ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет »

СПРАВОЧНИК МАГНИТНОГО ДИСКА

(Кафедра «высшей математики и физико-математического моделирования»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 5

Составители: Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов

Мет. 5. rar	257 К ,байт	14.10.2008	уч.-изд. 2,4 л.
(название файла)	(объем файла)	(дата)	(объем издания)

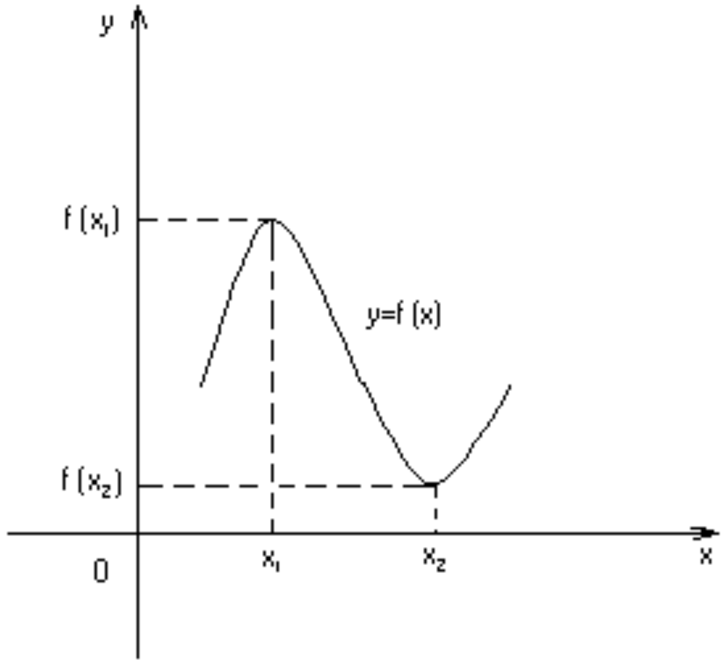
ГОУВПО «Воронежский государственный
технический университет »

Кафедра «высшей математики и
физико-математического моделирования»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 5



Воронеж 2008

Составители: ст. преп. Г.Ф. Федотенко, канд. физ.-мат. наук А.А. Катрахова, канд. физ.-мат. наук В.С. Купцов, канд. физ.-мат. наук А.В. Купцов
УДК 517

Методические указания для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 « Управление и информатика в технических системах»,140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»,140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения. Ч. 5/ ГОУВПО Воронежский государственный технический университет»; сост. Г.Ф. Федотенко, А.А. Катрахова, В.С. Купцов, А.В. Купцов. Воронеж, 2008. 35 с.
Методические указания для выполнения типовых расчетов содержат теоретический материал, рекомендуемую литературу по выполнению типовых расчетов, примеры решения задач типового расчета. Предназначены для студентов первого курса первого семестра.

Методические указания подготовлены на магнитном носителе в текстовом редакторе MS Word и содержатся в файле «Мет. 5.rar»

Ил. 13. Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, ст.преп. Н.А. Борщ
Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат теоретический материал, разбор и подробное решение некоторых задач типового расчета по теме: “Графики”. Содержание методических указаний соответствует программе курса математики для студентов инженерно-технических специальностей вузов рассчитанной на 600 часов и утвержденной Министерством образования Российской Федерации в соответствии с новыми образовательными стандартами.

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область определения этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области определения. Полезно также рассмотреть такие особенности функции (если они имеются), как: симметрия, периодичность, постоянство знака, монотонность, пересечение с координатными осями .

Далее, найти точки разрыва функции, точки экстремума, точки перегиба, асимптоты, контрольные точки.
Все это в целом позволит выяснить общий характер графика функции и построить математически правильный эскиз его.

1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется <u>возрастающей</u> на некотором интервале (рис.1), если для любых значений x_1 и $x2$ из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_{1)} < f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_{1)}$ £ $f(x_2)$, то функция называется <u>неубывающей</u> на этом интервале.

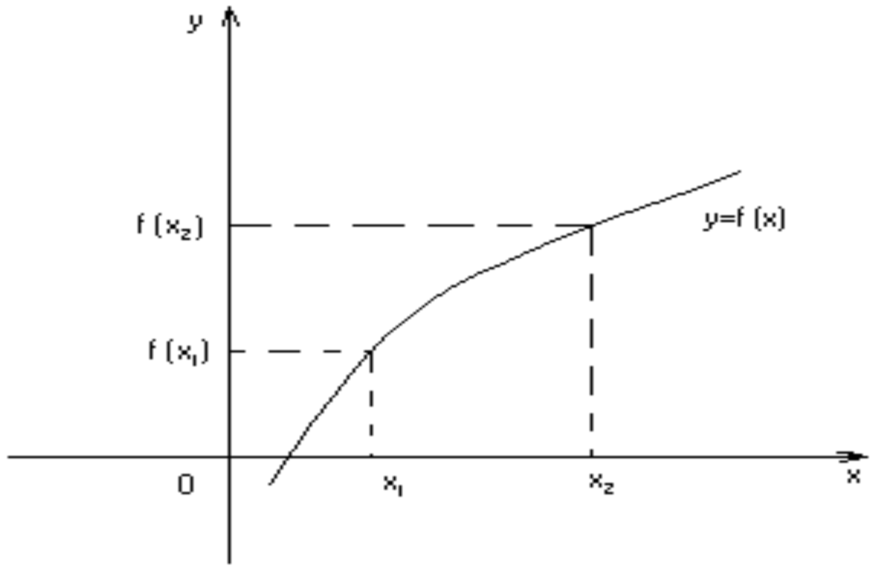


Рис. 1

Функция называется <u>убывающей</u> (рис.2) на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала и неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется <u>невозрастающей</u> на этом интервале.

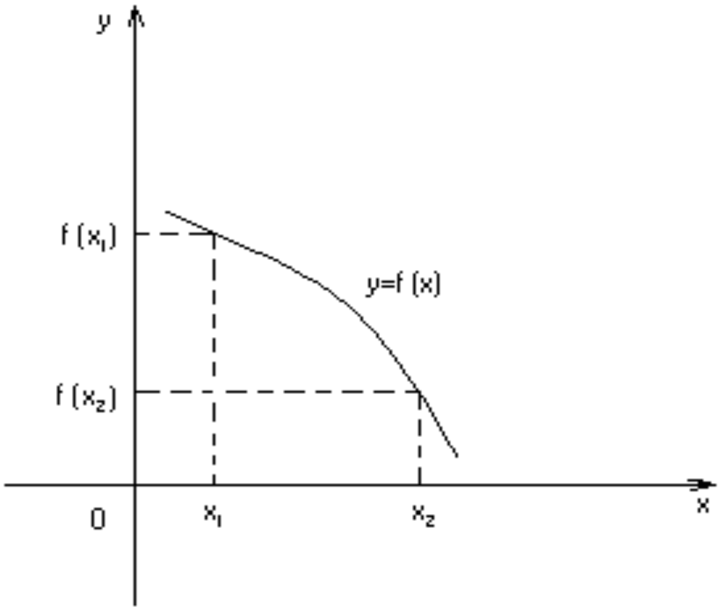


Рис. 2

Все выше названные функции называются <u>монотонными.</u>

<u>Достаточное условие возрастания (убывания) функции:</u>

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ее производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то функция $y = f(x)$ <u>возрастает</u> <u>(убывает)</u> на этом отрезке $[a,b]$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 <u>макси-мум</u> (рис.3), если значение функции $y_1 = f(x_1)$ в этой точке больше всех других ее значений во всех точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е.
$y_{\max} = \max f(x) = f(x_1)$, если $f(x_1) > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_1$ из некоторой окрестности точки x_1.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_2 <u>минимум</u> (рис.3), если значение функции $y_2 = f(x_2)$ в этой точке меньше всех других ее значений во всех точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т.е.
$y_{\min} = \min f(x) = f(x_2)$, если $f(x_1) > f(x)$ для всякой точки $x \neq x_2$ из некоторой окрестности точки x_2.

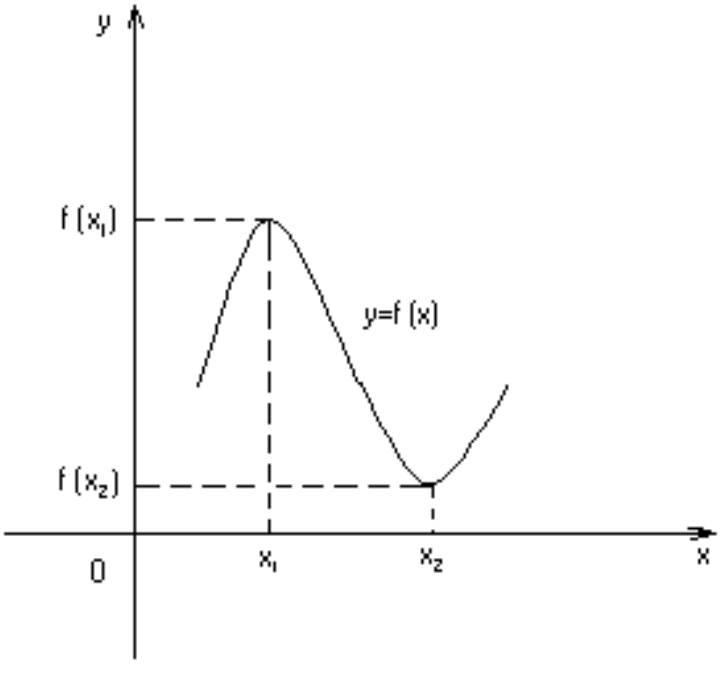


Рис. 3

Максимум или минимум функции называется экстремумом функции. Точки в которых достигается экстремум, называются точками экстремума (максимума или минимума).

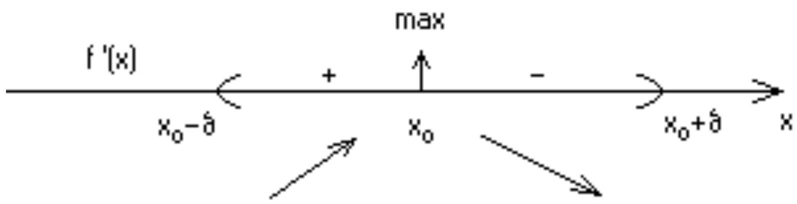
Необходимое условие существования экстремума:

$f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует для $x \in D(f)$, т.е. функция может иметь экстремум только в тех точках области определения, где выполняются эти условия. Такие точки называются критическими точками 1-гго рода, т.е. точки, только подозрительные на экстремум.

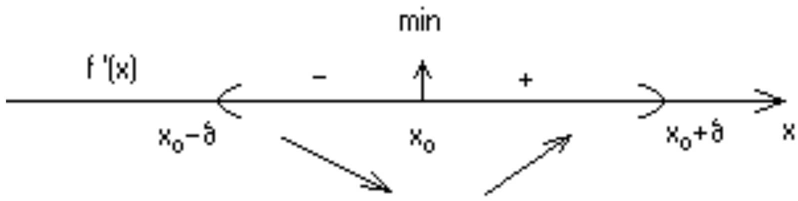
Достаточные условия существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $y = f(x)$:

Первое правило. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку x_0, то точка x_0 является точкой экстремума, причем:

а) Функция имеет максимум в точке x_0, если для $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, имеет место



б) Функция имеет минимум в точке x_0, если для $\forall\, x$ из δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место



Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то экстремум нет в этой точке:

или

Второе правило. Если в критической точке x_0 первая производная $f'(x_0)=0$, а вторая производная $f''(x_0)\neq 0$, то точка x_0 будет точкой экстремума, причем:

а) если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка максимума;

б) если $f''(x_0)>0$, то x_0- точка минимума.

Замечание. В более общем случае, когда первая из не равных нулю в точке x_0 производных функции $y=f(x)$ имеет порядок k: Если $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, то если k-четное, то точка x_0 является точкой максимума при $f^{(k)}(x_0)<0$ и точкой минимума при $f^{(k)}(x_0)>0$; если же k-нечетное, то точка x_0 является точкой экстремума.

Задание 1.

Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

Пример 1. $y=3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$

Решение. 1) $D(y)=(-\infty,\infty)$, т.е. $\forall\ x\in R$.

2)Функция общего вида, т. к.

$$y(-x)=3\cdot\sqrt[3]{(-x+4)^2}-2(-x)-8\neq\pm y(x).$$

3)Находим точки пересечения графика функции к осям координат.а) с осью OY, $x=0$:

$$y=3\cdot\sqrt[3]{(0+4)^2}-2\cdot 0-8=3\cdot\sqrt[3]{16}-8.$$

точка $A(0,3\cdot\sqrt[3]{16}-8)$, т.е. $y(0)\approx -0,5$.

б) с осью OX , $y=0$: $0=3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$,

$27\cdot(x+4)^2=(2x+8)^3$, или $27\cdot(x+4)^2-2^3\cdot(x+4)^3=0$,

откуда $(x+4)^2(8\cdot(x+4)-27)=0$, $x_1=-4$ или $x_2=-5/8$.

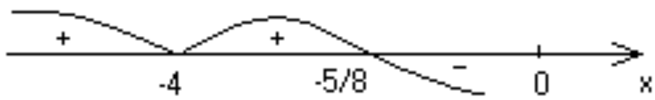
Итак имеем точки $B_1(-4,0)$; $B_2(-5/8;0)$.

4)Находим интервалы знакопостоянства функции.

$y>0$,если $3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8>0$; решаем это неравенство:

$(x+4)^2(8\cdot(x+4)-27)>0$.

Знак y:



Откуда $\begin{cases}-8x-5>0, x<-5/8.\\ x+4\neq 0\end{cases}$

Значит, функция $y>0$ при $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-5/8)$ и $y<0$ при $x\in(-5/8,\infty)$.

5)Находим критические точки, интервала возрастания и убывания функции, экстремум функции.

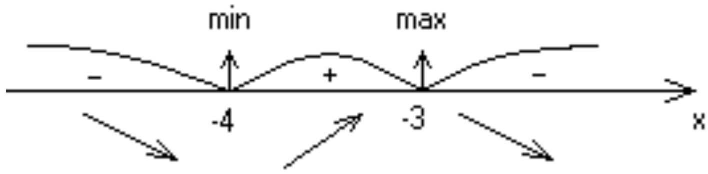
$$y'=2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^{-1}}-2=\frac{2(1-\sqrt[3]{x+4})}{\sqrt[3]{x+4}};$$

а) $y'(x)=0$, если $1-\sqrt[3]{x+4}=0$, т.е. $x=-3$.

б) y' не существует при $x=-4$.

Получим $x=-3$, $x=-4$ - критические точки 1-го рода.

Знак y':



Имеем $y_{\max}(-3)=1$; $y_{\min}(-4)=0$.

Составим таблицу.

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-3)$	-3	$(-3,\infty)$
y'	-	*не суще.*	+	*0*	-
y	*убывает*	*0*	*возрастает*	*1*	*убывает*
		min		*max*	

График данной функции представлен на рис.4.а).

Так как при $x=-4$, $y'(0)=\infty$, то минимум имеет характер точки заострения.

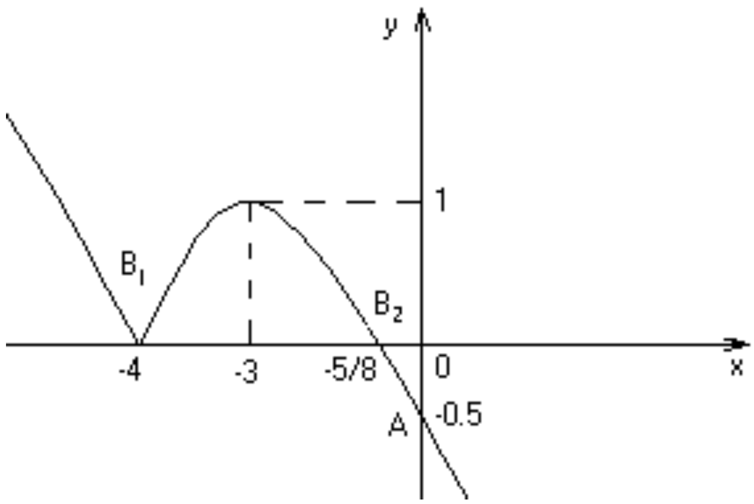


Рис. 4.а

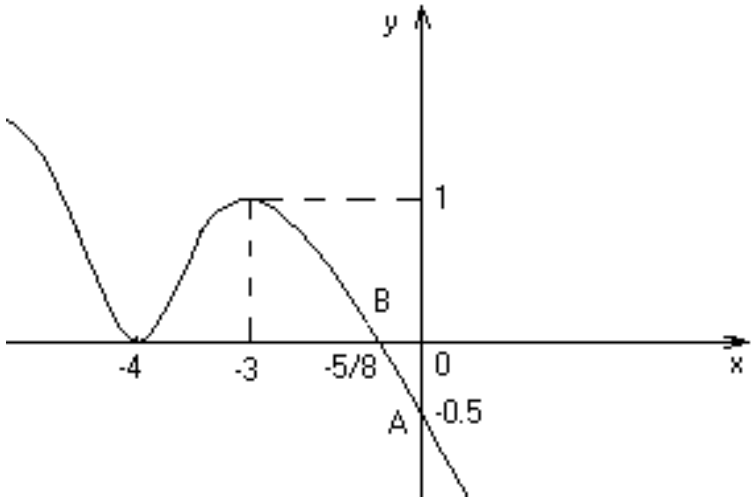


Рис. 4.б

<u>*Замечание.*</u> На основании проведенного неполного (лишь по первой производной) исследования, можно было представить график рассматриваемой функции и таким, как на рис. 4.б). Уточнение характера графика функции по второй производной позволит точнее изобразить участки убывания и возрастания функции, установить, что график не имеет точек перегиба и всюду обращен выпуклостью вверх. Об этом речь далее, где будут построены графики при полном исследовании свойств функции.

Задание 2.

Исследовать поведение функций в окрестности заданных точек с помощью производных высших порядков.

Пример 1. $y = x^2 - 2e^{x-1}$, $x_0=1$.

Решение. Находим производные последовательно и вычисляем их значения в точке $x_0=1$: $y' = 2x - 2e^{x-1}$, $y'(1) = 0$; значит, $x_0=1$ - критическая точка 1-го рода;

$y'' = 2 - 2e^{x-1}$; $y''(1) = 0$; $y''' = -2e^{x-1} \neq 0$. Так как порядок первой неравной нулю производной $k=3$ - нечетное число, то точка $x_0=1$ не является точкой экстремума.

$y'(2) = 4 - 2e < 0$, $y'(0) = -2e^{-1} < 0$.

Следовательно, функция в окрестности точки $x_0=1$ убывающая. Ниже, будет дан график этой функции после исследования знака y'.

2. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются или в критических точках или на концах отрезка $[a,b]$.

Заметим, что функция непрерывная на интервале, в частности, на бесконечном интервале может не достигать своего наибольшего или наименьшего значения.

Например, рассмотренная функция $y = x^2 - 2e^{x-1}$, определенная и непрерывная (без точек разрыва) при всех $x \in (-\infty,\infty)$, будет убывающей на всей области определения, ибо $y' = 2x - 2e^{x-1}$ при $\forall\, x \in R$, не имеющей наибольшего и наименьшего значений:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2e^{x-1}) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2e^{x-1}) = +\infty.$$

Графики этих функций будут построены ниже.

Пример 1.

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3,2]$.

Решение. Сначала найдем все критические точки функции; затем вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка. Потом сравним полученные значения, наибольшее из полученных значений будет наибольшим, а наименьшее наименьшим значением функции на данном отрезке.

Находим

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0$ при $x_1=0$ и $x_{2,3} = \pm 1$.

Следовательно, $x_1=0$, $x_{2,3} = \pm 1$ - критические точки 1-го рода.

Вычисляем значения функции: $y(0) = 3$; $y(\pm 1) = 2$; $y(-3) = 66$; $y(2) = 11$.

Значит, при $[-3,2]$ наибольшее значение функция принимает в левом конце отрезка: $y_{наиб.} = y(-3) = 66$.

Наименьшее значение достигается в двух точках $y_{наим.} = y(\pm 1) = 2$.

Пример 2.

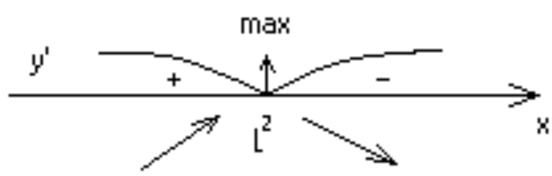
Определить наибольшее значение функции $y = \ln x / \sqrt{x}$ на интервале $(0, +\infty)$.

Решение. Функция непрерывно дифференцируема всюду при $x>0$.

Находим $y' = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$; $y'(x) = 0$, при $2 - \ln x = 0$.

Откуда $x = e^2 \approx 7{,}39$ - критическая точка $y'(x) = \infty$ (не существует при $x=0$, но эта точка не является критической, т.к. в ней данная функция не определена).

Точка $x=e^2$ является единственной точкой максимума, т.к. знак $y'(x)$:



Значит, наибольшее значение функции достигается при $x=e^2$ и равно $y_{наиб.} = y(e^2) = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$.

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

$$y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}, \text{ отрезок } [-1{,}2].$$

Решение. Находим критические точки 1-го рода.

$$y' = \frac{10(x^2+2x+2) - (10x+10)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= \frac{-10x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2};$$

$y'(x) = 0$, если $-10x(x+2)=0$, т.е. $x_1=0$ и $x_2=0$ -критические точки;

$y'(x) = \infty$,если $x^2+2x+2=0$, т.е. $(x+1)^2+1=0$ или $(x+1)^2 = -1$, что не может быть ни при каком значении x.

Следовательно, производная $y'(x)$ существует всюду и других критических точек нет.

Вычисляем функцию в критических и концевых точках: $y(0)=5$; $y(2)=3$, $y(-1)=0$.

Т.к. точка $x=-2 \notin [-1{,}2]$ по условию, то значение функции $y(-2)=-5$ не принимаем во внимание. Таким образом, $y_{наиб.} = y(0) = 5$, $y_{наим.} = y(-1) = 0$.

3. АСИМПТОТЫ

Если кривая $y = f(x)$ какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта бесконечная ветвь кривой может иметь асимптоту. Асимптотой кривой называется прямая, к которой кривая неограниченно приближается или с одной стороны (рис.5.а) или все время пересекая ее (рис.5.б)

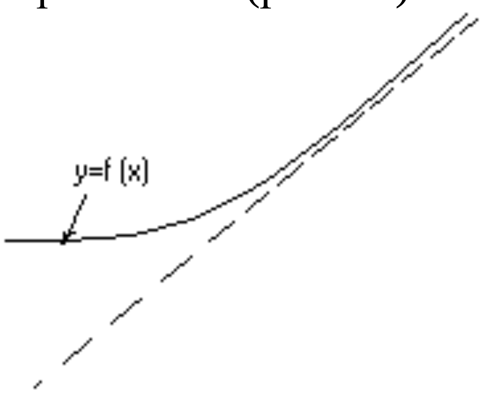


Рис. 5.а

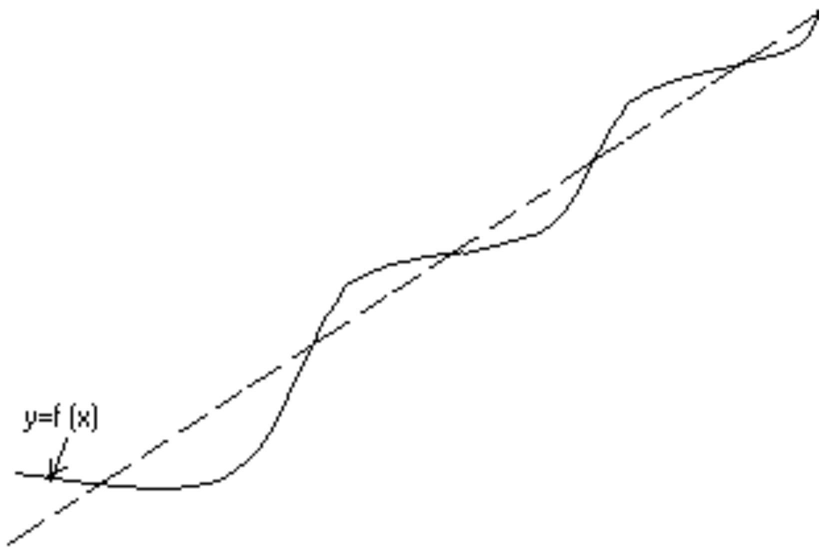


Рис. 5.б

При неограниченном удалении точки *(x,y)* кривой от точки *O(0,0).* Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1. Если существует число *a* такое, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой. Вертикальные асимптоты находят как точки разрыва 2-го рода функции.

2.Если существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является горизонтальной (правой или левой) асимптотой.

3.Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=b_1 \text{ или}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=b_2, \text{ то прямая}$$

$y=k_1x+b_1$ есть правая наклонная асимптота кривой, а прямая $y=k_2x+b_2$ есть левая наклонная асимптоты.

Заметим, что частным случаем наклонной асимптоты при $k_{1,2}=0$ и $b_{1,2}\neq\infty$ является горизонтальная асимптота. График функции $y=f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты (наклонной или горизонтальной).

Задание 4.

Найти асимптоты и построить графики функций.

Пример 1. $y=\dfrac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$

Решение. 1)Функция определена всюду, где $4x^2-1>0$, следовательно, $D(y)=(-\infty;-0{,}5)\cup(0{,}5;\infty)$.

2)В области определения $D(y)$ точек разрыва нет, но при стремлении к граничным точкам $x=\pm0{,}5$ области определения имеем

$$\lim_{x\to\pm0{,}5}f(x)=\lim_{x\to\pm0{,}5}\frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}=\frac{9-10\cdot0{,}25}{\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}-1}}=+\infty$$

Следовательно, прямые $x=\pm0{,}5$ являются вертикальными асимптотами.

3) Функция – четная, т.к.

$$y(-x)=\frac{9-10(-x)^2}{\sqrt{4(-x)^2-1}}=y(x),\ \forall x\in D(y).$$

Поэтому, график функции симметричен относительно оси ординат. Это упрощает построение графика.

4) Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}=-\infty.$

бесконечен, то горизонтальной асимптоты нет.

5)Ищем наклонные асимптоты. При $x\to+\infty$ получаем:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9-10x^2}{x\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2-10}{x^2\sqrt{4-1/x^2}}=-5,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9-10x^2}{x\sqrt{4x^2-1}}+5x=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(9/x^2-10+5\sqrt{4-1/x^2})}{x^2\sqrt{4-1/x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

Следовательно, правой наклонной асимптотой является прямая $y=5x$. Из симметрии графика следует, что левой наклонной является прямая $y=-5x$:

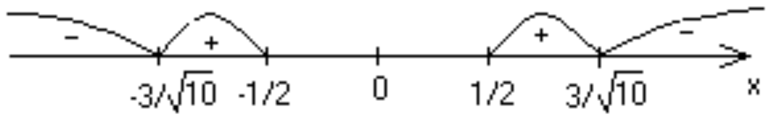
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=5x.$$

6) Найдем интервалы законопостоянства функции:

Функция $y<0$, если $\frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}<0$. Откуда $9\text{-}10x^2<0$.

Решая неравенство $x^2>0{,}9$, находим $|x|>3/\sqrt{10}$, где $3/\sqrt{10}\approx 0{,}95$.

Знак *y*:



Значит, $y>0$ при $x\in(-3/\sqrt{10};-0{,}5)\cup(0{,}5;3/\sqrt{10})$; $y<0$ при $x\in(-\infty;-3/\sqrt{10})\cup(3/\sqrt{10};+\infty)$. Используя результаты, строим график функции (рис.6).

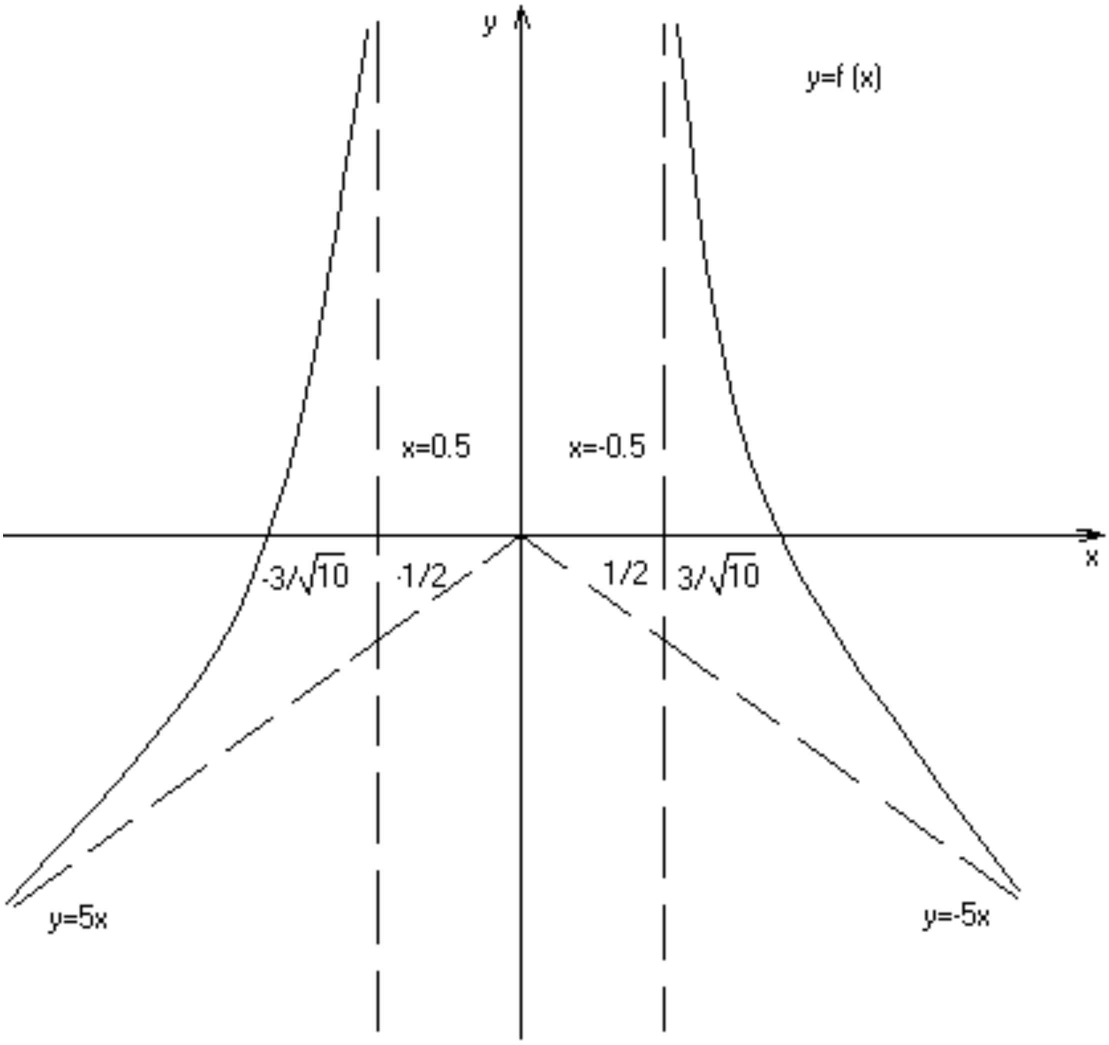


Рис. 6

4. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ КРИВОЙ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ обращен выпуклостью вверх (вогнутостью вниз**)** на интервале (a,b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной**,** проведенной в любой точке *M(x,f(x))* этой дуги (рис.7.а)

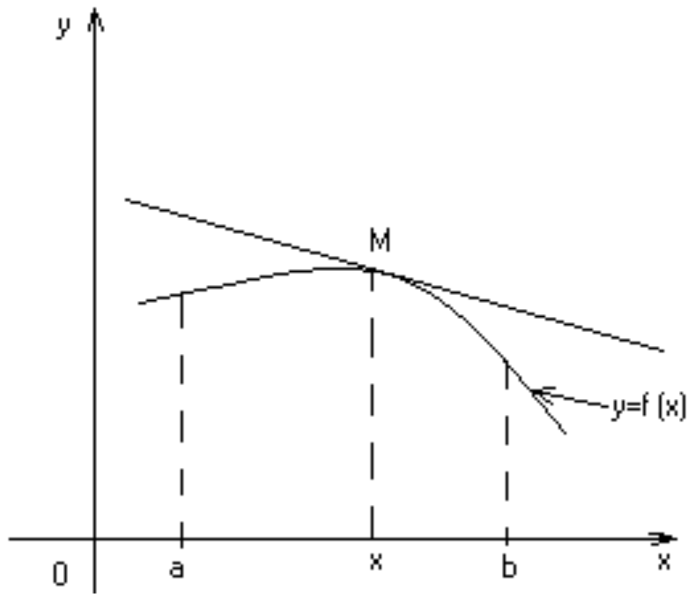


Рис. 7.а

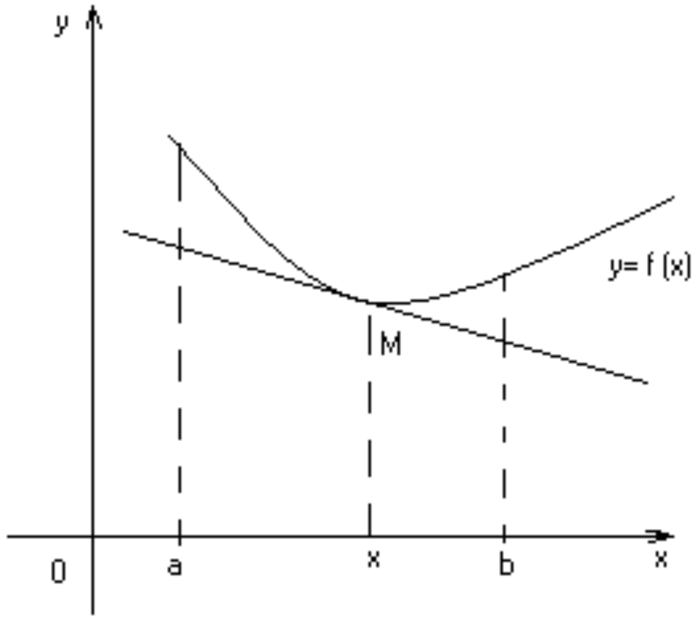


Рис. 7.б

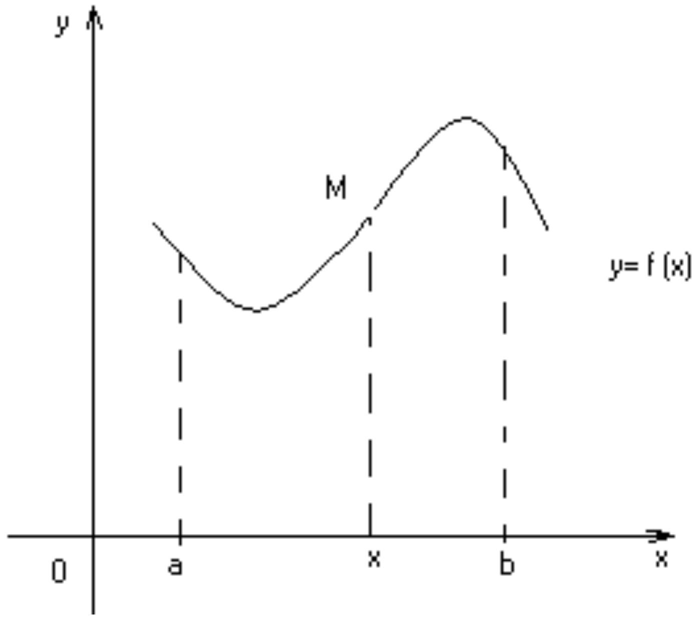


Рис. 7.в

Говорят, что кривая графика функции обращена выпуклостью вниз (вогнутостью вверх) на интервале (a,b), чем соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке *M(x,f(x))* этой дуги (рис.7,б).

Достаточное условие направления выпуклости кривой $y = f(x)$:

а) если $f''(x) < 0$ внутри интервала (a,b), то дуга кривой выпукла вверх (обозначают $\cap$) на этом интервале.

б) если $f''(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, то дуга кривой выпукла вниз (обозначают $\cup$)на этом интервале.

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх (вниз) дуги кривой, надо найти $f''(x)$ и решить неравенство: $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

Точкой перегиба непрерывной кривой $y = f(x)$ называется точка $M_0(x_0,f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости (рис.7,в).

Для абсциссы x_0 точки перегиба графика $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

Точки, которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, и при этом сама функция в точке $x=x_0$ определена, называются критическими точками 2-го рода.

<u>Правило:</u> Если вторая производная $f''(x)$ функции при переходе через критическую точку 2-го рода меняет знак, то точка $M_0(x_0,f(x_0))$, есть точка перегиба кривой графика функции. Это есть <u>достаточное условие существования точки перегиба кривой.</u>

Пример 3.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба кривой $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$.

Решение. $D(y)\in R$, т.е $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, ибо $x^2+12>0$.

Находим $y'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+12)-x^3(2x+0)}{(x^2+12)^2}=\dfrac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$;

$$y''(x)=\frac{(4x^3+72)(x^2+12)^2-4x(x^4+36x^2)(x^2+12)}{(x^2+12)^4}=$$

$$=\frac{4x(216-6x^2)}{(x^2+12)^3};$$

Находим критические точки 2-го рода $y''(x)=0$, если $x=0$ или $x=\pm 6$.

Других критических точек 2-го рода нет, т.к. $y''(x)$ существует всюду в $D(y)$. Знак $y''(x)$:

Таким образом, на интервале $(-\infty,6)$ и $(0,6)$ кривая выпукла вниз, на интервалах *(-6,0)* и $(6,\infty)$ кривая выпукла вниз, на интервалах (-6;0) и $(6,\infty)$ - выпукла вверх; точки перегиба $M_1(0;0)$, $M_2(-6;-9/2)$, $M_3(6,9/2)$.

Заметим, что $y' = \dfrac{x^4 + 36x^2}{(x^2 + 12)^2} > 0$ при $\forall\, x \in R,\, x \neq 0$;

следовательно, функция возрастающая всюду на $(-\infty,\infty)$. Кривая графика симметрична относительно начала координат в силу нечетности функции (рис.8).

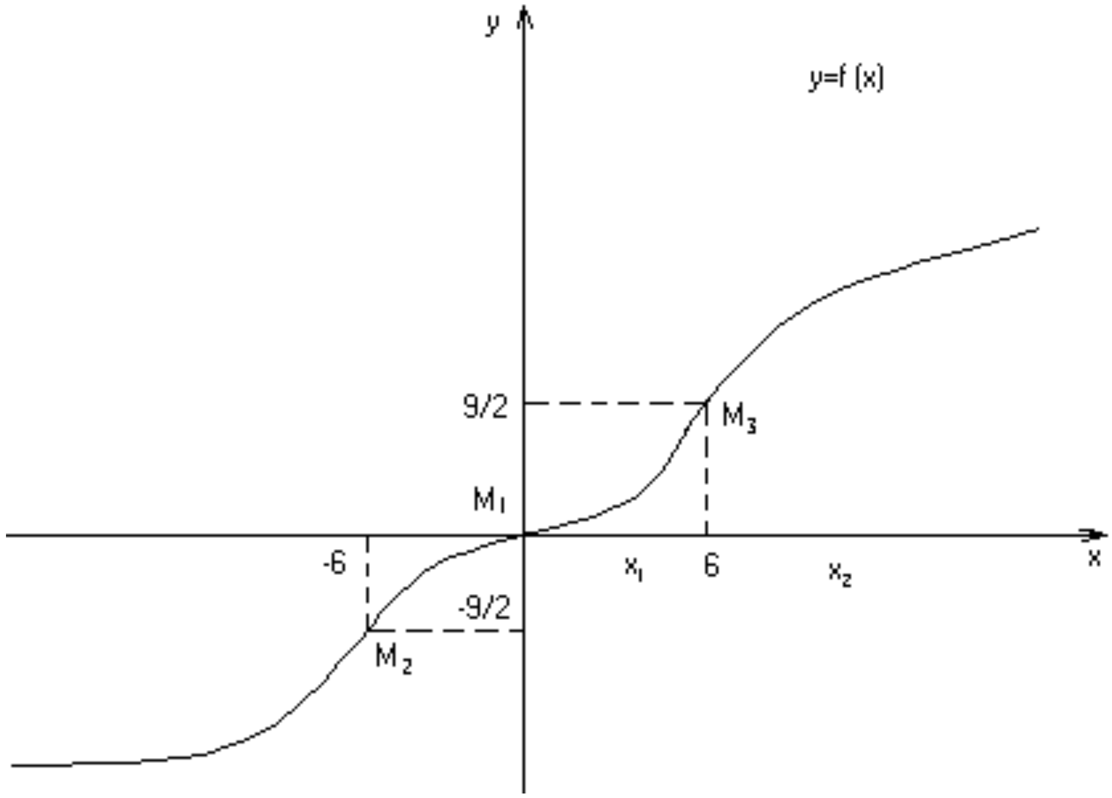


Рис. 8

Задание 5.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба кривой.

Пример 4.

$$y = x^2 - 2e^{x-1}.$$

Решение. Имеем $y'' = 2 - 2e^{x-1}$. Найдем точки, подозрительные на перегиб, $y''(x) = 0$, если $2 = 2e^{x-1}$. Откуда $x = 1$ - единственная критическая точка 2-го рода.

Знак $y''(x)$:

y(1)=-1, M(1;-1) – точка перегиба. График данной функции представлен на рис. 9.

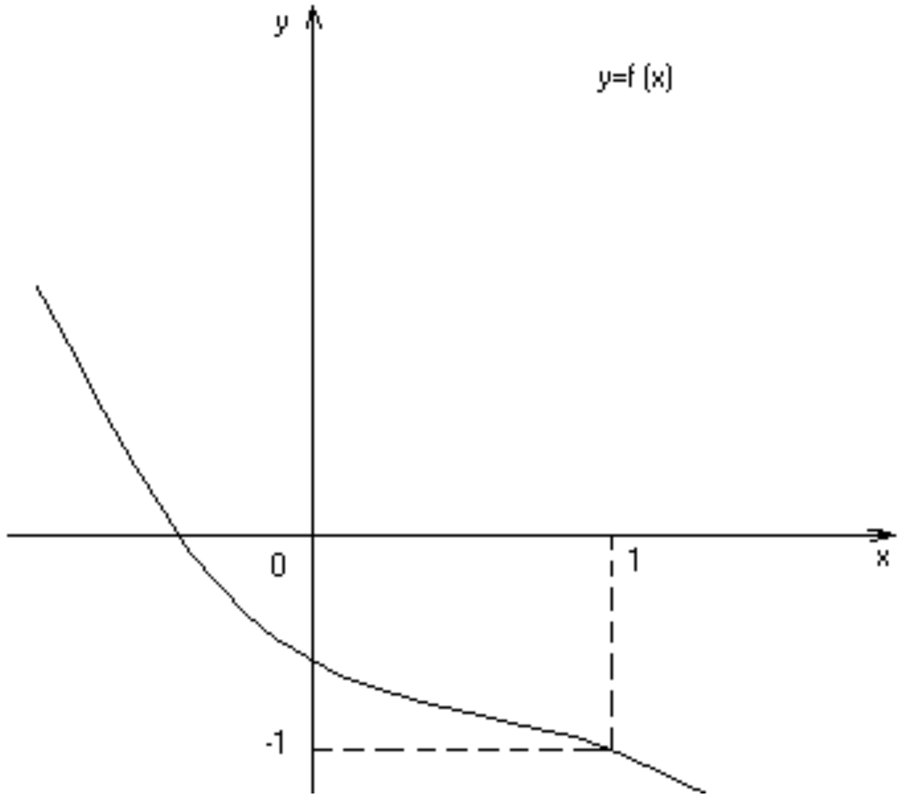


Рис. 9

5. ОБЩАЯ СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАН- ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

При построении графика функции исследование свойств функции можно проводить по следующей схеме:

1. Нахождение области определения функции; нахождение точек разрыва функции и установление их характера.
2. Установление наличия периодичности и симметрии относительно оси *OY* или относительно начала координат по

четности или нечетности функции.

3. Нахождение точек пересечения кривой с координатными осями: с осью *OY*, вычисляя *f(0)*, и с осью *OX*, решая уравнение *f(x)=0* и вычислив тем самым, нули функции.
4. Определение интервалов знакопостоянства функции.
5. Определение асимптот графика функции и «поведение функции в бесконечности».
6. Определение интервалов возрастания и убывания функции, точек экстремума(максимума и минимума). Вычисление значения экстремумов.
7. Нахождение точек перегиба, устанавливая интервалы направления выпуклости (вверх и вниз) кривой.

Если исследуемая функция четная или нечетная, достаточно исследовать и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Затем воспользоваться симметрией.

Полезно получаемые данные сразу наносить на чертеж.

Заметим, что порядок исследования можно менять, выбирая по целесообразности, исходя из конкретных особенностей функции.

Задание 6 **.**

Провести полное исследование функций и построить их графики.

Пример 1.

$$y(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$$

Решение **.** 1) Функция имеет смысл, если $x \neq 0$; следовательно, $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.Точка *x=0*- точка разрыва второго рода. 2) Функция не является четной и нечетной, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^3-4}{(-x)^2}=\frac{-(x^3+4)}{x^2}\neq \pm y(x) \text{ при } \forall x\in D(y).$$

3) Точек пересечения с осью ординат нет, так как $x=0\notin D(y)$. Найдем нули функции : *y=0* при $\dfrac{x^3-4}{x^2}=0$, $x^3-4=0$. Значит , $(\sqrt[3]{4},0)$ - точка пересечения с осью *OX*.

4) Приравнивая знаменатель нулю, получаем вертикальную асимптоту, ибо

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4}{x^2}=\left(\frac{-4}{0}\right)=-\infty .$$

Ищем наклонные асимптоты. При $x\to\infty$ получаем: $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4}{x^3}=1$,

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right)=0$$

Следовательно, правой асимптотой является прямая *y=x*. Аналогично, при $x\to-\infty$ имеем:

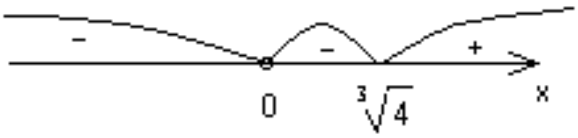
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right)=0,$$

т.е. *y=x* является также левой наклонной асимптотой.

5) Определим интервалы знакопостоянства функции. Функция *y>0*, если $\dfrac{x^3-4}{x^2}>0$, или $x>\sqrt[3]{4}$, где $\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$.

Знак *y*:



Следовательно, график функции расположен выше оси OX при $x \in (\sqrt[3]{4};+\infty)$ и ниже оси OX при $x \in (-\infty;0) \cup (0;\sqrt[3]{4})$.

6) Находим критические точки первого и второго рода , т.е. точки, в которых обращаются в нуль или не существуют производные y' и y'' данной функции. Имеем:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 - 4)2x}{x^4} = \frac{x^3 + 8}{x^3},$$

$y'=0$ при $x = -\sqrt[3]{8} = -2$. Следовательно, $x=-2$ - критическая точка первого рода ,т.е. точка , подозрительная на экстремум;

$$y_{\max} = y(-2) = -3$$

$$y'' = \left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)' = \frac{3x^5 - (x^3+8) \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y).$$

Критических точек второго рода ,т.е. точек, подозрительных на перегиб, нет, производные y' и y'' не существуют еще только при $x=0$, где не существует и сама функция y.

$y'' = -\dfrac{24}{x^4} < 0$ при $\forall x \in D(y)$. Следовательно, кривая графика выпукла вверх всюду.

Результаты исследования сведем в таблицу .

	$(-¥,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4},¥)$
y	-	*-3*	-	-¥	-	0	+
y'	+	*0*	-	¥	+	+	+
y''	-	*-1,5*	+	-¥	-	-	-
Вы-вод	*y возр.*	*y max*	*y убыв.*	*y не сущ.*	*y возр.*	*0*	*y возр.*
	Ç		Ç		Ç		Ç

Где символ "Ç" обозначает выпуклость вверх кривой графика. По результатам исследования строим график функции рис.10.

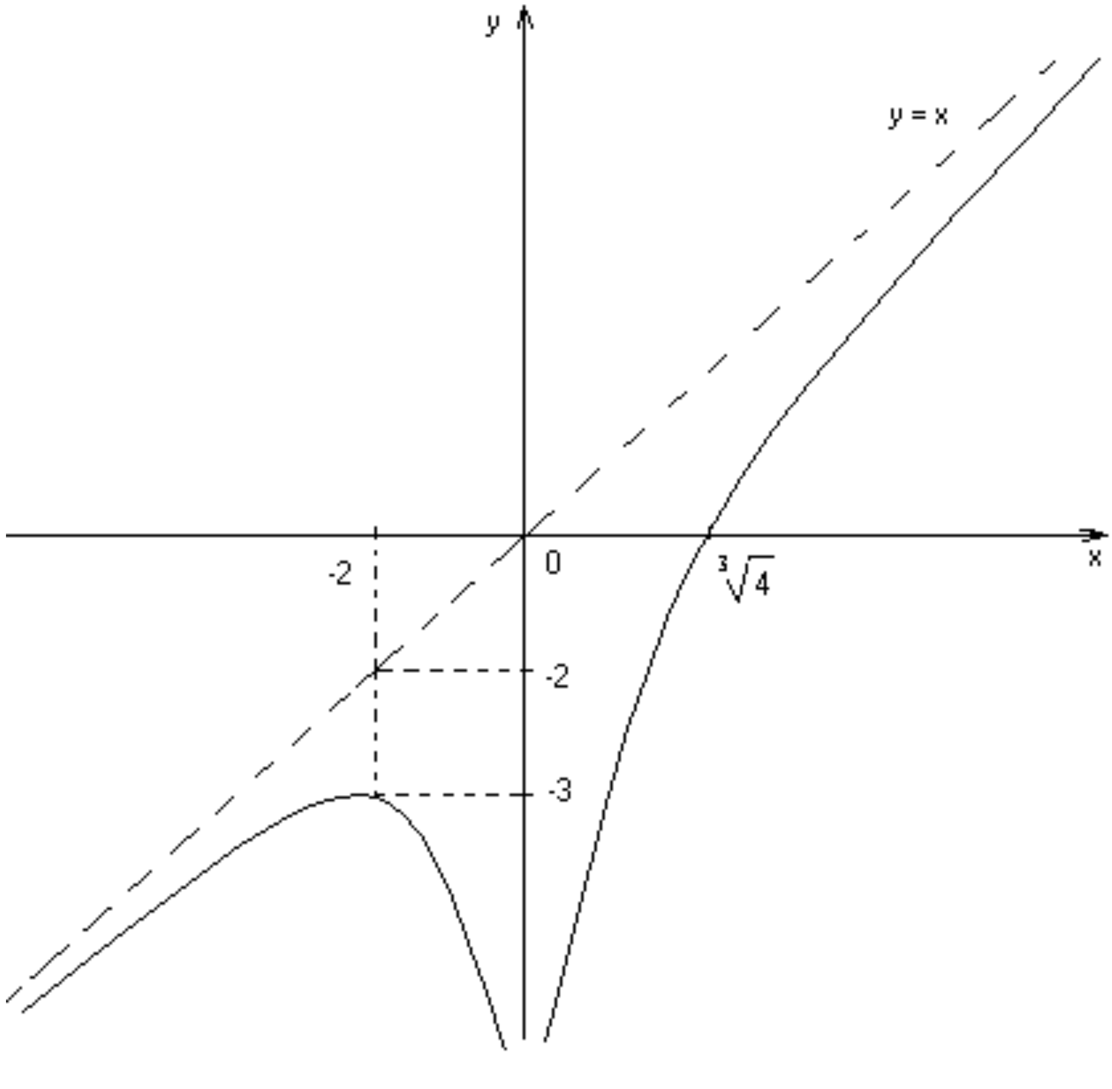


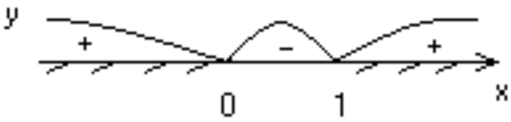
Рис. 10

Пример 2.

$$y(x) = 1 + 2\ln\frac{x-1}{x}.$$

Решение. 1) Область определения функции

$$x \neq 0,\ \frac{x-1}{x} > 0, \Rightarrow\ x(x-1) > 0.$$



Находим методом интервалов $D(y) = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

2) В области определения точек разрыва нет, но при приближении к граничным точкам *(x=0* и *x=1)* области определения *D(y)* имеем:

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} 2\left(\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2\left(\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = -\infty.$$

Следовательно, прямые *x=0* и *x=1* – вертикальные асимптоты.

3) Ищем наклонные и горизонтальные асимптоты :

$$k = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{x}\left(\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = 0$$

Наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} 2\left(\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = 1$$

Следовательно, горизонтальной асимптотой является прямая $y=1$.

4) Точек пересечения графика с осью OY нет $(x \neq 0)$;

Полагая $y=0$, находим нули функции:

$1+2\ln\frac{x-1}{x}=0$, или $\frac{x-1}{x}=e^{-1/2}$, откуда $x_1=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\approx 2{,}7$

$\sqrt{e}\approx 1{,}65$.

Следовательно, $A\left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1};0\right)$ - точка пересечения графика с осью абсцисс OX.

5) Функция общего вида, т.к.

$y(-x)=1+2\ln(\frac{-x-1}{-x})\neq \pm y(x)$.

6) Исследуем функцию с помощью первой производной y' на монотонность и экстремум.

$$y'(x)=(1+2\ln\frac{x-1}{x})'=\frac{2}{x(x-1)}.$$

Ищем критические точки $y'\neq 0$ ни при каком $x\in D(y)$; y' не существует только при $x=0$ и $x=1$, но эти точки не входят в область определения $D(y)$. Следовательно, нет точек критических первого рода ,и, как следствие , экстремума.

Найдем интервалы монотонности (возрастания и убывания)функции.

$y'>0$, если $\frac{2}{x(x-1)}>0$, или $x(x-1)>0$:

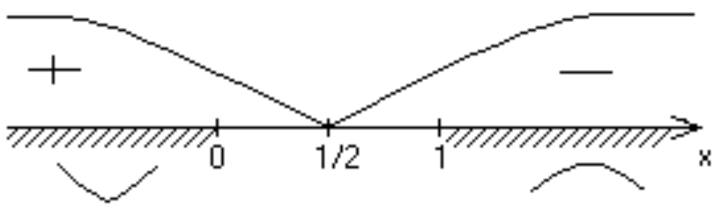
$y'>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, где функция y возрастает.

$y'<0$ при $x\in(0;1)$, но данная функция не существует при $x\in(0;1)$. Значит, функция монотонно возрастающая $D(y)$.

7) Исследуем график функции на выпуклость и точки перегиба с помощью второй производной.

$y''(x) = (1+2\ln\frac{x-1}{x})' = \frac{-2(2x-1)}{x^2(x-1)^2}$. $y''=0$ при $2x-1=0$, т.е.

$x=0,5$ – критическая точка второго рода ,подозрительная на перегиб; но $x=0,5 \in D(y)$; y'' не существует при $x=0$, $x=1$, которые не входят в $D(y)$ -нет точек перегиба .Далее определим знаки второй производной: $y''>0$,если $x<0,5$. $y''<0$,если $x>0,5$. Таким образом, в силу достаточного условия кривая графика выпукла вниз на интервале $(-\infty;0)$ и выпукла вверх на $(1;\infty)$. Знак y'':



Результаты исследования свойств данной функции сведен в таблицу

	$(-\infty,0)$	0	$(0;0,5)$	0,5	$(0,5;1)$	1	$(1,\infty)$
y'	+	∞	-	*-6*	-	∞	+
y''	+	∞	+	*0*	-	∞	-
Вывод	*y возр.*	∞	*y не сущ.*	*y не сущ.*	*y не сущ.*	∞	*y возр.*
	$\cup$						$\cap$

По результатам исследования строим график функции (рис.11).

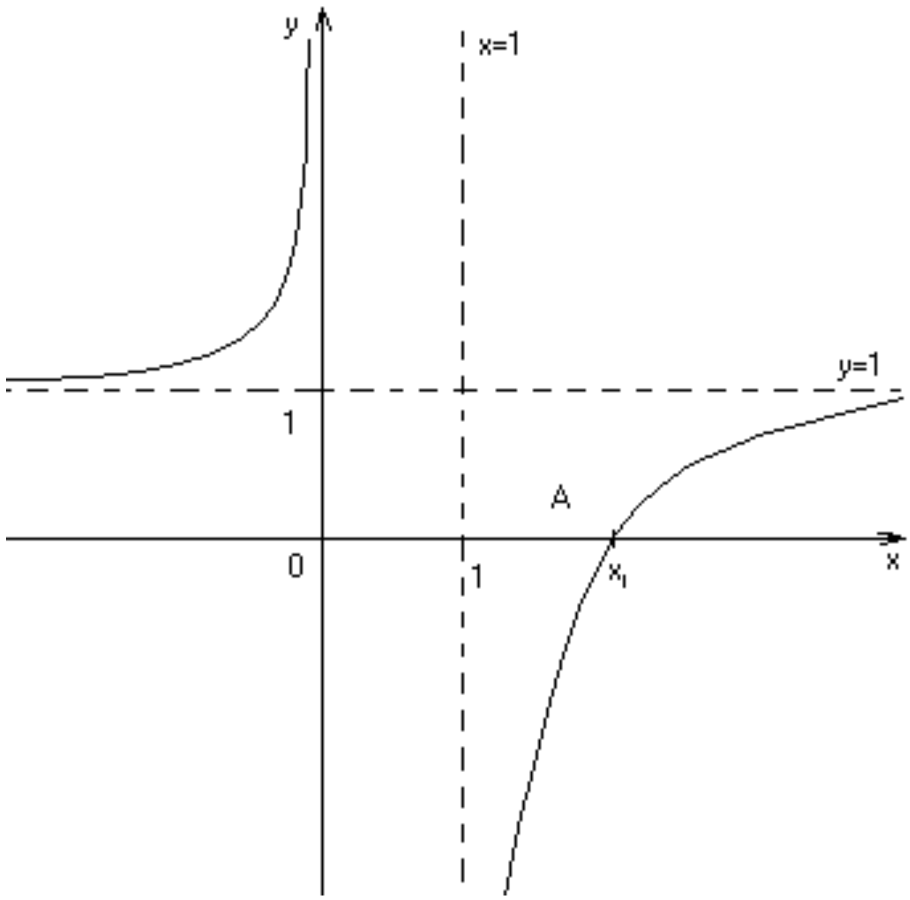


Рис. 11

Пример 3.

$$y(x) = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$$

Решение. 1) $D(y) \in R$, т.е. $x \in (-\infty;+\infty)$.

Функция непрерывная ; очек разрыва нет .

2) Функция общего вида ,т.к. $y(-x) \neq \pm y(x)$.

3) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью *OУ*. *x=0*: *y=-3e*$^4 \approx -1{,}64$; $\Rightarrow$ *A(0,-3e*^{4}*);*

б) с осью *OX*. *y=0: 0=-(2x+3)e*$^{2(x+2)}$, *x=-1,5*; $\Rightarrow$ *B(-1,5;0);*

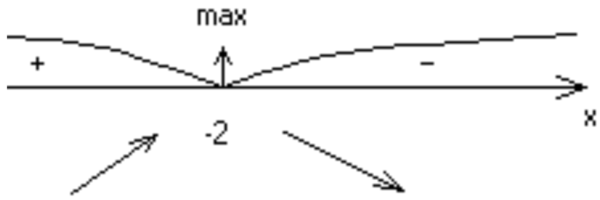
4) Ищем интервалы знакопостоянства функции.

y>0, x>-1,5. y<0, x<-1,5.

5) Исследуем на монотонность и экстремум.

$$y'(x) = -2e^{2(x+2)} - 2(2x+3)e^{2(x+2)} = -4(x+2)e^{2(x+2)}.$$

$y' = 0$. Знак y':



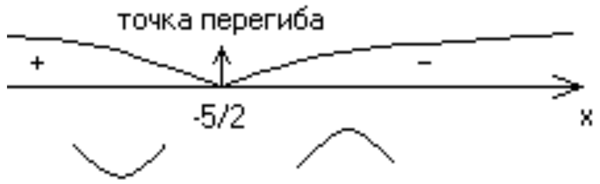
Если $y' = 0$, то $x=-2$- критическая точка первого рода.

$y_{max}=y(-2)=1$. При $x \in (-\infty,-2)$ функция возрастает, а $x \in (-2,+\infty)$ функция убывает.

6) Исследуем на выпуклость и точки перегиба графика функции.

$$y''(x) = (-4(x+2)e^{2(x+2)})' = -4(2x+5)e^{2(x+2)}.$$

Знак y'':



$y'' = 0$, если $2x+5=0 \Rightarrow x=-2,5$ -критическая точка второго рода . $y'' = 0$ Следовательно, $x=-2,5$ -точка перегиба, $y'' = 0$ $y(-2,5)=2e^{-1} \approx 0,73$.

На интервале $(-\infty;-2,5)$ кривая графика выпукла вниз; на интервале $(-2,5;+\infty)$ кривая выпукла вверх.

7) Ищем горизонтальные (правую и левую) асимптоты:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to +\infty} (2x+3)e^{2(x+2)} = -\infty$$, следовательно, правой горизонтальной асимптоты нет.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} (2x+3)e^{2(x+2)} = 0$$, следовательно, $y=0$- левая горизонтальная асимптота.

Результаты исследования заносим в таблицу:

	$(-\infty,-\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2};-2)$	-2	$(-2;-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2},\infty)$
y'	+	+	+	*0*	-	-	-
y''	+	*0*	-	*-4*	-	-	-
Вы-вод	*у возр.*	*2/e*	*у возр.*	*1*	*у убыв.*	0	*у убыв.*
	$\cup$	$x_{пер}$	$\cap$	x_{max}	$\cap$		$\cap$

В итоге строим график данной функции (рис.12)

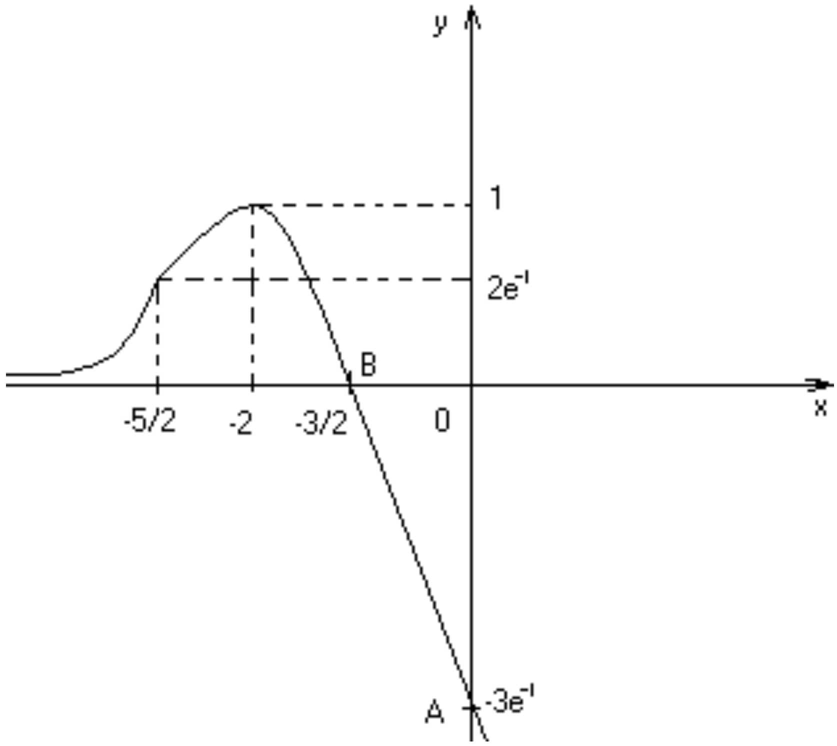


Рис. 12

Пример 4.

$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

Решение.

1) $D(y) \in R$.

2) Функция непрерывна , нет точек разрыва.

3) Так как $y(-x) = -\sqrt[3]{x(x+1)^2}$, $y(-x) \neq \pm y(x)$, то функция общего вида.

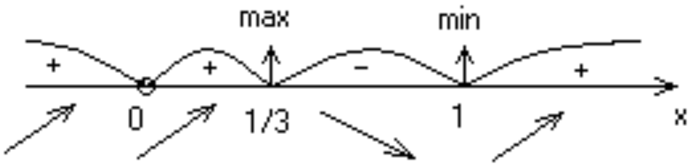
4) Ищем точки пересечения графика с осями координат:
а) с осью *OУ*. *x=0: y(0)=0,* т.е. *O(0,0)*- начало координат ;
б) с осью *OX*. *y=0*: $0 = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$, получим точку *(1,0)*.

5) Находим критические точки первого и второго рода :

а)

$$y' = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \frac{(x-1)^2 + 2x(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \frac{3x-1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}.$$

$y' = 0$, если $3x-1=0$, $x_1=1/3$. $y \to \infty$, если $x_2=1$ или $x_3=0$. Знак y':



Следовательно, имеем критические точки первого рода: $x_1=1/3$, $x_2=1$, $x_3=0$. Две из них $x_1=1/3$ и $x_2=1$ являются точками экстремума,т.к. производные y' меняют знак при переходе через эти точки (достаточное условие экстремума), причем $y_{min}=y(1)=0$, $y_{max}=y(1/3)=\sqrt[3]{4} \approx 0{,}53$.

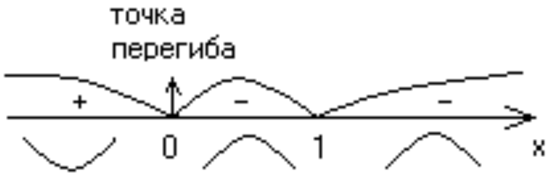
б)

$$y'' = \left(\frac{3x-1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}\right)' = \frac{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)} - \dfrac{(3x-1)(3x^2-2x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} =$$

$$= \frac{-2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}.$$

Видим, что $y'' \neq 0$ ни при каком $x \in D(y)$, не существует при $x=1$, $x=0$. Следовательно, эти точки критические 2-го рода. Из них только $x=0$ - точка перегиба, т.к.

производная y'' меняет знак при переходе через эту точку (достаточное условие существования точки перегиба), причем $y(0)$. Так как знак y'':



6) Интервалы знакопостояннства функции:

$y>0$ при $\sqrt[3]{x(x-1)^2}>0$, т.е. при $x>0$; следовательно, график функции расположен выше оси OX при $\forall x \in (0;\infty)$ и под осью OX при $\forall x \in (-\infty;0)$.

7) Ищем наклонные правую и левую асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1-2/x+1/x^2}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot(\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}-x))/x=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot(\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}-x))'/(1/x)'=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^3-2x^2+x)^2}}=-2/3.$$

Следовательно, прямая $y=x-2/3$ - наклонная асимптота. Результаты исследования свойств функции сведем в таблицу:

	$(-\infty,0)$	0	$(0;1/3)$	$1/3$	$(1/3;1)$	1	$(1,\infty)$
y'	+	∞	+	0	-	∞	+
y''	+	∞	-	-	-	∞	-
Вывод	*у возр.*	0	*у возр.*	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	*у убыв.*	0	*у возр.*
	$\cup$	$x_{пер}$	$\cap$	x_{max}	$\cap$	x_{min}	$\cap$

График данной функции изображен на рис.13. на основе проведенного полного исследования функции. Так как при $x=1$, $y'(1)=\infty$, то минимум $y_{min}=y(1)=0$ имеет характер точки заострения.

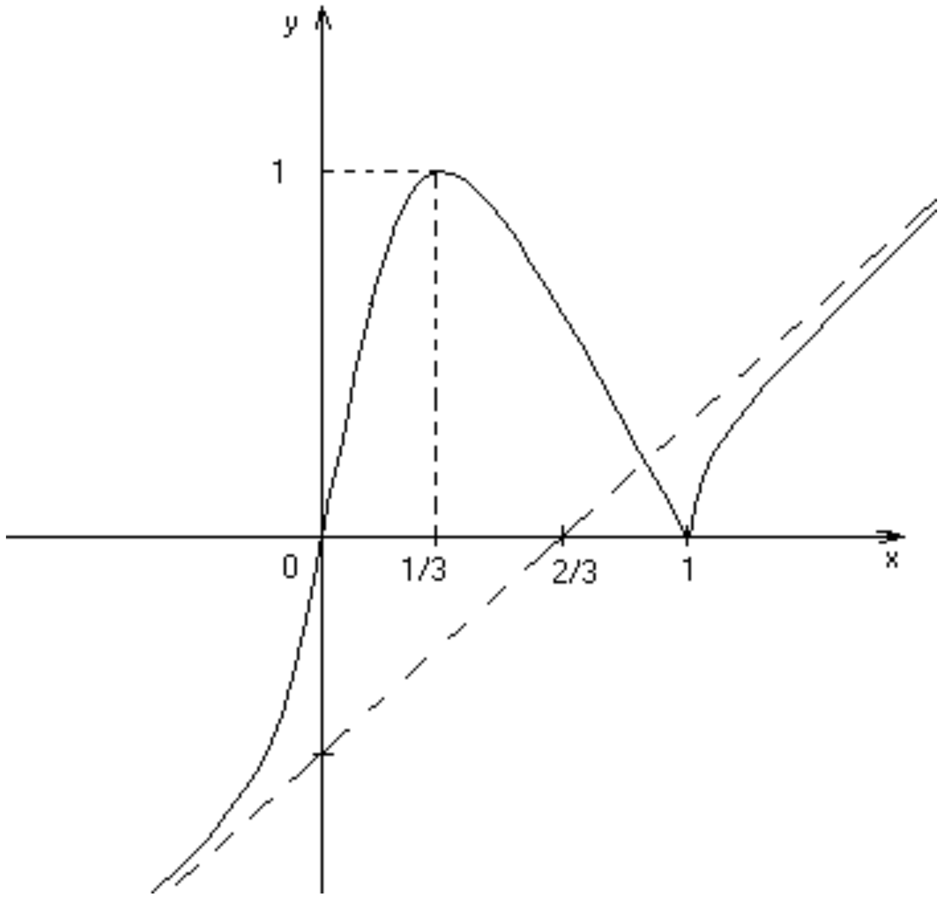


Рис. 13

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания помогут студентам выполнить типовой расчет по вышеуказанной теме курса математики, а также предоставляет студентам широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической и теоретической части курса математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1972. Т.1. 429 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов Т.Я. Кожевникова – М.: «Оникс 21 век» «Мир и образование», 2003. Ч. 1.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной /О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. М., 2003.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)/ Л.А. Кузнецов.М.: Высш. шк., 2007.204 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов /В.С. Шипачев. М., 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения типовых расчетов по курсу «Математика» для студентов специальностей 220201 «Управление и информатика в технических системах», 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов», 140601 «Электромеханика», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» очной формы обучения

Часть 5

Составители: Федотенко Галина Федоровна,
Катрахова Алла Анатольевна,
Купцов Валерий Семенович,
Купцов Андрей Валериевич

В авторской редакции

Подписано к изданию 14.10. 2008.
Уч.-изд. л. 2,4 «С»

ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14