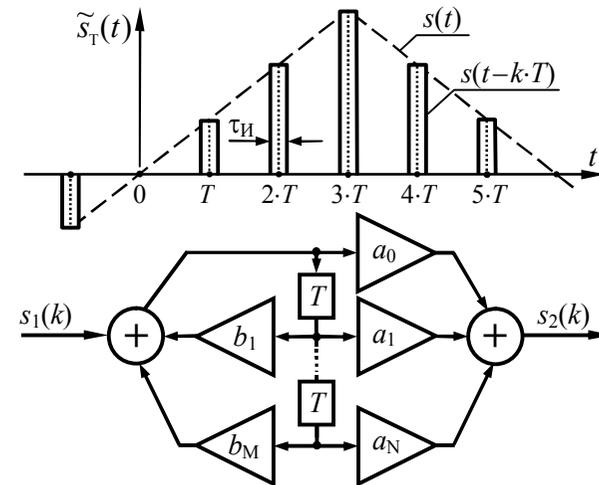


ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам № 10 - 11
по дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы"
для студентов направления 11.03.01 "Радиотехника"
(профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и
обработки сигналов") очной формы обучения



Составитель д-р техн. наук А.В. Останков

УДК 621.376

Дискретизация и дискретная фильтрация сигналов: методические указания к лабораторным работам № 10 - 13 по дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы" для студентов направления 11.03.01 "Радиотехника" (профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов") очной формы обучения / ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический университет"; сост. А.В. Останков. Воронеж, 2017. 40 с.

Методические указания содержат описание двух работ, входящих в лабораторный практикум по дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы" и относящихся к разделу "Дискретная фильтрация сигналов". Лабораторные работы ориентированы на выполнение методами имитационного моделирования на компьютерах и физического моделирования на универсальных стендах.

Табл. 3. Ил. 11. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент д-р техн. наук, доц. А.Б. Токарев

Ответственный за выпуск зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. Б.В. Матвеев

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

© ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический университет", 2017

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Основной целью лабораторных занятий по дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы" является проверка, углубление и закрепление основных теоретических положений, приобретение новых знаний практического характера, освоение методики ведения экспериментальных исследований, получения навыков работы с измерительной аппаратурой, вычислительной техникой и современными программами математического моделирования.

Рабочей программой дисциплины "Радиотехнические цепи и сигналы" предусматривается выполнение 13-ти лабораторных работ — четырёх работ в пятом и девяти работ в шестом семестрах. Описание работ № 10 и 11 содержится в настоящем руководстве.

Перед непосредственным выполнением каждой лабораторной работы студент обязан выполнить домашнее задание. Выполнению экспериментальной части лабораторной работы предшествует процедура допуска — проверки подготовленности студента, в том числе наличия домашнего задания.

Приступать к выполнению экспериментальных исследований можно только после разрешения преподавателя, соблюдая при этом правила техники безопасности. По окончании работы необходимо предъявить результаты исследований преподавателю. После одобрения преподавателем полученных результатов следует выключить базовый блок установки и измерительные приборы, привести в порядок рабочее место.

Защита каждой лабораторной работы предполагает объяснение полученных экспериментальных результатов, ответы на теоретические вопросы и решение микрозадач, связанных с тематикой проведённых исследований. Зачёт по проделанной работе должен быть получен до начала следующей лабораторной работы.

Лабораторная работа № 10

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЁТАМ

Цель работы — экспериментально исследовать зависимость качества восстановления непрерывного видеосигнала по его дискретным отсчётам от частоты дискретизации и длительности сигнала, а также характеристик восстанавливающего фильтра нижних частот.

Краткие теоретические сведения

Дискретизация — это основанное на теореме Котельникова представление непрерывного сигнала (например, показанного на рис. 1,а) последовательностью отсчётных импульсов (рис. 1,б), по которым с заданной точностью можно восстановить исходное колебание (рис. 1,в).

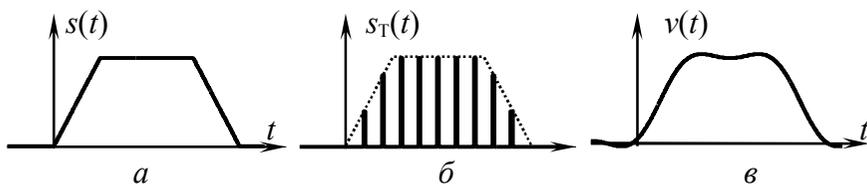


Рис. 1. Исходный непрерывный, дискретизированный и восстановленный сигналы

Применительно к сигналам, спектр которых примыкает к нулевой частоте — видеосигналам, — теореме Котельникова можно сформулировать следующим образом.

Видеосигнал, обладающий конечной энергией, спектр которого ограничен частотой F_M , полностью и однозначно определяется последовательностью своих мгновенных значений, взятых с частотой дискретизации

$$F \geq 2 \cdot F_M, \quad (1)$$

то есть совокупностью дискретных отсчётов, считываемых через интервал времени (интервал дискретизации), равный

$$T \leq 1/(2F_M). \quad (2)$$

Доказывается, что такой сигнал $s(t)$ может быть представлен обобщённым рядом Фурье (в базисе Котельникова):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_M \cdot (t - k \cdot T)], \quad (3)$$

где $s(k \cdot T)$ — коэффициенты, совпадающие с отсчётами мгновенных значений сигнала $s(t)$, взятых в моменты времени $k \cdot T$; $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ — базисная функция "синк".

Для восстановления видеосигнала $s(t)$ по его дискретным отсчётам достаточно дискретизированный сигнал $s_T(t)$, объединяющий воедино последовательность отсчётов $s(k \cdot T)$, подать на фильтр нижних частот с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), обладающей частотой среза F_M , и линейной фазо-частотной характеристикой (ФЧХ).

Действительно, реакцию линейной цепи на воздействие идеального дискретизированного сигнала $s_T(t)$ (с бесконечно малой длительностью отсчётных импульсов)

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot \delta(t - k \cdot T) \quad (4)$$

($\delta(t)$ — дельта-функция) можно определить как совокупность взвешенных с коэффициентами $s(k \cdot T) \cdot T$ импульсных характеристик цепи:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot T \cdot g(t - k \cdot T). \quad (5)$$

Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот, как известно, определяется выражением —

$$g_{\text{ИФНЧ}}(t) = 2 \cdot K_0 \cdot F_C \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_C \cdot (t - t_3)],$$

где F_C — частота среза АЧХ, t_3 — время задержки отклика.

Тогда реакция идеального ФНЧ на воздействие дискретизированного сигнала будет определяться выражением

$$v(t) = 2 \cdot K_0 \cdot F_C \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k \cdot T) \cdot \text{sinc}[2\pi \cdot F_C \cdot (t - t_3 - k \cdot T)]. \quad (6)$$

Если интервал дискретизации T принять равным $1/(2F_M)$ и для восстановления сигнала применить фильтр с коэффициентом передачи $K_0 = 1$ и частотой среза $F_C = F_M$, то выражение (6), определяющее реакцию идеального ФНЧ (ИФНЧ) на воздействие (4), будет совпадать с (3).

Подтвердить этот результат можно и с частотных позиций. Известно, что комплексный спектр $\dot{G}_T(f)$ дискретизированного сигнала представляет собой бесконечно и периодически повторяющуюся последовательность копий (дублетов) комплексного спектра $\dot{G}_S(f)$ исходного сигнала, смещённых друг относительно друга на частоту дискретизации F :

$$\dot{G}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_S(f - n \cdot F). \quad (7)$$

Результат определяемого формулой (7) преобразования спектра отображён на рис. 2, где показан (качественно) спектр $\dot{G}_S(f)$ исходного непрерывного сигнала $s(t)$ (рис. 2,а) и спектр сигнала $s_T(t)$, полученного при дискретизации $s(t)$ (рис. 2,б-г). Видно, что если интервал дискретизации выбран из условия $T \leq 1/(2F_M)$, то дублеты в составе спектра дискретизированного сигнала не перекрываются. В соответствии с частотным методом спектр сигнала $v(t)$ на выходе фильтра с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}_{\text{ФНЧ}}(f)$ определяется произведением спектра входного дискретизированного сигнала на $\dot{K}_{\text{ФНЧ}}(f)$:

$$\dot{G}_V(f) = \dot{G}_T(f) \cdot \dot{K}_{\text{ФНЧ}}(f).$$

Это означает возможность без искажений выделить центральный дублет в спектре дискретизированного сигнала $s_T(t)$,

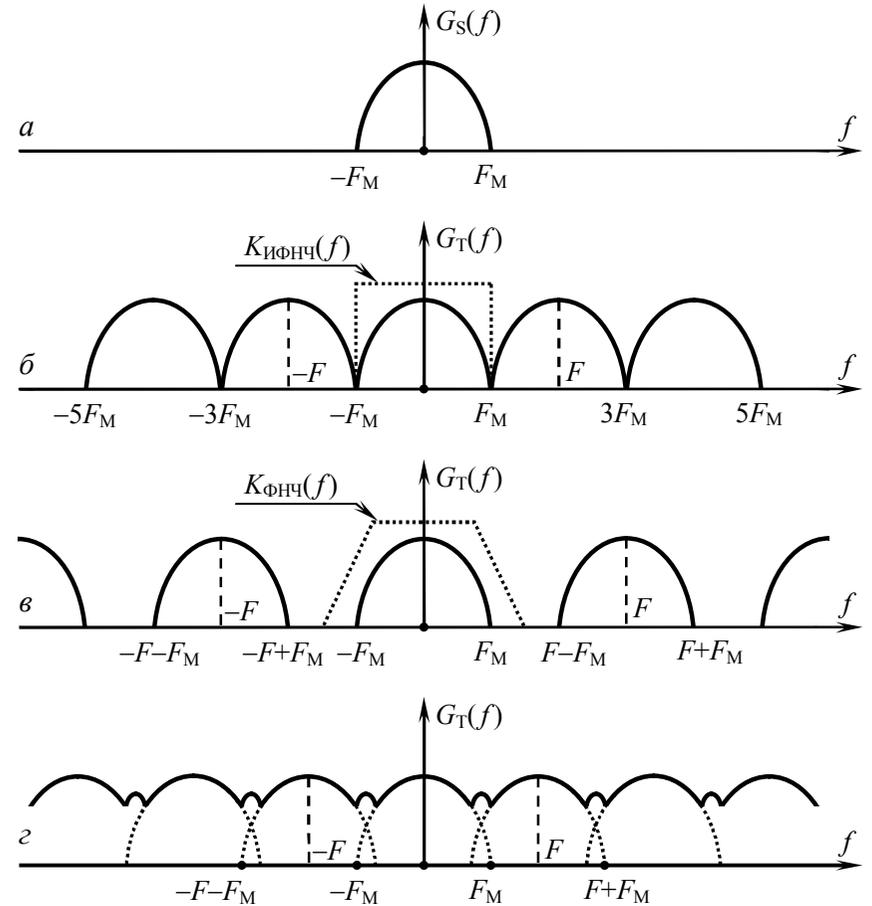


Рис. 2. Спектр исходного сигнала (а) и дискретизированного сигнала при разной величине интервала дискретизации: $T = 1/(2F_M)$ (б), $T < 1/(2F_M)$ (в) и $T > 1/(2F_M)$ (г)

соответствующий спектру исходного сигнала, с помощью фильтра, АЧХ которого показана штриховой линией на рис. 2,б. При этом если $T = 1/(2F_M)$, то для неискажённого восстановления сигнала следует использовать фильтр лишь с идеально прямоугольной АЧХ. При $T < 1/(2F_M)$ требования к характеристике восстанавливающего фильтра снижаются (в частности,

можно использовать фильтры с конечной крутизной скатов АЧХ), при $T > 1/(2F_M)$ неискажённое восстановление сигнала принципиально невозможно, поскольку исходный спектр оказывается частично перекрытым своими сдвинутыми на $\pm F$ копиями. Следует также учесть, что хотя при $T \leq 1/(2F_M)$ спектр амплитуд сигнала $v(t)$ на выходе фильтра в точности совпадает со спектром сигнала $s(t)$, фазовые же спектры исходного и восстановленного сигналов различны. Это обусловлено фазочастотной характеристикой фильтра $\varphi_{\text{ФНЧ}}(f)$ и проявляется в виде задержки восстановленного сигнала на время

$$t_3 = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi_{\text{ФНЧ}}(f)}{df}.$$

Итак, процедура дискретизации не исключает возможности точного восстановления сигнала по его дискретным отсчётам. Но теорема Котельникова, определяющая эти процедуры, оговаривает ряд условий, выполнение которых на практике невозможно. Так, требуется, чтобы спектр дискретизируемого сигнала был ограничен, отсчёты были бесконечно короткими и учитывались на бесконечном интервале времени, а восстанавливающий фильтр обладал бы бесконечным затуханием за пределами полосы пропускания. В действительности число отсчётов $s(k \cdot T)$ дискретизированного сигнала конечно, спектр сигнала, подвергающегося дискретизации, не ограничен по частоте, а идеальный восстанавливающий фильтр физически не реализуем. Вследствие этого дискретизация и восстановления сигналов всегда сопровождаются погрешностью. Возникающие при этом искажения проиллюстрированы на рис. 3 и 4.

Из рис. 3,а видно, что реальный сигнал $s(t)$ конечной длительности обладает бесконечно протяжённым спектром (в качестве примера рассмотрен спектр прямоугольного импульса). Его дискретизация даже с малым (но ненулевым!) интервалом дискретизации T всегда приводит к перекрытию дублетов в составе спектра дискретизированного сигнала (рис. 3,б).

По этой причине центральный дублет в спектре сигнала $s_T(t)$, выделяемый при восстановлении идеальным ФНЧ, не совпадает по форме со спектром исходного сигнала (сравните рис. 3в и а), что естественно приводит к искажению восстановленного сигнала по сравнению с исходным.

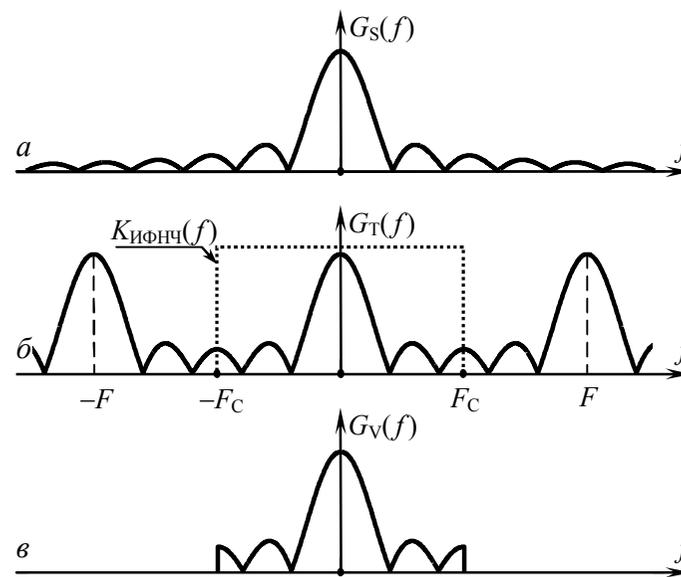


Рис. 3. Возникновение погрешности восстановления на этапе дискретизации

Идеальный ФНЧ служит лишь теоретической моделью для объяснения принципа восстановления сигнала по его дискретным отсчётам. Реальный фильтр нижних частот вне полосы пропускания обладает конечным ослаблением. Это приводит к тому, что при выборе частоты среза $\sim 1/2F$ (как в случае идеального ФНЧ, рис. 2,б) на выход реального фильтра проникают составляющие не только центрального, но и соседних (вторичных) дублетов в спектре дискретизированного сигнала (штрих-пунктир на рис. 4,б). При уменьшении же частоты среза частотная характеристика фильтра оказывается уже цен-

трального дублета в спектре $\dot{G}_T(f)$: полезные спектральные составляющие верхних частот проходят через фильтр с заметным ослаблением (пунктир на рис. 4,б). Из приведенных на рис. 4 графиков видно, что реальный фильтр нижних частот неизбежно искажает сигнал при восстановлении.

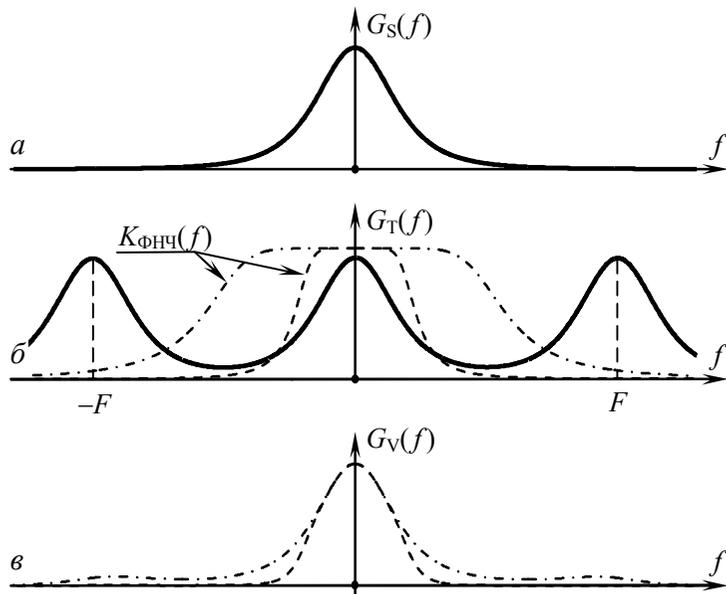


Рис. 4. Возникновение погрешности восстановления на этапе восстановления

Невозможность обеспечения нулевой длительности отсчётных импульсов также ведёт к погрешности. Если длительность импульсов конечна и равна $\tau_{и}$, то сигнал, подаваемый на вход восстанавливающего фильтра, может быть представлен в виде совокупности прямоугольных импульсов с амплитудами, равными величине дискретных отсчётов $s(k \cdot T)$. Тогда спектр дискретизированного сигнала в отличие от (7) имеет вид

$$\dot{G}_T(f) = \frac{\tau_{и}}{T} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \tau_{и}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{G}_S(f - n \cdot F). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что ненулевая длительность отсчётных импульсов приводит к показанному на рис. 5 "завалу" высокочастотной части центрального дублета в спектре дискретизированного сигнала, а значит внесению дополнительной погрешности при восстановлении непрерывного сигнала.

Заметим, однако, что реально незначительные по величине искажения, хотя и нежелательны, но допустимы.

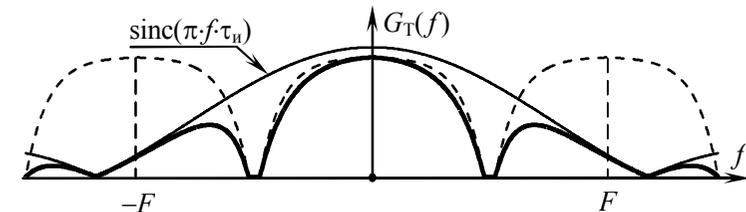


Рис. 5. Возникновение погрешности восстановления за счёт конечной длительности отсчётов

Если частота среза F_C восстанавливающего фильтра задана и не может быть изменена, тогда выбор частоты дискретизации F должен производиться с учётом заданного значения F_C . Так, для случая восстановления сигнала идеальным ФНЧ

$$F \geq F_M + F_C, \quad (9)$$

при условии, что практическая ширина спектра F_M исходного сигнала не превышает полосу пропускания фильтра: $F_M \leq F_C$.

В случае если практическая ширина спектра F_M дискретизируемого сигнала не удовлетворяет условию восстановления с допустимой погрешностью, т.е. $F_M > F_C$, целесообразно увеличить (если имеется такая возможность) длительность T_S исходного сигнала. Последнее приведёт к тому, что ширина спектра исходного сигнала $F_M \sim 1/T_S$ пропорционально уменьшится и обеспечится выполнение неравенства $F_M \leq F_C$.

Особенностью используемого в работе генератора отсчётных импульсов, является то, что регулировка частоты следования отсчётов при их фиксированном количестве сопровожда-

ется одновременным изменением длительности дискретизированного сигнала. В частности, увеличение частоты дискретизации влечёт уменьшение длительности сигнала, а следовательно, расширение дублетов в составе спектра дискретизированного сигнала. Последнее может привести к несоответствию ширины выделяемого (центрального) спектрального дублета и полосы пропускания восстанавливающего фильтра (рис. 6) и, как следствие, к увеличению погрешности восстановления.

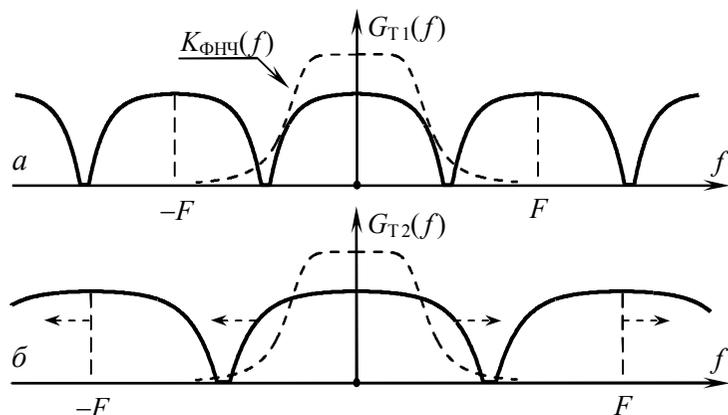


Рис. 6. Последствия увеличения частоты следования отсчётов при их фиксированном количестве

Описание лабораторной установки

Работа выполняется на стенде с использованием сменного блока, верхняя панель которого изображена на рис. 7.

Сменный блок содержит запускаемый извне генератор отсчётных импульсов, формирующий периодически повторяющиеся пакеты из 32-х малых по длительности прямоугольных импульсов (отсчётов). Амплитуду и полярность первых 20-ти отсчётных импульсов можно регулировать с помощью потенциометров, выведенных на верхнюю панель блока. Последние 12 импульсов в пакете отсутствуют, что позволяет визуально отделять пакеты импульсов друг от друга. В результате

генератор отсчётных импульсов позволяет формировать периодически повторяющиеся дискретизированные сигналы разнообразной формы.

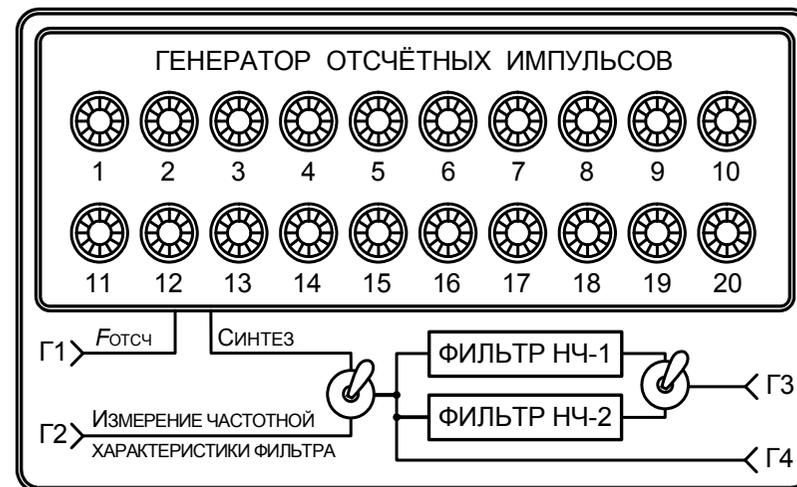


Рис. 7. Вид панели съёмного блока

Запуск генератора отсчётных импульсов осуществляется гармоническим напряжением от внешнего лабораторного генератора, подключаемого к клеммам Г1. Частота внешнего сигнала определяет частоту отсчётов (дискретизации). Регулировка частоты колебаний запускающего генератора гармонического напряжения приводит к изменению как интервала между соседними отсчётными импульсами, так и совокупной длительности дискретизированного сигнала.

В сменный блок встроены два фильтра нижних частот (ФНЧ) — трёхзвенный LC -фильтр ("Фильтр НЧ-1", рис. 8) и однозвенный RC -фильтр ("Фильтр НЧ-2"), — используемые в работе в качестве цепей, восстанавливающих непрерывные сигналы. Принципиальные электрические схемы фильтров НЧ-1 и НЧ-2 приведены на рис. 8. Граничная частота полосы пропускания (частота среза АЧХ) LC -фильтра составляет около 4 кГц, RC -фильтра — 2.5 кГц.

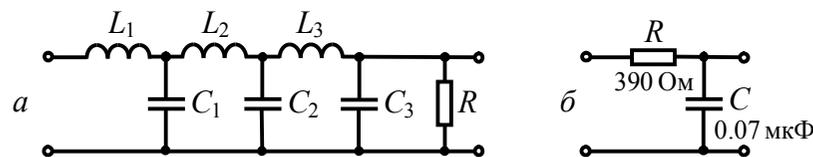


Рис. 8. Принципиальные схемы фильтров НЧ-1 и НЧ-2

Напряжение с выхода фильтра (НЧ-1 или НЧ-2 в зависимости от положения правого тумблера верхней панели блока) поступает на клеммы Г3. К клеммам Г4 подводится сигнал, действующий на входе фильтров, к клеммам Г5 — импульсы, предназначенные для внешней синхронизации осциллографа, используемого для наблюдения дискретизированных и восстановленных посредством фильтров сигналов.

Подготовительное (домашнее) задание

1. К разделу "Исследование влияния параметров фильтра на качество восстановления сигнала"

1.1. Изобразить в масштабе импульсную характеристику идеального ФНЧ с частотой среза $F_C = 4$ кГц, единичным коэффициентом передачи и нулевым временем задержки.

1.2. Рассчитать и построить временные диаграммы напряжения на выходе этого идеального фильтра в предположении, что на его вход подаётся последовательность из 20-ти малых по длительности импульсов одного знака и одинаковой (единичной) амплитуды с частотой следования:

а) $F = F_C$; б) $F = 2 \cdot F_C$; в) $F = 8 \cdot F_C$.

Комментарий к выполнению. Сигнал на выходе идеального ФНЧ рассчитать по формуле (6), в которой индекс суммирования k , равный номеру отсчёта, менять от 0 до $N - 1 = 19$, амплитуды отсчётных импульсов $s(k \cdot T)$ положить равными единице, интервал дискретизации — $T = 1/F$. Расчёт сигнала здесь и далее производить на интервале времени от "минус"

$T_S/2$ до $3 \cdot T_S/2$, где T_S — длительность дискретизированного сигнала, определяемая числом отсчётов N и интервалом дискретизации T : $T_S = (N - 1) \cdot T$.

1.3. Рассчитать и построить график импульсной характеристики RC -фильтра, схема которого показана на рис. 8,б.

Комментарий к выполнению. Использовать выражение для импульсной характеристики RC -фильтра нижних частот — $g_{RC}(t) = \{(1/\tau_\phi) \cdot \exp(-t/\tau_\phi)$ при $t \geq 0$; 0 при $t < 0\}$, где τ_ϕ — постоянная времени с учётом выходного сопротивления $R_\Gamma = 600$ Ом генератора отсчётных импульсов: $\tau_\phi = (R + R_\Gamma) \cdot C$.

1.4. Применительно к воздействию, описанному в пункте 1.2, рассчитать и изобразить временные диаграммы напряжения, наблюдаемые на выходе RC -фильтра при частотах следования воздействующих импульсов 8 и 32 кГц.

Комментарий к выполнению. Сигнал на выходе восстанавливающего RC -фильтра следует рассчитывать по формуле (5), в которой $s(k \cdot T) = 1$ при $k \in [0; 19]$, $g(t) = g_{RC}(t)$, $T = 1/F$.

2. К разделу "Исследование влияния длительности сигнала на качество его восстановления"

2.1. Полагая, что спектр непрерывного сигнала, изображённого пунктиром в табл. 1, является ограниченным частотой F_M ($F_M \approx 2/T_S$, где T_S — длительность сигнала), рассчитать минимальную длительность сигнала T_{Smin} , который можно с приемлемыми искажениями сформировать по дискретным отсчётам с использованием в качестве восстанавливающего идеального ФНЧ с частотой среза $F_C = 4$ кГц.

Комментарий к выполнению. При фиксированной частоте среза F_C идеального ФНЧ восстановление сигнала с минимальными искажениями возможно, если высшая частота спектра F_M исходного сигнала не превышает F_C : $F_M \leq F_C$.

Таблица 1

Временные диаграммы используемых в работе сигналов

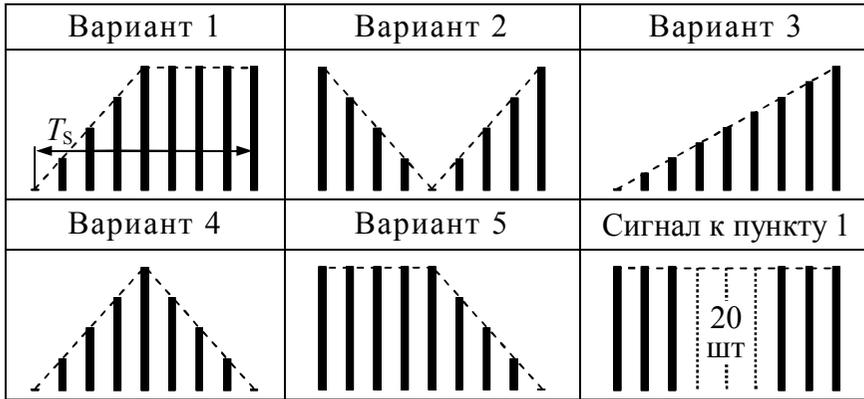


Таблица 2

Аналитические выражения используемых в работе сигналов

Вар-т	Формула, определяющая значение k -го отсчета $s(k \cdot T)$
1	$\begin{cases} 2k/(N-1) & \text{при } 0 \leq k \leq (N-1)/2, \\ 1 & \text{при } (N-1)/2 \leq k \leq (N-1) \end{cases}$
2	$\begin{cases} 1-2k/(N-1) & \text{при } 0 \leq k \leq (N-1)/2, \\ (2k-N+1)/(N-1) & \text{при } (N-1)/2 \leq k \leq (N-1) \end{cases}$
3	$k/(N-1) \text{ при } 0 \leq k \leq (N-1)$
4	$\begin{cases} 2k/(N-1) & \text{при } 0 \leq k \leq (N-1)/2, \\ 2-2k/(N-1) & \text{при } (N-1)/2 \leq k \leq (N-1) \end{cases}$
5	$\begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq k \leq (N-1)/2, \\ 2-2k/(N-1) & \text{при } (N-1)/2 \leq k \leq (N-1) \end{cases}$

2.2. Применительно к длительности непрерывного сигнала $T_{S \min}$, рассчитанной в пункте 2.1, и его высшей частоте $F_M = 4$ кГц рассчитать максимально возможный интервал T_{\max} между отсчетами и соответствующее ему минимально необходимое число отсчетов N_{\min} в составе дискретизированного сигнала: $N_{\min} = 1 + T_{S \min}/T_{\max}$.

2.3. Применительно к найденному интервалу между отсчетами T_{\max} рассчитать и изобразить временную диаграмму отклика идеального ФНЧ с частотой среза 4 кГц на воздействие дискретизированного сигнала из табл. 1 длительностью $T_{S \min}$.

Комментарий к выполнению. Сигнал на выходе идеального ФНЧ следует рассчитать по формуле (6), в которой k менять от 0 до $N_{\min} - 1$, соответствующие значения отсчетов $s(k \cdot T)$ определять по формуле из табл. 2, а интервал дискретизации взять равным $T = T_{\max}$.

2.4. При том же интервале между отсчетами рассчитать и построить временную диаграмму отклика идеального ФНЧ на воздействие дискретизированного сигнала, обладающего вчетверо большей длительностью: $T_S = 4 \cdot T_{S \min}$.

Комментарий к выполнению. Число отсчетов N дискретизированного сигнала при этом возрастет вследствие увеличения длительности сигнала. Амплитуды всех отсчётных импульсов (табл. 2) следует рассчитать заново.

3. К разделу "Исследование влияния частоты дискретизации на качество восстановления сигнала"

3.1. Рассчитать и построить временную диаграмму отклика идеального ФНЧ с частотой среза $F_C = 4$ кГц на воздействие дискретизированного сигнала (табл. 1) минимально допустимой длительности $T_{S \min}$ при интервале между подаваемыми на фильтр отсчетами вчетверо меньшим максимально допустимого: $T = 0.25 \cdot T_{\max}$.

Комментарий к выполнению. Предварительно рассчитать заново число отсчетов дискретизированного сигнала и их амплитуды (табл. 2). Учесть, что в используемый в рабочей формуле (6) интервал дискретизации T также будет другим.

Лабораторные задания и методические указания по их выполнению

1. Исследование влияния параметров фильтра на качество восстановления сигнала

Включить стенд, осциллограф АСК-1021, лабораторный генератор АНР-1001 и вольтметр АВМ-1071. Частоту гармонических колебаний генератора установить равной 30 кГц, амплитуду (с помощью вольтметра) — 10...15 В. Подключить генератор к клеммам Г1 съёмного блока, осциллограф — к клеммам Г4, сняв сигнал внешней синхронизации с клемм Г5. Чувствительность осциллографа установить равной "2 В/дел", длительность развёртки — "0.1 мс/дел". Левый тумблер съёмного блока перевести в положение "Синтез". Несколько потенциометров блока выкрутить в правое положение и добиться появления на экране осциллографа пачки отсчётных импульсов.

Уменьшить амплитуды всех отсчётных импульсов, кроме первого, до нуля. Амплитуду первого импульса увеличить до максимального значения (не следует выкручивать потенциометр до упора — это может привести к перегрузке, сопровождаемой расширением импульса, а не увеличением его амплитуды). Переключить осциллограф к клеммам Г3, увеличить его чувствительность. Зафиксировать [❏] на рисунках, подготовленных при выполнении домашнего задания, отклики *LC*-фильтра ("Фильтр НЧ-1") и *RC*-фильтра ("Фильтр НЧ-2"). Сравнить экспериментальные характеристики фильтров с расчётными.

[❏] Учитывая наличие у большинства студентов мобильных телефонов с цифровыми камерами, допускается приводить в отчёте фотографии и наблюдаемых в работе осциллограмм. Однако следует непременно выполнить оцифровку делений шкал по вертикали (в мВ) и по горизонтали (в мкс). Для сравнения экспериментальных диаграмм с расчётными последние следует наносить поверх экспериментальных.

Установить частоту колебаний запускающего генератора 4 кГц. Вновь подключить осциллограф к клеммам Г4 и сформировать последовательность из 20-ти отсчётных импульсов одинаковой амплитуды. Переключить осциллограф к клеммам Г3. Зафиксировать осциллограмму напряжения на выходе *LC*-фильтра ("Фильтр НЧ-1").

Последовательно увеличивать частоту воздействующих импульсов до 8, 16, 32 и 64 кГц и каждый раз фиксировать осциллограмму напряжения на выходе *LC*-фильтра. При каждом изменении частоты дискретизации необходимо контролировать форму огибающей дискретизированного сигнала, переключая осциллограф к клеммам Г4; если обнаруживается нарушение исходного соотношения между отсчётами, следует корректировать амплитуду отсчётных импульсов.

Для частот 4, 8, 32 кГц сравнить экспериментальные диаграммы восстановленного сигнала с расчётными. Объяснить, почему по мере увеличения частоты дискретизации вначале происходит заметное улучшение качества восстановления сигнала, а при дальнейшем повышении частоты снова наблюдается искажение формы восстановленного сигнала. Указать частоту дискретизации, при которой качество восстановленного *LC*-фильтром сигнала наилучшее.

Заменить восстанавливающий *LC*-фильтр *RC*-фильтром ("Фильтр НЧ-2"). Получить и зафиксировать осциллограммы напряжения на выходе фильтра при частотах следования импульсов 4, 8, 16, 32 и 64 кГц.

Для частот 8 и 32 кГц сравнить экспериментальные диаграммы восстановленного сигнала с расчётными. Указать частоту следования отсчётов, при которой качество восстановленного *RC*-фильтром сигнала наилучшее.

Сравнить осциллограммы на выходе *RC*-фильтра с полученными при использовании в качестве восстанавливающего *LC*-фильтра. Сделать вывод о качестве восстановления сигнала прямоугольной формы *LC*- и *RC*-фильтром нижних частот.

2. Исследование влияния длительности сигнала на качество его восстановления

Продолжая работать со сменным блоком в режиме "Синтез", вновь подключить осциллограф к клеммам Г4. Установить частоту задающего генератора равной 8 кГц. Сформировать заданный в табл. 1 дискретизированный сигнал, задействовав для этого минимально допустимое число отсчётных импульсов, рассчитанное в домашнем задании. При этом следует использовать первые по счёту импульсы в пачке (без пропусков). Амплитуды остальных отсчётов обнулить. Переключить осциллограф к клеммам Г3 и зафиксировать осциллограмму восстановленного *LC*-фильтром сигнала. Сравнить её с диаграммой, рассчитанной в домашнем задании. Сделать вывод.

Не меняя частоты следования отсчётов (8 кГц), путём последовательного увеличения (добавления) числа используемых отсчётных импульсов за счёт активизации всё большего числа потенциометров сменного блока увеличить длительность сигнала сначала в два раза (число отсчётов установить равным 9), а затем в четыре раза (число отсчётов — 17). Во всех случаях зафиксировать осциллограмму восстановленного *LC*-фильтром сигнала. Временную диаграмму сигнала, восстановленного по 17-ти отсчётам, сравнить с расчётной диаграммой. Сделать вывод.

Оценить степень улучшения формы восстанавливаемого фильтром сигнала при увеличении его длительности за счёт увеличения числа отсчётов дискретизированного сигнала, но сохранении неизменным временного интервала между отсчётами (частоты дискретизации).

3. Исследование влияния частоты дискретизации на качество восстановления сигнала

Восстановить настройки аппаратуры, использовавшиеся в начале выполнения п. 2. Воспроизвести осциллограмму вос-

становленного *LC*-фильтром непрерывного сигнала по минимально допустимому числу отсчётов, рассчитанному в домашнем задании, при частоте дискретизации 8 кГц. Увеличить число отсчётов сигнала (за счёт использования всё большего числа потенциометров сменного блока) до девяти ($N=9$), одновременно увеличить частоту следования отсчётных импульсов до 16 кГц, тем самым добиться уменьшения временного интервала между отсчётами сигнала в два раза, сохранив, таким образом, без изменения длительность дискретизированного сигнала. Зафиксировать осциллограмму на выходе *LC*-фильтра. Сравнить её с исходной. Сделать вывод.

Увеличить число формирующих сигнал отсчётов до семнадцати ($N=17$), параллельно повысить частоту следования отсчётов до 32 кГц, т.е. обеспечить уменьшение интервала дискретизации в четыре раза при сохранении исходной длительности сигнала. Зафиксировать осциллограмму на выходе *LC*-фильтра. Сравнить её с расчётной диаграммой. Сделать вывод.

На основе полученных осциллограмм оценить степень улучшения формы восстанавливаемого сигнала при увеличении числа отсчётов, но сохранении длительности сигнала.

Сравнить результаты данного раздела с предыдущими. Сделать вывод о том, что же выгоднее для заметного улучшения формы восстанавливаемого сигнала: увеличивать число отсчётов в сигнале за счёт повышения частоты дискретизации или путём увеличения длительности сигнала.

Контрольные вопросы к защите работы

1. Что представляет собой дискретизированный сигнал? Почему каждый отсчёт идеального дискретизированного сигнала взвешен с дельта-функцией? Как выглядит спектр дискретизированного сигнала? Как он связан со спектром исходного непрерывного сигнала и чем он отличается? Как зависит этот спектр от частоты отсчётов?

2. Сформулировать теорему Котельникова применительно к дискретизации и восстановлению видеосигналов? Почему частоту дискретизации сигнала следует выбирать по теореме Котельникова? Ответ аргументировать с частотных позиций. Чем следует восстанавливать непрерывный видеосигнал? Каковы должны быть характеристики такого устройства?

3. Для чего при восстановлении сигнала по дискретным отсчётам требуется фильтр? Как следует выбирать частоту среза F_C его АЧХ? Почему в случае, когда частота среза фильтра превышает высшую частоту спектра сигнала шаг дискретизации нельзя выбирать из условия $T=1/(2 \cdot F_C)$? При любом ли соотношении между высшей частотой спектра и частотой дискретизации фильтр должен быть идеальным?

4. Почему при практическом использовании теоремы Котельникова возникают погрешности? Указать все возможные причины погрешностей, охарактеризовать каждую в отдельности. Указать способы уменьшения этих погрешностей. Ответ аргументировать с частотных позиций.

5. Изобразить спектры двух дискретизированных сигналов, обладающих одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равными интервалами между отсчётами, но разной длительностью. Для какого из этих сигналов качество восстановленного сигнала будет хуже, если их оба подать на одинаковый восстанавливающий фильтр?

6. Почему с увеличением длительности дискретизированного сигнала при неизменной частоте дискретизации и правильном выборе частоты среза восстанавливающего фильтра погрешность восстановления уменьшается? Как это согласуется с данными лабораторной работы? Ответ проиллюстрировать частотными характеристиками сигналов и цепей.

7. Изобразить спектры двух дискретизированных сигналов, обладающих одинаковой формой исходных непрерывных сигналов, равной длительностью, но разными интервалами между отсчётами. Для какого из этих сигналов качество вос-

становления будет выше, если их подать на одинаковый восстанавливающий фильтр?

8. Почему при фиксированной частоте среза восстанавливающего фильтра и неизменном количестве отсчётов сигнала увеличение частоты дискретизации может приводить сначала к уменьшению погрешности восстановления, а затем к её росту? Ответ проиллюстрировать результатами работы.

9. Чем отличаются спектры идеального и реального (с конечной длительностью отсчётов) дискретизированных сигналов? Как влияет конечная длительность отсчётных импульсов на погрешность восстановления сигнала? При каких условиях увеличение длительности отсчётов приводит к улучшению качества восстановления, при каких — к снижению?

10. Можно ли с помощью реального фильтра восстановить абсолютно точно (без какой-либо погрешности) непрерывный сигнал, уменьшая сколь угодно интервал между отсчётами дискретизированного сигнала? Увеличивая сколь угодно его длительность? Ответ аргументировать.

11. Сформулировать теорему Котельникова применительно к дискретизации и восстановлению узкополосных радиосигналов. Почему при этом выгодней отказаться от классической формулировки теоремы? Чем определяется частота дискретизации радиосигнала? Какое устройство, и с какими параметрами может быть использовано для восстановления непрерывного радиосигнала по его дискретным отсчётам?

Литература: [1, с. 188-202],
[2, с. 87-97],
[3, с. 122-126; 382-388].

Лабораторная работа № 11

ВРЕМЕННЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

Цель работы — продемонстрировать возможность реализации разнообразных по форме импульсных и частотных характеристик дискретного фильтра за счёт изменения весовых коэффициентов в его структурной схеме.

Краткие теоретические сведения

Дискретным фильтром принято называть линейную цепь, предназначенную для обработки дискретных сигналов (последовательностей дискретных отсчётов), функционирующую в соответствии с алгоритмом:

$$s_2(k) = \sum_{r=0}^R a_r \cdot s_1(k-r) + \sum_{m=1}^M b_m \cdot s_2(k-m), \quad (10)$$

где $s_1(k)$ — отсчёты входного, $s_2(k)$ — отсчёты выходного сигнала, а константы a_r и b_m — коэффициенты прямой и обратной передачи сигнала в ветвях фильтра, называемые весовыми коэффициентами фильтра. Индексы r и m в обозначении весовых коэффициентов определяют число тактов, на которое задерживаются отсчёты соответственно входного и выходного сигналов до воздействия на данную ветвь.

Графически алгоритм работы такой цепи принято отображать структурной схемой, показанной на рис. 9, где треугольниками обозначены масштабирующие элементы, изменяющие значения отсчётов в a_r или b_m раз, функциональные блоки с меткой "T" — элементы задержки сигналов на один такт, а звено с символом "+" — многовходовой сумматор. При ненулевых весовых коэффициентах (b_m) в ветвях обратной связи фильтр является рекурсивным, при отсутствии обратных связей ($b_m=0$ для любых m) — нерекурсивным дискретным фильтром.

В отличие от дискретного фильтра в цифровом фильтре дополнительно выполняется нелинейная операция — квантование отсчётов по уровню — и дальнейшей обработке подвергаются числа в двоичном коде. Если полагать, что число уровней квантования велико (тогда нелинейностью можно пренебречь), и не обращать внимания на то, в каком коде осуществляется обработка отсчётов сигнала в фильтре, то характеристики дискретного и цифрового фильтра будут идентичными. Таким образом, схема, приведённая на рис. 9, описывает структурную схему реализации рекурсивного цифрового фильтра.

Как уравнение (10), так и структурная схема на рис. 9, однозначно определяют свойства дискретного фильтра, однако более универсальными способами описания фильтра являются его импульсная и частотная характеристики.

Импульсной характеристикой дискретного фильтра называют безразмерную последовательность чисел $\hat{g}(r)$, соответствующую реакции этого фильтра на безразмерный единичный отсчёт, воздействующий на входе фильтра в начальный момент времени. Рекурсивный фильтр обладает бесконечной импульсной характеристикой, которая является сложной линейной функцией коэффициентов a_r и b_m . Импульсная характеристика нерекурсивного дискретного фильтра конечна и совпадает с числовыми значениями весовых коэффициентов a_r в его схеме.

Из линейности дискретного фильтра следует, что его реакция на входную последовательность отсчётов $s_1(k)$ равна

$$s_2(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} s_1(k-r) \cdot \hat{g}(r). \quad (11)$$

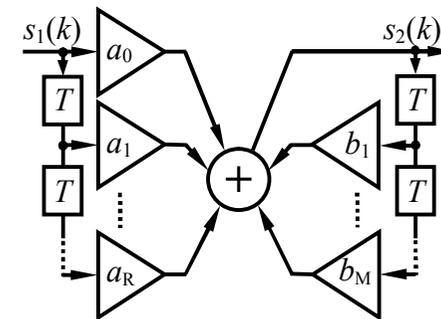


Рис. 9. Структурная схема дискретного фильтра

Выражение (11) является дискретным аналогом интеграла Дюамеля и называется дискретной свёрткой функций $\hat{g}(r)$ и $s_1(k)$.

Из принципа причинности, утверждающего, что реакция не может опережать воздействие, следует, что импульсная характеристика любого реализуемого фильтра удовлетворяет соотношению $\hat{g}(r) \equiv 0$ при $r < 0$, поэтому при расчёте реакции на сигнал $s_1(k)$ реального дискретного фильтра в (11) можно ограничиться лишь неотрицательными индексами суммирования.

Комплексный коэффициент передачи дискретного фильтра представляет собой комплексное число, модуль которого определяет, во сколько раз после прохождения через фильтр увеличивается амплитуда гармонического колебания, а аргумент — какое приращение получает при этом начальная фаза колебания. Можно показать, что с импульсной характеристикой и весовыми коэффициентами ветвей фильтра его комплексный коэффициент передачи связан соотношением

$$\dot{K}_T(\omega) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{g}(r) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot r \cdot T) = \frac{\sum_{r=0}^R a_r \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot r \cdot T)}{1 - \sum_{m=1}^M b_m \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot m \cdot T)}. \quad (12)$$

Поскольку дискретный фильтр предназначен для обработки дискретных сигналов, спектры которых периодичны, частотные характеристики фильтра также периодичны с периодом по частоте, равным частоте дискретизации $F = 1/T$. Чтобы корректно снять частотные характеристики дискретного фильтра, на его выходе следует включить аналоговый полосовой фильтр (теоретически — идеальный), настроенный на частоту входного гармонического колебания и обладающий малой по сравнению с частотой дискретизации полосой пропускания.

Анализ и синтез дискретных фильтров производятся, как правило, с использованием z -преобразования. Z -образом дискретного сигнала $s(k)$ называют комплексную переменную $S(z)$, связанную непосредственно с дискретным сигналом $s(k)$ прямым z -преобразованием:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k) \cdot z^{-k}.$$

Отношение z -образа выходного сигнала фильтра к z -образу входного называют системной функцией дискретного фильтра:

$$H(z) = S_2(z) / S_1(z). \quad (13)$$

Соотношение (13) положено в основу методики анализа дискретных фильтров (например, при аналитическом расчёте выходного сигнала по заданным входному и схеме фильтра). Можно показать, что системная функция фильтра однозначно связана не только с его комплексным коэффициентом передачи

$$H(z) = \dot{K}_T(\omega) \Big|_{\exp(j \cdot \omega T) = z} = \sum_{r=0}^R a_r \cdot z^{-r} / \left[1 - \sum_{m=1}^M b_m \cdot z^{-m} \right], \quad (14)$$

но и с импульсной характеристикой:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{g}(r) \cdot z^{-r}. \quad (15)$$

Соотношение (15), показывающее, что системная функция дискретного фильтра есть z -образ его импульсной характеристики $\hat{g}(r)$, используют для синтеза дискретных фильтров, например, методом инвариантной импульсной характеристики.

Если в структурной схеме дискретного фильтра, показанной на рис. 9, элементы задержки (памяти), обозначенные символом "T", использовать для одновременной передачи сигналов, как по прямым, так и обратным ветвям, то общее число элементов памяти можно снизить практически вдвое. Однако при этом необходимо будет использовать уже не один, а два сумматора. Такая модификация структурной схемы рекурсивного дискретного фильтра, показанная на рис. 10, называется в литературе канонической схемой. Именно каноническая схема используется в настоящей лабораторной работе для имитационного моделирования дискретного фильтра и обработки в нём дискретных сигналов.

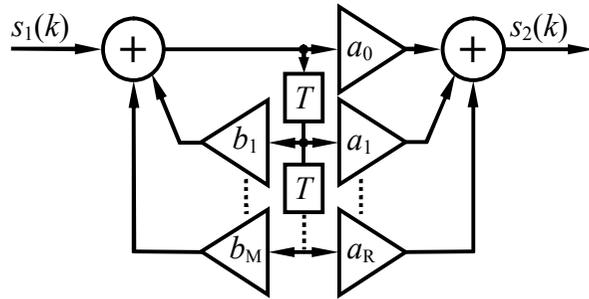


Рис. 10. Каноническая схема дискретного фильтра

Подготовительное (домашнее) задание

1. К разделу "Исследование характеристик рекурсивного фильтра первого порядка"

Изобразить схему рекурсивного фильтра первого порядка. Для заданных значений коэффициентов $a_0 = 1$ и b_1 (табл. 3), а также интервала дискретизации $T=2$ мс рассчитать и построить в масштабе импульсную характеристику фильтра $\hat{g}(r)$.

Рассчитать постоянную времени τ_Φ аналогового фильтра-прототипа и его полосу пропускания Π_f .

Рассчитать в пределах от 0 до $4 \cdot \Pi_f$ и построить в одной системе координат АЧХ дискретного фильтра $K_T(f)$ и его аналогового прототипа $K(f)$.

2. К разделу "Исследование характеристик дискретного полосового фильтра второго порядка"

Изобразить схему рекурсивного дискретного фильтра, имитирующего простой колебательный контур. По заданным значениям резонансной частоты f_p и добротности Q аналогового контура-прототипа (табл. 3) рассчитать применительно к частоте дискретизации $F=500$ Гц коэффициенты a_1 , b_1 и b_2 дискретного фильтра, обладающего теми же резонансной частотой и полосой пропускания, что и контур-прототип.

Таблица 3

Исходные данные к лабораторной работе № 11

Вар-т	b_1	f_p	Q	A	a_1	a_2	a_3
1	0.81	100	20	2.0	$1-\sqrt{3}$	$+a_1$	+1
2	0.82	95	19	1.9	$1-\sqrt{2}$	$+a_1$	+1
3	0.83	90	18	1.8	0	$+a_1$	+1
4	0.84	85	17	1.7	1	$+a_1$	+1
5	0.85	80	16	1.6	0	$+a_1$	+1
6	0.86	75	15	1.5	$1-\sqrt{2}$	$+a_1$	+1
7	0.87	70	14	1.4	$1-\sqrt{3}$	$+a_1$	+1
8	0.88	65	13	1.3	-1	$+a_1$	+1
9	0.89	60	12	1.2	-1	$-a_1$	-1
10	0.90	50	13	1.3	-2	$-a_1$	-1
11	0.91	60	15	1.4	$-1-\sqrt{2}$	$-a_1$	-1
12	0.92	70	18	1.5	$-1-\sqrt{3}$	$-a_1$	-1
13	0.93	80	20	1.6	-3	$-a_1$	-1
14	0.94	90	23	1.8	$-1-\sqrt{3}$	$-a_1$	-1
15	0.95	100	25	2.0	$-1-\sqrt{2}$	$-a_1$	-1

Рассчитать в пределах от $f_p - 2 \cdot \Pi_f$ до $f_p + 2 \cdot \Pi_f$ ($\Pi_f = f_p / Q$ — полоса пропускания) и изобразить АЧХ аналогового контура-прототипа.

3. К разделу "Исследование характеристик дискретного полосового фильтра четвертого порядка"

Изобразить схему рекурсивного фильтра, имитирующего систему связанных резонансных контуров. По заданным значениям резонансной частоты f_p , добротности Q и фактору связи A аналогового фильтра-прототипа (табл. 3) рассчитать его полосу пропускания Π_f и АЧХ в пределах $f_p - 1.5 \cdot \Pi_f$ до $f_p + 1.5 \cdot \Pi_f$.

Полагая, что интервал дискретизации $T=2$ мс, рассчитать весовые коэффициенты a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, b_4 дискретного фильтра, обладающего такими же параметрами, что и прототип. Дополнительно рассчитать коэффициенты b_1, b_2 и b_3 применительно к фактору связи, увеличенному вдвое.

4. К разделу "Исследование характеристик нерекурсивного фильтра третьего порядка"

Изобразить схему нерекурсивного дискретного фильтра третьего порядка. По заданным значениям коэффициентов a_1, a_2 и a_3 (табл. 3, коэффициент $a_0=1$) рассчитать для интервала дискретизации $T=2$ мс и изобразить в масштабе нормированную импульсную характеристику дискретного фильтра $\hat{g}(r)$. Рассчитать частоты f_0 , на которых АЧХ фильтра равна нулю.

Указания к выполнению домашнего задания

Системная функция дискретного фильтра, представленного на рис. 10 канонической схемой, содержащей четыре прямых и четыре обратных ветвей, определяется выражением

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + a_3 \cdot z^{-3}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2} - b_3 \cdot z^{-3} - b_4 \cdot z^{-4}}, \quad (16)$$

где a_r и b_m — весовые коэффициенты (правой и соответственно левой части схемы). При $a_0=1$, $a_r=0$ ($r \geq 1$) и $b_m=0$ ($m \geq 2$) фильтр обращается в рекурсивный первого порядка с нормированной импульсной характеристикой

$$\hat{g}(r) = \begin{cases} b_1^r & \text{при } r \geq 0, \\ 0 & \text{при } r < 0, \end{cases} \quad (17)$$

и с амплитудно-частотной характеристикой

$$K_T(f) = 1 / \sqrt{1 - 2b_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot T) + b_1^2}, \quad (18)$$

где T — тактовый интервал (дискретизации). Аналоговым прототипом подобного фильтра при $b_1 = \exp(-T/\tau_\Phi)$ является интегрирующая RC -цепь с нормированной импульсной характеристикой $\hat{g}(t) = \exp(-t/\tau_\Phi)$ и АЧХ, определяемой выражением $K(f) = 1/[1 + (2\pi \cdot f \cdot \tau_\Phi)^2]^{1/2}$, где τ_Φ — постоянная времени RC -цепи, а $1/(2\pi \cdot \tau_\Phi) = P_f$ — её полоса пропускания. Расчёт фильтра-прототипа сводится, таким образом, к определению по заданному коэффициенту b_1 постоянной времени τ_Φ аналоговой RC -цепи.

При нулевых коэффициентах $a_2 = a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$ системной функции (16) дискретный фильтр обращается в рекурсивный второго порядка. Если установить следующие значения весовых коэффициентов фильтра

$$a_0 = 1, a_1 = -e^{-\alpha T} \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot T), b_1 = 2 \cdot e^{-\alpha T} \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot T), b_2 = -e^{-2\alpha T},$$

то выражение для его нормированной импульсной характеристики принимает вид

$$\hat{g}(r) = \begin{cases} e^{-r\alpha T} \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot r \cdot T) & \text{при } r \geq 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Аналоговым прототипом фильтра с такой импульсной характеристикой является резонансный контур (последовательный, если речь идёт о токе в контуре, и параллельный, если имеется в виду напряжение на контуре), обладающий резонансной частотой f_p и добротностью $Q = \pi \cdot f_p / \alpha$. Действительно, нормированная импульсная характеристика тока в последовательном контуре (напряжения в параллельном) описывается, как известно, формулой: $\hat{g}(t) = e^{-\alpha t} \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t)$ (сравните с (19)). АЧХ контура рассчитывается в окрестности резонансной частоты по формуле $K(f) = Q/[1 + \xi^2]^{1/2}$, где $\xi = 2Q \cdot \Delta f / f_p = 2Q \cdot (f - f_p) / f_p$.

Расчётное выражение частотной характеристики любого дискретного фильтра $K_T(f)$ можно получить на основе системной функции фильтра $H(z)$, если применить в ней подстановку $z = \exp(j2\pi \cdot f \cdot T)$ и вычислить модуль полученного комплекснозначного выражения:

$$K_T(f) = \sqrt{\frac{[a_0 + \sum_{r=1}^R a_r \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot r \cdot T)]^2 + [\sum_{r=1}^R a_r \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot r \cdot T)]^2}{[1 - \sum_{m=1}^M b_m \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot m \cdot T)]^2 + [\sum_{m=1}^M b_m \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot m \cdot T)]^2}}. \quad (20)$$

Рекурсивный фильтр четвертого порядка может при определенных значениях коэффициентов a_r и b_m имитировать систему связанных резонансных контуров. Аналоговая система двух одинаковых резонансных контуров с резонансными частотами f_p , добротностями Q и фактором связи A характеризуется нормированной импульсной характеристикой тока во втором резонансном контуре

$$\hat{g}(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin(\alpha \cdot A \cdot t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_p \cdot t), \quad \text{где } \alpha = \pi \cdot f_p / Q, \quad (21)$$

и двугорбой (при факторе связи $A \geq 1$) нормированной АЧХ $\hat{K}(f) = 2 \cdot A / \{[1 + A^2 - \xi^2]^2 + 4 \cdot \xi^2\}^{1/2}$, обладающей полосой пропускания $\Pi_f = f_p \cdot [A^2 + 2A - 1]^{1/2} / Q$. Заменяв в представленной выше формуле (21) текущее время t на отсчетные моменты времени $r \cdot T$, несложно получить выражение импульсной характеристики дискретного фильтра четвертого порядка $\hat{g}(r)$. Если теперь к этому выражению применить прямое z -преобразование, то можно прийти к представленным ниже выражениям, определяющим весовые коэффициенты a_r и b_m дискретного полосового фильтра четвертого порядка:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; a_1 = e^{-\alpha T} \cdot \sin(\alpha \cdot A \cdot T) \cdot \sin(2\pi \cdot f_p \cdot T); a_2 = 0; a_3 = -a_1 \cdot e^{-2\alpha T}; \\ b_1 &= 4 \cdot e^{-\alpha T} \cdot \cos(\alpha \cdot A \cdot T) \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot T); b_3 = b_1 \cdot e^{-2\alpha T}; \\ b_2 &= -2 \cdot e^{-2\alpha T} \cdot [1 + \cos(2\alpha \cdot A \cdot T) + \cos(4\pi \cdot f_p \cdot T)]; b_4 = -e^{-4\alpha T}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражения для АЧХ нерекурсивного дискретного фильтра третьего порядка при $a_0 = 1$, $a_3 = 1$ и $a_2 = a_1$ (все коэффициенты b_m равны нулю), а также при $a_0 = 1$, $a_3 = -1$ и $a_2 = -a_1$ могут быть преобразованы от общего вида (20) к следующему, более конкретному виду:

$$K_T(f) = \begin{cases} 4 \cdot |\cos(\pi \cdot f \cdot T)| \cdot |\cos(2\pi \cdot f \cdot T) + (a_1 - 1)/2| & \text{в 1-ом случае,} \\ 4 \cdot |\sin(\pi \cdot f \cdot T)| \cdot |\cos(2\pi \cdot f \cdot T) + (a_1 + 1)/2| & \text{во 2-ом случае.} \end{cases} \quad (23)$$

Из формулы (23) несложно определить частоты f_0 , на которых АЧХ нерекурсивного фильтра обращается в ноль. Отсчеты импульсной характеристики нерекурсивного дискретного фильтра совпадают по количеству и числовым значениям с весовыми коэффициентами a_r фильтра.

Описание виртуальной лабораторной установки

Работа выполняется на компьютере в схемотехническом симуляторе с использованием схемного файла "Digital filters.ewb", рабочее поле которого показано на рис. 11.

Дискретный фильтр реализован канонической схемой, в которой субблоки " a_0 "..." a_3 ", " b_1 "..." b_4 " имитируют масштабирующие звенья, субблоки " T_1 "..." T_4 " — устройства задержки, а субблоки "Sum1", "Sum2" — многовходовые сумматоры.

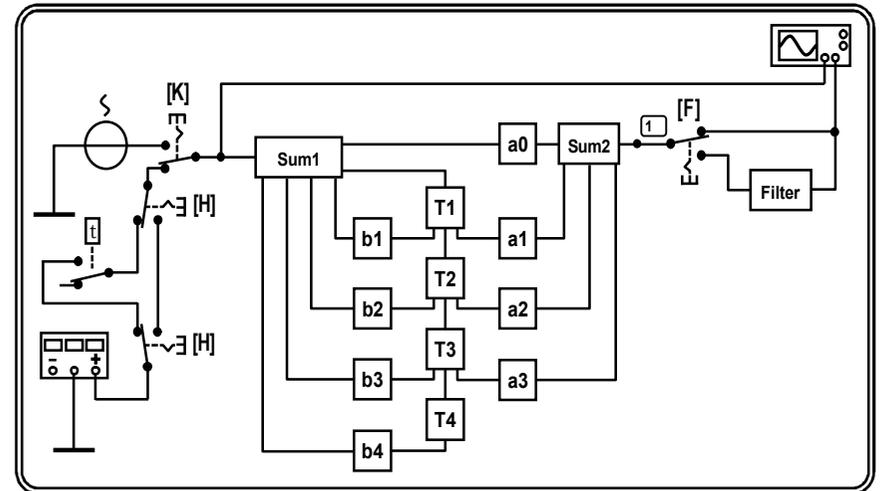


Рис. 11. Примерный вид виртуальной лабораторной установки

Чтобы установить требуемое значение весового коэффициента масштабирующего звена, произвести левой кнопкой мыши двойной щелчок по одноименному субблоку. В появившемся окне со схемой субблока активировать меню "... Properties". Двойным кликом мышки по иконке масштабирующего звена изменить установленное по умолчанию усиление (Gain) и закрыть окно субблока. Требуемое время задержки отсчётов сигнала в элементах памяти " T_1 "..." T_4 " установлено по умолчанию (2 мс) и изменения не требует.

Ко входу фильтра в зависимости от положения переключателя "К" коммутируется либо источник гармонического напряжения (верхнее положение), либо генератор дискретных отсчётов единичной амплитуды. Если положение переключателя "Н" соответствует показанному на рис. 11, на вход фильтра поступает одиночный отсчёт (для снятия импульсной характеристики); при переводе переключателя "Н" в правое положение ко входу фильтра подводится периодическая последовательность отсчётов, следующих друг за другом с частотой 500 Гц (изменять её нельзя, поскольку этому значению соответствует задержка в элементах памяти).

Для наблюдения на выходе фильтра непрерывного сигнала, а также снятия "вручную" частотных характеристик имеется возможность подключить на выходе (клавишей "F") восстанавливающий ФНЧ шестого порядка (субблок "Filter") с частотой среза АЧХ, равной 125 Гц.

Наблюдение сигналов на входе и выходе дискретного фильтра производится с помощью осциллографа (чёрным воспроизводится осциллограмма входного сигнала, красным — выходного). Анализ частотных характеристик можно осуществить с помощью команды "AC Frequency..." меню "Analysis". В большинстве случаев достаточно снять частотные характеристики фильтра на интервале частот от 0 до 250 Гц, то есть до частоты, равной половине частоты дискретизации — частоты Найквиста.

Лабораторные задания и методические указания по их выполнению

1. Исследование характеристик рекурсивного фильтра первого порядка

Загрузить файл "Digital filters.ewb". Проверить положение ключей: "К" должен быть установлен в нижнее положение, "Н" — в левое положение, "F" — в верхнее положение. Проверить параметры сигнала на входе дискретного фильтра (панель Function Generator): Frequency = 500 Hz, Duty cycle = 4%, Amplitude = 0.5 V, Offset = 0.5 V. При таких установках на вход дискретного фильтра поступает одиночный единичный отсчёт.

Установить единичное значение коэффициента a_0 ($a_0 = 1$), а значение весового коэффициента b_1 в соответствии с табл. 3.

Произвести моделирование. Получить осциллограмму импульсной характеристики дискретного фильтра и изобразить её в одной системе координат с кривой, полученной при выполнении домашнего задания.

Пропустить через ФНЧ дискретный сигнал с выхода фильтра и получить осциллограмму сглаженной импульсной характеристики. Внести её в отчёт и сравнить с импульсной характеристикой аналогового фильтра-прототипа.

Найти по осциллограмме постоянную времени фильтра, то есть интервал времени, по истечении которого характеристика затухает в e раз по сравнению с максимальным значением. Сравнить её с расчётным значением. Сделать выводы.

Снять амплитудно-частотную характеристику дискретного фильтра. Для практического освоения методики измерения АЧХ в данном разделе следует выполнять "вручную".

Итак, ко входу фильтра необходимо подключить источник гармонического напряжения ("К" — в верхнее положение), установить амплитуду его колебаний 1 В (Voltage = 0.707 V). Далее изменять частоту колебаний (Frequency) и фиксиро-

вать с помощью осциллографа амплитуду выходного колебания. Заметим, что дискретный фильтр является параметрической цепью и вызывает появление на выходе новых спектральных составляющих, поэтому измерение частотных характеристик такого фильтра требует наличия на выходе ФНЧ. Таким образом, при измерении АЧХ дискретного фильтра "вручную" следует подключить к его выходу ФНЧ ("F" — в нижнее положение). В пределах полосы пропускания этого фильтра (от 0 до 125 Гц) и следует снимать АЧХ дискретного фильтра.

Итак, в пределах частотного интервала 0...125 Гц произвести 10...12 измерений, построить график экспериментальной АЧХ фильтра и сопоставить её с расчётной. Оценить полосу пропускания дискретного фильтра по экспериментальной АЧХ и сравнить её значение с расчётным. Сделать вывод.

Оценить возможность регулирования импульсной и частотной характеристик дискретного фильтра коэффициентом b_1 . Для этого вернуться к исходным настройкам установки. Изменить значение коэффициента b_1 (сначала в сторону увеличения, а затем уменьшения) в пределах $\pm 10\%$ и вновь снять импульсную и частотную характеристики фильтра. Для автоматизированного снятия АЧХ фильтра задействовать команду "AC Frequency..." меню "Analysis" (Nodes for analysis=1). Сделать вывод о влиянии коэффициента b_1 на характеристики фильтра.

2. Исследование характеристик дискретного полосового фильтра второго порядка

Применительно к расчётным в домашнем задании значениям весовых коэффициентов a_1, b_1, b_2 получить импульсную характеристику дискретного фильтра. График характеристики отразить в отчёте.

Внести в отчёт график импульсной характеристики дискретного фильтра, сглаженной восстанавливающим ФНЧ. По сглаженной характеристике определить добротность \tilde{Q} реали-

зованного фильтра. Для этого через 2...3 периода от начала характеристики измерить значения двух соседних пиков колебания $u_{\max 1}$ и $u_{\max 2}$, найти отношение большего пика к меньшему пику: $\Delta = u_{\max 1}/u_{\max 2}$ (декремент затухания) и рассчитать добротность по формуле: $\tilde{Q} = \pi/\ln(\Delta)$. Сравнить экспериментальное значение добротности \tilde{Q} с исходным значением Q (табл. 3).

Снять АЧХ дискретного полосового фильтра. Внести её график в отчёт. Сопоставить с расчётной АЧХ аналогового фильтра-прототипа. Определить экспериментальные значения резонансной частоты \tilde{f}_p фильтра и его полосы пропускания \tilde{P}_f и сравнить \tilde{f}_p с исходным значением (табл. 3), а оценку \tilde{P}_f — со значением, рассчитанным в домашнем задании. Сделать вывод.

Оценить возможность регулирования характеристик полосового фильтра (контура) коэффициентами a_1, b_1 и b_2 . Убедиться, что изменение коэффициента a_1 мало влияет на резонансную частоту и полосу пропускания фильтра. Установить значения коэффициентов $a_1 = -1, b_1$ и b_2 — согласно расчётным в домашнем задании и вновь определить резонансную частоту \tilde{f}_p и полосу пропускания \tilde{P}_f фильтра. Изменить коэффициент b_1 в пределах $\pm 70\%$ и вновь измерить \tilde{f}_p и \tilde{P}_f . Восстановить значение коэффициента b_1 и, изменив коэффициент b_2 на $\pm 5\%$, вновь измерить величины \tilde{f}_p и \tilde{P}_f . По полученным данным выявить влияние коэффициентов b_1 и b_2 на параметры дискретного полосового фильтра. Сделать вывод.

3. Исследование характеристик дискретного полосового фильтра четвёртого порядка

Применительно к значениям коэффициентов $a_0...a_3$ и $b_1...b_4$, полученным в домашнем задании, получить осциллограммы импульсной характеристики дискретного полосового

фильтра четвёртого порядка, а также характеристики, сглаженной восстанавливающим фильтром. Привести их в отчёте.

Снять амплитудно-частотную характеристику дискретного полосового фильтра. Внести её график в отчёт. По величине провала частотной характеристики на резонансной частоте определить реализованное значение фактора связи: $\tilde{A} = \delta + \sqrt{\delta^2 - 1}$, где $\delta = K_{\max}/K_p$, K_p — значение АЧХ на резонансной частоте, K_{\max} — среднее значение максимумов АЧХ. Определить экспериментальную полосу пропускания фильтра \tilde{P}_f . Сравнить экспериментальные результаты с расчётными.

Оценить влияние коэффициентов b_1 , b_2 и b_3 на фактор связи дискретного полосового фильтра. Для этого установить значения коэффициентов, рассчитанные в домашнем задании, применительно к вдвое увеличенному фактору связи и по частотной характеристике оценить новое значение фактора связи. Сравнить полученные экспериментально результаты с теоретическими. Сделать вывод.

4. Исследование характеристик нерекурсивного фильтра третьего порядка

Применительно к значениям коэффициентов $a_0 = 1$ и a_1 , a_2 , a_3 из табл. 3 получить осциллограмму импульсной характеристики дискретного фильтра. График нанести поверх расчётной, полученной в домашнем задании. Снять амплитудно-частотную характеристику дискретного фильтра и внести её в отчёт. Указать частоты f_0 , на которых АЧХ обращается в нуль.

Оценить влияние коэффициентов фильтра на форму импульсной и частотной характеристик. Для этого изменить коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 , взяв из табл. 3 значения, соответствующие ближайшему варианту, и вновь снять характеристики фильтра; отметить новые значения частот f_0 , на которых АЧХ фильтра равна нулю. Полученные характеристики нанести по-

верх характеристик, полученных в предыдущем пункте. Сделать выводы.

Контрольные вопросы к защите работы

1. Какой фильтр называют дискретным? Чем определяется интервал между отсчётами импульсной характеристики этого фильтра? Какие значения (дискретные или непрерывные) могут принимать отсчёты импульсной характеристики?

2. Начертить функциональную схему дискретного фильтра и объяснить принцип его работы. Каким устройством является этот фильтр — линейным, нелинейным или параметрическим? Как это можно установить экспериментально?

3. Дать определение амплитудно-частотной характеристики дискретного фильтра. Каким в этом определении считаются входное и выходное гармонические колебания — непрерывными или дискретизированными? Если колебания являются дискретизированными, то, что следует понимать под амплитудой этих колебаний? частотой колебаний?

4. Предложить методику экспериментального измерения АЧХ дискретного фильтра. Надо ли при снятии частотной характеристики использовать восстанавливающий фильтр? Если да, то какой это должен быть фильтр — нижних частот или полосовой? С какой полосой пропускания? С какой средней частотой? Должен ли этот фильтр быть перестраиваемым по частоте? Можно ли при снятии частотной характеристики дискретного фильтра обойтись без восстанавливающего фильтра?

5. Как можно экспериментально убедиться, что АЧХ дискретного фильтра является периодической? Какое для этого колебание следует подавать на вход фильтра — дискретизированное или непрерывное? Какой формы? Какой частоты?

6. Что понимают под импульсной характеристикой дискретного фильтра? Как её можно снять экспериментально? Каким образом импульсная характеристика дискретного фильтра связана с частотной характеристикой?

7. Оценить влияние коэффициента b_1 рекурсивного дискретного фильтра первого порядка на импульсную и частотную характеристики фильтра. Установить количественную связь этого коэффициента с полосой пропускания фильтра.

8. Можно ли дискретный рекурсивный фильтр первого порядка с коэффициентом b_1 , близким к единице, использовать как узкополосный колебательный контур с резонансной частотой $f_k = k/T$?

9. Как экспериментально определить добротность и резонансную частоту дискретного варианта резонансного контура по его частотной характеристике? Как определить те же свойства по сглаженной импульсной характеристике?

10. Какими коэффициентами дискретного фильтра разумнее всего регулировать добротность и резонансную частоту дискретного контура? Установить количественную связь между этими коэффициентами и регулируемыми параметрами.

11. Определить координаты нулей системной функции исследуемого в работе нерекурсивного фильтра третьего порядка. Как по этим координатам определить частоты, на которых частотная характеристика фильтра равна нулю?

12. Как сказывается на импульсной и частотной характеристике дискретного фильтра изменение тактовой частоты его работы?

13. Для чего в лабораторной работе используется восстанавливающий фильтр? Можно ли проводить исследование свойств дискретных фильтров без него?

Литература: [1, с. 211-227],
[2, с. 502-531],
[3, с. 396-413].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов, М.Т. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] : учеб. для вузов. Стандарт третьего поколения / М.Т. Иванов, А.Б. Сергиенко, В.Н. Ушаков; под ред. В.Н. Ушакова. — СПб. : Питер, 2014. — 336 с.

2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] : учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Дрофа, 2006. — 719 с.

3. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст] : учеб. пособие / С.И. Баскаков. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 2003. — 462 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие указания	1
Лабораторная работа № 10. Восстановление непрерывных сигналов по дискретным отсчетам	2
Лабораторная работа № 11. Временные и частотные характеристики дискретных фильтров	22
Библиографический список	39

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам № 10 - 11
по дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы"
для студентов направления 11.03.01 "Радиотехника"
(профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и
обработки сигналов") очной формы обучения

Составитель
Останков Александр Витальевич

В авторской редакции

Подписано в печать 31.05.2017.
Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 2,7. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 29 экз. "С" 18.
Зак. № 56.

ФГБОУ ВО "Воронежский государственный технический
университет"
394026 Воронеж, Московский просп., 14