля. [1) $T=5\cdot10^{-3}$ с; 2) $C=6{,}3\cdot10^{-7}$ Ф; 3) $U_{max}=25{,}2$ В; 4) $W_{магн} = W_{эл} =2\cdot10^{-4}$ Дж]

2. Определить индукцию магнитного поля внутри катушки идеального контура в момент времени $t =(\frac{\pi}{6})\cdot10^{-4}$ с, если при $t = 0$ заряд на конденсаторе $Q_1=10^{-5}$ Кл, а сила тока $I_1=0$.. Индуктивность катушки $L=10^{-3}$ Гн, число витков на 1 м длины катушки $n=10^3$ м$^{-1}$, емкость конденсатора $C=10^{-5}$ Ф. Среда вакуум. [$B\approx6{,}3\cdot10^{-5}$ Тл]

3. Ток в колебательном контуре зависит от времени как $I=I_m\sin\omega_0 t$, где $I_m=90$ *мА*, $\omega_o=4{,}5\cdot10^{-3}c^{-1}$. Емкость конденсатора $C=0{,}50$ *мкФ*. Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент $t=0$. [$L=1$ *мГн*, $U_m=0{,}4$ *В*]

4. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L=1$ *Гн* и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться в пределах от 9,7*пФ*. до 92*пФ*. В каком диапазоне длин волн может принимать радиостанции этот приемник. [от 186 до 570 м]

5. Найти время, за которое амплитуда колебания тока в контуре с добротностью $Q=5000$ уменьшится в два раза, если частота колебаний $\nu=2{,}2$ *МГц*. [$t = 0{,}5c$]

6. Колебательный контур имеет емкость $C=10$ *мкФ*, индуктивность $L=25$ *мГн* и активное сопротивление $R=1$ *Ом*. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в $e=2{,}7$ раз? [N=16]

7. Добротность колебательного контура $Q=5$. Определить, на сколько процентов отличается частота ω свободных колебаний контура от его собственной частоты ω_o? [0,50%]

8. Собственная частота колебаний некоторого контура ν_0=8*кГц*, добротность контура Q=72. В контуре возбуждают затухающие колебания. а) Найти закон убывания запасенной в контуре энергии W со временем t; б) Какая часть первоначальной энергии W_0 сохранится в контуре по истечении времени t=1*мс*? [а) $W = W_0 e^{-\omega t/Q}$; б) 50 %]

9. Колебательный контур имеет емкость $1{,}1\cdot10^{-9}$ Ф, индуктивность $5\cdot10^{-3}$ Гн. Логарифмический декремент затухания равен 0,005. За сколько времени потеряется вследствие затухания 99% энергии контура? [$6{,}8\cdot10^{-3}$ *с*]

10. Найти добротность контура с емкостью C =2*мкФ* и индуктивностью L=5*мГн*, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе U_m=l*В* необходимо подводить мощность $\langle P\rangle$=0,1*мВт*. Затухание колебаний в контуре достаточно мало. [Q=100]

11. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C=1,2*нФ* и катушку с индуктивностью L=6*мкГн* и активным сопротивлением R=0,5*Ом*. Какую среднюю мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_m=l0*В*? [$\langle P\rangle$ =5*мВт*]

12. Концы цепи, состоящей из последовательно включенных конденсатора и активного сопротивления R=l10*Ом*, подсоединили к переменному напряжению с амплитудой U_m=l10*В*. При этом амплитуда установившегося тока в цепи I_m=0,5*А*. Найти разность фаз между током и подаваемым напряжением. [ток опережает по фазе напряжение на угол φ=60°]

13. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкости C=22*мкФ* и катушки с активным сопротивлением R=20*Ом* и индуктивностью L=0,35*Гн*, подключена к сети переменного напряжения с амплитудой

U_m=180B и частотой ω=314c^{-1} . Найти, а) амплитуду тока в цепи; б) разность фаз между током и внешним напряжением; в) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке. [I_m=4,5A; φ = - 60° (ток опережает напряжение); U_c=0,65$кВ$; U_L=0,5$кВ$]

14. Переменное напряжение с частотой ω=314c^{-1} и амплитудой U_m=180B подключено к концам цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора и катушки с активным сопротивлением R=40$Ом$ и индуктивностью L=0,35$Гн$. При каком значении емкости конденсатора амплитуда напряжения на катушке будет максимальной? Чему равна эта амплитуда и соответствующая амплитуда напряжения на конденсаторе? [C=28мкФ; U_L=0,54$кВ$; Uc=0,51$кВ$]

15. Колебательный контур содержит катушку с общим числом витков N=100 индуктивностью L=10$мкГн$ и конденсатор электроемкостью C=1$нФ$. Максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора составляет 100B. Определите максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку. [0,1$мкВб$]

16. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 10 мГн, конденсатора электроемкостью C=0,1$мкФ$ и резистора сопротивлением R=20$Ом$. Определите число полных колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды тока в контуре в e раз. [5]

17. Определите логарифмический декремент, при котором энергия колебательного контура за N=5 полных колебаний уменьшается в n = 8 раз. [0,21]

18. Определите добротность Q колебательного контура состоящего из катушки индуктивностью L=2$мГн$, конденсатора электроемкостью C=0,2$мкФ$ и резистора сопротивлением R=1$Ом$. [100]

19. Частота затухающих колебаний v в колебательном контуре с добротностью Q = 2500 равна 550 кГц. Определите,

время, за которое амплитуда силы тока в этом контуре уменьшится в 4 раза. [2 *мс*]

20. Определите минимальное активное сопротивление при разрядке лейденской банки, при котором разряд будет апериодическим. Электроемкость C лейденской банки равна 1,2*нФ*, а индуктивность проводов составляет 3*мкГн*. [100*Ом*]

21. В цепь переменного тока напряжением 220*В* и частотой 50*Гц* последовательно включены резистор сопротивлением R=100*Ом*, катушка индуктивностью L=0,5*Гн* и конденсатор электроемкостью C=10*мкФ*. Определите: 1) силу тока в цепи; 2) падение напряжения на активном сопротивлении; 3) падение напряжения на конденсаторе; 4) падение напряжения на катушке. [1) 1,16*А*; 2) 116*В*; 3) 369*В*; 4) 182*В*]

22. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E = 50$ В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны. [$2{,}12 \cdot 10^8$ *м/с*; $0{,}19$ *А/м*]

23. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью $\mu = 1$, имеет вид $E = 10\sin(6{,}28 \cdot 10^8 t - 4{,}19x)$. Определить диэлектрическую проницаемость среды и длину волны. [$\lambda = 1{,}5$м; $\varepsilon = 4$]

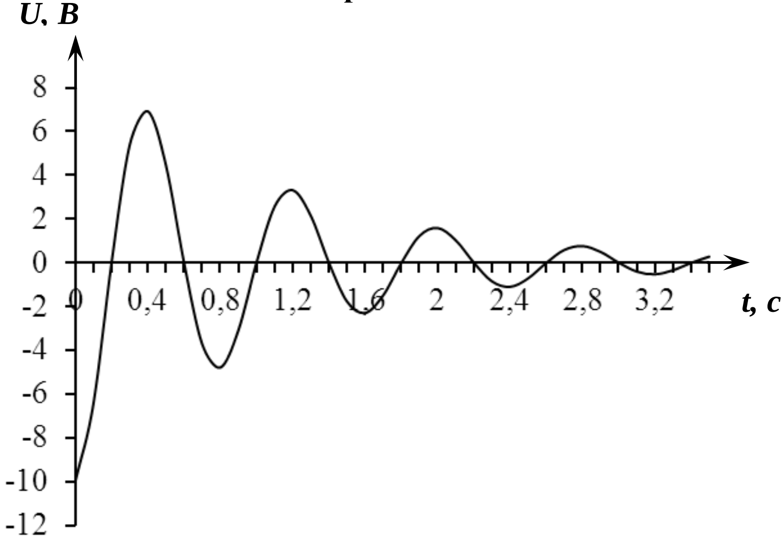
24. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны $H = 0{,}1$ *А/м*. Какую энергию переносит эта волна через площадку $S = 1м^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за $t = 1$с. Период волны $T << t$. [1,88 *Дж*]

4.10. Тест по электромагнитным колебаниям

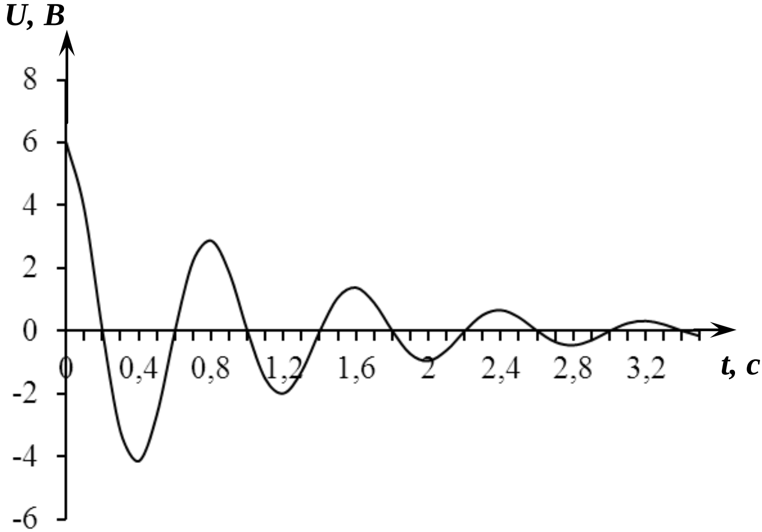
По представленному графику зависимости напряжения на обкладках конденсатора от времени определить:

1. период затухающих колебаний T;
2. логарифмический декремент затухания λ;
3. добротность контура Q;
4. коэффициент затухания β;
5. время релаксации τ;
6. начальную амплитуду колебаний U_0;
7. начальную фазу колебаний φ_0;
8. уравнение с числовыми коэффициентами данного колебания.

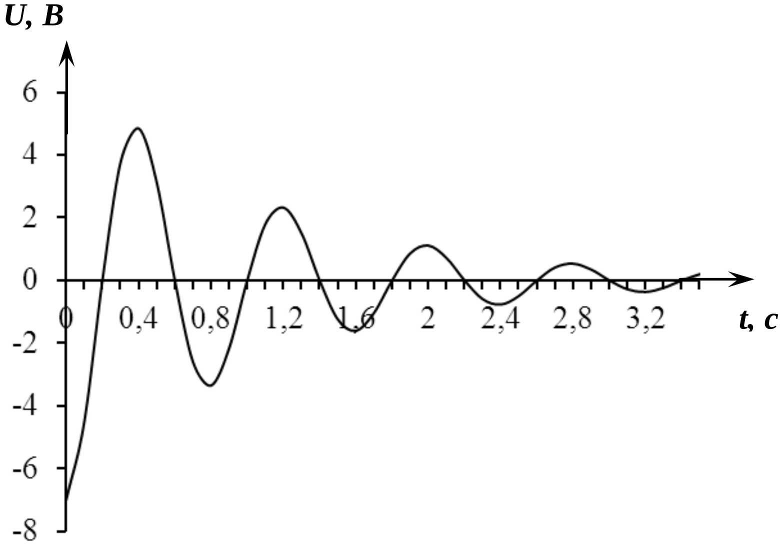
Вариант 1



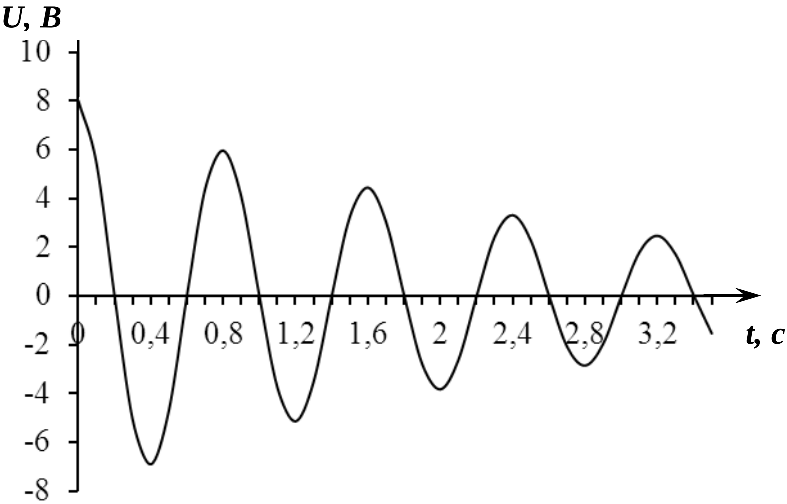
Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии рассмотрены механические и электромагнитные колебания и волны. Единый поход к рассмотрению колебаний и волн различной физической природы основан на общности уравнений, описывающих данные процессы. Особое внимание при изложении теоретического материала было уделено физическому смыслу основных понятий и законов. Примеры решения задач по каждой теме дополняли изложение основного материала, способствуя его более глубокому усвоению. Для проверки изученного материала были представлены контрольные вопросы, тестовые задания и набор задач для самостоятельного решения.

Изучение и практическое усвоение законов физики колебаний и волн является необходимым условием подготовки квалифицированного специалиста любой технической специальности. Надеемся, что данное учебно-методическое пособие будет способствовать развитию у студентов навыков физического мышления и умения решать конкретные физические задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т. И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. - 560 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики [Текст] : учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. - М. : Высш. шк., 1989. - 608 с.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст]: в 5 кн.: учеб. пособие для втузов / И. В. Савельев. - М.: АСТ: Астрель, 2005.
4. Яворский, Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов [Текст]: учеб. пособие / Б.М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. - М.:Оникс, 2006. – 1056 с.
5. Трофимова, Г. И. Сборник задач по физике с решениями [Текст]: учеб. пособие для вузов / Г. И. Трофимова, З. Г. Павлова – М.: Высш. шк., – 2004. - 591 с.
6. Чертов, А. Г. Задачник по физике [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев – М.: Интеграл Пресс, 1997.-544с.
7. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / В. С. Волькенштейн. - С.-Пб: Спец. лит, 2002. - 327 с.
8. Новиков, С. М. Сборник заданий по общей физике [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / С. М. Новиков. – М.: ООО «Мир и Образование», 2006. - 512 с.
9. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов // И. Е. Иродов. – М: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
10. Гладской, В. М. Сборник задач по физике с решениями [Текст]: пособие для втузов / В. М. Гладской, П. И. Самойленко. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Москаленко Александр Георгиевич
Татьянина Елена Павловна
Трегубов Илья Михайлович
Тураева Татьяна Леонидовна

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Подписано к изданию 17.09.2018.
Объем данных 1,6 Мб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский пр.,14