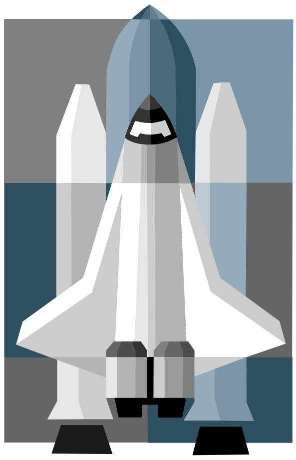
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»

Кафедра «Ракетные двигатели»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам № 1-2 по курсу
«Метрология, стандартизация и сертификация»
для студентов специальности 160700.65, 24.05.02
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»
очной формы обучения
Часть 1



Воронеж 2015

Составители: д-р техн. наук Г.И. Скоморохов,
лаб.-исслед. А.А. Пригожин

УДК 621.75

Методические указания к лабораторным работам № 1-2 по курсу «Метрология, стандартизация и сертификация» для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» очной формы обучения Ч. 1 / ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный технический университет"; Сост. Г.И. Скоморохов, А.А. Пригожин. Воронеж. 2015. 35 с.

Методические указания к лабораторным работам № 1-2 охватывают разделы статистической обработки и оценки параметров случайных величин, полученных эмпирическим путем в результате измерения параметров деталей, снабжены необходимым справочным материалом, примерами расчета и библиографическим списком.

Предназначены для студентов специальности 160700.65, 24.05.02 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация».

Табл. 24. Ил. 3. Библиогр.: 10 назв.

Рецензент д-р. техн. наук, проф. А.В. Кретинин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. В.С. Рачук

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Испытания жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) связаны с измерением и оценкой большого количества параметров, которые содержат систематические и случайные ошибки. Систематические ошибки порождаются методологией и условиями испытаний, а также специфическими особенностями исследуемого объекта. Случайные ошибки характеризуют суммарное воздействие большого числа различных факторов. Для исследования случайных явлений применяются методы теории вероятностей. Вероятностью называют число, заключенное между нулем и единицей, характеризующее меру возможности наступления случайного события в результате испытаний при заданной совокупности условий.

В соответствии с предельной теоремой теории вероятностей для выяснения законов распределения ошибки и оценки надежности и достоверности измерений необходимо бесконечно большое число испытаний. Это, естественно, требует значительных материальных затрат и времени. На практике ограничиваются сокращенным комплексом испытаний ЖРД и по их результатам делаются выводы о всей совокупности изделий. В связи с этим результаты единичных испытаний рассматриваются как случайно выбранная система величин, представляющая лишь один из возможных исходов, которые могли бы быть при многократных испытаниях.

Обработка результатов измерений широко применяется также в процессе производства ЖРД при статистическом контроле и регулировании качества продукции, например, для анализа технологических процессов, установления допусков, определения характеристик выборочных партий деталей и т.п. При изготовлении деталей неизбежно происходит рассеяние их размеров, выявляемое при измерении. Оно может быть вызвано несовершенством рабочего оборудования, погрешностью измерительных инструментов, девиацией режимов обработки, ошибками оператора и т.п. Вследствие этого погрешность изготовления и результат измерения конкретной детали тоже являются случайными величинами.

Поэтому для обработки результатов измерений и оценки приближения параметров к истинным значениям, как при изготовлении, так и испытаниях ЖРД используются методы теории вероятностей и математической статистики.

По способу формирования статистического ряда случайных величин, полученных при испытаниях, методы измерения подразделяются на прямые, косвенные и совокупные.

При прямых измерениях искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных.

Косвенные измерения - искомое значение величин находят по известной зависимости между этими величинами и величинами, полученными прямыми измерениями.

Совокупные измерения - искомые значения величин находят путем решения системы уравнений, получаемой при различных сочетаниях измеряемых величин.

Результаты, полученные при наблюдениях или измерениях испытаниях, называют выборкой из генеральной совокупности. Выборка является представительной (репрезентативной), если она достаточно хорошо представляет распределение генеральной совокупности. Ограничение выборок снижает точность и достоверность оценки погрешности и надежности наблюдений. Поэтому важно при организации и обработке результатов испытаний установить способы оценки их достоверности и надежности, обеспечивающие наилучшее приближение измеренных параметров к истинным значениям.

Данные методические указания к лабораторным работам № 1-2 по дисциплине “Метрология, стандартизация и сертификация» для студентов специальности 160302 «Ракетные двигатели» охватывают разделы статистической обработки и оценки параметров случайных величин, полученных эмпирическим путем. Изложенный материал может быть использован на практических занятиях, а также при выполнении курсовых и дипломных проектов

.

1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

1.1. Лабораторная работа 1. Определение числовых характеристик статистического распределения

Цель работы - по заданной выборке простого статистического ряда сформировать интервальный статистический (вариационный) ряд и построить гистограмму, найти оценки для математического ожидания и дисперсии, определить для них соответствующие доверительные интервалы.

Краткие сведения из теории. Теория случайных ошибок позволяет оценить точность и надежность результатов измерений при данном количестве опытов, определить минимальное количество измерений при заданной точности и надежности, исключить грубые ошибки, установить достоверность полученных данных. Основой теории случайных ошибок являются следующие предположения:

- при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются в равной степени часто относительно некоторого среднего значения;
- большие погрешности встречаются реже, чем малые, т.е. вероятность появления погрешности с ростом ее величины уменьшается;
- истинное значение измеряемой величины при бесконечно большом числе измерений равно среднеарифметическому результатов всех измерений;
- появление при бесконечно большом числе опытов того или иного результата измерения описывается законом нормального распределения в равной степени.

Предположим, что проведено n опытов и получена совокупность результатов измерения случайной величины $X_i = \{x_i\}, i = \overline{1,n}$ (например, диаметры n форсунок, изготовленных на токарном автомате). Такая совокупность результатов измерений (выборка) представляет собой первичный статистический материал и называется ***простым статистическим рядом***. Обычно простой статистический ряд оформляется в виде таблицы 1.1, в первой строке которой стоит номер опыта i, а во второй – измеренное значение случайной величины x_i.

Таблица 1.1

i	1	2	3	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n

Полученная совокупность измерений подлежит обработке и научному анализу для определения параметров закона распределения случайной величины $P(X)$.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Оценками параметров функции распределения случайной величины называют ***математическое ожидание*** - $M[X] = \widetilde{X} = \widetilde{m}$ и ***дисперсию*** $D[X] = D = \sigma^2$.

Оценкой математического ожидания $\widetilde{m}_x$ служит среднее арифметическое случайной величины X

$$\widetilde{m}_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}. \tag{1.1}$$

Оценкой дисперсии $\widetilde{\sigma}_x^2$ среднеквадратическая ошибка, определяемая по формуле

$$\widetilde{\sigma}_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \widetilde{m}_x)^2}{n-1}, \tag{1.2}$$

где n - объём выборки.

Различают генеральную и выборочную совокупность измерений. ***Генеральной совокупностью*** называют все множество возможных значений измерений x_i или возможных значений погрешностей Δx_i. Для выборочной совокупности число измерений n в каждом конкретном случае определяется и строго ограничено. Принято считать, что при $n \geq 30$ математическое ожидание $\widetilde{m}_x$ данной совокупности измерений достаточно приближается к его истинному значению.

Наиболее часто на практике встречается нормальный закон распределения случайной величины (закон Гаусса). Нормальный закон характеризуется плотностью вероятности погрешности и описывается уравнением

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \widetilde{m}_x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.3}$$

где $P(X)$- плотность вероятности погрешности; $\widetilde{m}_x$- математическое ожидание; σ - дисперсия; e - основание натурального логарифма.

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный колоколообразный вид (рис.1). Центральное свойство закона нормального распределения заключается в том, что он является ***предельным законом***, к которому стремятся другие известные законы распределения (экспоненциальный закон, распределение Вейбулла-Гнеденко).

Максимальная ордината кривой, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, соответствует точке $x = m$. По мере удаления от точки m, которая называется ***центром рассеивания***, плотность распределения падает, а при $x \to \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Центр рассеивания характеризует положение распределения на оси абсцисс.

С физической точки зрения ***математическое ожидание*** m является тем значением случайной величины, вокруг которого группируются результаты отдельных наблюдений. Параметр σ характеризует форму кривой нормального распределения, площадь под которой всегда равна единице.

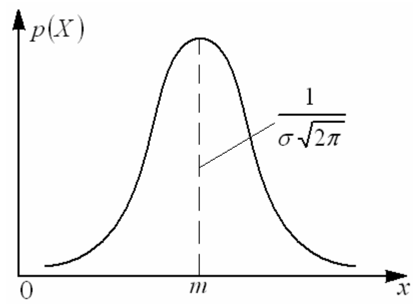


Рис. 1.1. Нормальный закон распределения

Площадь, ограниченная кривой нормального распределения и осью абсцисс, равна вероятности того, что случайная величина лежит в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Эта вероятность, как вероятность достоверного события, определяется интегралом

$$P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \tilde{m}_x)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Вероятность того, что случайная величина x находится в пределах от x_1 до x_2

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \tilde{m}_x)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (1.4)$$

Так как подинтегральная функция четная и кривая симметрична относительно максимальной ординаты, интеграл (4) можно заменить интегралом с нижним пределом, равным нулю, и верхним пределом, принимающим ряд последовательных значений. Выразим случайную величину x в долях ее σ, т.е. примем $x/\sigma = z$, $x = z\sigma$, $dx = \sigma \cdot dz$. Тогда получим интеграл

$$\Phi_0(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz, \tag{1.5}$$

который является функцией z и называется нормированной ***функцией Лапласа, или интегралом вероятностей***.

Как известно, неопределенный интеграл в формуле (1.5) не выражается через элементарные функции, поэтому для его вычисления пользуются таблицей функции Лапласа (приложение, табл.4).

Таким образом, формула для вероятности попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, на участке от x_1 до x_2

$$P(x_1 < x < x_2) = \left[\Phi\left(\frac{x_2 - \tilde{m}_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \tilde{m}_x}{\sigma_x}\right)\right]. \tag{1.6}$$

Площадь, ограниченная отрезком оси абсцисс $-z \Leftrightarrow +z$, кривой плотности вероятности и двумя ординатами, соответствующими границам отрезка, представляет собой вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

Формулы (1.1-1.2) могут быть использованы для непосредственного расчета оценок распределения случайной величины по данным ***простого статистического ряда***.

При большом числе наблюдений ($n \geq 20$) простой статистический ряд становится мало наглядным и слишком громоздким. Для достижения большей компактности и наглядности выборку преобразуют в форму интервального ***статистического*** (***вариационного***) ряда по следующему алгоритму:

a) Расположить все случайные величины в порядке возрастания от минимального до максимального значения, т.е. $x_i < x_{i+1}$;

b) Весь диапазон изменения $(x_{\min} \Leftrightarrow x_{\max})$ случайной величины разбить на k интервалов (разрядов) по формуле с округлением до ближайшего целого

$$k = 1 + 3{,}2 \lg n; \tag{1.7}$$

c) Вычислить длины всех интервалов $\Delta_x = x_i, x_{i+1}$ по формуле

$$\Delta_x = \frac{x_{\min} - x_{\max}}{k}; \tag{1.8}$$

d) Подсчитать количество значений случайной величины n_i, попавшее в i-й интервал $(1 \le i \le k)$. Если значение x_i находится в точности на границе между i-м и $(i+1)$-м интервалами, то можно считать данное значение принадлежащим в равной мере к обоим разрядам и прибавить к числам n_i и n_{i+1} по 0,5. Далее вычислить наблюдаемые частоты попадания измерений p_i^* в каждый интервал

$$p_i^* = n_i / n, \tag{1.9}$$

где n - объём выборки (общее число измерений);

e) Заполнить таблицу 1.2, в которой приведены разряды Δ_x в порядке их расположения вдоль оси абсцисс, количество значений случайной величины n_i, попавшее в i-й интервал, и соответствующие частоты p_i^*. Эта таблица называется ***статистическим (вариационный) рядом***.

Таблица 1.2

Δ_x	$x_1; x_2$	$x_2; x_3$	$\dots$	$x_i; x_{i+1}$	$\dots$	$x_{k-1}; x_k$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_i	$\dots$	n_k
$p_i^* = n_i / n$	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_i^*	$\dots$	p_k^*
p_i^* / Δ_x	$p_1^* / \Delta_{1,2}$	$p_2^* / \Delta_{2,3}$	$\dots$	$p_i^* / \Delta_{i,i+1}$	$\dots$	$p_k^* / \Delta_{k-1,k}$

Здесь Δ_x– интервал i-го разряда (в простейшем случае длины разрядов равны); $x_i; x_{i+1}$ - его границы.

Статистический (вариационный) ряд можно оформить графически в виде так называемой ***гистограммы***. Гистограмма строится следующим образом:

- на оси абсцисс вправо и влево от оси ординат откладываются интервалы разрядов Δ_x;
- на основании каждого из разрядов строится прямоугольник, высота которого равна $p_i^* / \Delta_{i,i+1}$ (строка 4, табл. 1.2).

Если длины разрядов равны, то высоты прямоугольников пропорциональны соответствующим частотам попадания случайной величины в данный разряд (рис. 1.2).

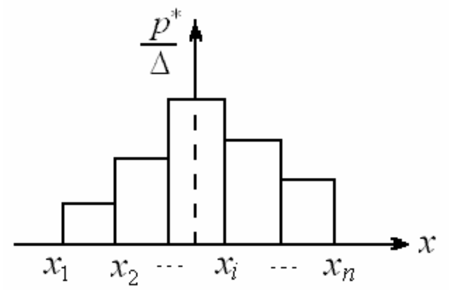


Рис. 1.2. Гистограмма

По построенному статистическому ряду вычисляются несмещенные оценки математического ожидания $\widetilde{m}_x$ и дисперсии $\widetilde{\sigma}_x^2$ (***оценка несмещенная***, если отсутствует систематическая погрешность, т.е. математическое ожидание совпадает со значением оцениваемого параметра $M[X]=X$).

$$\widetilde{m}_x = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \cdot p_i^* \ , \qquad (1.10)$$

$$\widetilde{\sigma}_x^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \widetilde{m}_x)^2 \cdot p_i^* \ , \qquad (1.11)$$

где $\bar{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ - координата середины i -го интервала.

- **Доверительная вероятность и доверительная интервал.** При оценке статистических характеристик случайных параметров часто требуется определить, к каким ошибкам приводит замена измеряемого параметра a его точечной оценкой $\widetilde{a}$ (математическое ожидание, дисперсия и др.) и, с какой вероятностью эта ошибка не выйдет за известные пределы?

Для установления точности и надежности оценки $\widetilde{a}$, в математической статистике используются понятия - ***доверительная вероятность*** β и ***доверительный интервал*** I_β .

Доверительная вероятность β – вероятность, оценивающая достоверность характеристик, полученных на основе выборочных измерений. $\beta = 1 - q$, где q - уровень значимости; обычно при статистической проверке гипотез выбирается значение доверительного уровня $\beta = 0{,}95$ или $\beta = 0{,}99$.

Уровень значимости $q = 1 - \beta$ – целесообразно выбираемый критерий проверки доверительной вероятности, позволяющий судить об оценке статистических параметров; обычно берется уровень значимости $q \le 0{,}05$ или $q \le 0{,}01$.

Величина β называется ***доверительной вероятностью*** если выполняется соотношение

$$P(\tilde{a} - \varepsilon_1 < a < \tilde{a} + \varepsilon_2) = \beta, \qquad (1.12)$$

где a - точное значение некоторого параметра; $\tilde{a}$ - оценка параметра; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - наперед заданная величина ошибки для левого и правого интервалов, определяемая доверительной вероятностью β.

Доверительный интервал $I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon_1; \tilde{a} + \varepsilon_2)$ определяет область возможных значений несмещенной оценки $\tilde{a}$ для данного параметра a.

Если закон распределения симметричный (как закон Гаусса или распределение Стьюдента), то доверительный интервал берется симметричным $\pm\varepsilon$ относительно математического ожидания.

Обычно доверительная вероятность задается, а доверительный интервал вычисляется.

Например: при доверительной вероятности $\beta = 0{,}8$, уровень значимости $q = (1 - 0{,}8) = 0{,}2$.

Пусть для измеряемого параметра x ($n = 20 \div 30$) получена несмещенная оценка $\tilde{m}_x$. Для того, чтобы оценить возможную ошибку необходимо назначить ***доверительную вероятность*** β (например, β=0,8, 0,9, 0,95, или 0,99) такую, при которой случайное событие можно считать практически достоверным. Найдем такое значение ε_β, для которого выполняется условие

$$P\left(\left|\tilde{m}_x - x_i\right| < \varepsilon_\beta\right) = \beta. \qquad (1.13)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене x на $\tilde{m}_x$, будет $\pm\varepsilon$.

Перепишем (1.13) в виде

$$P\left(\tilde{m}_x - \varepsilon < x < \tilde{m}_x + \varepsilon\right) = \beta. \qquad (1.14)$$

Равенство (1.14) означает, что неизвестное значение параметра x будет накрыто интервалом $I_\beta = \left(\tilde{m}_x - \varepsilon; \tilde{m}_x + \varepsilon\right)$ с доверительной вероятностью β.

Границы интервала I_β: $\tilde{m}_x - \varepsilon = x_1$ и $\tilde{m}_x + \varepsilon = x_2$ называются ***доверительными границами***.

При использовании метода доверительных интервалов необходимо иметь в виду два случая:

- точность измерения известна (σ_x задана);
- точность измерения неизвестна.

И в том и другом случае попадание истинного значения x в доверительный интервал гарантируется с заданной доверительной вероятностью β

$$P\left(\tilde{m}_x - \varepsilon_\beta < x < \tilde{m}_x + \varepsilon_\beta\right) = \beta ,$$

где $\tilde{m}_x$ - среднеарифметическое значение величины x, полученное при обработке экспериментальных данных; ε_β - положительная величина ошибки, определяемая доверительной вероятностью.

Таким образом, определение границ доверительного интервала в обоих случаях сводится к вычислению ε_β

$$\varepsilon_\beta = t_{кр} \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} .$$

Тогда выражение для доверительного интервала примет следующий вид

$$I_\beta = (\tilde{m}_x - t_{кр} \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}; \tilde{m}_x + t_{кр} \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}) , \qquad (1.15)$$

где $t_{кр}$ - коэффициент доверительной вероятности.

- **Доверительный интервал для математического ожидания.** Когда точность измерения σ_x известна, доверительную оценку математического ожидания можно представить через функцию Лапласа, предположив, что ошибки измерения подчиняются нормальному закону распределения, которое описывает поведение случайных величин при бесконечно большом числе наблюдений. В этом случае вероятность ошибки (13) $P\left(\left|\tilde{m}_x - x_i\right| < \varepsilon_\beta\right) = \beta$ можно записать через функцию Лапласа

$$\beta = \Phi(x)(\varepsilon_\beta \big/ \tilde{\sigma}_x \sqrt{2}) , \qquad (1.16)$$

где $\tilde{\sigma}_x = \sigma_x \big/ \sqrt{n}$; n - количество измерений; $\Phi(x)$ - функция Лапласа (приложение, табл. 4).

Разрешив уравнение (16) относительно ε_β, получим

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (1.17)$$

где $t_\beta = \sqrt{2}\Phi(x)^{-1}(\beta)$ - коэффициент доверительной вероятности; $\Phi(x)^{-1}(\beta)$ - обратная функция Лапласа, т.е. такое значение аргумента, для которого функция Лапласа равна β.

Таким образом, получим значение доверительной вероятности для математического ожидания

$$|m_x - x| < t_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (1.18)$$

Границы доверительного интервала при заданной доверительной вероятности определяются соотношениями $x_н = \widetilde{m}_x - t_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ и $x_в = \widetilde{m}_x + t_\beta \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Коэффициент доверительной вероятности t_β по Лапласу для $n \to \infty$ определяется в зависимости от β по таблице 1.3.

Таблица 1.3

β	0,8	0,85	0,9	0,95	0,98	0,99
t_β	1,282	1,439	1,643	1,960	2,325	2,576

В том случае, когда точность измерения неизвестна, для определения доверительного интервала используют распределение Стьюдента (t - распределение), которое обеспечивает возможность определения доверительных интервалов при ограниченном числе измерений.

Коэффициент доверительной вероятности t_β Стьюдента для степени свободы $r = n - 1$ определяется по таблице (приложение, табл.1) в зависимости от уровня значимости критерия проверки $q = 1 - \beta$. Доверительны интервал для математического ожидания (1.19) будет интервалом, соответствующим доверительной вероятности β.

$$I_{\beta,\widetilde{m}} = (\widetilde{m}_x - t_\beta \frac{\widetilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}; \widetilde{m}_x + t_\beta \frac{\widetilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}). \qquad (1.19)$$

- **Доверительный интервал для дисперсии** σ_x^2. В случае использования для обработки данных вариационного ряда применяют хи-квадрат χ^2 распределение (критерий Пирсона)

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{1.20}$$

с числом степеней свободы $r = k + 1 - s$, где k - число интервалов; s - число неизвестных параметров закона распределения (для нормального $s = 2$, для экспоненциального $s = 1$, для Вейсбула-Гнеденко $s = 3$). Поэтому для нормального распределения число степеней свободы $r = k - 1$. n - число независимых переменных, разбитых на k интервалов; n_i - количество результатов в i - ом интервале; $p_i^* = n_i / n$ - наблюдаемая частота попаданий измерений в каждый интервал; p_i - теоретическая вероятность попадания.

Построение доверительного интервала для дисперсии основано на том, что вероятность выхода случайной величины за пределы интервала

$$I_{\beta,\tilde{\sigma}} = \left(\frac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_1^2} \right) \tag{1.21}$$

вправо и влево были одинаковы и равны $q = 1 - \beta$.

Чтобы построить интервал I_β с такими свойствами, необходимо по таблице 2 приложения найти соответствующие два значения критерия Пирсона χ^2: одно χ_1^2, отвечающее вероятности $P_1 = q$; второе χ_2^2 – вероятности $P_2 = 1 - q$. Далее по формуле (1.21) вычисляются левая и правая границы доверительного интервала для $\tilde{\sigma}_x^2$, соответствующего доверительной вероятности β.

Пример 1. Произведено 10 независимых измерений нормально распределенной случайной величины, характеризующей в *мм* отклонение расстояния между форсунками смесительной головки ЖРД от требуемого по техническим условиям. Необходимо: 1) построить статистический ряд и гистограмму, найти оценки для математического ожидания и дисперсии; 2) построить соответствующие доверительные интервалы для математического ожидании и дисперсии при $\beta = 0{,}95$.

Результаты опытов представлены в виде простого статистического ряда (таб. 1.3).

Таблица 1.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,5	-0,2	-2,3	-1,25	-1,1	0,4	1,2	-2,5	0,5	-0,7

Если расположить результаты опытов последовательно от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ то простой статистический ряд примет вид представленный в таблице 1.4.

Таблица 1.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-2,5	-2,3	-1,25	-1,1	-0,7	-0,2	0,4	0,5	1,2	2,5

Преобразуем выборку в интервальную форму статистического (вариационного) ряда по формулам (1.7),(1.8). Здесь:

$$k = 1 + 3,2 \cdot \lg 10 = 1 + 3,2 = 4\,;$$

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{4} = \frac{2,5 - (-2,5)}{4} = 1,25\,.$$

Найдем n_i - число попаданий случайной величины в каждый разряд. Последовательным просмотром всех численных значений отнесем каждое измерение к конкретному интервалу и подсчитаем количество измерений, приходящихся на каждый интервал. Для значений x_i попадающих на границы интервалов к n_i и n_{i+1} прибавляем по ***0,5***. Далее разделим n_i на общее число измерений n и определим частоты попадания измерений в каждый интервал p_i^*. Вычислим также по формуле среднее значение $\bar{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ каждого интервала. Результаты вычислений сведем в таблицу 1.4, и построим гистограмму (рис.1.3).

Таблица 1.5

Δ_x	-2,5; -1,25	-1,25; 0	0; 1,25	1,25; 2,5
n_i	2,5	3,5	3	1
$p_i^* = n_i/n$	0,25	0,35	0,3	0,1
p_i^*/Δ_i	0,2	0,28	0,24	0,08
$\bar{x}_i$	-1,875	-0,625	0,625	1,875

Вычислим $\tilde{m}_x$ и $\tilde{\sigma}_x^2$ по формулам (1.10) и (1.11):

$$\widetilde{m}_x = \sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i \cdot p_i^* ; \qquad \widetilde{\sigma}_x^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (\overline{x}_i - \widetilde{m}_x)^2 \times p_i^* ; \overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} .$$

$$\widetilde{m}_x = -1{,}875 \cdot 0{,}25 + (-0{,}625) \cdot 0{,}35 + 0{,}625 \cdot 0{,}3 + 1{,}875 \cdot 0{,}1 =$$

$$= -0{,}469 - 0{,}219 + 0{,}188 + 0{,}188 \approx -0{,}312.$$

$$\widetilde{\sigma}_x^2 = \frac{10}{10-1}\left[(-1{,}563)^2 \cdot 0{,}25 + (-0{,}313)^2 \cdot 0{,}35 + (0{,}878)^2 \cdot 0{,}3 + (4{,}783)^2 \cdot 0{,}1\right] \approx$$

$$\approx \frac{10}{9}\left[0{,}611 + 0{,}034 + 0{,}263 + 0{,}478\right] = 1{,}54.$$

Тогда $\widetilde{\sigma}_x \approx \sqrt{1{,}54} \approx 1{,}24$.

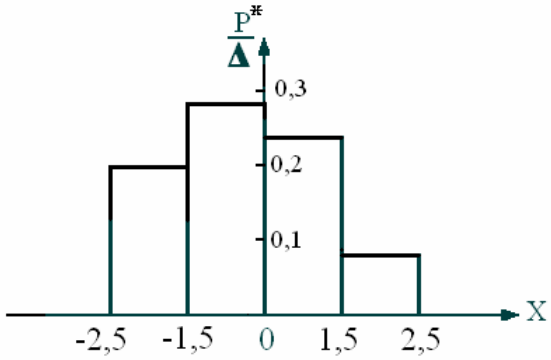


Рис. 1.3. Гистограмма

Построим доверительный интервал для $\widetilde{m}_x$.

Для $\beta = 0{,}95$, $\quad q = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, $\quad r = n - 1 = 10 - 1 = 9$ по таблице 1 приложения найдем коэффициент Стьюдента $t_{кр} \approx 2{,}262$. По формуле (1.13) вычислим допустимую ошибку

$$\pm \varepsilon = t_{кр} \cdot \frac{\widetilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = 2{,}262 \cdot \frac{1{,}24}{\sqrt{10}} \approx 0{,}888 .$$

Доверительный интервал для $\widetilde{m}_x$ будет

$$I_{\beta,\widetilde{m}} = (-0{,}312 - 0{,}888; -0{,}312 + 0{,}888) = (-1{,}2; 0{,}536). ;$$

$$x_н = -1{,}2 ; \quad x_в = 0{,}536 . \quad P(-1{,}2 < x < 0{,}536) = 0{,}95 .$$

Построим доверительный интервал для $\widetilde{\sigma}_x^2$.

Вычислим вероятности P_1 и P_2

$P_1 = 1 - q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$; $P_2 = q = 0{,}05 = 0{,}05$.

По таблице 2 приложения, для полученных P_1, P_2 и $r = n - 1 = 9$, найдем критерии Пирса $\chi_1^2 \approx 2{,}53$ и $\chi_2^2 \approx 19{,}68$.

Вычислим левую и правую границы доверительного интервала $I_{\beta,\tilde{\sigma}^2} = \left(\dfrac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_2^2}, \dfrac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_1^2} \right)$:

левая граница - $\dfrac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_2^2} = \dfrac{(10-1)\cdot 1{,}54}{19{,}68} = 0{,}70$,

правая граница - $\dfrac{(n-1)\cdot\tilde{\sigma}_x^2}{\chi_1^2} = \dfrac{(10-1)\cdot 1{,}54}{2{,}53} = 5{,}48$.

Доверительный интервал для дисперсии

$$I_{\beta,\sigma^2} \approx (0{,}70;\ 5{,}48).$$

Ответ: $\tilde{m}_x \approx -0{,}312$; $\tilde{\sigma}_x^2 \approx 1{,}54$;

$I_{\beta,\tilde{m}} \approx (-1{,}2; 0{,}536)$; $I_{\beta,\tilde{\sigma}^2} \approx (0{,}70;\ 5{,}48)$.

Задание к лабораторной работе №1

Произведено n независимых измерений над нормально распределенной случайной величиной X, характеризующей процент выхода бракованных форсунок с технологической линии. Результаты опытов сведены в таблицы 1.6 - 1.15.

Необходимо, используя данные варианта задания:

1) Преобразовать простой статистический ряд в вариационный и построить гистограмму случайного процесса;

2) Найти математическое ожидания $\tilde{m}_x$ и дисперсию $\tilde{\sigma}_x^2$ для оценки статистического ряда.

3) Построить соответствующие доверительные интервалы для математического ожидания $\tilde{m}_x$ и дисперсии $\tilde{\sigma}_x^2$ с заданной доверительной вероятностью β.

Порядок выполнения работы

1. Преобразовать простой статистический ряд в форму вариационного ряда и построить гистограмму:
- вычислить количество интервалов k и длину разрядов Δ;
- определить количество попаданий в интервалы n_i;
- вычислить наблюдаемую частоту попаданий p_i^*;
- оформить статистический ряд в виде таблицы;
- построить гистограмму.

2. Найти оценки для математического ожидания $\widetilde{m}_x$ и дисперсии $\widetilde{\sigma}_x^2$.

3. Построить доверительный интервал для $\widetilde{m}_x$ с заданной доверительной вероятностью β:
- найти r и по заданному β вычислить q;
- по таблице 1 приложения найти критерий Стьюдента $t_{кр}$;
- построить доверительный интервал $I_{\beta,\widetilde{m}}$.

4. Построить доверительный интервал для $\widetilde{\sigma}_x^2$;
- по значению q вычислить вероятности P_1 и P_2;
- по таблице 2 приложения найти критерии Пирса χ_1^2, χ_2^2;
- построить доверительный интервал $I_{\beta,\widetilde{\sigma}^2}$.

5. Сделать выводы, оформить работу.

Контрольные вопросы

1) Простой статистический ряд.
2) Математическое ожидание.
3) Дисперсия.
4) Гистограмма.
5) Функция Лапласа.
6) Закон нормального распределения.
7) Доверительная вероятность.
8) Доверительный интервал.

Таблицы №№ 1.6 -1.15 вариантов задания для выполнения лабораторной работы №1

Таблица № 1.6 $\beta = 0,95$		Таблица № 1.7 $\beta = 0,9$		Таблица № 1.8 $\beta = 0,8$		Таблица № 1.9 $\beta = 0,95$		Таблица № 1.10 $\beta = 0,98$	
i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	2,201	1	10,95	1	4,77	1	7,49	1	7,89
2	3,19	2	8,23	2	3,75	2	5,56	2	7,52
3	1,99	3	12,88	3	3,79	3	5,80	3	6,29
4	2,03	4	10,47	4	6,39	4	5,87	4	7,86
5	3,04	5	11,47	5	5,98	5	5,39	5	5,84
6	0,19	6	11,68	6	4,23	6	4,34	6	8,88
7	3,16	7	11,18	7	4,40	7	5,25	7	7,44
8	1,33	8	10,00	8	5,00	8	7,161	8	7,22
9	0,42	9	9,42	9	5,212	9	7,22	9	7,25
10	2,58	10	10,86	10	3,54	10	5,3	10	8,22
11	3,88	11	9,44	11	5,41	11	8,20	11	6,47
12	2,73	12	10,81	12	5,12	12	6,83	12	7,67
13	2,59	13	9,73	13	4,94	13	6,90	13	6,89
14	1,08	14	11,08	14	4,49	14	6,51	14	8,52
15	2,09	15	11,06	15	4,84	15	5,29	15	6,69
16	3,5	16	10,99	16	3,77	16	6,86	16	8,72
17	0,9	17	9,9	17	5,25	17	4,84	17	6,58
18	2,28	18	10,54	18	5,14	18	7,88	18	6.57
19	2,14	19	8,65	19	6,49	19	6,34	19	7,65
20	1,72	20	9,56	20	4,56	20	5,08	20	6,95

Таблица № 1.11 $\beta = 0{,}95$		Таблица № 1.12 $\beta = 0{,}99$		Таблица № 1.13 $\beta = 0{,}9$		Таблица № 1.14 $\beta = 0{,}8$		Таблица № 1.15 $\beta = 0{,}99$	
i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	7,89	1	8.14	1	2.55	1	10.00	1	14.04
2	9,52	2	8.73	2	3.54	2	9.41	2	14.92
3	7,88	3	9.61	3	2.21	3	10.86	3	15.83
4	9,72	4	9.21	4	4.4	4	9.44	4	15.43
5	7,57	5	7.34	5	4.57	5	10.81	5	14.27
6	7,57	6	9.88	6	3.06	6	9.73	6	15.42
7	8,65	7	9.14	7	1.8	7	11.08	7	14.73
8	6,87	8	10.11	8	1.45	8	11.16	8	13.75
9	7,92	9	10.05	9	3.71	9	10.99	9	13.79
10	8,07	10	9.08	10	2.22	10	9.90	10	16.39
11	5,86	11	8.48	11	2.55	11	10.54	11	15.98
12	7,50	12	9.12	12	1.31	12	10.10	12	15.89
13	8,83	13	8.54	13	4.49	13	8.65	13	15.51
14	8,08	14	9.54	14	2.26	14	9.56	14	14.28
15	8,56	15	8.21	15	3.42	15	9.44	15	15.86
16	7,25	16	10.41	16	1.9	16	9.49	16	13.84
17	8,61	17	10.57	17	2.61	17	8.81	17	16.88
18	7,77	18	9.06	18	3.28	18	6.72	18	15.43
19	8,59	19	7.73	19	4.23	19	10.43	19	15.21
20	7,04	20	10,85	20	4.22	20	11,35	20	15.25

1.2. Лабораторная работа 2. Выравнивание статистических рядов

Цель лабораторной работы - для заданного объема статистического материала определить наиболее подходящую функцию плотности распределения случайной величины.

Краткие сведения из теории

- **Выравнивание статистических рядов.** При ограниченном числе наблюдений в полученном статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, давшие именно эти, а не другие результаты. На практике часто приходится решать задачу теоретического описания функции распределения для данного статистического ряда, отражающую лишь существенные закономерные черты, а не случайные аномалии, связанные с ограниченным объемом выборки. Такая задача подбора теоретической плавной кривой распределения называется выравниванием (сглаживанием) статистических рядов. При этом вид теоретической кривой распределения может быть оценен по построенной гистограмме или определен заранее из соображений, связанных с сущностью задачи.

Аналитическая функция выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров. Следовательно, задача выравнивания статистического ряда может быть переведена в задачу выбора таких значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями будет наилучшим.

Предположим, что исследуемая величина X есть ошибка измерения, возникающая в результате суммарного воздействия множества случайных факторов. Оценка построенной гистограммы позволяет считать, что величина X подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} . \qquad (2.1)$$

Тогда задача выравнивания переходит в задачу рационального выбора двух параметров m_x и σ в выражении (2.1). При этом m_x характеризует положение распределения на оси абсцисс, а σ - форму кривой распределения.

Один из методов, который может быть использован для решения этой задачи, называется - ***метод моментов***. Согласно методу моментов, параметры выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая нормального распределения $f(x)$ зависит от двух параметров, то эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание m_x и дисперсия D_x теоретического распределения совпадали с соответствующими наблюдаемыми статистическими характеристиками

$\widetilde{m}_x$ и $\widetilde{D}_x$. То есть необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$m_x = \widetilde{m}_x\ , \quad D_x = \widetilde{D}_x\,. \tag{2.2}$$

Если кривая $f(x)$ зависит от трех параметров, то можно подобрать их так, чтобы совпали три момента и т.д. При выравнивании статистических рядов нецелесообразно пользоваться моментами выше четвертого порядка, так как при этом существенно возрастает объем вычислений, а точность решения задач практически не повышается.

Запишем выражение (2.1) нормального закона с учетом (2.2)

$$f(x) = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\widetilde{m}_x)^2}{2\widetilde{\sigma}_x^2}}\,. \tag{2.3}$$

Для наглядности теоретическое распределение можно оформить в виде графика, совмещая кривую плотности вероятностей и гистограмму. Для этого надо вычислить значения теоретической кривой в граничных точках интервалов разбиения. Пользуясь таблицей 3 приложения, вычислим значение $f(x)$ на границах разрядов и заполним таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Δ_x	$x_1\ ;\ x_2$	$x_2\ ;\ x_3$	…	$x_i\ ;\ x_{i+1}$	…	$x_k\ ;\ x_{k+1}$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_i)$	…	$f(x_k)$

По результатам вычислений строится на одном графике гистограмма и выравнивающая ее кривая распределения (рис.2.1).

- **Критерий согласия.** После выравнивания статистического распределения с помощью теоретической кривой нужно оценить возникшие между ними некоторое неизбежное расхождение. Необходимо ответить на вопрос, объясняется ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная нами кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение.

Для проверки согласованности теоретического и статистического распределений в качестве меры расхождения между ними используются так называемые «критерии согласия». Рассмотрим один из наиболее часто применяемых критериев согласия – критерий Пирсона χ^2 (хи-квадрат):

$$\chi^2 = n\sum_{1}^{k} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}\,, \tag{2.4}$$

где p_i^* - наблюдаемая частота попаданий измерений в каждый интервал;

p_i - теоретическая вероятность попадания; n - число независимых переменных, разбитых на k интервалов.

Для удобства вычислений с учетом, что $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где n_i - число значений в i -ом разряде, формула (2.4) принимает вид критерия Пирсона

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{2.5}$$

Распределение χ^2 зависит от параметра $r = k + 1 - s$, называемого числом степеней свободы, где k - число интервалов; s - число неизвестных параметров закона распределения (для нормального $s = 2$, для экспоненциального $s = 1$, для Вейсбула-Гнеденко $s = 3$). Поэтому для нормального распределения число степеней свободы $r = k - 1$.

Для распределения χ^2 составлены специальные таблицы (приложение табл. 2). В таблице 2 приложения входами являются: значение вероятности p (или уровень значимости q) и число степеней свободы r. Числа, стоящие в таблице, представляют собой соответствующие значения χ^2. Пользуясь этими таблицами, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность p того, что величина, распределенная по закону χ^2, превзойдет это значение.

По таблице 2 приложения находится граница $\chi^2_{кр}$ критической области для заданного уровня значимости критерия q и числа степеней свободы r. Если

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}, \tag{2.6}$$

то можно признать расхождения между теоретическими и статистическими распределениями несущественными, то есть выборочный материал не противоречит гипотезе о том, что случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. В противном случае эта гипотеза не подтверждается.

Пример 2. С целью исследования закона распределения отклонения диаметра форсунок от номинального размера взята выборка объемом *n = 20.* Выборка оформлена в виде простого статистического ряда.

Таблица 2.2

i=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

0.29	1.19	0	0,03	1,04	-1,8	1,16	-0,17	-1,6	0,58
i=11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,8	0,74	0,59	-0,93	0,09	1,51	-1,12	0,28	0,14	-0,29

Необходимо подобрать теоретическую функцию распределения и выровнять ряд с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}9$.

Преобразуем простой статистический ряд в статистический (вариационный). Для этих целей выберем $k = 6$.

Определим интервал разбиения вариационного ряда Δ_x

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6} = \frac{1{,}8 - (-1{,}8)}{6} = 0{,}6.$$

Оформим результаты в виде таблицы

Таблица 2.3

Δ_x	-1,8; -1,2	-1,2; -0,6	-0,6; 0	0; 0,6	0.6; 1,2	1,2; 1,8
n_i	2	3	1,5	7,5	4	2
p_i^*	0,1	0,15	0,075	0,375	0,2	0,1
p_i	0,061	0,15	0,2464	0,2464	0,15	0,061

Построим гистограмму (рис. 2.1).

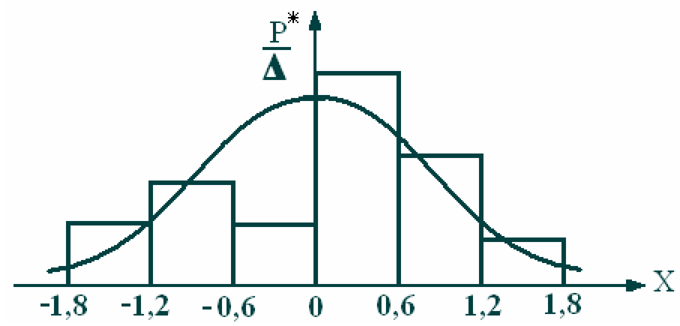


Рис.2.1. Гистограмма и выравнивающая ее кривая распределения

Учитывая вид гистограммы, выберем в качестве теоретического нормальный закон распределения, тогда функция плотности вероятности будет иметь следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\ . \qquad (2.7)$$

Для выравнивания статистического ряда используем метод моментов, для чего вычислим $\widetilde{m}_x$ и $\widetilde{\sigma}_x$

$$\widetilde{m}_x=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{x}_i\cdot p_i^*=-1{,}5\times0{,}1-0{,}9\times0{,}15-0{,}3\times0{,}075+$$
$$+0{,}3\times0{,}375+0{,}9\times0{,}2+1{,}5\times0{,}1\approx0{,}055.$$

$$\widetilde{D}_x=\widetilde{\sigma}^2=\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\widetilde{x}_i-\widetilde{m}_x)^2\cdot p_i^*=\frac{20}{19}(1{,}555\times0{,}1+0{,}955\times0{,}15+$$
$$+0{,}355\times0{,}075+0{,}245\times0{,}375+0{,}842\times0{,}2+1{,}445\times0{,}1)\approx0{,}79.$$

где $\overline{x}_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Тогда

$$\widetilde{\sigma}_x=\sqrt{\widetilde{D}_x}\approx0{,}89\,.$$

Заменяя в формуле (6) $m_x=\widetilde{m}_x$ и $\sigma_x=\widetilde{\sigma}_x$ получим теоретическую кривую плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{0{,}89\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-0{,}055)^2}{2\times0{,}79}}\ . \qquad (2.8)$$

Построим график этой кривой. Для этого вычислим по формуле (2.8) значения $f(x)$ в граничных точках разбиения на интервалы. Результаты вычислений сведем в таблицу 2.4. Для упрощения вычислений функции $f(x)$ можно использовать таблицу 3 приложения.

Таблица 2.4

x	-1,8	-1,2	-0,6	0	0,6	1,2	1,8
$\approx f(x)$	0,07895	0,19419	0,3332	0,3989	0,3332	0,1942	0,07895

Изобразим график на рис. 2.1. Получим плавную кривую плотности вероятности нормального распределения.

Вычислим теоретические вероятности p_i попадания случайной величину в i-й интервал и занесем в таблицу 2.3. Для нормального закона распределения

$$P_i = \Phi(\frac{x_{i+1} - m_x}{\sigma_x}) - \Phi(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}) . \qquad (7)$$

Функцию Φ (Лапласа) находим по таблице 4 приложения.
Результаты сведем в таблицу 2.5.

Таблица 2.5

Δ_x	-1,8; -1,2	-1,2; -0,6	-0,6; 0	0; 0,6	0.6; 1,2	1,2; 1,8
n_i	2	3	1,5	7,5	4	2
p_i^*	0,1	0,15	0,075	0,375	0,2	0,1
p_i	0,061	0,15	0,2464	0,2464	0,15	0,061

По формуле (3) вычислим значение χ^2:

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} ,$$

$$\chi^2 = 20\left[\frac{0,039}{0,061} + 0 + \frac{0,1715}{0,2464} + \frac{0,05}{0,15} + \frac{0,039}{0,061}\right] = 5,06 .$$

Так как оценивались два параметра $\tilde{m}_x$ и $\tilde{D}_x$, то $s = 2$, тогда $r = k + 1 - s$ = 6 +1 - 2 =5.

Вычислим уровень значимости по заданной доверительной вероятности $\boldsymbol{q}$ = 100(1 - β) = 10%.

По таблице 2 приложения найдем $\chi^2_{кр} = 6,25$.

Проверим неравенство (5):

$$\chi^2 = 5,06 < 6,25 = \chi^2_{кр} .$$

Неравенство выполняется.

Можно считать, что случайная величина *X,* определяемая первоначальной выборкой, не противоречит гипотезе о нормальности ее распределения с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{0,89\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-0,055)^2}{2\times 0,79}} .$$

Задание к лабораторной работе № 2

Используя выборки задания для лабораторной работы № 1 (табл. 1.6-1.15), выровнять статистический ряд с помощью нормального распределения. При построении гистограмм проверить разбивку интервала изменения случайной величины X на 6 разрядов.

Порядок выполнения работы

1. Преобразовать простой статистический ряд в статистический (вариационный) и оформить в виде таблицы. Построить гистограмму. Выбрать вид теоретической кривой $f(x)$.

2. Используя метод моментов, подобрать параметры теоретического распределения. Записать теоретическую кривую в виде функции плотности вероятности.

3. Изобразить кривую плотности вероятности в виде графика, вычислить p_i. Оформить выборку в виде таблицы.

4. Вычислить значения χ^2. Определить число степеней свободы r и уровень доверительной вероятности q. По таблице 2 приложения определить $\chi^2_{кр}$.

5. Проверить неравенство $\chi^2 < \chi^2_{кр}$.

6. Сделать выводы. Оформить работу.

Контрольные вопросы

1. Выравнивание статистических рядов.
2. Нормальный закон распределения.
3. Метод моментов.
4. Критерий согласия Пирсона.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Распределение Стьюдента (t – распределение)

n	$q = 1 - \beta$								
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,043	6,859
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1, 812	2,228	2,764	3,169	4,583
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922

19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,833
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,919	3,792
23	0,685	0,868	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,402	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 2

Значение χ^2 в зависимости от q и r

r	q							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,8	0,7	0,5	0,99
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	3,84
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	5,99
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	7,82
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	9,49
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	11,07
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	12,59
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	14,07
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	15,51
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	16,92
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	18,31
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	19,68
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	21,0
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	22,4
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	23,7
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	25,0
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	26,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	27,6
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	28,9
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	30,1
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	31,4
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	32,7
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	33,9
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	35,2
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	36,4
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	37,7
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	38,9
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	40,1
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	41,3
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	42,6
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	43,8

r	q						
	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,4
11	12,90	14,63	13,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица 3

Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Значение сотых долей x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3870	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3597
0,4	3683	3668	3652	3637	3421	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3191	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	3541	2516	2492	2458	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2151	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1335	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107

Продолжение табл.3

x	Значение сотых долей x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0014	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0110	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 4

Значение функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,27	0,1064	0,54	0,2054	0,81	0,2910
0,01	0,0040	0,28	0,1102	0,55	0,2088	0,82	0,2939
0,02	0,0080	0,29	0,1141	0,56	0,2123	0,83	0,2967
0,03	0,0120	0,30	0,1179	0,57	0,2157	0,84	0,2995
0,04	0,0160	0,31	0,1217	0,58	0,2190	0,85	0,3023
0,05	0,0199	0,32	0,1255	0,59	0,2224	0,86	0,3051
0,06	0,0239	0,33	0,1293	0,60	0,2257	0,87	0,3078
0,07	0,0279	0,34	0,1331	0,61	0,2291	0,88	0,3106
0,08	0,0319	0,35	0,1368	0,62	0,2324	0,89	0,3133
0,09	0,0359	0,36	0,1406	0,63	0,2357	0,90	0,3159
0,10	0,0398	0,37	0,1443	0,64	0,2389	0,91	0,3186
0,11	0,0438	0,38	0,1480	0,65	0,2422	0,92	0,3212
0,12	0,0478	0,39	0,1517	0,66	0,2454	0,93	0,3238
0,13	0,0517	0,40	0,1554	0,67	0,2486	0,94	0,3264
0,14	0,0557	0,41	0,1591	0,68	0,2517	0,95	0,3286
0,15	0,0596	0,42	0,1628	0,69	0,2549	0,96	0,3315
0,16	0,0636	0,43	0,1664	0,70	0,2580	0,97	0,3340
0,17	0,0675	0,44	0,1700	0,71	0,2611	0,98	0,3365
0,18	0,0714	0,45	0,1736	0,72	0,2642	0,99	0,3389
0,19	0,0753	0,46	0,1772	0,73	0,2673	1,00	0,3413
0,20	0,0793	0,47	0,1808	0,74	0,2703	1,01	0,3438
0,21	0,0832	0,48	0,1844	0,75	0,2734	1,02	0,3461
0,22	0,0871	0,49	0,1879	0,76	0,2764	1,03	0,3485
0,23	0,0910	0,50	0,1915	0,77	0,2794	1,04	0,3508
0,24	0,0948	0,51	0,1950	0,78	0,2823	1,05	0,3531
0,25	0,0987	0,52	0,1985	0,79	0,2852	1,06	0,3554
0,26	0,1026	0,53	0,2019	0,80	0,2881	1,07	0,3577
1,08	0,3599	1,35	0,4115	1,62	0,4474	1,89	0,4706
1,09	0,3621	1,36	0,4131	1,63	0,4484	1,90	0,4713

Продолжение табл. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,10	0,3643	1,37	0,4147	1,64	0,4495	1,91	0,4719
1,11	0,3665	1,38	0,4162	1,65	0,4505	1,92	0,4726
1,12	0,3686	1,39	0,4177	1,66	0,4515	1,93	0,4732
1,13	0,3708	1,40	0,4192	1,67	0,4525	1,94	0,4738
1,14	0,3729	1,41	0,4207	1,68	0,4535	1,95	0,4744
1,15	0,3749	1,42	0,4222	1,69	0,4545	1,96	0,4750
1,16	0,3770	1,43	0,4236	1,70	0,4554	1,97	0,4756
1,17	0,3790	1,44	0,4251	1,71	0,4564	1,98	0,4761
1,18	0,3810	1,45	0,4265	1,72	0,4573	1,99	0,4767
1,19	0,3830	1,46	0,4279	1,73	0,4582	2,00	0,4772
1,20	0,3849	1,47	0,4292	1,74	0,4591	2,02	0,4783
1,21	0,3869	1,48	0,4306	1,75	0,4599	2,04	0,4793
1,22	0,3883	1,49	0,4319	1,76	0,4608	2,06	0,4803
1,23	0,3907	1,50	0,4332	1,77	0,4616	2,08	0,4812
1,24	0,3925	1,51	0,4345	1,78	0,4625	2,10	0,4821
1,25	0,3944	1,52	0,4357	1,79	0,4633	2,12	0,4830
1,26	0,3962	1,53	0,4370	1,80	0,4641	2,14	0,4838
1,27	0,3980	1,54	0,4382	1,81	0,4649	2,16	0,4846
1,28	0,3997	1,55	0,4394	1,82	0,4656	2,18	0,4854
1,29	0,4015	1,56	0,4406	1,83	0,4664	2,20	0,4861
1,30	0,4032	1,57	0,4418	1,84	0,4671	2,22	0,4868
1,31	0,4049	1,58	0,4429	1,85	0,4678	2,24	0,4875
1,32	0,4066	1,59	0,4441	1,86	0,4686	2,26	0,4881
1,33	0,4082	1,60	0,4452	1,87	0,4693	2,28	0,4887
1,34	0,4099	1,61	0,4463	1,88	0,4699	2,30	0,4893
2,32	0,4898	2,54	0,4945	2,76	0,4971	2,98	0,4986
2,34	0,4904	2,56	0,4948	2,78	0,4973	3,00	0,49865
2,36	0,4909	2,58	0,4951	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,38	0,4913	2,60	0,4953	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,40	0,4918	2,62	0,4956	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,42	0,4922	2,64	0,4959	2,86	0,4979	3,80	0,49992

Окончание табл. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,44	0,4927	2,66	0,4961	2,88	0,4980	4,00	0,49996
2,46	0,4931	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,50	0,49999
2,48	0,4934	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,49999
2,50	0,4938	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,52	0,4941	2,74	0,4969	2,96	0,4985		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных/Дж. Бендат, А. Пирсол. М.: Мир, 1989. – 540 с.

2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. – 416 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

4. Голиков В.К., Новосельцев В.И., Сербулов Ю.С. Лабораторный практикум по математической статистике. – Воронеж: Центрально-Черноземное книжное издательство, 2004. – 164 с.

5. Допуски и посадки. Учебное пособие. 3-е изд. / В.И. Анухин.: Питер. 2004. – 207 с.

6. Зябрева Н.Н. и др. Пособие к решению задач по курсу «Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения». Учеб. пособие для вузов. М.: «Высшая школа», 1977. – 204 с.

7. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. - М.: высшая школа, 1992. -224 с.

8. Математическая статистика /В.М. Иванов, В.Н. Калинин, Л.А. Неклумов и др.: Высшая школа, 1981. – 371 с.

9. Никифоров А.Д. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения – М.: «Высшая школа», 2000. – 510 с.

10. Якушев А.И. и др. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения: Учебник для втузов /А.И. Якушев, Л.Н. Воронцов, Н.М. Федотов – М.: Машиностроение, 1986. – 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………... 1
1. Статистическая оценка распределения случайных величин на основе опытных данных………………….. 3
1.1. Лабораторная работа 1. Определение числовых характеристик статистического распределения……… 3
1.2. Лабораторная работа 2. Выравнивание статистических рядов…………………………….………….. 21
Приложения…………………………………….......... 29
Библиографический список……………………………. 35

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам № 1-2 по курсу
«Метрология, стандартизация и сертификация»
для студентов специальности 160700.65, 24.05.02
«Проектирование авиационных и ракетных двигателей»
очной формы обучения

Часть 1

Составители: Скоморохов Геннадий Иванович
Пригожин Антон Александрович

В авторской редакции

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14