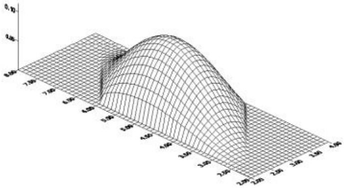
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»

Кафедра высшей математики
и физико-математического моделирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Функции нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов по направлению подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профили «Системы автоматизированного проектирования»,
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения
Часть 1



Воронеж 2012

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.Г. Глушко,
канд. физ.-мат. наук А.П. Дубровская

УДК 517.9

Методические указания для организации самостоятельной работы по изучению раздела «Функции нескольких переменных» курса «Математический анализ» для студентов специальностей 220300 «Системы автоматизированного проектирования», 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» очной формы обучения. Ч. 1/ ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Е.Г. Глушко, А.П. Дубровская. Воронеж, 2012. 52 с.

В методических указаниях содержатся основные теоретические сведения по дифференциальному исчислению функций нескольких переменных. Приводится большое количество решенных типовых задач, задач для самостоятельного решения.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS Word 2003 и содержатся в файле ФНП1.docx .

Ил. 5. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Ломакин

Ответственный за выпуск зав. кафедрой
д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

Введение

Многие вопросы естествознания приводят к рассмотрению такой зависимости между несколькими переменными величинами, при которой значение одной из этих переменных величин полностью определяется значениями остальных переменных.

Так, например, при рассмотрении каких-либо физических характеристик тела (плотности или температуры) нам приходится учитывать изменение этих характеристик при переходе от одной точки тела к другой. Поскольку каждая точка тела определяется тремя декартовыми координатами x, y, z, то рассматриваемые характеристики определяются значениями трех переменных.

При рассмотрении физических процессов, меняющихся во времени, значения физических характеристик определяются значениями четырех переменных: трех координат точки x, y, z и времени t.

Для изучения такого рода зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования этих функций методами дифференциального исчисления. Основные положения теории функций нескольких переменных необходимы для изучения кратных и криволинейных интегралов, систем дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, многомерных случайных величин в теории вероятностей и т.д.

1.ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Во многих вопросах геометрии, естествознания и т.д. приходится иметь дело с функциями двух, трех и более перемених

Пример. Решая уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ относительно z при $z\geq 0$, получим $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, то есть z - функция двух переменных. Определена эта функция в круге $x^2+y^2\leq R^2$.

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в области D и обозначают $z=f(x,y)$.

Функцию двух переменных можно задать аналитически или таблично.

Определение. Совокупность пар (x,y) значений x и y, при которых определена функция $z=f(x,y)$ называется областью определения или областью существования функции.

Пример. Найти и вычертить область определения функции:

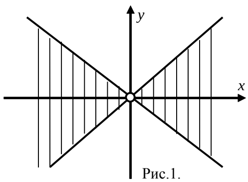


Рис.1.

1) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

Решение. Функция определена при $-1\leq\dfrac{y}{x}\leq 1$ и $x\neq 0$.

При $x>0$ получаем $-x\leq y\leq x$.

Такому двойному неравенству удовлетворяют координаты точек плоскости, лежащие ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = -x$ при $x > 0$. При $x < 0$ получаем неравенство $-x \geq y \geq x$, справедливое для точек плоскости, лежащих выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = -x$.

2) $z = \dfrac{\arccos(x+2)}{\sqrt{y^2 - 2y + 3x}}$.

Решение. Функция определена при $\begin{cases} -1 \leq x + 2 \leq 1; \\ y^2 - 2y + 3x > 0; \end{cases}$

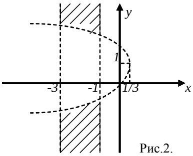


Рис.2.

или

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq -1; \\ (y-1)^2 > -3(x - \frac{1}{3}). \end{cases}$$

Таким образом, область определения функции двух переменных это совокупность точек плоскости или части плоскости, ограниченная линиями.

Линию, ограничивающую данную область будем называть границей области. Точки области, не лежащие на границе будем называть внутренними точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой или незамкнутой. Если к области относятся и точки границы, то область называется замкнутой. Область называется ограниченной, если существует такая константа С, что расстояние любой точки области от начала координат O меньше C, то есть $|OM| < C$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти и вычертить области определения функций двух переменных:

1.1. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$. 1.2. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

1.3. $z=\ln(-x-y)$. 1.4. $z=\sqrt{y^2-2x+4}$.

1.5. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}$. 1.6. $z=\ln x+\ln\cos y$.

1.7. $z=\sqrt{4-x^2+y}$. 1.8. $z=\sqrt{xy}+\sqrt{x-y}$.

2. Найти области определения функций трех переменных:

2.1. $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$; 2.2. $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$.

Ответ: 1.1. $x\le x^2+y^2<2x$; 1.2. $x\le x^2+y^2<2x$; 1.3. $x+y<0$. 2.1. $0\le x^2+y^2\le z^2$, $z\ne 0$; 2.2. $x^2+y^2-z^2<1$.

Геометрическим <u>изображением (графиком)</u> функции двух переменных $z=f(x,y)$ является поверхность в пространстве $Oxyz$.

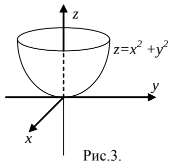


Рис.3.

Пример. Графиком функции $z=x^2+y^2$ является параболоид вращения.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и более переменных.

<u>Определение</u>. Если каждой рассматриваемой совокупности

n значений переменных $x, y, z, ..., t$ соответствует определенное значение переменной w, то w называют функцией n независимых переменных и записывают $w = F(x, y, z, ..., t)$.

Геометрическое изображение функций трех и большего числа переменных не имеет простого геометрического смысла.

2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

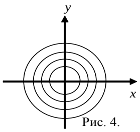


Рис. 4.

В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции, рассматривая ее линии уровня (или поверхности уровня).

Определение. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение: $f(x, y) = C,\ C = const.$

Пример. Для функции $z = x^2 + y^2$ линиями уровня является семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = C$ с центром в точке $O(0,0)$.

Определение. Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических приложениях. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим соответственно изотермы и изобары, знание которых важно для прогноза погоды.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найти линии уровня в явном виде $y = \varphi(x, C)$:

1.1. $z = xy^3$. 1.2. $z = x\ln(x^2 + y)$. 1.3. $z = e^{x+y}$.

1.4. $z = \sqrt{y - x^2}$. 1.5. $z = \dfrac{1}{x + 2y}$. 1.6. $z = \dfrac{y - x^2}{x^2}$.

1.7. $z = tg(x + y)$.

3. ЧАСТНОЕ И ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть $z = f(x, y)$ - функция двух независимых переменных x и y. Дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

будем называть частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной x.

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, функция получает приращение, называемое частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной y: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Если обе переменные x и y получили соответственно приращения Δx и Δy, то соответствующее приращение функции:

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется полным приращением функции $f(x, y)$.

Заметим, что полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений этой функции $\Delta f(x,y) \neq \Delta_x f(x,y) + \Delta_y f(x,y)$.

4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, то есть совокупность точек, лежащих внутри круга радиуса r, с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть функция $z = f(x,y)$ определенна в некоторой замкнутой области D плоскости Oxy, точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в области D или на ее границе.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x,y)$ из окрестности радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

В этом случае принято писать $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A$.

Заметим, что предел функции двух переменных не должен зависеть от того, по какой линии точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$.

Примеры.

1**.** Найти предел функции $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}$ в начале координат.

Решение. Поскольку, $0 \le \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \le x^2$, а $x^2 \to 0$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0$.

2. Найти предел функции $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ в начале координат.

Решение. Найдем предел функции по любой прямой $y = kx$, $k \neq 0$. $f(x, kx) = \dfrac{kx}{x^2 + k^2} \to 0$ при $x \to 0$. Найдем теперь предел этой функции по параболе $y = x^2$.

$f(x, x^2) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, предела данная функция в точке $(0, 0)$ не имеет.

3. Найти предел функции $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{xy}$ в начале координат.

Решение**.** Обычного предела функция в начале координат не имеет, поскольку не определена ни в какой окрестности начала координат. Однако, на множестве E, т.е. на плоскости без координатных осей, она имеет предел, равный нулю.
Заметим, если доопределить функцию на координатных осях нулем, то функция будет иметь и обычный предел, равный нулю.

4.Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

Решение. Представим функцию в виде $(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}=[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}]^{\frac{2y}{x+y}}$. Так как $z=xy\to 0$ при $x\to 0, y\to 2$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$

Далее, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{2y}{x+y}=2.$ Поэтому искомый предел равен e^2.

5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{\sin(x^2+y^2-2x-4y+5)}{x+y-3}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам $\begin{cases} x=x_0+\rho\cos\varphi,\\ y=y_0+\rho\sin\varphi.\end{cases}$ Центр полярной системы находится в точке (x_0,y_0), полярная ось параллельна оси Ox. При стремлении $x\to x_0, y\to y_0$ полярный радиус $\rho\to 0$. В нашем примере $x_0=1,\ y_0=2$, поэтому $\begin{cases} x=1+\rho\cos\varphi,\\ y=2+\rho\sin\varphi.\end{cases}$ Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{\sin(x^2+y^2-2x-4y+5)}{x+y-3}=$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin((1+\rho\cos\varphi)^2+(2+\rho\sin\varphi)^2-2(1+\rho\cos\varphi)-4(1+\rho\sin\varphi)+5)}{(1+\rho\cos\varphi)+(2+\rho\sin\varphi)-3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin(\rho^2)}{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{(\cos\varphi+\sin\varphi)}=0.$$

6. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

Решение. Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по прямой $y=kx$, проходящей через точку O. Тогда получим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$. Таким образом, приближаясь к точке $O(0,0)$ по различным прямым, соответствующим разным значениям k, получаем разные предельные значения. Отсюда следует, что предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{xy+y^2}$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{xy+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2(\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi)} = \frac{1}{\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}.$$

Так как значение предела зависит от φ, то при подходе к точке (0,0) по разным направлениям получаются различные предельные значения. Следовательно, функция в этой точке не имеет предела.

Определение. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x,y)$. Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если имеет место равенство $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Из определения следует, что для непрерывности функции в точке должны быть выполнены следующие условия:

1) функция $z = f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$;
2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;
3) предел равен значению функции в точке $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Если в некоторой точке не выполняется хотя бы одно из условий 1)-3), то точка называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

Приведем еще одно определение непрерывности функции в точке, эквивалентное данному выше:

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если :

1) функция определена в этой точке;

2) бесконечно малым приращениям $\Delta x, \Delta y$ соответствует бесконечно малое приращение Δz.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Примеры.

1. Исследовать непрерывность функции $z = x^2 + y^2$. Решение. Найдем полное приращение функции

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2] - (x^2+y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Тогда $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, то есть функция непрерывна.

2. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Решение. Данная функция не определена в тех точках, где знаменатель дроби равен нулю: $x^3 - y^3 = 0$, то есть функция не определена на прямой $y = x.$ В остальных точках плоскости функция определена и непрерывна. Множество точек разрыва данной функции есть прямая $y = x.$ Отметим, что в любой точке $A(a,a)$, лежащей на прямой $y = x$ и не совпадающей с точкой $O(0,0)$, существует предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \dfrac{x-y}{x^3-y^3} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}} \dfrac{1}{x^2+xy+y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$ Поэтому точки $A(a,a)$ при $a \neq 0$ можно назвать точками устранимого разрыва: если положить $z(a,a) = \dfrac{1}{a^2}$, то функция станет непрерывной в точке $A(a,a)$. В точке $O(0,0)$ имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \infty,$$

то есть $O(0,0)$ - точка неустранимого разрыва данной функции.

3. Исследовать на непрерывность в точке $O(0,0)$ функцию

$$z = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

Решение. Применяя известную формулу для разности косинусов, запишем функцию $z(x,y)$ в виде $z=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin y}{y}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$ Так как

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1=z(0,0),$ то функция $z(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить пределы:

1.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$; 1.2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$; 1.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^7 y+xy^2}}$;

1.4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{ax+by}{x^2+xy+y^2}$; 1.5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

1.6. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{|x^3|+|y^3|}$; 1.7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$;

1.8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{|x|}$. 1.9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

2. Докажите, что следующие пределы не существуют:

2.1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$; 2.2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+y)}{y}$; 2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.Найти точки разрыва следующих функций:

3.1. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 3.2. $u=\ln(4-x^2-y^2)$;

3.3. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$; 3.4. $u=\sin\dfrac{x}{y}$; 3.5. $u=\dfrac{\sin x \sin y}{xy}$;

3.6. $u=\dfrac{1}{\cos^2 x-\cos^2 y}$; 3.7. $u=\mathrm{tg}(x^2+y^2+z^2)$.

Ответ: Ответ: 1.1. a; 1.2.2; 1.3. e^3; 1.4. 0; 1.5. 0; 1.6.0; 1.7.0; 1.8.1. 1.9. 0. 1.10. 2. 3.1.O(0,0);

3.2. все точки окружности $x^2+y^2=4$;

3.3.все точки конической поверхности $x^2+y^2=z^2$;

3.4. все точки прямой $y=0$; 3.5. все точки прямых $x=0, y=0$; 3.6. все точки прямых $x\pm y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

3.7. все точки сфер $x^2+y^2+z^2=\pi/2+\pi k,\ k=0,1,2,\ldots$.

5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Частной производной по x от функции $z=f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю (если он существует)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Заметим, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, поэтому частной производной по x от функции $z=f(x,y)$ является производная по x, вычисленная в предположении, что y - постоянная.

Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ является производная по y, вычисленная в предположении, что x - постоянная.

Физический смысл частных производных следующий: $\frac{\partial z}{\partial x}(M)$ - скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox, а $\frac{\partial z}{\partial y}(M)$ – скорость изменения функции в точке M в направлении оси Oy.

Примеры.

Найти частные производные функций:

1. $z = x^3 \sin y + y^4 - 2x$.

Решение. Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$ в предположении, что y имеет фиксированное значение: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y - 2$. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем, что x имеет фиксированное значение, тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3$.

2. $z = x^y$, $(x > 0)$.

Решение. При вычислении частной производной функции $z = x^y$ по аргументу x рассматриваем функцию z как функцию только одной переменной x, то есть считаем, что y имеет фиксированное значение. При фиксированном y функция $z = x^y$ является степенной функцией аргумента x. По формуле дифференцирования степенной функции получаем

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$. Аналогично, при вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем, что фиксировано значение x, и рассматриваем функцию $z = x^y$ как показательную функцию аргумента y. Получаем $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ для функции $u = x^2\sqrt{\ln(4x-2y-z)}$. Найти $u'_z(2;1;-1)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2)'_x\sqrt{\ln(4x-2y-z)} + x^2 \cdot \left(\ln \; 4x-2y-z \;^{\frac{1}{2}}\right)'_x =$$

$$= 2x\sqrt{\ln(4x-2y-z)} + x^2 \cdot \frac{1}{2}(\ln(4x-2y-z)^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{4x-2y-z} \cdot 4 =$$

$$= 2x\sqrt{\ln(4x-2y-z)} + \frac{2x^2}{(4x-2y-z)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \; x^2\sqrt{4x-2y-z} \;'_y = \frac{x^2}{2\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}\frac{1}{4x-2y-z} \cdot (-2) =$$

$$= \frac{-x^2}{(4x-2y-2)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2\sqrt{\ln(4x-2y-z)})'_z = \frac{x^2}{2\sqrt{\ln(4x-2y-z)}} \cdot \frac{1}{4x-2y-z} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{-x^2}{2(4x-2y-z)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}.$$

Из последнего равенства находим

$$u_z'(2;1;-1) = \frac{-2^2}{2\cdot(4\cdot 2-2\cdot 1-(-1))\sqrt{\ln(4\cdot 2-2+1)}} = \frac{-2}{7\sqrt{\ln 7}}.$$

Упражнения для самостоятельной работы:

1. Найти частные производные следующих функций:

1.1. $u = x^2+y^2+3x^2y^3$; 1.2. $u = xyz+\dfrac{x}{yz}$; 1.3. $u=\sin(xy+yz)$;

1.4. $u=\mathrm{tg}(x+y)\cdot e^{x/y}$; 1.5. $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 1.6. $u=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$;

1.7. $z = x\ln y+\dfrac{y}{x}$; 1.8. $u=(\dfrac{y}{x})^z$; 1.9. $u=z^{x/y}$; 1.10. $u=x^{y^z}$;

1.11. $u = x^y y^z z^x$.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

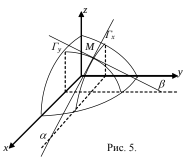


Рис. 5.

Обозначим через Γ_x плоскую кривую, полученную при пересечении поверхности $z=f(x,y)$ плоскостью $y=const$. Пусть касательная к кривой Γ_x в точке M образует угол α с положительным направлением оси Ox. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{tg}\alpha$. Аналогично, обозначим через Γ_y сечение поверхности $z=f(x,y)$ плоскостью $x=const$, β - угол, образованный касательной к кривой Γ_y в точке M с положительным направлением оси Oy. Тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{tg}\,\beta.$ Таким образом, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке M численно равна тангенсу угла наклона касательной в точке M к кривой, полученной при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = const$. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке M численно равна тангенсу угла наклона касательной в точке M к кривой, полученной при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = const$.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ.

Частные производные находят широкое применение в физике при исследовании различных скалярных и векторных полей (температурного, гравитационного, электромагнитного, электростатического и т.д.).

1.Скалярное поле.

Пусть D- область в трехмерном пространстве (или на плоскости). Говорят, что в области D задано скалярное поле, если каждой точке $M \in D$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле зарядов на какой-либо поверхности или в сплошной среде; поле плотности масс какого-либо тела.

Физические скалярные поля не зависят от выбора системы координат: величина u является функцией лишь точки M и, быть может, времени (нестационарные поля).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = u(x, y, z),\ (x, y, z) \in D.$

2. Векторное поле.

Говорят, что в области D задано векторное поле, если каждой точке $M \in D$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\overline{a}(M)$.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности $\overline{E}$; магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции $\overline{B}$; поле тяготения, создаваемое системой масс и характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения $\overline{F}$, действующей в этой точке на единичную массу; поле скоростей потока жидкости, описываемое в каждой точке вектором скорости $\overline{\upsilon}$.

Физические векторные поля не зависят от выбора системы координат: в каждой точке M вектор $\overline{a}(M)$ полностью определяется своим модулем $\left|\overline{a}(M)\right|$ и направлением. Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то векторное поле $\overline{a}(M)$ описывается вектор-функцией трех переменных $\overline{a}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями - ее координатами:

$$\overline{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\},\ (x, y, z) \in D.$$

3. Производная по направлении.

Пусть $u(M)$ - скалярное поле, заданное в области D; $\bar{l}$ - единичный фиксированный вектор; M -фиксированная точка; M' - любая точка из D, отличная от M и такая, что вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен $\bar{l}$. Пусть, далее, MM' - величина направленного отрезка MM' (она равна его длине $\left|\overline{MM'}\right|$, если векторы $\overline{MM'}$ и $\bar{l}$ сонаправлены, и равна -$\left|\overline{MM'}\right|$, если эти векторы противоположно направлены)

Определение. Число $\lim\limits_{M'\to M}\dfrac{u(M')-u(M)}{MM'}$ называется производной скалярного поля $u(M)$ (функции $u(M)$) в точке M по направлению $\bar{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$.

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$ является скоростью изменения функции $u(M)$ по направлению $\bar{l}$ в точке M.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$

$\bar{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$

В частности, если вектор $\bar{l}$ сонаправлен с одной из координатных осей, то производная по направлению $\bar{l}$ совпадает с соответствующей частной производной. Например,

если $\bar{l}=\{1,0,0\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot 1=\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

Одной из характеристик скалярного поля является градиент.

4. Градиент скалярного поля

Определение. Градиентом скалярного поля $u(x,y,z)$ называется вектор-функция

$$\overline{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}.$$

Из равенства $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ следует, что $\frac{\partial u}{\partial l} = (\overline{\text{grad}}\ u \cdot \bar{l})$, откуда, $\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \left|\overline{\text{grad}}\, u\right| \cdot \left|\bar{l}\right| \cos\varphi =$ $\left|\overline{\text{grad}}\, u\right| \cos\varphi$, так как $\left|\bar{l}\right|=1$. Здесь φ - угол между векторами $\bar{l}$ и $\overline{\text{grad}}\ u$ в точке M. Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ принимает наибольшее значение при $\varphi = 0$, то есть в направлении $\overline{\text{grad}}\ u$ в данной точке.

Таким образом, вектор $\overline{\text{grad}}\ u(M)$ в данной точке указывает направление наибольшего роста поля $u(M)$ (функции $u(M)$) в этой точке, а $|\ \overline{\text{grad}}\ u(M)\ |$ есть скорость роста функции $u(M)$ в этом направлении.

Вектор $\overline{\text{grad}}\ u(M)$ не зависит от выбора системы координат, а его модуль и направление в каждой точке определяются самой функцией $u(M)$.

Пример. Найти производную функции $u = x^2 - \text{arctg}(y+z)$, в точке $A(2,1,1)$ по направлению к точке $B(2,4,-3)$.

Решение. 1. Функция $u = x^2 - \text{arctg}(y+z)$ дифференцируема в точке $A(2,1,1)$, поэтому в этой точке существует ее производная по любому направлению $\bar{l}$, которая определяется формулой $\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\overline{\text{grad}}\ u \cdot \bar{l})$.

2. Находим координаты вектора $\bar{l}$. В данном случае $\bar{l} = \overline{AB} = \{0,3,-4\}$.

3.Находим единичный вектор (орт) $\bar{l}_0$:

$$\bar{l}_0 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \frac{\{0,3,-4\}}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}} = \{0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\}.$$

4. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \text{arctg}(y+z)$ в точке $A(2,1,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,1,1)} = 2x\big|_{(2,1,1)} = 4, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,1,1)} = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(2,1,1)} = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5}.$$

Тогда $\overline{\text{grad}}\,u\big|_{(2,1,1)} = \{4,-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\}$.

5. Подставляя полученные значения в формулу $\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\overline{\text{grad}}\ u \cdot \bar{l})$, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1,1)} = (\overline{\text{grad}}\ u\big|_{(2,1,1)}, \bar{l}_0) = 4\cdot 0 + (-\frac{1}{5})\cdot\frac{3}{5} + (-\frac{1}{5})\cdot(-\frac{4}{5}) = \frac{1}{25}.$$

5. Потенциальное поле.

<u>Определение</u>. Векторное поле $\bar{a}(M)$ называется <u>потенциальным</u> в области D, если его можно представить в

этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:
$\bar{a} = \overline{\text{grad}}\, u(M)$.

Пример. Рассмотрим поле тяготения точечной массы m, помещенной в начале координат. Оно описывается вектор-функцией $\bar{F}(M) = -\gamma \dfrac{m}{r^3}\bar{r}$ (γ-гравитационная постоянная, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). С такой силой действует это поле на единичную массу, помещенную в точку $M(x, y, z)$. Поле тяготения является потенциальным, поскольку его можно представить как градиент скалярной функции $u(M) = \dfrac{\gamma m}{r}$. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma m\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma m}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = -\gamma m \frac{x}{r^3}.$$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\gamma m \dfrac{y}{r^3}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\gamma m \dfrac{z}{r^3}$, откуда

$$\overline{\text{grad}}\, u(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = -\frac{\gamma m}{r^3}\bar{r} = \bar{F}(M).$$

Функцию $u(M)$ называют ньютоновским потенциалом поля тяготения точечной массы m.

Поверхности уровня потенциала $u(M)$ называются <u>эквипотенциальными поверхностями</u>. В рассмотренном примере эквипотенциальными поверхностями являются сферы с центром в начале координат.

Рассмотрим две характеристики векторного поля: дивергенцию и ротор.

6. Дивергенция.

Определение. Дивергенцией векторного поля $\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ в точке M называется скалярная функция, определяемая равенством:

$$\operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

в декартовой системе координат.

Слово «дивергенция» означает «расходимость» («расхождение»). Дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Определение. Векторное поле $\bar{a}(M)$ называется соленоидальным в области D, если в этой области $\operatorname{div}\bar{a}(M) = 0$.

Пример. Рассмотрим электрическое поле точечного заряда e, помещенного в начале координат:

$$\bar{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\bar{r} = \frac{ke}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k});$$

$$\operatorname{div}\bar{E}(M) = ke[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3})].$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = \frac{r^3 - x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$,

аналогично, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) == \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3}) == \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$, то $\operatorname{div}\bar{E}(M) = ke\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$ при $r \neq 0$. Физически этот результат означает отсутствие источников поля в любой точке, кроме начала координат. В начале координат $\operatorname{div}\bar{E} = \infty$ (бесконечная плотность заряда).

7. Ротор.

Ротором (или вихрем) векторного поля

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

называется вектор-функция, определяемая равенством

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i}\,(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \bar{j}\,(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \bar{k}\,(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).$$

Ротор характеризует завихренность поля $\bar{a}(M)$ в данной точке.

Равенство ротора нулю является необходимым и достаточным условием потенциальности поля.

Примеры.

1. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Векторное поле скоростей $\bar{\mathrm{v}}(M)$ точек этого тела можно представить в виде

$$\bar{\mathrm{v}}(M) = [\bar{\omega}, \bar{r}\,] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}.$$

Найдем ротор поля скоростей $\bar{\mathrm{v}}(M)$:

$$\operatorname{rot}\bar{\mathrm{v}}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot 0 + \bar{j}\cdot 0 + 2\omega\bar{k} = 2\omega\bar{k}.$$

Таким образом, $rot\,\overline{\text{v}}(M)$ является постоянным вектором, направленным вдоль оси вращения Oz, а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения тела.

2. Рассмотрим потенциальное поле $\overline{r}(M) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Его потенциал $u(M) = r^2/2 = (x^2 + y^2 + z^2)/2$. Вычислим ротор этого поля:

$$\text{rot}\,\overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{i}\cdot 0 + \overline{j}\cdot 0 + \overline{k}\cdot 0 = \overline{0}.$$

Ротор любого потенциального поля равен нулю. Поэтому говорят, что потенциальное поле является безвихревым.

Задачи для самостоятельной работы

1. Рассмотрим электрическое поле точечного заряда e, помещенного в начале координат. Оно описывается в точке $M(x, y, z)$ вектором напряженности

$\overline{E}(M) = \dfrac{ke}{r^3}\overline{r}$, где $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $r = |\,\overline{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Доказать, что его можно представить виде $\overline{E}(M) = -\overline{\text{grad}}\,\dfrac{ke}{r}$, то есть, что поле потенциально.

Функция $u(M) = \dfrac{ke}{r}$ называется потенциалом электрического поля точечного заряда e.

2. Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке М.

2.1. $u = xyz, \quad M(-2, 3, 4).$

2.2. $u = x + \ln(z^2 + y^2),\ M(2,1,1).$

2.3. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $M(1,5,-2)$.

2.4. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$.

2.5. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $M(1,1,0)$.

2.6. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $M(1,1,0)$.

2.7. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $M(1,3,2)$.

2.8. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $M(1,1,2)$.

2.9. $u = xy - x/z$, $M(-4,3,-1)$.

2.10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2})$, $M(1,-3,4)$.

3. Найти угол между градиентами скалярного поля $u(M) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M(1,2,2)$ и $N(-3,1,0)$.

4. Найти производную функции $u = u(x,y,z)$ в точке A по направлению к точке B.

4.1. $u = xyz$, $A(-2,3,4)$, $B(1,2,3)$.

4.2. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $A(2,1,1)$, $B(0,2,0)$.

4.3. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $A(1,5,-2)$, $B(1,7,-4)$.

4.4. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $A(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3)$, $B(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 4)$.

4.5. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(1,2,-1)$.

4.6. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(3,3,-1)$.

4.7. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $A(1,3,2)$, $B(0,5,0)$.

4.8. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $A(1,1,2)$, $B(6,-5,2\sqrt{5} + 2)$.

4.9. $u = xy - x/z$, $A(-4,3,-1)$, $B(1,4,-2)$.

4.10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2})$, $A(1,-3,4)$, $B(-1,-4,5)$.

5. Найти дивергенцию векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y^2\overline{j} + z^3\overline{k}$ в точке $M(-2,4,5)$.

6. Проверить соленоидальность поля $\overline{a} = xy\overline{i} + \frac{x}{z}\overline{j} - yz\overline{k}$.

7. Показать, что если $\overline{\omega}$ - постоянный вектор, то векторное поле $\overline{F}(M) = |\overline{r}|(\overline{\omega} \times \overline{r})$ - соленоидально.

8. Найти ротор векторного поля $\overline{a} = \frac{y}{x}\overline{i} + \frac{z}{y}\overline{j} + \frac{x}{z}\overline{k}$ в точке $A(-1;-1;-1)$.

9. Показать, что поле

$$\overline{a} = (2xy + z^2)\overline{i} + (2yz + x^2)\overline{j} + (2xz + y^2)\overline{k}$$

является потенциальным.

10. Найти ротор магнитного поля $\overline{H} = \frac{1}{2\pi\rho^2}(-y\overline{i} + x\overline{j})$.

Ответы: 2.{12,-8,-6}. 3. $\varphi = \arccos(-8/9)$. 5. 84. 8.{1,1,1}. 10. $\mathrm{rot}\overline{H} = 0$.

8. Оператор Гамильтона.

Введем векторный оператор «набла» или <u>оператор Гамильтона</u>: $\overline{\nabla} = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z} = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$.

С помощью этого символического (операторного) «вектора» удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения вектора $\overline{\nabla}$ на скалярную функцию $u(x,y,z)$ получается $\overline{\mathrm{grad}}\, u$:

$$\overline{\nabla}u = (\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z})u = \bar{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \overline{\operatorname{grad}}\, u.$$

Скалярное произведение вектора $\overline{\nabla}$ на вектор-функцию $\bar{a}(x, y, z) = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ дает $\operatorname{div}\bar{a}(M)$:

$$(\overline{\nabla}\bar{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{a}.$$

Векторное произведение вектора $\overline{\nabla}$ на вектор-функцию $\bar{a}(x, y, z) = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ дает $[\overline{\nabla} \times \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\bar{a}.$

8. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

По определению полного приращения функции $z = f(x, y)$ имеем

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Предположим, что $z = f(x, y)$ в рассматриваемой точке $M(x, y)$ имеет непрерывные частные производные. Выразим Δz через частные производные. Для этого представим приращение функции в виде

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Применяя к первой и второй разностям теорему Лагранжа, получим

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x},$$ где $\overline{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$;

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y},$$ где $\overline{y}$ заключено между y и $y+\Delta y$.

Подставляя представление разностей через производные в полное приращение функции, получим

$$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}.$$

Так как по предположению частные производные непрерывны, а $\overline{x}$ и $\overline{y}$ заключены между x и $x+\Delta x$ и y и $y+\Delta y$ соответственно, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Последние равенства можно записать в виде

$$\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1; \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2,$$ где

величины γ_1, γ_2 стремятся к нулю при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то есть когда $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$. Тогда полное приращение

$$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y.$$

Покажем, что сумма $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Действительно, $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta\rho} = \lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \gamma_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta\rho} = 0$ так как $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \gamma_1 = 0$, а $\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1$

. Сумма $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$ линейна относительно $\Delta x,\Delta y$ и при $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\neq 0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\neq 0$ представляет собой главную часть приращения функции.

Определение. Функция $z=f(x,y)$, полное приращение которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы выражения, линейного относительно $\Delta x,\Delta y$ и величины бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\rho$, называется дифференцируемой в данной точке. Главная часть полного приращения функции линейная относительно $\Delta x,\Delta y$ называется полным дифференциалом функции и обозначается dz или df.

Если функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Таким образом, полное приращение функции представимо в виде $\Delta z=dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$.

Приращения $\Delta x,\Delta y$ будем называть дифференциалами независимых переменных x,y и обозначать dx,dy, тогда

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Аналогично, для функции трех переменных $u(M)=f(x,y,z)$ полный дифференциал равен

$$dz = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u(M) = x^2 y^3$ в точках $M(x,y), M_0(2,1)$.

Решение. Вычислим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2$. Запишем вид дифференциала $du|_M = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$ Тогда $du|_{M_0} = 4dx + 12dy.$

Задачи для самостоятельной работы

Найти полные дифференциалы функций:

1. $u(M) = \ln\cos\frac{x}{y}$. 2. $u = 2x^3y - 4xy^5.$

3. $u = x^2y\sin x - 3y.$ 4. $u = \mathrm{arctg}x + \sqrt{y}.$

5. $u = \arcsin(xy) - 3xy^2.$ 6. $u = 5xy^4 + 2x^2y^7.$

7. $u = \cos(x^2 - y^2) + x^3.$ 8. $u = \ln(3x^2 - 2y^2).$

9. $u = 7x^3y - \sqrt{xy}.$

10.Найти полный дифференциал функций:

$u(M) = \frac{yz}{x}$ в точках $M(x,y,z), M_0(1,2,3)$.

Ответ: 1. $du = \frac{1}{y^2}\mathrm{tg}\frac{x}{y}(xdy - ydx).$

10. $du|_M = -\frac{yz}{x^2}dx + \frac{z}{x}dy + \frac{y}{x}dz;\ du|_{M_0} = -6dx + 3dy + 2dz$.

9. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Из формулы $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ следует, что $\Delta z \approx dz$, тогда

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y,$$

следовательно,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{6{,}05^2 + 7{,}9^2}$.

Решение. Пусть $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 6, y = 8, \quad \Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}1.$ Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad du = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Вычислим

$$u(6,8) = 10,\ du = -0{,}05,\ \sqrt{6{,}05^2 + 7{,}9^2} \approx 10 - 0{,}05 = 9{,}95.$$

Задача для самостоятельной работы

Вычислить приближенно

1. $(2{,}01)^{3{,}03}$. 2. $(1{,}02)^3(0{,}97)^3$. 3. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Ответ: 1. 8,29. 2. 0,97. 3. 4,998.

10. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Подобно тому, как дифференциал функции одной переменной является приращением ординаты касательной, полный дифференциал функции двух переменных есть приращение аппликаты касательной плоскости.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x, y) частные производные первого порядка. На поверхности $z = f(x, y)$ возьмем три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta_x z)$, $M_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta_y z)$ и составим уравнение плоскости, проходящей через эти точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \Delta x & 0 & \Delta_x z \\ 0 & \Delta y & \Delta_y z \end{vmatrix} = 0,$$

или $(z - z_0)\Delta x \Delta y = (x - x_0)\Delta y \Delta_x z + (y - y_0)\Delta x \Delta_y z.$ Считая $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$, разделим левую и правую части уравнения на $\Delta x \Delta y$, получим $(z - z_0) = (x - x_0)\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} + (y - y_0)\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}.$ Переходя к пределу при $M_1 \to M_0, M_2 \to M_0$, то есть $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, найдем

$$(z - z_0) = (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(M_0).$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то полученное уравнение является уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0. Можно доказать, что если на данной поверхности провести через точку M_0 всевозможные кривые и в этой точке построить к ним касательные, то все эти касательные располагаются в найденной плоскости.

Определение. Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 (точке касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Определение. Нормалью к поверхности называется прямая перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Так как уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$(z - z_0) = (x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y}(M_0),$$

то из условия перпендикулярности прямой и плоскости, легко получить уравнения нормали:

$$\frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Если уравнение поверхности задано неявно $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали: $\frac{(x - x_0)}{F'_x(M_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(M_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(M_0)}.$

Заметим, что полное приращение функции $z(x, y)$ на касательной плоскости имеет вид $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta y$, то есть совпадает с полным дифференциалом dz функции $z = f(x, y)$.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M(1, 2, 3)$.

Решение. Обозначим через $F(x,y,z)$ левую часть уравнения поверхности, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$F'_x = 2x + y - 2z,\ F'_y = 4y + x + z,\quad F'_z = -6z + y - 2x;$$

$$F'_x(M) = -2,\ F'_y(M) = 12,\quad F'_z(M) = -18.$$

Подставляя найденные значения частных производных в уравнения касательной плоскости и нормали, получаем $-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0$ или $x-6y+9z-16=0$ - уравнение касательной плоскости;

$\dfrac{(x-1)}{-2} = \dfrac{(y-2)}{12} = \dfrac{(z-3)}{-18}$ или $\dfrac{(x-1)}{1} = \dfrac{(y-2)}{-6} = \dfrac{(z-3)}{9}$ - уравнение нормали.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M_0:

1.1. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M_0(2,2,1)$. 1.2. $z = x^2 + y^2$, $M_0(1,2,5)$.

1.3. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4,3,4)$.

1.4. $z = \sin x \cos y$, $M_0(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.

1.5. $z = e^{x\cos y}$, $M_0(1,\pi,1/e)$. 1.6. $z = y\,\mathrm{tg}\,x$, $M_0(\pi/4,1,1)$.

1.7. $z = \mathrm{arctg}(x/y)$, $M_0(1,1,\pi/4)$.

1.8. $x(y+z)(z-xy) = 8$, $M_0(2,1,3)$.

1.9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $M_0(2,2,2\sqrt{2})$.

1.10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2,2,3)$.

2. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные

плоскости, параллельные плоскости $x+4y+6z=0$.

3. На поверхности $x^2+y^2-z^2=0$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Ответ: 1.1. $x+y-4z=0; \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$.

1.2. $2x+4y-z-5=0; \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$.

1.3. $3x+4y-6z=0; \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$.

1.4. $3-y-2z+1=0; \frac{x-\pi/4}{1}=\frac{y-\pi/4}{-1}=\frac{z-1/2}{-2}$.

1.5. $x+ez-2=0; \frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-1/e}{e}$.

1.6. $2x+y-z-\pi/2=0; \frac{x-\pi/4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

1.7. $x-y-2z+\pi/2=0; \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\pi/4}{-2}$.

1.8. $2x+7y-5z+4=0; \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$.

1.9. $x+y+\sqrt{2}z-8=0; \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

1.10. $2x+2y-3z+1=0; \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$.

11. ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $z=f(u,\mathrm{v}), u=u(x,y), \mathrm{v}=\mathrm{v}(x,y)$, тогда $z=f(u(x,y),\mathrm{v}(x,y))$ является сложной функцией аргументов x, y. Предположим, что функции $f(u,\mathrm{v}), u(x,y)$,

$\mathrm{v}(x,y)$ - дифференцируемые функции своих аргументов. Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Дадим x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным, тогда функции $z = f(u,\mathrm{v}), u = u(x,y), \mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y)$ получат частные приращения $\Delta_x u, \Delta_x \mathrm{v}$, и, следовательно, полное приращение функции $z = f(u,\mathrm{v})$ может быть записано в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}\Delta_x \mathrm{v} + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x \mathrm{v},$$

где $\gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$ при $\Delta_x u \to 0, \ \Delta_x \mathrm{v} \to 0$.

Разделив обе части последнего равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x \mathrm{v}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x \mathrm{v}}{\Delta x}.$$

По определению частной производной и условию дифференцируемости функций $u = u(x,y)$ и $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y)$ имеем

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x \mathrm{v}}{\Delta x} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$. В силу непрерывности функций $u = u(x,y)$ и $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y)$ по каждому аргументу $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x \mathrm{v} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и следовательно, $\lim\limits_{\Delta_x u\to 0}\gamma_1 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = 0$ и $\lim\limits_{\Delta_x u\to 0}\gamma_2 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0$. Тогда формула нахождения частной производной сложной функции по x примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}.$$

Аналогично может быть получена формула нахождения частной производной сложной функции по y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \text{v}}\frac{\partial \text{v}}{\partial y}.$$

Пример. Вычислить частные производные сложной функции $z(u,\text{v}) = u^2 + u\text{v} + \text{v}^2$, $u(x,y) = (x+y)^2, \text{v}(x,y) = (x-y)^2.$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \text{v}}\frac{\partial \text{v}}{\partial x} = (2u+\text{v})\cdot 2(x+y) + (u+2\text{v})\cdot 2(x-y) =$$

$$=12x^3 + 20xy^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \text{v}}\frac{\partial \text{v}}{\partial y} = (2u+\text{v})\cdot 2(x+y) - (u+2\text{v})\cdot 2(x-y) =$$

$$=12y^3 + 20x^2 y.$$

Пример. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial v}$, если $u = x^2\ln(3x - y^3)$, $x = te^{5t+v}$, $y = t^2 - v^4$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2 y^2}{3x - y^3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = e^{5t+v} + 5te^{5t+v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = te^{5t+v}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -4v^3.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2x\ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3})e^{5t+v}\ \ 1+5t\ \ - \frac{3x^2 y^2}{3x - y^3}\cdot 2t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = (2x\ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3}) \cdot te^{5t+v} + \frac{12x^2y^2}{3x - y^3}v^3.$$

Если функция $z = f(x, y, u, \text{v})$, где функции y, u, v зависят от одного аргумента x: $y = y(x),\ u = u(x),\ \text{v} = \text{v}(x),$ то функция z фактически зависит от одной переменной x и можно находить полную производную $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \text{v}}\frac{\partial \text{v}}{\partial x}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, а функции y, u, v зависят от одного аргумента x, и $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}, \frac{\partial \text{v}}{\partial x} = \frac{d\text{v}}{dx}$, получаем формулу для нахождения полной производной:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \text{v}}\frac{d\text{v}}{dx}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(u, \text{v})$, где $u = u(x, y),\ \text{v} = \text{v}(x, y).$

1.1. $z = u^2 + \text{v}^2,\ u = x + y,\ \text{v} = x - y.$

1.2. $z = \ln(u^2 + \text{v}^2),\ u = xy,\ \text{v} = x / y.$

1.3. $z = u^{\text{v}},\ u = \sin x,\ \text{v} = \cos y.$

1.4. $z = u^2 + 2\text{v}^3,\ u = x^2 - y^2,\ \text{v} = e^{xy}.$

1.5. $z = \text{arctg}(u / \text{v}),\ u = x\sin y,\ \text{v} = x\cos y.$

1.6. $z = \ln(u - \text{v}^2),\ u = x^2 + y^2,\ \text{v} = y.$

1.7. $z=u^3+\mathrm{v}^2,\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{v}=arctg(y/x).$

1.8. $z=\sqrt{u\mathrm{v}},\ u=\ln(x^2+y^2),\ \mathrm{v}=xy^2.$

1.9. $z=e^{uv},\ u=\ln x,\ \mathrm{v}=\ln y.$

1.10. $z=u^2\ln\mathrm{v},\ u=\dfrac{y}{x},\mathrm{v}=x^2+y^2.$

2. Найти $\dfrac{du}{dt}$ сложной функции $u=u(x,y)$, где $x=x(t),\ y=y(t),$ при $t=t_0$.

2.1. $u=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0.$

2.2. $u=\ln(e^x+e^{-y}),\ x=t^2,\ y=t^3,\ t_0=-1.$

2.3. $u=y^x,\ x=\ln(t-1),\ y=e^{t/2},\ t_0=2.$

2.4. $u=e^{y-2x+2},\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi/2.$

2.5. $u=x^2e^y,\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t_0=\pi.$

2.6. $u=\mathrm{arctg}(y/x)$, где $x=e^{2t}+1, y=e^{2t}-1,\ t_0=1.$

2.7. $u=x^y,\ x=e^t,\ y=\ln t,\ t_0=1.$

2.8. $u=e^{y-2x},\ x=\sin t,\ y=t^3,\ t_0=0.$

2.9. $u=x^2e^{-y},\ x=\sin t,\ y=\sin^2 t,\ t_0=\pi/2.$

2.10. $u=\arcsin(x/y),\ x=\sin t,\ y=\cos t,\ t_0=\pi.$

3. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln(e^x+e^y)$, где $y=\dfrac{1}{3}x^3+x.$

12. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $z=f(u,\mathrm{v}),u=u(x,y),\mathrm{v}=\mathrm{v}(x,y)$. Найдем полный дифференциал сложной функции: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, но

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y},$$ поэтому

$$dz=(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y})dy=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}dx+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}dy)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}d\,\mathrm{v}$$

или $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}d\,\mathrm{v}$.

Мы показали, что выражения полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеют одинаковый вид, как в случае если u,v - независимые переменные так и в случае, если $u(x,y),\mathrm{v}(x,y)$ есть функции независимых переменных. Это свойство первого дифференциала сохранять форму, называется <u>инвариантностью</u> формы первого дифференциала.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти dz, если $z=f(u,\mathrm{v})$:

1.1 $u=\ln(x^2-y^2), \mathrm{v}=y\cos x.$

1.2. $u=\dfrac{2y}{x+y}, \mathrm{v}=x^2-3y.$

2. Найти dz, если $z=u^2\mathrm{v}-u\mathrm{v}^2,\ u=x\sin y,\ \mathrm{v}=y\cos x.$

3. Выразить dz через x,y,z,dx и dy, если:

3.1. $x=(u^2+\mathrm{v}^2)/2,\ y=(u^2-\mathrm{v}^2)/2,\ z=u\mathrm{v}.$

3.2. $x=u\cos\mathrm{v},\ y=u\sin\mathrm{v},\ z=u^2.$

3.3. $x=u+\mathrm{v},\ y=u-\mathrm{v},\ z=u^2\mathrm{v}^2.$

13. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Теорема. Пусть непрерывная функция y от x задается неявно уравнением $F(x,y)=0$, где $F(x,y),\ F'_x(x,y),\ F'_y(x,y)$ - непрерывные функции в некоторой области, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$, кроме того, $F'_y(x,y)\neq 0.$ Тогда

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Доказательство. Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy и $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. Следовательно,

$$0=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y\,.$$

Выразим из последнего равенства отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1\right)/\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$y'_x=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}/\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Пример. Найти производную функции y, заданной неявно уравнением $y-xe^y+x=0$.

Решение. Обозначим $F(x,y)=y-xe^y+x$. Вычислим частные производные $F'_x(x,y)=-e^y+1,\ F'_y(x,y)=1-xe^y$, тогда $y'_x=(e^y-1)/(1-xe^y).$

Пример**.** Найти y'_x, если $xe^{2x+y} - y^2 \ln x = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через F(x; y).

Тогда $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{e^{2x+y} + 2xe^{2x+y} - \dfrac{y^2}{x}}{xe^{2x+y} - 2y\ln x}$.

Рассмотрим уравнение вида $F(x, y, z) = 0$. Если каждой паре чисел x, y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению. Тогда это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x, y, частные производные неявной функции имеют вид:

$$z'_x = -(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z});\ z'_y = -(\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}) \text{ при } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Пример. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^2 \ln(y+5z) - y\sin(x-6y+2z) - 3yz = 0.$$

Решение. Обозначим через F(x; y; z) левую часть уравнения. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x\ln(y+5z) - y\cos(x-6y+2z)}{\dfrac{5x^2}{y+5z} - 2y\cos(x-6y+2z) - 3y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\dfrac{x^2}{y+5z} - \sin(x-6y+2z) + 6y\cos(x-6y+2z) - 3z}{\dfrac{5x^2}{y+5z} - 2y\cos(x-6y+2z) - 3y}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти производную функции y, заданной неявно уравнениями:

1.1. $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$ в точке $x=1$;

1.2. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $(a\neq 0)$.

1.3. $x^y=y^x$. 1.4. $y=1+y^x$.

1.5. $x^2e^{2y}-y^2e^{2x}=0$. 1.6. $x-y+\operatorname{arctg}y=0$.

1.7. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

1.8. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$.

1.9. $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$.

1.10. $x+y=e^{x-y}$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции z, заданной неявно уравнениями:

2.1. $x^2+y^2-z^2-xy=0$ в точке $x=-1, y=0, z=1$;

2.2. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

2.3. $z^3-3xyz=R^2$.

2.4. $x+y+z=e^z$.

Ответы: 1.1. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=1}=3$ или -1; 1.2. $\dfrac{x+ay}{ax-y}$. 2.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1;\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$;

2.2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.

14. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Пусть $z = f(x, y)$. Тогда частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ также являются функциями от переменных x, y. В некоторых случаях для этих функций снова существуют частные производные, называемые частными производными второго порядка, очевидно, что эти производные четырех видов:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x, y).$$

Две последние производные называются смешанными производными второго порядка.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Частная производная n – го порядка $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ получается, если функцию z $(n-p)$ раз продифференцировать по переменной y, а затем p раз по x.

Примеры.

1. Найти все частные производные второго порядка от функции $z = \cos\ x^2 + 2y$.

<u>Решение.</u> Запишем сначала частные производные по x и по y.

$$z'_x = -2x\sin\ x^2+2y\ ,\ z'_y = -2\sin\ x^2+2y\ .$$

Найдем теперь частные производные второго порядка.

$$z''_{xx} = \ z'_x\ {}'_x = -2\sin\ x^2+2y\ - 4x^2\cos\ x^2+2y\ ,$$

$$z''_{yy} = \ z'_y\ {}'_y = -4\cos\ x^2+2y\ ,$$

$$z''_{xy} = \ z'_x\ {}'_y = -4x\cos\ x^2+2y\ ,$$

2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^y$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. Затем, вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем частные производные второго порядка данной функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1+y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1+y\ln x); \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2.$$

Заметим, что в рассмотренном примере $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3 . Найти все частные производные 2-го порядка функции $u = 2x^2y - 3xyz^4 + z^2$. Найти $z''_{xy}(1;-1;2)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 3yz^4,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3xz^4,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -12xyz^3 + 2z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 3yz^4) = 4y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2x^2 - 3xz^4)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (-12xyz^3 + 2z)'_z = -36xyz^2 + 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 3yz^4) = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x^2 - 3xz^4)'_x = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (4xy - 3yz^4)'_z = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = (-12xyz^3 + 2z)'_x = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x^2 - 3xz^4)'_z = -12xz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = (-12xyz^3 + 2z)'_y = -12xz^3.$$

$u''_{xy}(1; -1; 2) = 4 - 3\cdot 2^4 = 4 - 48 = -44.$

4. Найти $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u = e^{xy}$.

Решение. Найдем сначала $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy}$. Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по x от $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}$, получаем: $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}) = (x^8)'' e^{xy} + 2(x^8)'(e^{xy})'_x + x^8 (e^{xy})''_{xx} =$

$= e^{xy}(56x^6 + 16x^7 y + x^8 y^2).$

5. Показать, что функция $u = A\sin \lambda x \cos a\lambda t$ удовлетворяет уравнению колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial t} = -Aa\lambda \sin \lambda x \sin a\lambda t$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-Aa\lambda \sin \lambda x \cdot \sin a\lambda t)'_t = -Aa^2\lambda^2 \sin \lambda x \cdot \cos a\lambda t$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = A\lambda \cos \lambda x \cos a\lambda t$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda^2 \sin \lambda x \cdot \sin a\lambda t$.

Сравнивая полученные выражения, видим, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Возникает естественный вопрос: зависят ли частные производные высших порядков от порядка дифференцирования (в примере 2 мы видели, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$). Оказывается, что, вообще говоря, смешанные производные зависят от порядка дифференцирования. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если все входящие в вычисления частные производные, рассматриваемые как функции своих независимых переменных, непрерывны, то результат частного дифференцирования не зависит от последовательности дифференцирования.

Например, если $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ непрерывны, то $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Задачи для самостоятельной работы

1.Найти частные производные заданных функций до второго порядка включительно:

1.1. $z = e^{xy}$. 1.2. $z = x\ln(x/y)$. 1.3. $z = \sin(xy)$.

1.4. $z = e^x \cos y$. 1.5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. 1.6. $z = \ln(x^2 + y)$.

1.7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$. 1.8. $z = \ln\sqrt[3]{xy}$. 1.9. $z = x\cos y + y\sin x$.

1.10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

2. Найти частные производные указанного порядка:

2.1. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}; \ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, если $u = \sin(xy)$.

2.2. $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}$, если $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$.

2.3. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$. 2.4. $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6}$, если $u = \sin x \cos 2y$.

2.5. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = x^m y^n$. 2.6. $\frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}$, если $u = (x^2 + y)^{10}\,\mathrm{tg}\, x$. 2.7. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = e^{2x}\sin y + e^x \cos\frac{y}{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления/ Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 2001. Т.1.- 250 с.

2.Мантуров О.В. Курс высшей математики/ Мантуров О.В., Матвеев Н.М.- М.: Высш. Шк.,1986.480 с.

3.Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П.Демидовича.М.:Наука.1993.480 с.

4.Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных/ Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.- М.: Высш. Шк., 1988. 288с.

5. Зимина О.В. Высшая математика/ О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова.- М.: Физматлит, 2005.-368 с.

6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч.2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ А.П. Рябушко [и др.]. Минск:Выш. шк., 2007.-396 с.

7. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс/Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Федин С.Н., Шевченко Ю.А.-М.: Рольф, 2001.-576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для организации самостоятельной работы
по изучению раздела «Функции нескольких переменных»
курса «Математический анализ»
для студентов по направлению подготовки бакалавров
230100 «Информатика и вычислительная техника»
(профили «Системы автоматизированного проектирования»,
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»)
очной формы обучения
Часть 1

Составители:
Глушко Елена Георгиевна
Дубровская Алевтина Петровна

В авторской редакции
Компьютерный набор Е.Г. Глушко
Подписано к изданию 25. 06. 2012.
Уч. - изд. л. 3,2

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14